Universidad de la República

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemática

Las Transformadas Wavelet Continuas

Diego Goldsztajn

Orientador: Dr. Fernando Abadie

Montevideo

Diciembre 2015

Resumen

Esta monografía trata sobre las transformadas wavelet continuas generalizadas, que son generalizaciones de las transformadas wavelet continuas definidas sobre el grupo afín. El objetivo de este trabajo es introducir las principales propiedades de las transformadas wavelet continuas, estudiar la relación de las mismas con la serie discreta de representaciones y caracterizar los subespacios de la representación regular izquierda, sobre los que pueden definirse estas transformadas, cuando el grupo considerado es $(\mathbb{R}, +)$. Además, se estudiarán, a modo de ejemplo, las transformadas wavelet continuas originales, empleando las herramientas desarrolladas para estudiar las transformadas wavelet continuas generalizadas.

Abstract

This is an article about the generalized continuous wavelet transforms, which are generalizations of the continuous wavelet transforms over de affine group. The goal of this work is to introduce the main properties of the generalized continuous wavelet transforms, study the connection between them and the discrete series representations and characterize the subspaces of the left regular representation, that allow to define this transforms, when the considered group is $(\mathbb{R}, +)$. In addition, the original continuous wavelet transforms will be studied as an example.

A mis padres por apoyarme, contenerme y brindarme todo.

A mi novia por ser una parte importante de mi vida.

A mis amigos, mi hermana y al resto de mi familia por estar siempre pendientes.

A Ariel por educar mi gusto por la matemática.

A Nacho por compartir tantas veces los apuntes de las clases a las que no podía ir.

A Fernando por ayudarme con este trabajo.

Gracias.

Índice

1. Introducción

Dentro del campo de la ingeniería eléctrica, una señal analógica es una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyos valores usualmente representan cargas eléctricas, diferencias de potencial o intensidades de corriente eléctrica. Por ejemplo, para describir una señal de sonido en el tiempo, se podría utilizar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que en cada instante $t \in \mathbb{R}$ indique la intensidad de corriente eléctrica que recibe un parlante.

Para estudiar este tipo de señales, una de las herramientas que se usan comúnmente es la transformada de Fourier. Generalmente se suele hablar de un dominio temporal y un dominio espectral. Retomando el ejemplo de la señal acústica, el dominio temporal corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que se considera evaluada en valores $t \in \mathbb{R}$ correspondientes a instantes de tiempo. Por otra parte, el dominio espectral es el correspondiente a la transformada de Fourier de la función anterior $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que se considera evaluada en valores de frecuencia $\varphi \in \mathbb{R}$ o frecuencia angular $\omega = 2\pi\varphi$. La noción de dominio temporal y dominio espectral surge de ver a la transformada de Fourier como una extensión de las series de Fourier, en las que se habla de armónicos o frecuencias fundamentales.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Si bien la transformada de Fourier es ampliamente empleada en el análisis de señales, no resulta tan adecuada cuando se quiere realizar un análisis local de la señal. Una posible herramienta para llevar a cabo esta tarea es la transformada de Fourier de tiempo reducido. La idea es multiplicar la señal a analizar por una "ventana", por ejemplo la función característica del intervalo de la señal que se quiere analizar, y luego aplicar la transformada de Fourier. En realidad, no se obtienen muy buenos resultados al usar funciones características, motivo por el cual se emplean funciones suaves. Un caso particular de la transformada de Fourier de tiempo reducido es la transformada de Gabor que emplea como ventana una función gaussiana, por ejemplo para realizar un análisis alrededor de un instante $t_0 \in \mathbb{R}$ podría emplearse la siguiente transformada de Gabor.

$$G_{f,t_0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi(t-t_0)^2} e^{-i\omega t} dt$$

Las primeras ideas sobre la teoría de las transformadas wavelet están relacionadas con la búsqueda de técnicas más apropiadas para realizar análisis de señales. En 1982, el ingeniero francés Jean Morlet trabajaba para la empresa petrolera Elf Aquitaine y en aquella época se dedicaba a analizar las capas subterráneas. La técnica que empleaba Morlet consistía en emitir señales acústicas y analizar las señales reflejadas, las cuales presentaban distintas características para diferentes capas subterráneas. Para realizar su trabajo, Morlet originalmente había decidido emplear la transformada de Gabor, pero buscando obtener mejores resultados comenzó a introducir cambios que darían origen a los primeros esbozos de las transformadas wavelet continuas.

Consideremos un espacio de medida (X, μ). Podríamos decir que una wavelet es un elemento $\eta \in L^2(X, \mu)$ junto con una familia de transformaciones indexada en otro espacio de medida (T, ν).

$$t \longmapsto \pi_t \eta$$

La transformada wavelet es un mapa $V_\eta : L^2(X, \mu) \longrightarrow L^2(T, \nu)$ que a una función $\varphi \in L^2(X, \mu)$ le asigna la siguiente función de $L^2(T, \nu)$:

$$V_\eta \varphi(t) = \langle \varphi, \pi_t \eta \rangle$$

Para que la transformada anterior esté bien definida es necesario elegir correctamente la función wavelet y la familia de transformaciones. También dependerá de esta elección la existencia de una fórmula de reconstrucción, así como el hecho de que la transformada definida sea una isometría. Las dos propiedades anteriores son altamente deseables, corresponden al análogo de los teoremas de inversión y de Plancherel para la transformada de Fourier.

A los trabajos de Jean Morlet, se incorporarían posteriormente Alex Grossmann y Thierry Paul. En su artículo [6] de 1985, puede observarse como los autores consideran la siguiente familia de transformaciones de una función $\eta \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\pi_{(b,a)} \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \eta\left(\frac{x-b}{a}\right) \ \forall \ (b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$$

Las transformadas wavelet correspondientes a distintas elecciones de la función η se conocen como transformadas wavelet continuas. Bajo ciertas condiciones de admisibilidad sobre la función η las transformadas wavelet continuas admiten una fórmula de reconstrucción y determinan una isometría. Dadas una función $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ admisible y una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, la transformada wavelet continua está dada por:

$$V_\eta \varphi(b, a) = \langle \varphi, \pi_{(b,a)} \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\eta\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

Resulta interesante observar que las transformaciones $\pi_{(b,a)}$ corresponden a una representación unitaria $\pi : G_a \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ del grupo afín G_a de las transformaciones afines de la recta real, que es isomorfo al siguiente subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$G_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times, \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

En su artículo [6] Morlet, Grossmann y Paul estudian las transformadas wavelet continuas desde este punto de vista.

La construcción anterior puede generalizarse para distintas representaciones unitarias de otros grupos localmente compactos. El resultado de esta generalización son las transformadas wavelet continuas generalizadas que se estudiarán en este trabajo.

Para poder estudiar dichas transformadas será necesario contar con algunas definiciones y resultados preliminares, acerca de grupos localmente compactos y representaciones unitarias, que serán presentados al comienzo de este trabajo. Lo siguiente será introducir la noción de sistema de estados coherentes, que luego será empleada para definir las transformadas wavelet continuas y para probar algunos resultados básicos acerca de las mismas. En general estaremos interesados en hallar representaciones unitarias, de un grupo localmente compacto dado, que admitan vectores admisibles. En primera instancia nos concentraremos en resolver este problema cuando las representaciones consideradas son irreducibles. Además, veremos que en este último caso, es posible definir un operador, el operador de Duflo-Moore, que permite caracterizar los vectores admisibles de la representación. Una vez alcanzado este punto, podremos emplear la teoría desarrollada para estudiar las transformadas wavelet continuas del grupo afín y hallar los operadores de Duflo-Moore asociados. Finalmente, nos concentraremos en el problema de hallar representaciones unitarias, no necesariamente irreducibles, que posean vectores admisibles. No daremos una caracterización general, para cualquier grupo localmente compacto, de estas representaciones, pero desarrollaremos herramientas que nos serán útiles para hallar dichas representaciones en un caso concreto.

Para poder seguir este trabajo es recomendable que el lector posea conocimientos de análisis funcional y teoría de la medida. También se emplearán resultados vinculados a la teoría de la transformada de Fourier y la teoría espectral. Para conveniencia del lector y de la exposición, se ha incluido los enunciados de estos resultados en un apéndice.

2. Preliminares

2.1. Grupos localmente compactos

Comenzamos con la definición de grupo topológico.

Definición 2.1. *Diremos que G es un* ***grupo topológico*** *si es un grupo dotado de una topología tal que la multiplicación $(x, y) \longmapsto xy$ y la inversión $x \longmapsto x^{-1}$ son funciones continuas.*

Para que un grupo G sea un grupo topológico es equivalente pedir que el mapa $(x, y) \longmapsto x^{-1}y$ sea continuo. Además, es fácil ver que si G es un grupo topológico entonces las traslaciones $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto xa$ con $a \in G$ y la inversión $x \longmapsto x^{-1}$ son homeomorfismos.

Un ejemplo de grupo topológico son las matrices invertibles $GL_n(\mathbb{R})$ con la topología heredada como subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$. El producto es continuo porque el resultado de multiplicar dos matrices es una matriz con entradas polinomiales en las entradas de las matrices multiplicadas y la inversión es continua porque la inversa de una matriz tiene entradas polinomiales en las entradas de la matriz original.

La siguiente proposición será útil más adelante.

Proposición 2.2. *Sea G un grupo topológico:*

1. *Si $V \subset G$ es un entorno de la unidad, entonces existe un entorno abierto y simétrico de la unidad $U \subset G$ tal que $U^2 \subset V$. Decimos que U es simétrico si $U = U^{-1}$.*
2. *Si $A, B \subset G$ son compactos, entonces AB es compacto.*

Demostración. Para probar la primera afirmación observamos que al ser la multiplicación continua, como $e^2 = e$, existen entornos abiertos de la unidad $W_1, W_2 \subset G$ tales que $W_1 W_2 \subset V$. Entonces alcanza tomar $U = W_1 \cap W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^{-1}$

Para probar la segunda afirmación basta ver que AB es la imagen por el mapa de multiplicación del compacto $A \times B \subset G \times G$, como el mapa de multiplicación es continuo sigue que AB es compacto. $\square$

Nos interesarán particularmente los siguientes grupos topológicos.

Definición 2.3. *Diremos que un grupo G es un* ***grupo localmente compacto*** *si es un grupo topológico dotado de una topología localmente compacta, es decir que todo elemento de G admite un entorno compacto.*

Pediremos además en todo momento que los grupos localmente compactos sean de Hausdorff y tengan una base numerable.

Las matrices invertibles $GL_n(\mathbb{R})$ son un subespacio abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$, luego $GL_n(\mathbb{R})$ con la topología del subespacio es un ejemplo de un grupo localmente compacto de Hausdorff y con una base numerable. Esto es porque $\mathbb{R}^{n^2}$ es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y con una base numerable.

Un grupo que nos interesará más adelante será el grupo afín, que es el siguiente subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$G_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Por comodidad usaremos la siguiente notación para los elementos de G_a:

$$(b, a) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall\, a \in \mathbb{R}^\times,\ \forall\, b \in \mathbb{R}$$

Cabe mencionar que el grupo definido debe su nombre a que es isomorfo al grupo de las transformaciones afines de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir las transformaciones de la forma $T_{(b,a)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T_{(b,a)}(x) = b + ax$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $b \in \mathbb{R}$.

El grupo afín con la topología usual, heredada como subespacio de $\mathbb{R}^4$, es un grupo localmente compacto de Hausdorff con una base numerable. Sabemos que $GL_2(\mathbb{R})$ es un grupo localmente compacto de Hausdorff y con una base numerable cuando consideramos la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^4$. Como $GL_2(\mathbb{R})$ es de Hausdorff y tiene una base numerable entonces es claro que G_a tiene las misma propiedades. Por otra parte, para ver que G_a es localmente compacto, hay que observar que G_a es cerrado en $GL_2(\mathbb{R})$

$$G_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \bigcap GL_2(\mathbb{R})$$

Como el primer conjunto es cerrado en $\mathbb{R}^4$ entonces G_a es cerrado en $GL_2(\mathbb{R})$.

Dado que G_a es cerrado y $GL_2(\mathbb{R})$ es de Hausdorff, sigue que la intersección de un compacto de $GL_2(\mathbb{R})$ con G_a es un conjunto compacto. Como $GL_2(\mathbb{R})$ es localmente compacto, lo anterior implica que G_a también lo es.

Nos interesa dotar a nuestros grupos localmente compactos de una medida adecuada. Vamos a considerar espacios de medida $(G, \mathcal{B}, \mu)$, siendo $\mathcal{B}$ la sigma álgebra de Borel de G.

Exigiremos que μ satisfaga ciertas condiciones.

Definición 2.4. *Diremos que μ es una* ***medida de Radon*** *si cumple:*

1. *μ es finita en compactos: $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subset G$ compacto.*

2. *μ es exteriormente regular: $\mu(A) = inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ es abierto}\}$ $\forall A \in \mathcal{B}$.*

3. *μ es interiormente regular: $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ es compacto}\}$ $\forall A \in \mathcal{B}$ de medida finita.*

Definición 2.5. *Diremos que μ es una* ***medida invariante a izquierda*** *si $\mu(xA) = \mu(A)$ para todo $x \in G$ y para todo $A \in \mathcal{B}$.*

Las medidas que nos interesan se llaman medidas de Haar.

Definición 2.6. *Diremos que μ es una* ***medida de Haar*** *de G si es no nula, invariante a izquierda y de Radon.*

Dado un grupo localmente compacto puede construirse una medida de Haar y se prueba que cualquier otra medida de Haar, en el mismo grupo, puede obtenerse por multiplicación de la medida original por una constante positiva. De ahora en más, dado un grupo localmente compacto G, supondremos fijada una medida de Haar μ.

Dos ejemplos sencillos de medidas de Haar son la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y la medida de conteo en cualquier grupo topológico discreto. En ambos casos las medidas consideradas son tanto invariantes a izquierda como a derecha; sin embargo esto no es lo que ocurre en general.

Dado $x \in G$ podemos definir una medida μ_x tal que $\mu_x(A) = \mu(Ax)$ para cualquier $A \in \mathcal{B}$. La medida resultante es también una medida de Haar, por lo que existe una constante $\Delta(x) > 0$ tal que:

$$\mu_x = \Delta(x)\mu$$

Definición 2.7. *La* ***función modular*** *de un grupo localmente compacto G es el mapa $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$. Diremos que G es* ***unimodular*** *si $\Delta = 1$ o equivalentemente si μ es invariante a derecha.*

A continuación enunciamos algunas propiedades de la función modular cuya demostración puede hallarse en [1].

Teorema 2.8.

1. *La función modular $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es un homomorfismo continuo.*

2. *Dados $y \in G$ y $f \in L^1(G)$ se tiene:*

$$\int_G f(xy)dx = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x)dx$$

3. Dada $f \in L^1(G)$ se cumple:

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx$$

4. Si G es abeliano o compacto entonces es unimodular.

Una medida de Haar para el grupo afín es μ tal que $d\mu(b,a) = |a|^{-2}dbda$.

Veamos que μ es una medida de Radon.

En primer lugar observamos que si $K \subset G_a$ es compacto entonces existen $0 < \alpha < \beta < \infty$ y $0 \leq \gamma < \delta < \infty$ tales que K está incluido en el conjunto $B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \{(y,x) \in G_a : \delta \leq |y| < \gamma, \alpha < |x| \leq \beta\}$. El conjunto anterior tiene medida finita y por lo tanto también K. Esto prueba que μ es finita en compactos.

Ahora veamos que μ es exteriormente regular, la prueba de que es interiormente regular es similar.

Consideremos primero el caso en que $A \subset B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ para ciertos $0 < \alpha < \beta < \infty$ y $0 \leq \gamma < \delta < \infty$.

Podemos identificar a A con un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Como la medida de Lebesgue m sobre $\mathbb{R}^2$ es de Radon, entonces podemos tomar una sucesión decreciente de abiertos $(U_n)_{n\geq 1}$ tal que $A \subset U_n \ \forall \ n \geq 1$ y $m(U_n) \longrightarrow m(A)$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los abiertos anteriores están contenidos en el interior de $B_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'}$ con $0 < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < \infty$ y $0 \leq \gamma' \leq \gamma < \delta < \delta' < \infty$.

Vamos a definir $f, f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:

$$f_n(b,a) = \frac{\chi_{U_n}(b,a)}{|a|^2}$$

$$f(b,a) = \frac{\chi_A(b,a)}{|a|^2}$$

Las funciones anteriores son todas integrables respecto de m puesto que $A, U_n \subset B_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'} \ \forall \ n \geq 1$. Además, $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión que converge a f, salvo en un conjunto de medida nula. Por lo tanto, por el teorema de convergencia dominada, todas las funciones están dominadas por f_1, tenemos que:

$$\mu(U_n) = \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f_n(b,a)dbda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f(b,a)dbda = \mu(A)$$

En el caso general, podemos escribir A como una unión disjunta y numerable de subconjuntos que estén contenidos en conjuntos de la forma $B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ para ciertos $0 < \alpha < \beta < \infty$ y $0 \leq \gamma < \delta < \infty$. Para ello cortamos A con los conjuntos de la forma $B_{1/(n+1),1/n,m,m+1}$ y $B_{n,n+1,m,m+1}$, para $m \geq 0$ y $n \geq 1$. Llamemos $(A_n)_{n\geq 1}$ a la partición resultante, para cada $n \geq 1$ sabemos que existe un abierto U_n que contiene a A_n y satisface que $\mu(U_n) - \mu(A_n) < 1/2^n$.

Si A es de medida infinita entonces es claro que μ es exteriormente regular en A, por lo tanto podemos suponer que $\mu(A) < \infty$. Ahora, si $U = \bigcup_n U_n$ entonces se tiene que $A \subset U$ y $\mu(U) < \infty$.

$$\mu(U) \leq \sum_n \mu(U_n) < \sum_n \mu(A_n) + \frac{1}{2^n} = \mu(A) + 1 < \infty$$

Finalmente, procediendo del mismo modo que en el caso en que $A \subset B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ para ciertos $0 < \alpha < \beta < \infty$ y $0 \leq \gamma < \delta < \infty$ se prueba que en este caso μ también es exteriormente regular en A. Notar que sólo habíamos usado la finitud del interior de $B_{\alpha',\beta',\gamma',\delta'}$ respecto de μ.

Para ver que μ es invariante a izquierda supongamos que $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es cualquier función medible y calculemos la integral:

$$\int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f((d,c)(b,a)) \frac{dbda}{|a|^2}$$

Vamos a usar un cambio de variable $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & bc+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h(y,x) = (b,a) = \left(\frac{y-d}{c}, \frac{x}{c} \right)$$

$$h'(y,x) = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Usando el cambio de variable anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f((d,c)(b,a)) \frac{dbda}{|a|^2} &= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f(y,x) |\det h'(y,x)| \frac{dydx}{|a|^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f(y,x) \frac{dydx}{|ac|^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} f(y,x) \frac{dydx}{|x|^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto μ es invariante a izquierda y esto termina de probar que es una medida de Haar.

Además, usando un cambio de variable similar al realizado anteriormente, puede verse que:

$$\int_{\mathbb{R}^\times}\int_{\mathbb{R}} f((b,a)(d,c))\frac{dbda}{|a|^2} = \int_{\mathbb{R}^\times}\int_{\mathbb{R}} f(y,x)|c|\frac{dydx}{|x|^2}$$

Lo anterior implica que el grupo afín no es unimodular y que la función modular está dada por:

$$\Delta(b,a) = \frac{1}{|a|}$$

Finalizamos esta sección con un resultado que usaremos más adelante.

Proposición 2.9. *Toda función $f \in C_c(G)$ es uniformemente continua en el siguiente sentido: dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto de la unidad $U \subset G$ tal que si $x^{-1}y \in U$ o $yx^{-1} \in U$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y un entorno compacto de la unidad V, llamemos K al soporte de f.

Como f es continua, para cada $x \in G$ existe un entorno abierto de la unidad $V_x \subset V$ tal que si $y \in xV_x$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Para cada $x \in G$ sea $U_x \subset G$ un entorno abierto y simétrico de la unidad tal que $U_x^2 \subset V_x$; sabemos que un tal entorno existe gracias a la Proposición 2.2.

Los conjuntos xU_x con $x \in KV$ forman un cubrimiento abierto del compacto KV por lo que existen $x_1, ..., x_n \in KV$ tales que $x_1U_1 \cup ... \cup x_nU_n$ cubre KV. Tomemos $U = U_1 \cap ... \cap U_n$, que es un entorno abierto y simétrico de la unidad.

Supongamos que $x, y \in G$, con $x^{-1}y \in U$.

Si $x \notin KV$, entonces en particular $x \notin K$ y como $U \subset V$ es simétrico se tiene que $y \notin K$ ya que lo contrario implicaría que $x \in KV$. Por lo tanto f se anula en x e y, luego $|f(x) - f(y)| = 0$.

Si $x \in KV$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in x_iU_i$. Luego, $y \in x_iU_iU \subset x_iV_i$ y sigue que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \varepsilon$$

En forma análoga podemos definir otro entorno abierto y simétrico de la unidad $W \subset G$ tal que si $yx^{-1} \in W$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tomando la intersección de U y W obtenemos el entorno buscado. $\square$

2.2. Representaciones unitarias

Comenzamos con una definición de representación más general de la que precisaremos usualmente.

Definición 2.10. *Dados un grupo topológico G, un espacio de Banach X y un homomorfismo $\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}(X)$, diremos que (π, X) es una* ***representación*** *de G sobre X si el siguiente mapa de $G \times X \longrightarrow X$ es continuo:*

$$(x, \eta) \longmapsto \pi(x)\eta$$

Vamos a considerar la siguiente clase particular de representaciones.

Definición 2.11. *Dados un grupo localmente compacto G y una representación $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, diremos que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una* ***representación unitaria*** *si para todo $x \in G$ se tiene que $\pi(x)$ es unitario.*

El hecho de que π tenga imagen en los operadores unitarios de $\mathcal{H}_\pi$ implica que si $x \in G$ entonces $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$ y que dados $\eta, \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene:

$$\langle \pi(x)\eta, \pi(x)\varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle$$

Proposición 2.12. *Sean G un grupo localmente compacto, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(H)$ un homomorfismo. Entonces π es una representación unitaria si y sólo si para todo $\eta, \varphi \in \mathcal{H}$ el siguiente mapa de $G \longrightarrow \mathbb{C}$ es continuo:*

$$x \longmapsto \langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle$$

Demostración. El directo es inmediato ya que si π es una representación entonces el mapa $G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $(x, \varphi) \longmapsto \pi(x)\varphi$ es continuo. Luego, componiendo con la segunda entrada del producto interno se tiene lo querido.

Para el recíproco consideremos $(x, \eta), (y, \varphi) \in G \times \mathcal{H}$ y observemos que:

$$\|\pi(x)\eta - \pi(y)\varphi\| \leq \|\pi(x)\eta - \pi(x)\varphi\| + \|\pi(x)\varphi - \pi(y)\varphi\| = \|\eta - \varphi\| + \|\pi(x)\varphi - \pi(y)\varphi\|$$

Además se tiene:

$$\begin{aligned} \|\pi(x)\varphi - \pi(y)\varphi\|^2 &= 2\|\varphi\|^2 - 2\Re(\langle \varphi, \pi(x^{-1}y)\varphi \rangle) \\ &= 2\Re(\langle \varphi, \pi(e)\varphi \rangle - \langle \varphi, \pi(x^{-1}y)\varphi \rangle) \end{aligned}$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto $U \subset G$ de x tal que si $y \in U$ entonces la última expresión es menor que $\varepsilon^2/4$. Luego, si tomamos φ tal que $\|\eta - \varphi\| < \varepsilon/2$ tenemos que:

$$\|\pi(x)\eta - \pi(y)\varphi\| < \varepsilon$$

□

Corolario 2.13. *Sean G un grupo localmente compacto, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(H)$ un homomorfismo. Entonces π es una representación unitaria si y sólo si para todo η y φ en un subespacio denso de $\mathcal{H}$ el siguiente mapa de $G \longrightarrow \mathbb{C}$ es continuo:*

$$x \longmapsto \langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle$$

Demostración. Solamente tenemos que probar el recíproco.

Llamemos $\mathcal{D}$ al subespacio denso de $\mathcal{H}$ mencionado en el enunciado. Dados $\eta, \varphi \in \mathcal{H}$ cualesquiera, como $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$, entonces existen $\eta', \varphi' \in \mathcal{D}$ tales que $\|\eta - \eta'\|, \|\varphi - \varphi'\| < \varepsilon$. Ahora, para todo $x \in G$ tenemos que:

$$|\langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle - \langle \eta', \pi(x)\varphi' \rangle| \leq |\langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle - \langle \eta', \pi(x)\varphi \rangle| + |\langle \eta', \pi(x)\varphi \rangle - \langle \eta', \pi(x)\varphi' \rangle|$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene:

$$\begin{aligned} |\langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle - \langle \eta', \pi(x)\varphi' \rangle| &< \varepsilon\|\varphi\|_2 + \varepsilon\|\eta'\|_2 \\ &< \varepsilon\|\varphi\|_2 + \varepsilon\|\eta\|_2 + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Es decir que podemos aproximar $\langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle$ por $\langle \eta', \pi(x)\varphi' \rangle$, de modo que la continuidad del segundo implica la del primero. Por lo tanto, $x \longmapsto \langle \eta, \pi(x)\varphi \rangle$ es continuo para todo $\eta, \varphi \in \mathcal{H}$ y por la proposición anterior sigue que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación unitaria. $\square$

A continuación definiremos una representación unitaria que usaremos con frecuencia.

Dado un grupo localmente compacto G definimos para cada $x \in G$ y cada $f \in L^2(G)$ la siguiente función:

$$L_x(f)(y) = f(x^{-1}y)$$

Fijado $x \in G$ es claro que la asignación anterior es lineal en $f \in L^2(G)$. Además, como estamos considerando la medida de Haar sabemos que $L_x(f) \in L^2(G)$, más aún se tiene que $\|L_x(f)\|_2 = \|f\|_2$. Por lo tanto, $L_x : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ es un operador unitario, puesto que claramente es sobreyectivo.

Por otra parte, el mapa $L : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$ tal que $x \longmapsto L_x$ es un homomorfismo porque, si $x, y, z \in G$ y $f \in L^2(G)$, entonces se tiene que:

$$L_x y(f)(z) = f((xy)^{-1}z) = f(y^{-1}x^{-1}z) = L_x L_y(f)(z)$$

Para ver que $(L, L^2(G))$ es una representación unitaria podemos usar el Corolario 2.13, es decir que nos basta verificar que dados f y g en un subespacio denso de $L^2(G)$, la siguiente asignación de $G \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua:

$$x \longmapsto \langle g, L_x(f)\rangle$$

El subespacio denso que consideraremos será $C_c(G)$, de modo que f y g son integrables y uniformemente continuas; en particular g es integrable y f es uniformemente continua. Entonces, usando la Proposición 2.9, sabemos que dado $\delta > 0$, existe un entorno abierto de la unidad $U \subset G$ tal que si $x^{-1}y \in U$ o $yx^{-1} \in U$ entonces $|f(x) - f(y)| < \delta$. En tal caso se tiene lo siguiente:

$$|\langle g, L_x(f)\rangle - \langle g, L_y(f)\rangle| \leq \int_G |g(z)||f(x^{-1}z) - f(y^{-1}z)|dz < \delta\|g\|_1$$

De lo anterior se deduce que el mapa $x \longmapsto \langle g, L_x(f)\rangle$ es continuo y por lo tanto $(L, L^2(G))$ es una representación unitaria.

La representación unitaria $(L, L^2(G))$ construida se llama *representación regular izquierda.*

La *representación regular derecha* $(R, L^2(G))$ se define de modo que si $x \in G$ y $f \in L^2(G)$ entonces:

$$R_x(f)(y) = \sqrt{\Delta(x)}f(yx)$$

En forma análoga a lo hecho para la representación regular izquierda se prueba que la representación regular derecha también es una representación unitaria de G.

También nos interesa definir la siguiente representación unitaria del grupo afín. Dado $(b, a) \in G_a$ definimos un operador $\pi(b, a) : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\pi(b, a)f(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{x - b}{a}\right)$$

Es fácil ver que $\pi(b, a)$ es unitario y que $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ es un homomorfismo. Para probar que $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ es una representación unitaria de G_a se procede en forma similar a lo hecho para la representación regular izquierda. Los detalles se muestran a continuación.

Recurriendo nuevamente al Corolario 2.13, alcanza probar que dados $g, h \in C_c(\mathbb{R})$ el mapa de $G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $(b, a) \longmapsto \langle h, \pi(b, a)g\rangle$ es continuo.

Observamos que:

$$\begin{aligned} |\langle h, \pi(b, a)g\rangle - \langle h, \pi(d, c)g\rangle| &= |\langle h, \pi(b, a)g - \pi(d, c)g\rangle| \\ &= \langle \pi(d, c)^{-1}h, \pi((d, c)^{-1}(b, a))g - g\rangle| \\ &\leq \|h\|_2\|\pi((d, c)^{-1}(b, a))g - g\|_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto basta probar que $\|\pi(b,a)g - g\|_2 \longrightarrow 0$ cuando $(b,a) \longrightarrow (0,1)$, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > 0$.

$$\|\pi(b,a)g - g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{x-b}{a}\right) - g(x) \right|^2 dx$$

Llamemos $W = \{(y,x) \in G_a : |y|, |x-1| < 1/2\}$. Fijado $(b,a) \in W$, se tiene que el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ en los que el integrando no se anula está contenido en $\text{sup}g \bigcup a\text{sup}g + b$. Entonces el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ para los que el integrando no se anula en algún $(b,a) \in W$ está contenido en:

$$K = \text{sup}g \bigcup ([1/2, 3/2]\text{sup}g + [-1/2, 1/2])$$

Como $\text{sup}g$ es compacto, en particular es acotado, se deduce que K también es acotado. En realidad, es fácil ver que K es compacto también pero no lo necesitaremos.

Para cada $(b,a) \in W$ consideremos la función $h_{(b,a)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$h_{(b,a)}(x) = \left| \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{x-b}{a}\right) - g(x) \right|^2$$

Es claro que $h_{(b,a)}$ está dominada por la siguiente función integrable:

$$|h_{(b,a)}| \leq (3\|g\|_\infty)^2 \chi_K$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada se tiene:

$$\lim_{(b,a)\longrightarrow(0,1)} \|\pi(b,a)g - g\|_2^2 \leq \lim_{(b,a)\longrightarrow(0,1)} \int_{\mathbb{R}} h_{(b,a)} = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

Esto implica la continuidad de $(b,a) \longmapsto \langle h, \pi(b,a)g\rangle$ y por lo tanto prueba que $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ es una representación unitaria.

Definición 2.14. *Sean (π, X) y (σ, Y) dos representaciones de un grupo topológico G. Diremos que (σ, Y) es una **subrepresentación** de (π, X) si $Y \subset X$ es un subespacio cerrado y para todo $x \in G$ se cumple que $\pi(x)|_Y = \sigma(x)$.*

Dada una representación (π, X) de un grupo topológico G, es claro que cualquier subespacio cerrado de X que sea $\pi(G)$-invariante da origen a una subrepresentación de (π, X) que surge de restringir π a dicho subespacio.

Cabe observar que las subrepresentaciones $(\sigma, \mathcal{K}_\sigma)$ de una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ son también unitarias. En efecto, si $\eta, \varphi \in \mathcal{K}_\sigma$ y $x \in G$ entonces:

$$\langle \sigma(x)\varphi, \eta\rangle = \langle \pi(x)\varphi, \eta\rangle = \langle \varphi, \pi(x^{-1})\eta\rangle = \langle \varphi, \sigma(x^{-1})\eta\rangle = \langle \varphi, \sigma(x)^{-1}\eta\rangle$$

Definición 2.15. *Una representación (π, X) de un grupo topológico G se dice **irreducible** si no posee subrepresentaciones no triviales.*

En la definición anterior, por subrepresentaciones triviales nos referimos a $(\pi|_{\{0\}}, \{0\})$ y (π, X). De acuerdo a lo observado antes de esta definición, una representación (π, X) de un grupo topológico G es irreducible si y sólo si X no posee subespacios cerrados no triviales que sean $\pi(G)$-invariantes.

Definición 2.16. *Sea (π, X) una representación de un grupo topológico G. Diremos que $\eta \in X$ es un **vector cíclico** si y sólo si el subespacio generado por $\{\pi(x)\eta : x \in G\}$ es denso en X, y diremos que (π, X) es una **representación cíclica** si posee algún vector cíclico.*

Notar que si (π, X) es una representación de un grupo topológico G y $0 \neq \eta \in X$, si llamamos $Y \subset X$ a la clausura de $span\{\pi(x)\eta : x \in G\}$, entonces $(\pi|_Y, Y)$ es una subrepresentación de (π, X) que es trivial si y sólo si η es cíclico. Luego, una representación es irreducible si y sólo si todos los vectores no nulos son cíclicos.

Ahora queremos definir mapas entre nuestras representaciones.

Definición 2.17. *Sean (π, X) y (σ, Y) representaciones de un grupo topológico G. Diremos que un operador continuo $T : X \longrightarrow Y$ es un **operador de intercambio** si para todo $x \in G$ se tiene:*

$$T\pi(x) = \sigma(x)T$$

Definición 2.18. *Sean $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ representaciones unitarias de un grupo localmente compacto G. Diremos que son **unitariamente equivalentes** si existe un operador de intercambio $T : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ unitario, y diremos que son **disjuntas** si no existe un operador de intercambio no nulo en ninguna dirección.*

La relación $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \simeq (\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ si y sólo si son representaciones unitariamente equivalentes es una relación de equivalencia. Para probar que la relación es simétrica observamos que si $T : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ es un operador de intercambio unitario entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$, entonces $T^* : \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ es un operador de intercambio unitario en la dirección contraria. Basta notar que para todo $\eta \in \mathcal{H}_\pi$, $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$ y $x \in G$ se tiene:

$$\langle \eta, T^*\sigma(x)\varphi \rangle = \langle \sigma(x^{-1})T\eta, \varphi \rangle = \langle T\pi(x^{-1})\eta, \varphi \rangle = \langle \eta, \pi(x)T^*\varphi \rangle$$

Teorema 2.19 (Lema de Schur)**.** *Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria de un grupo localmente compacto G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es irreducible.

2. *Si* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *satisface que* $T\pi(x) = \pi(x)T$ *para todo* $x \in G$*, entonces* $T \in \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$*.*

Demostración. Es sencillo ver que la segunda afirmación implica la primera. Para ello, supongamos que la segunda afirmación es cierta y que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ no es irreducible. Entonces existe un subespacio no trivial $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_\pi$ que es cerrado y $\pi(G)$-invariante. Como $\mathcal{K}$ es $\pi(G)$-invariante, la proyección ortogonal $P : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{K}$ conmuta con $\pi(x)$ para todo $x \in G$. Entonces $P \in \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$ y esto nos lleva a una contradicción pues habíamos supuesto que $\mathcal{K}$ era no trivial.

Para probar la otra implicancia, supongamos que se satisface la primera afirmación y consideremos un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ que conmute con $\pi(x)$ para todo $x \in G$.

Como $\pi(x)^* = \pi(x^{-1})$ para todo $x \in G$, se deduce que T^* también conmuta con $\pi(x)$ para todo $x \in G$ como se verfica a continuación:

$$T^*\pi(x) = (\pi(x^{-1})T)^* = (T\pi(x^{-1}))^* = \pi(x)T^*$$

Por lo tanto, las partes real e imaginaria de T también conmutan con $\pi(x)$ para todo $x \in G$. Las mismas se definen del siguiente modo:

$$\Re(T) = \frac{T + T^*}{2}$$

$$\Im(T) = \frac{T - T^*}{2i}$$

Como $\Re(T) + i\Im(T) = T$, entonces si probamos que $\Re(T)$ y $\Im(T)$ son múltiplos de la identidad habremos probado que T lo es. Dado que la parte real y la parte imaginaria de un operador son operadores autoadjuntos, alcanza con probar que la segunda afirmación es cierta cuando el operador considerado es autoadjunto. Por lo tanto, podemos suponer que T es autoadjunto.

Supongamos que el espectro de T tiene un único punto α (el espectro $\sigma(T)$ y el radio espectral $r(T)$ de un operador se definen en la Definición 4.9 del Apéndice). El Teorema 4.10 indica que el espectro de T tiene al menos un punto. Como T es autoadjunto el Teorema 4.11 implica que $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $T - \alpha$ es un operador autoadjunto y su espectro es:

$$\sigma(T - \alpha) = \sigma(T) - \alpha = \{0\}$$

Además, el Teorema 4.11 implica que:

$$\|T - \alpha\| = r(T - \alpha) = 0$$

Entonces, en este caso $T = \alpha Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Ahora supongamos que el espectro de T tiene al menos dos puntos. Es claro que $\sigma(T)$ es normal, por lo tanto, el lema de Urysohn nos permite hallar dos funciones reales $f, g \in C(\sigma(T))$ no nulas que satisfagan:

$$fg = 0$$

El Teorema 4.12 implica que $f(T), g(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ son operadores no nulos y que:

$$f(T)g(T) = fg(T) = 0$$

Además, como f y g toman valores reales, entonces $f(T)$ y $g(T)$ son autoadjuntos. Por ejemplo, en el caso de f tenemos por el Teorema 4.12 que:

$$f(T)^* = \overline{f}(T) = f(T)$$

Llamemos $\mathcal{K}_f$ y $\mathcal{K}_g$ a $\overline{f(T)\mathcal{H}_\pi}$ y $\overline{g(T)\mathcal{H}_\pi}$, respectivamente. Entonces $\mathcal{K}_f$ y $\mathcal{K}_g$ son subespacios cerrados y no nulos de $\mathcal{H}_\pi$. Además, $\mathcal{K}_f \neq \mathcal{H}_\pi$ pues $\{0\} \neq \mathcal{K}_g \subset \mathcal{K}_f^\perp$ como se ve a continuación:

$$\langle f(T)\eta, g(T)\varphi\rangle = \langle \eta, f(T)g(T)\varphi\rangle = 0 \;\forall\; \eta, \varphi \in \mathcal{H}_\pi$$

Dado que $f(T)$ y $\pi(x)$ conmutan, como puede deducirse de la observación siguiente al Teorema 4.12, entonces $\mathcal{K}_f$ es $\pi(G)$-invariante. Como $\mathcal{K}_f$ es no trivial, lo anterior es una contradicción.

Entonces el espectro de T tiene un único punto, pero ya vimos que esto implica que $T \in \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$. □

Definición 2.20. *Dadas dos representaciones unitarias $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ de un grupo localmente compacto G y un subespacio vectorial $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_\pi$, diremos que un operador $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ es un **operador de intercambio** si $\mathcal{D}$ es $\pi(G)$-invariante y para cada $x \in G$ se cumple:*

$$T\pi(x)|_{\mathcal{D}} = \sigma(x)T$$

La definición anterior generaliza nuestra primera definición de operador de intercambio.

Definición 2.21. *Dados dos espacios de Banach X e Y, un subespacio vectorial $\mathcal{D} \subset X$ y un operador $T : \mathcal{D} \longrightarrow Y$, diremos que T es un **operador cerrado** si $G_r(T)$ es cerrado en $X \oplus Y$.*

Más adelante necesitaremos el siguiente corolario del lema de Schur para operadores densamente definidos.

Corolario 2.22. *Sean* $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ *y* $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ *dos representaciones unitarias de un grupo localmente compacto* G*, con* $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ *irreducible. Supongamos que* $\{0\} \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{H}_\pi$ *es un subespacio vectorial* $\pi(G)$*-invariante y* $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ *es un operador de intercambio cerrado. Entonces* $\mathcal{D} = \mathcal{H}_\pi$ *y existen* $\alpha \geq 0$ *y una isometría* $S : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ *tales que* $T = \alpha S$*.*

Demostración. Supongamos que $T \neq 0$, en caso contrario la prueba es inmediata.

Vamos a definir un producto interno en $G_r(T)$ que es la restricción del producto interno de $\mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_\sigma$:

$$\langle\langle(\eta, T\eta), (\xi, T\xi)\rangle\rangle = \langle\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle T\eta, T\xi\rangle_{\mathcal{H}_\sigma}$$

Como $G_r(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_\sigma$ entonces $(G_r(T), \langle\langle, \rangle\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Llamemos $P : G_r(T) \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ a la proyección sobre la primera coordenada. Entonces es claro que $PP^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$. Además, el operador anterior es un operador de intercambio entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y sí misma. En efecto, supongamos que $\zeta \in \mathcal{D}$, $x \in G$ y $P^*\eta = (\xi, T\xi)$ para cierto $\xi \in \mathcal{D}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle\langle(\pi(x)\zeta, T\pi(x)\zeta), P^*\pi(x)\eta\rangle\rangle &= \langle P(\pi(x)\zeta, T\pi(x)\zeta), \pi(x)\eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle\pi(x)\zeta, \pi(x)\eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle\zeta, \eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle P(\zeta, T\zeta), \eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle\langle(\zeta, T\zeta), P^*\eta\rangle\rangle \\
&= \langle\langle(\zeta, T\zeta), (\xi, T\xi)\rangle\rangle \\
&= \langle\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle T\zeta, T\xi\rangle_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&= \langle\pi(x)\zeta, \pi(x)\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle\sigma(x)T\zeta, \sigma(x)T\xi\rangle_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&= \langle\pi(x)\zeta, \pi(x)\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} + \langle T\pi(x)\zeta, T\pi(x)\xi\rangle_{\mathcal{H}_\sigma} \\
&= \langle\langle(\pi(x)\zeta, T\pi(x)\zeta), (\pi(x)\xi, T\pi(x)\xi)\rangle\rangle
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}$ es $\pi(G)$-invariante entonces $\mathcal{D} = \{\pi(x)\zeta : \zeta \in \mathcal{D}\}$, por lo tanto lo anterior implica que $P^*\pi(x)\eta = (\pi(x)\xi, T\pi(x)\xi)$. Luego, se tiene:

$$\pi(x)PP^*\eta = \pi(x)P(\xi, T\xi) = \pi(x)\xi = P(\pi(x)\xi, T\pi(x)\xi) = PP^*\pi(x)\eta$$

Como PP^* es un operador de intercambio entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y sí misma, entonces el lema de Schur asegura que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $PP^* = \lambda Id_{\mathcal{H}_\pi}$ y como $T \neq 0$ debe ser $\lambda \neq 0$.

Supongamos que $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ y $P^*\eta = (\xi, T\xi)$ para cierto $\xi \in \mathcal{D}$; entonces tenemos:

$$\xi = PP^*\eta = \lambda\eta$$

Por lo tanto $\mathcal{D} = \mathcal{H}_\pi$ y por el teorema del gráfico cerrado sabemos que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

Ahora, $T^*T \in \mathcal{B}(H)$, y dados $\eta, \xi \in \mathcal{H}_\pi$ y $x \in G$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle T^*T\pi(x)\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle T\pi(x)\eta, T\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle \sigma(x)T\eta, T\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \langle T\eta, T\pi(x^{-1})\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(x)T^*T\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi}
\end{aligned}$$

Sigue que T^*T es un operador de intercambio entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y sí misma. Luego, por el lema de Schur sabemos que existe $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $T^*T = \beta Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Dado $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene que:

$$\beta\|\eta\|^2 = \langle T^*T\eta, \eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle T\eta, T\eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

Por lo tanto, $\beta > 0$ y podemos tomar $\alpha = \sqrt{\beta}$. Si además definimos $S = \alpha^{-1}T$ entonces S es la isometría buscada, ya que si $\eta, \xi \in H$, entonces:

$$\langle S\eta, S\xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle S^*S\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \frac{1}{\alpha^2}\langle T^*T\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

□

3. Las transformadas wavelet continuas

3.1. Sistemas de estados coherentes

Comenzaremos definiendo qué es un sistema de estados coherentes. Para ello fijaremos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un espacio topológico X y un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, donde $\mathcal{B}$ es la sigma álgebra de Borel de X.

Definición 3.1. *Sea $\eta = (\eta_x)_{x \in X}$ una familia de elementos de $\mathcal{H}$.*

1. *Diremos que η es un* ***sistema de estados coherentes*** *si $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$ la* ***función de coeficientes*** *$V_\eta \varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible.*

$$V_\eta \varphi(x) = \langle \varphi, \eta_x \rangle$$

2. *Si η es un sistema de estados coherentes definimos $\mathcal{D}_\eta = \{\varphi \in \mathcal{H} : V_\eta \varphi \in L^2(X, \mu)\}$ y llamamos* ***operador de coeficientes al mapa*** *$V_\eta : \mathcal{D}_\eta \longrightarrow L^2(X, \mu)$ tal que:*

$$\varphi \longmapsto V_\eta \varphi$$

3. *Decimos que un sistema de estados coherentes η es* ***admisible*** *si $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}$ y el operador de coeficientes $V_\eta : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X, \mu)$ es una isometría.*

Dada una base ortonormal $\eta = (\eta_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$ sabemos que existe una isometría de $\mathcal{H} \longrightarrow l^2(I)$ dada por:

$$\varphi \longmapsto (\langle \varphi, \eta_i \rangle)_{i \in I}$$

La isometría anterior se llama transformada de Fourier abstracta y la noción de sistema de estados coherente puede verse como una extensión de esta misma idea. En los términos de la definición anterior, la base ortonormal elegida sería un sistema de estados coherentes indexado en I para el que consideramos la medida de conteo. La transformada de Fourier abstracta correspondería al operador de coeficientes y se trataría de un sistema de estados coherentes admisible ya que la misma es una isometría.

En general el operador de coeficientes asociado a un sistema de estados coherentes no estará definido en todo el espacio $\mathcal{H}$. Sin embargo, siempre es un operador cerrado, lo que quiere decir que, en los casos en que sí esté definido en todo el espacio, será acotado como consecuencia del teorema del gráfico cerrado.

Proposición 3.2. *Si η es un sistema de estados coherentes entonces el operador de coeficientes V_η es cerrado.*

Demostración. Vamos a ver que $G_r(V_\eta)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H} \oplus L^2(X,\mu)$.

Sea $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{D}_\eta$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{H}$ y $V_\eta \varphi_n \longrightarrow f$ en $L^2(X,\mu)$. Queremos ver que $\varphi \in \mathcal{D}_\eta$ y $V_\eta \varphi = f$ en $L^2(X,\mu)$; en realidad basta probar lo segundo ya que implica lo primero.

Por un resultado de teoría de la medida sabemos que existe una subsucesión de $(V_\eta \varphi_n)_{n\geq 1}$ que converge a f en casi todo punto, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $V_\eta \varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$ para casi todo $x \in X$.

Por otro lado si $x \in X$ entonces:

$$|V_\eta \varphi(x) - V_\eta \varphi_n(x)| = |\langle \varphi - \varphi_n, \eta_x \rangle| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \|\eta_x\|$$

Es decir que $\forall\ x \in X$ se tiene que $V_\eta \varphi_n(x) \longrightarrow V_\eta \varphi(x)$.

Por lo tanto $V_\eta \varphi(x) = f(x)$ para casi todo $x \in X$ implicando que $V_\eta \varphi = f$ en $L^2(X,\mu)$. □

A continuación definiremos el concepto de integral débil, que nos proveerá de una notación más cómoda para los siguientes resultados de esta sección.

Definición 3.3. *Sea η un sistema de estados coherentes tal que $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$ la siguiente integral converge absolutamente:*

$$\int_X \langle \varphi, \eta_x \rangle dx$$

Entonces queda definida una funcional lineal de $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\varphi \longmapsto \int_X \langle \varphi, \eta_x \rangle dx$$

*Si dicha funcional es continua, se llama **integral débil** de η al elemento de $\mathcal{H}$ correspondiente por el teorema de representación de Riesz; la denotamos mediante:*

$$\int_X \eta_x dx$$

Cabe observar que la integral débil de η queda definida por la siguiente relación:

$$\langle \varphi, \int_X \eta_x dx \rangle = \int_X \langle \varphi, \eta_x \rangle dx \ \forall\ \varphi \in \mathcal{H}$$

Ahora utilizaremos la notación de integral débil para definir el operador de síntesis asociado a un sistema de estados coherentes para el que el operador de coeficientes está definido en todo el espacio $\mathcal{H}$.

Proposición 3.4. *Sea η un sistema de estados coherentes tal que $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}$. Entonces V_η es acotado y se cumple que:*

$$V_\eta^* f = \int_X f(x)\eta_x dx \ \forall \ f \in L^2(X, \mu)$$

Llamamos a V_η^* ***operador de síntesis****.*

Demostración. La primera afirmación se debe a que V_η es cerrado, luego por el teorema del gráfico cerrado sabemos que V_η es acotado.

Para la segunda afirmación vemos que $\forall \ \varphi \in \mathcal{H}$ se cumple que:

$$\langle \varphi, V_\eta^* f \rangle = \langle V_\eta \varphi, f \rangle = \int_X \langle \varphi, \eta_x \rangle \overline{f(x)} dx = \int_X \langle \varphi, f(x)\eta_x \rangle dx$$

Luego $V_\eta^* f$ es la integral débil siguiente:

$$V_\eta^* f = \int_X f(x)\eta_x dx$$

Cabe observar que la integral débil está bien definida, para ello hay que verificar los siguientes dos puntos:

1. La siguiente integral converge absolutamente $\forall \ f \in L^2(X, \mu)$ y $\forall \ \varphi \in \mathcal{H}$:

$$\int_X \langle \varphi, f(x)\eta_x \rangle dx$$

2. La siguiente funcional es continua $\forall \ f \in L^2(X, \mu)$:

$$\varphi \longmapsto \int_X \langle \varphi, f(x)\eta_x \rangle dx$$

En efecto, el siguiente cálculo verifica ambas afirmaciones:

$$\int_X |\langle \varphi, f(x)\eta_x \rangle| dx = \int_X |V_\eta \varphi(x)||f(x)| dx \leq \|V_\eta \varphi\|_2 \|f\|_2 \leq \|V_\eta\| \|\varphi\| \|f\|_2$$

□

En el caso de los sistemas de estados coherentes admisibles puede obtenerse una fórmula de reconstrucción de los elementos de $\mathcal{H}$ a partir de los coeficientes obtenidos al aplicar el operador de coeficientes. Esta fórmula también la expresaremos en la forma de una integral débil.

Proposición 3.5. *Sea η un sistema de estados coherentes admisible. Entonces $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$ se tiene la siguiente fórmula de reconstrucción:*

$$\varphi = \int_X V_\eta \varphi(x) \eta_x dx$$

Demostración. Como η es admisible $V_\eta^* V_\eta = Id_{\mathcal{H}}$ y entonces la Proposición 3.4 implica que $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\varphi = V_\eta^* V_\eta \varphi = \int_X V_\eta \varphi(x) \eta_x dx$$

□

Terminamos esta sección dando una fórmula explícita para la proyección ortogonal de $L^2(X, \mu)$ sobre la imagen del operador de coeficientes, en el caso de un sistema de estados coherentes admisible.

Proposición 3.6. *Sea η un sistema de estados coherentes admisible. Entonces $ranV_\eta \subset L^2(X, \mu)$ es un subespacio cerrado y la proyección $P : L^2(X, \mu) \longrightarrow ranV_\eta$ está dada por:*

$$Pf(x) = \int_X f(y) \langle \eta_y, \eta_x \rangle dy$$

Demostración. Como V_η es una isometría sabemos que $ranV_\eta$ es cerrado en $L^2(X, \mu)$.

Observamos que $P = V_\eta V_\eta^*$ porque si $f \in L^2(X, \mu)$ entonces $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$ se cumple:

$$\langle f - V_\eta V_\eta^* f, V_\eta \varphi \rangle = \langle V_\eta^* f - V_\eta^* f, \varphi \rangle = 0$$

Por lo tanto:

$$Pf(x) = V_\eta V_\eta^* f(x) = \langle V_\eta^* f, \eta_x \rangle = \int_X f(y) \langle \eta_y, \eta_x \rangle dy$$

□

3.2. Definiciones y primeras propiedades

Ahora vamos a usar el concepto de sistema de estados coherentes para definir las transformadas wavelet continuas. A partir de ahora nuestro espacio topológico será un grupo localmente compacto de Hausdorff G, con una base numerable y el espacio de medida elegido $(G, \mathcal{B}, \mu)$ estará dado por una medida de Haar. Fijaremos además una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G, con $\mathcal{H}_\pi$ un espacio de Hilbert.

Definición 3.7. *Dado $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ le asociamos un sistema de estados coherentes $(\pi(x)\eta)_{x\in G}$.*

1. *Diremos que η es un **vector cuadrado integrable** si $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}_\pi$.*
2. *Llamaremos $\mathcal{D}_\pi = \{\eta \in \mathcal{H}_\pi : \mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}_\pi\}$ y diremos que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una **representación cuadrado integrable** si $\overline{\mathcal{D}_\pi} = \mathcal{H}_\pi$.*
3. *Diremos que η es un **vector admisible** si el sistema de estados coherentes asociado a η es admisible.*
4. *Si η es admisible llamaremos **transformada wavelet continua** al operador de coeficientes $V_\eta : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(G)$.*

En primer lugar observemos que el operador de coeficientes siempre toma valores en $C_b(G)$ pues:

$$|V_\eta\varphi(x)| = |\langle\varphi, \pi(x)\eta\rangle| \leq \|\varphi\|\|\eta\|$$

También se deduce del cálculo anterior que $V_\eta : \mathcal{H} \longrightarrow C_b(G)$ es continuo según la norma infinito.

Podemos ver además que V_η es un operador de intercambio entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(L, L^2(G))$ pues $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_\eta$ se cumple:

$$V_\eta\pi(x)\varphi(y) = \langle\pi(x)\varphi, \pi(y)\eta\rangle = \langle\varphi, \pi(x^{-1}y)\eta\rangle = L_xV_\eta\varphi(y)$$

El mismo cálculo implica que $\mathcal{D}_\eta$ es $\pi(G)$-invariante. También podemos ver que $\mathcal{D}_\pi$ es $\pi(G)$-invariante porque si $x \in G$ y $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ entonces $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene:

$$\|V_{\pi(x)\eta}\varphi\|_2 = \int_G \langle\varphi, \pi(yx)\eta\rangle dy = \Delta(x^{-1})\int_G \langle\varphi, \pi(y)\eta\rangle dy = \Delta(x^{-1})\|V_\eta\varphi\|_2$$

En este trabajo nos interesaremos por hallar vectores admisibles, en particular la transformada wavelet deberá ser invertible para estos vectores y esto implicará que los vectores admisibles son cíclicos. Lo anterior se debe a que η es un vector cíclico de $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ si y sólo si el operador de coeficientes es inyectivo. Esto es porque si $\mathcal{K} = \overline{span}\{\pi(x)\eta : x \in G\}$ entonces η es cíclico si y sólo si $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$ pero:

$$\mathcal{K}^\perp = \{\varphi \in \mathcal{H}_\pi : \langle\varphi, \pi(x)\eta\rangle = 0\ \forall\ x \in G\} = kerV_\eta$$

En el caso de un vector admisible η sabemos que podemos dar una fórmula de reconstrucción para la transformada wavelet. Para ello recordamos la Proposición 3.5.

$$\varphi = \int_G V_\eta\varphi(x)\pi(x)\eta dx\ \forall\ \varphi \in \mathcal{H}_\pi$$

También dimos una expresión para la proyección ortogonal sobre el rango de la transformada wavelet continua que en este caso admite una formulación distinta como vemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.8. *Supongamos que η es admisible, entonces $ranV_\eta \subset L^2(G)$ es un subespacio cerrado y la proyección $P : L^2(G) \longrightarrow ranV_\eta$ está dada por:*

$$Pf(x) = (f * V_\eta \eta)(x) = \int_G f(y) V_\eta \eta(y^{-1}x) dy$$

Demostración. Lo único que resta probar es que esta fórmula para la proyección coincide con la que habíamos propuesto en la Proposición 3.6, la cual recordamos a continuación:

$$Pf(x) = \int_G f(y) \langle \pi(y)\eta, \pi(x)\eta \rangle dx$$

Efectivamente:

$$(f * V_\eta \eta)(x) = \int_G f(y) \langle \eta, \pi(y^{-1}x)\eta \rangle dy = \int_G f(y) \langle \pi(y)\eta, \pi(x)\eta \rangle dy$$

□

Las siguientes dos proposiciones explican cómo se traducen las propiedades de ser cíclico, cuadrado integrable o admisible de una representación unitaria a sus subrepresentaciones, y cómo se traducen las mismas propiedades entre representaciones unitarias que son unitariamente equivalentes.

Proposición 3.9. *Sean $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ y $T \in \pi(G)' = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) : S\pi(x) = \pi(x)S \ \forall \ x \in G\}$, entonces:*

$$V_{T\eta} = V_\eta T^*$$

En particular, si $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_\pi$ es un subespacio cerrado y $\pi(G)$-invariante con proyección ortogonal $P : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{K}$, y si η es cíclico/cuadrado integrable/admisible para $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$, entonces $P\eta$ tiene la misma propiedad para $(\pi|_\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Demostración. La primera observación se debe a que si $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ y $x \in G$ entonces:

$$V_{T\eta}\varphi(x) = \langle \varphi, \pi(x)T\eta \rangle = \langle \varphi, T\pi(x)\eta \rangle = \langle T^*\varphi, \pi(x)\eta \rangle = V_\eta T^* \varphi(x)$$

Para probar la segunda afirmación observamos que como P es una proyección ortogonal entonces $P^* = i$, con $i : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ la inclusión. Usando lo anterior obtenemos que:

$$V_{P\eta} = V_\eta i = V_\eta|_\mathcal{K}$$

Como la restricción de un operador que toma valores en $L^2(G)$ es un operador que toma valores en $L^2(G)$ entonces si η es cuadrado integrable $P\eta$ también lo es. Además, como la restricción de un operador inyectivo/isométrico es un operador con la misma propiedad, sigue que si η es cíclico/admisible entonces $P\eta$ tiene la misma propiedad. □

Proposición 3.10. *Si T es una equivalencia unitaria entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$, entonces $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ es cíclico/cuadrado integrable/admisible si y sólo si $T\eta \in \mathcal{H}_\sigma$ tiene la misma propiedad.*

Demostración. Al igual que en la proposición anterior se tiene que si $T\pi(x) = \sigma(x)T$ para cada $x \in G$ entonces:

$$V_{\sigma,T\eta} = V_{\pi,\eta}T^*$$

Como T es unitario también se tiene que:

$$V_{\pi,\eta} = V_{\sigma,T\eta}T$$

Por lo tanto, razonando igual que en la proposición previa, se prueba el directo con la primera igualdad y el recíproco con la segunda igualdad. □

Ahora veremos qué podemos decir en el caso de una suma directa de representaciones. Supongamos una familia representaciones unitarias $(\pi_i, \mathcal{H}_{\pi_i})_{i\in I}$ y definamos $\mathcal{H}_\pi = \oplus_{i\in I}\mathcal{H}_{\pi_i}$. Podemos definir, para cada $x \in G$, un operador $\pi(x) : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ tal que si $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ con $\eta = (\eta_i)_{i\in I}$ entonces:

$$\pi(x)\eta = (\pi_i(x)\eta_i)_{i\in I}$$

Es claro que el operador anterior es unitario para cada $x \in G$.

Para probar que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación unitaria de G vamos a recurrir al Corolario 2.13. Para ello podemos ver que si φ y η cumplen que $\varphi_i, \eta_i = 0$ salvo para finitos índices entonces el mapa mencionado es continuo ya que es una suma finita de mapas continuos:

$$\langle \varphi, \pi(x) \rangle = \sum_i \langle \varphi_i, \pi_i(x)\eta_i \rangle_i$$

Luego, usando que $\{\eta \in \mathcal{H} : \eta_i = 0 \; salvo \; para \; finitos \; i\}$ es denso en $\mathcal{H}_\pi$, se deduce que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación unitaria de G.

Proposición 3.11. *Supongamos que $P_i : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_i}$ es la proyección ortogonal y $\eta_i = P_i\eta$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. η es admisible para $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$.

2. η_i es admisible para $(\pi_i, \mathcal{H}_{\pi_i})$ $\forall\ i \in I$ y además $ranV_{\eta_i} \perp ranV_{\eta_j}$ si $i \neq j$.

Demostración. Supongamos que la primera afirmación es cierta.

Dado $i \in I$, como η_i es la proyección de η sobre un subespacio cerrado y $\pi(G)$-invariante, entonces sabemos que η_i es admisible para $(\pi_i, \mathcal{H}_{\pi_i})$. Además, si $\mu_i : \mathcal{H}_{\pi_i} \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ es la inclusión canónica, entonces $V_{\eta_i} = V_\eta \mu_i$ y por lo tanto se tiene que para $i \neq j$ se cumple que:

$$V_{\eta_j}^* V_{\eta_i} = \mu_j^* V_\eta^* V_\eta \mu_i = P_j \mu_i = 0$$

El cálculo anterior implica que $ranV_{\eta_i} \perp ranV_{\eta_j}$.

Para el recíproco observamos que si $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ y $F \subset I$ es finito entonces:

$$\begin{aligned} |V_\eta\varphi(x) - \sum_{i\in F} V_{\eta_i}\varphi_i(x)| &= |\langle \varphi, \pi(x)\eta\rangle - \sum_{i\in F}\langle \varphi_i, \pi_i(x)\eta_i\rangle_i| \\ &= |\langle \varphi, \pi(x)\eta\rangle - \sum_{i\in F}\langle \mu_i\varphi_i, \pi(x)\eta\rangle| \\ &= |\langle \varphi - \sum_{i\in F}\mu_i\varphi_i, \pi(x)\eta\rangle| \\ &\leq \|\varphi - \sum_{i\in F}\mu_i\varphi_i\|\|\eta\| \end{aligned}$$

Luego la suma converge puntualmente a $V_\eta\varphi$.

Por otro lado tenemos que:

$$\|\sum_{i\in F} V_{\eta_i}\varphi_i\|_2^2 = \sum_{i\in F}\|V_{\eta_i}\varphi_i\|_2^2 = \sum_{i\in F}\|\varphi_i\|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

En el cálculo anterior hemos utilizado el teorema de Pitágoras, dado que por hipótesis $ranV_{\eta_i} \perp ranV_{\eta_j}$ si $i \neq j$. A su vez, la penúltima igualdad es cierta porque por hipótesis $V\eta_i$ es una isometría $\forall\ i \in I$.

Hemos probado que la suma converge a cierta $f \in L^2(G)$ y tomando subsucesiones podemos asumir que la convergencia es puntual en casi todo punto. Como la suma también converge puntalmente a $V_\eta\varphi$, se deduce que $V_\eta\varphi = f$ en $L^2(G)$, en particular $V_\eta\varphi \in L^2(G)$. Sigue que $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}_\pi$ y como V_η es cerrado el teorema del gráfico cerrado implica que V_η es acotado. Por lo tanto si $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene:

$$\|V_\eta\varphi\|_2^2 = \|V_\eta(\sum_{i\in I}\mu_i\varphi_i)\|_2^2 = \|\sum_{i\in I}V_{\eta_i}\varphi_i\|_2^2 = \sum_{i\in I}\|\varphi_i\|_i^2 = \|\varphi\|^2$$

Donde nuevamente estamos usando el teorema de Pitágoras. □

Proposición 3.12. *Sean $(\pi_1, \mathcal{H}_{\pi_1})$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_{\pi_2})$ representaciones unitarias disjuntas. Si $\eta_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}$ y $\eta_2 \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ son vectores cuadrado integrables con operadores de coeficientes acotados, entonces se cumple que $ranV_{\eta_1} \perp ranV_{\eta_2}$ en $L^2(G)$.*

Demostración. Observamos que $V_{\eta_2}^* V_{\eta_1} : \mathcal{H}_{\pi_1} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_2}$ es un operador de intercambio entre $(\pi_1, \mathcal{H}_{\pi_1})$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_{\pi_2})$ pues si $\varphi \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ y $x \in G$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\langle V_{\eta_2}^* V_{\eta_1} \pi_1(x)\varphi, \psi \rangle &= \langle V_{\eta_1} \pi_1(x)\varphi, V_{\eta_2}\psi \rangle \\
&= \langle L_x V_{\eta_1}\varphi, V_{\eta_2}\psi \rangle \\
&= \langle V_{\eta_1}\varphi, L_{x^{-1}} V_{\eta_2}\psi \rangle \\
&= \langle V_{\eta_1}\varphi, V_{\eta_2}\pi_2(x^{-1})\psi \rangle \\
&= \langle V_{\eta_2}^* V_{\eta_1}\varphi, \pi_2(x^{-1})\psi \rangle \\
&= \langle \pi_2(x) V_{\eta_2}^* V_{\eta_1}\varphi, \psi \rangle
\end{aligned}
$$

Como las representaciones son disjuntas sabemos que $V_{\eta_2}^* V_{\eta_1} = 0$.

Luego si $\varphi \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_2}$ entonces:

$$\langle V_{\eta_1}\varphi, V_{\eta_2}\psi \rangle = \langle V_{\eta_2}^* V_{\eta_1}\varphi, \psi \rangle = 0$$

□

3.3. La serie discreta de representaciones

En general nos interesará el problema de averiguar qué representaciones unitarias admiten un vector admisible.

Es fácil ver que una tal representación será necesariamente cuadrado integrable. Un vector admisible será, como ya hemos observado, cíclico y cuadrado integrable. Ahora, la existencia de un vector cíclico y cuadrado integrable η implica que la representación es cuadrado integrable. Esto es porque $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ y $\mathcal{D}_\pi$ es $\pi(G)$-invariante, de modo que $\{\pi(x)\eta : x \in G\} \subset \mathcal{D}_\pi$, y como η es cíclico sigue que $\mathcal{D}_\pi$ contiene un subespacio denso de $\mathcal{H}_\pi$. Por lo tanto, debemos concentrarnos en las representaciones unitarias y cuadrado integrables.

En esta sección veremos que cualquier representación unitaria, irreducible y cuadrado integrable admite un vector admisible. Más aún, veremos que las representaciones anteriores siempre son unitariamente equivalentes a una subrepresentación irreducible de la representación regular izquierda, la colección de estas representaciones se conoce como la *serie discreta*.

En función de lo que hemos visto, lo anterior quiere decir que las representaciones unitarias, irreducibles y cuadrado integrables son esencialmente las representaciones de la serie discreta. Esto es porque las equivalencias unitarias mandan vectores cíclicos, cuadrado integrables o admisibles en vectores con la misma propiedad.

Comenzamos viendo que, en general, el hecho de que una representación unitaria cualquiera admita un vector admisible implica que la misma es unitariamente equivalente a una subrepresentación de la representación regular izquierda.

Proposición 3.13. *Si existe $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ admisible, entonces $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es unitariamente equivalente a una subrepresentación de $(L, L^2(G))$.*

Demostración. Como $V_\eta : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow L^2(G)$ es una isometría entonces $ranV_\eta \subset L^2(G)$ es un subespacio cerrado. Además, sabemos que $V_\eta \pi(x) = L_x V_\eta \ \forall \ x \in G$ por lo que $ranV_\eta$ es $L(G)$-invariante. Por lo tanto, $(L|_{ranV_\eta}, ranV_\eta)$ es una subrepresentación de $(L, L^2(G))$.

Dado que $V_\eta : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow ranV_\eta$ es unitario sigue que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es unitariamente equivalente a $(L|_{ranV_\eta}, ranV_\eta)$. $\square$

El siguiente lema nos será útil más adelante para probar el resultado anunciado al comienzo de esta sección.

Lema 3.14. *Supongamos que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es irreducible y $0 \neq \eta \in \mathcal{H}_\pi$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $V_\eta \varphi \in L^2(G)$.*
2. *η es cuadrado integrable.*
3. *Existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda\eta$ es admisible.*

Además, si las anteriores son ciertas entonces puede tomarse:

$$\lambda = \frac{\|\eta\|}{\|V_\eta \eta\|}$$

Demostración. Es claro que la tercera afirmación implica la segunda y que esta implica la primera, por lo tanto sólo resta probar que la primera afirmación implica la tercera.

Supongamos que existe $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $V_\eta \varphi \in L^2(G)$, entonces $\mathcal{D}_\eta \neq \{0\}$. Además, sabemos que $\mathcal{D}_\eta$ es $\pi(G)$-invariante.

Por otra parte, $V_\eta : \mathcal{D}_\eta \longrightarrow L^2(G)$ es un operador de intercambio cerrado entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(L, L^2(G))$. Entonces por el Corolario 2.22 del Lema de Schur $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{H}_\pi$ y existe $\alpha \geq 0$ tal que $V_\eta = \alpha S$ para una isometría $S : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow L^2(G)$.

Como $V_\eta \eta(e) = \langle \eta, \eta \rangle \neq 0$ y $V_\eta \eta$ es una función continua, sigue que $V_\eta \eta \neq 0$ en $L^2(G)$. Por lo tanto se tiene que $\alpha \neq 0$, más aún:

$$\alpha^2 \|\eta\|^2 = \langle V_\eta \eta, V_\eta \eta \rangle = \|V_\eta \eta\|^2$$

Tomemos λ tal que:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{\|\eta\|}{\|V_\eta \eta\|}$$

Luego se tiene que:

$$S\varphi(x) = \lambda V_\eta \varphi(x) = \lambda \langle \varphi, \pi(x)\eta \rangle = \langle \varphi, \pi(x)\lambda\eta \rangle = V_{\lambda\eta}\varphi(x)$$

Por lo tanto, $V_{\lambda\eta}$ es una isometría. □

A continuación queremos probar que las funciones continuas de soporte compacto son cuadrado integrables para la representación regular izquierda, para lo cual nos será útil la siguiente observación.

Dada $f \in L^1(G)$ podemos definir una forma sesquilineal de $\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$(\eta, \varphi) \longmapsto \int_G f(x) \langle \pi(x)\eta, \varphi \rangle dx$$

Además, podemos ver que se trata de una forma acotada porque:

$$\left| \int_G f(x) \langle \pi(x)\eta, \varphi \rangle dx \right| \leq \int_G |f(x)| |\langle \pi(x)\eta, \varphi \rangle| dx \leq \|f\|_1 \|\eta\| \|\varphi\|$$

Luego, por una aplicación del teorema de representación de Riesz, sabemos que existe un único operador acotado $\pi_f : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ tal que:

$$\langle \pi_f \eta, \varphi \rangle = \int_G f(x) \langle \pi(x)\eta, \varphi \rangle dx$$

En el siguiente lema emplearemos esta idea considerando como representación unitaria de G a la representación regular derecha $(R, L^2(G))$.

Lema 3.15. *Toda $g \in C_c(G)$ es cuadrado integrable para $(L, L^2(G))$.*

Demostración. Fijemos $g \in C_c(G)$ y consideremos la función $h : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$h(x) = \frac{\overline{g(x)}}{\sqrt{\Delta(x)}}$$

Entonces $h \in C_c(G)$, en particular $h \in L^1(G)$.

Por otra parte tenemos que si $f \in L^2(G)$ entonces:

$$\begin{aligned}
V_g f(x) &= \int_G f(y)\overline{L_x g(y)}dy \\
&= \int_G f(y)\overline{g(x^{-1}y)}dy \\
&= \int_G \overline{g(y)} f(xy)dy \\
&= \int_G \frac{\overline{g(y)}}{\sqrt{\Delta(y)}}\sqrt{\Delta(y)} f(xy)dy \\
&= \int_G h(y)R_y f(x)dy
\end{aligned}$$

Queremos ver que la última integral es $R_h f(x)$ y para ello basta verificar que:

$$\left\langle \int_G h(y)R_y f(.)dy, p \right\rangle = \int_G h(x)\langle R_x f, p\rangle dx \ \forall\ p \in L^2(G)$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_G h(y)R_y f(.)dy, p \right\rangle &= \int_G \left[\int_G h(y)R_y f(x)dy\right]\overline{p(x)}dx \\
&= \int_G \int_G h(y)R_y f(x)\overline{p(x)}dydx \\
&= \int_G \int_G h(y)R_y f(x)\overline{p(x)}dxdy \\
&= \int_G h(y) \int_G R_y f(x)\overline{p(x)}dxdy \\
&= \int_G h(y)\langle R_y f, p\rangle dy
\end{aligned}$$

Para justificar el uso del teorema de Fubini observamos que por el teorema de Tonelli $(x,y) \longmapsto h(y)R_y f(x)\overline{p(x)}$ está en $L^1(\mu \times \mu)$ pues:

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} |h(y)R_y f(x)p(x)| d(\mu\times\mu)(x,y) &= \int_G \int_G |h(y)||R_y f(x)||p(x)| dxdy \\ &= \int_G |h(y)| \int_G |R_y f(x)|\overline{|p(x)|} dxdy \\ &= \int_G |h(y)| \langle |R_y f|, |p|\rangle dy \leq \|h\|_1 \|f\|_2 \|p\|_2\end{aligned}$$

Hemos probado que $V_g = R_h$ y como $ranR_h \subset L^2(G)$ entonces g es cuadrado integrable. $\square$

Cabe observar que, como las funciones continuas de soporte compacto son densas en $L^2(G)$, entonces la proposición anterior implica que $(L, L^2(G))$ es siempre cuadrado integrable.

Finalmente, a partir de los resultados anteriores probaremos que las representaciones unitarias, irreducibles y cuadrado integrables de G son unitariamente equivalentes a representaciones de la serie discreta y que además siempre admiten un vector admisible.

Teorema 3.16. *Supongamos que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es irreducible. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es cuadrado integrable.*
2. *Existe $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ admisible.*
3. *$(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es unitariamente equivalente a una subrepresentación de $(L, L^2(G))$.*

Demostración. Ya hemos probado que la primera afirmación implica la segunda y que esta implica la tercera, luego sólo resta probar que la tercera afirmación implica la primera.

Supongamos entonces que existe un operador de intercambio isométrico $T : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow L^2(G)$ y llamemos $P : L^2(G) \longrightarrow ranT$ a la proyección ortogonal.

Como $C_c(G)$ es denso en $L^2(G)$ entonces $P(C_c(G))$ es denso en $ranT$, luego $\mathcal{D} = T^{-1}P(C_c(G))$ es denso en $\mathcal{H}_\pi$.

Supongamos que $f \in L^2(G)$ y $\eta \in \mathcal{H}_\pi$. Como $f - Pf \perp ranT$ entonces tenemos que:

$$\langle L_x f - L_x Pf, T\eta\rangle = \langle f - Pf, L_{x^{-1}} T\eta\rangle = \langle f - Pf, T\pi(x^{-1})\eta\rangle = 0$$

Lo anterior quiere decir que $PL_x = L_x P$.

Ahora consideremos $\eta \in \mathcal{D}$ tal que $T\eta = Pg$ para cierta $g \in C_c(G)$.

$$\langle \varphi, \pi(x)\eta \rangle = \langle T\varphi, L_x T\eta \rangle = \langle T\varphi, L_x Pg \rangle = \langle T\varphi, PL_x g \rangle = \langle P^* T\varphi, L_x g \rangle$$

Como $g \in C_c(G)$ es cuadrado integrable sigue que $V_\eta \varphi = V_g P^* T\varphi \in L^2(G)$.

Por lo tanto, η es cuadrado integrable $\forall\ \eta \in \mathcal{D}$ y como $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\pi$ es denso en $\mathcal{H}_\pi$ entonces $\mathcal{D}_\pi$ es denso en $\mathcal{H}_\pi$. $\square$

3.4. El operador de Duflo-Moore

Dada una representación unitaria, irreducible y cuadrado integrable hemos visto que la misma es unitariamente equivalente a una subrepresentación de la serie discreta y que siempre admite algún vector admisible. A estas representaciones se les puede asociar un operador, el operador de Duflo-Moore, que permite dar una caracterización de los vectores admisibles de la representación. Antes de definir este operador debemos introducir algunas herramientas que nos serán útiles.

Vamos a considerar un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un subespacio vectorial $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ denso y una forma sesquilineal $Q : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir que es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda). Supondremos además que Q es simétrica y definida positiva, de acuerdo a las definiciones siguientes:

1. Q es **simétrica** si $Q(\varphi, \psi) = \overline{Q(\psi, \varphi)}\ \forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$.
2. Q es **definida positiva** si $Q(\varphi, \varphi) > 0\ \forall\ 0 \neq \varphi \in \mathcal{D}$.

También pediremos que Q sea cerrada.

Definición 3.17. *Diremos que Q es **cerrada** si para cada sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{D}$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{H}$ y $Q(\varphi_m - \varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) \longrightarrow 0$ se cumple que $\varphi \in \mathcal{D}$ y $Q(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n) \longrightarrow 0$.*

Podemos definir un producto interno $\langle\langle , \rangle\rangle$ en $\mathcal{D}$ tal que $(\mathcal{D}, \langle\langle , \rangle\rangle)$ sea un espacio de Hilbert si Q es cerrada.

$$\langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle = Q(\varphi, \psi) + \langle \varphi, \psi \rangle\ \forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

Si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy según $\langle\langle , \rangle\rangle$ entonces es de Cauchy según $\langle , \rangle$ y por lo tanto $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{H}$. Además, $Q(\varphi_m - \varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) \longrightarrow 0$ por lo que $\varphi \in \mathcal{D}$ y $Q(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n) \longrightarrow 0$. Por lo tanto $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ según $\langle\langle , \rangle\rangle$.

Llamaremos $\mathcal{K} = \mathcal{D}$ al espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, \langle\langle , \rangle\rangle)$ resultante de dotar a $\mathcal{D}$ del producto interno definido.

El teorema siguiente nos permite asociar a Q un operador autoadjunto densamente definido.

Teorema 3.18. *Existe un operador $A : \mathcal{D}_A \longrightarrow \mathcal{H}$ densamente definido en $\mathcal{H}$ y autoadjunto tal que:*

$$Q(\varphi, \psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}\ \forall\ \psi \in \mathcal{D}_A$$

Además, $\mathcal{D}_A$ es un subespacio denso de $\mathcal{D}$ según $\langle\langle , \rangle\rangle$.

Demostración. Comencemos observando que la restricción a $\mathcal{D}$ de una funcional lineal y continua de $\mathcal{H}$ es una funcional lineal y continua de $\mathcal{K}$, es decir que es continua respecto de $\langle\langle , \rangle\rangle$. En efecto, si $\phi \in \mathcal{H}^*$ y el elemento de $\mathcal{H}$ asociado a ϕ por el teorema de representación de Riesz es φ, entonces se tiene que:

$$|\phi(\eta)| = |\langle \eta, \varphi \rangle| \leq \|\eta\|_{\mathcal{H}} \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\eta\|_{\mathcal{K}} \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \ \forall\ \eta \in \mathcal{D}$$

Sean $R_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$ y $R_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^*$ los anti isomorfismos dados por el teorema de representación de Riesz y $r : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{K}^*$ la restricción de dominio. Llamamos $j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ al mapa lineal definido por:

$$j = R_{\mathcal{K}}^{-1} r R_{\mathcal{H}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "R_{\mathcal{H}}"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "R_{\mathcal{K}}"] \\ \mathcal{H}^* \arrow[r, "r"'] & \mathcal{K}^* \end{tikzcd}$$

Cabe observar que el cálculo realizado para ver que la restricción de una funcional continua de $\mathcal{H}$ es una funcional continua de $\mathcal{K}$, permite ver también que el mapa r es acotado. En consecuencia, se deduce que el mapa j es acotado.

Llamemos $i : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ a la inclusión natural y notemos que si $\eta \in \mathcal{H}$ y $\varphi \in \mathcal{K}$ entonces se tiene:

$$\langle i\varphi, \eta \rangle = (R_{\mathcal{H}}\eta) i\varphi = (r R_{\mathcal{H}}\eta)\varphi = (R_{\mathcal{K}} j\eta)\varphi = \langle\langle \varphi, j\eta \rangle\rangle$$

Como $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$ lo anterior implica que j es inyectivo.

Sea $C : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ el mapa definido por:

$$C = ij$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "C"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{H} \\ & \mathcal{K} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Es claro que C es acotado e inyectivo ya que es la composición de operadores con estas propiedades. Además, C es autoadjunto porque si $\eta, \varphi \in \mathcal{H}$, entonces:

$$\langle C\eta, \varphi\rangle = \langle\langle j\eta, j\varphi\rangle\rangle = \overline{\langle\langle j\varphi, j\eta\rangle\rangle} = \overline{\langle C\varphi, \eta\rangle} = \langle \eta, C\varphi\rangle$$

Sean $\mathcal{D}_B = C\mathcal{H}$ y $B : \mathcal{D}_B \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $BC\eta = \eta$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$. A continuación veremos que $\mathcal{D}_B$ es denso en $\mathcal{D}$ según $\langle\langle, \rangle\rangle$. Cabe observar que como $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$ y $\| \|_{\mathcal{H}} \leq \| \|_{\mathcal{K}}$, entonces lo que vamos a probar implica que $\mathcal{D}_B$ es denso en $\mathcal{H}$ según $\langle, \rangle$.

Primero veremos que $rR_{\mathcal{H}}\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{K}^*$. Para ello, supongamos por absurdo que esto no es cierto, entonces existe $0 \neq \lambda \in \mathcal{K}^{**}$ tal que:

$$\lambda(rR_{\mathcal{H}}\psi) = 0 \ \forall \ \psi \in \mathcal{H}$$

Sabemos que los espacios de Hilbert son reflexivos, luego existe $\varphi_\lambda \in \mathcal{K}$ tal que $\lambda\phi = \phi\varphi_\lambda$ para todo $\phi \in \mathcal{K}^*$. Además, como $\lambda \neq 0$, entonces $\varphi_\lambda \neq 0$. Por lo tanto, se tiene que:

$$0 = \lambda(rR_{\mathcal{H}}\psi) = (rR_{\mathcal{H}}\psi)\varphi_\lambda = \langle i\varphi_\lambda, \psi\rangle \ \forall \ \psi \in \mathcal{H}$$

Lo anterior es absurdo porque implica que $\varphi_\lambda = 0$. En consecuencia, se deduce que $rR_{\mathcal{H}}\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{K}^*$.

Como $R_{\mathcal{K}}$ es una isometría, entonces se tiene que $j\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{K}$. En otras palabras, hemos probado que $\mathcal{D}_B$ es denso en $\mathcal{D}$ según $\langle\langle, \rangle\rangle$.

Supongamos que $\varphi \in \mathcal{D}$ y $\psi \in \mathcal{D}_B$. Sabemos que existe $\psi' \in \mathcal{H}$ tal que $\psi = C\psi'$, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, B\psi\rangle = \langle\langle \varphi, jB\psi\rangle\rangle &= Q(\varphi, ijB\psi) + \langle \varphi, ijB\psi\rangle \\ &= Q(\varphi, CB\psi) + \langle \varphi, CB\psi\rangle \\ &= Q(\varphi, C\psi') + \langle \varphi, C\psi'\rangle \\ &= Q(\varphi, \psi) + \langle \varphi, \psi\rangle \end{aligned}$$

Es sencillo ver que B es simétrico. Si $\eta, \varphi \in \mathcal{D}_B$, entonces existen $\eta', \varphi' \in \mathcal{H}$ tales que $C\eta' = \eta$ y $C\varphi' = \varphi$, luego el siguiente cálculo muestra que B es simétrico:

$$\langle B\eta, \varphi \rangle = \langle B\eta, C\varphi' \rangle = \langle \eta, \varphi' \rangle = \langle \eta, BC\varphi' \rangle = \langle \eta, B\varphi \rangle$$

Además, B es un operador cerrado. Para probar esto, supongamos que $(\eta_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{D}_B$ tal que $\eta_n \longrightarrow \eta$ en $\mathcal{H}$ y $B\eta_n \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{H}$. Como C es acotado entonces $\eta_n = CB\eta_n \longrightarrow C\varphi$ y esto implica que $\eta = C\varphi \in \mathcal{D}_B$. Luego, $B\eta = BC\varphi = \varphi$ lo que prueba que B es cerrado.

Por último, podemos ver que B es autoadjunto. Como B es simétrico ya sabemos que B^* extiende a B, por lo tanto sólo resta ver que si $\varphi \in \mathcal{D}_{B^*}$ entonces $\varphi \in \mathcal{D}_B$. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{D}_{B^*}$ entonces para todo $\eta \in \mathcal{D}_B$ se tiene que:

$$\langle B\eta, \varphi \rangle = \langle \eta, B^*\varphi \rangle = \langle CB\eta, B^*\varphi \rangle = \langle B\eta, CB^*\varphi \rangle$$

Como $B\mathcal{D}_B = \mathcal{H}$ lo anterior implica que $\varphi = CB^*\varphi$, y por lo tanto $\varphi \in \mathcal{D}_B$.

Para finalizar la demostración, tomamos $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_B$ y $A : \mathcal{D}_A \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $A = B - Id_{\mathcal{D}_A}$. Entonces se tiene que A es un operador densamente definido y autoadjunto tal que:

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle = Q(\varphi, \psi) \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}, \ \forall \ \psi \in \mathcal{D}_A$$

□

Corolario 3.19. *Existe un operador $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ cerrado, inyectivo y positivo tal que:*

$$Q(\varphi, \psi) = \langle T\varphi, T\psi \rangle \ \forall \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

Demostración. Como Q es definida positiva, el operador A hallado en el teorema anterior es definido positivo. Entonces, usando el Teorema 4.25, se obtiene un operador T densamente definido, autoadjunto y positivo que cumple que $T^2 = A$.

Luego si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_A$ se tiene que:

$$Q(\varphi, \psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \varphi, T^2\psi \rangle = \langle T\varphi, T\psi \rangle$$

Observamos que T es acotado según $\langle\langle , \rangle\rangle$ ya que:

$$\|T\varphi\|^2 = Q(\varphi, \varphi) \leq \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}_A$$

Como $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}$ es denso según $\langle\langle , \rangle\rangle$, entonces existe una única extensión continua según $\langle\langle , \rangle\rangle$ de T a $\mathcal{D}$, y como Q y $\langle , \rangle$ son acotados según $\langle\langle , \rangle\rangle$, sigue cumpliéndose que:

$$Q(\varphi, \psi) = \langle T\varphi, T\psi \rangle \ \forall \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

Para ver que T es inyectivo simplemente observamos que como Q es definida positiva entonces:

$$\|T\varphi\|^2 = Q(\varphi, \varphi) = 0 \iff \varphi = 0$$

Para probar que T es cerrado supongamos que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ y $T\varphi_n \longrightarrow \psi$ en $\mathcal{H}$. Entonces se tiene que $(T\varphi_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$, por lo tanto $Q(\varphi_m - \varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) = \|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 \longrightarrow 0$. Luego, $\varphi \in \mathcal{D}$ y además:

$$\|T\varphi - T\varphi_n\|^2 = Q(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto $T\varphi = \psi$ en $\mathcal{H}$ y sigue que T es cerrado. □

Ahora podemos definir el operador de Duflo-Moore asociado a una representación unitaria, irreducible y cuadrado integrable.

Teorema 3.20. *Supongamos $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es irreducible y cuadrado integrable. Entonces:*

1. *Existe un operador densamente definido, cerrado e inyectivo $C_\pi : \mathcal{D}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ tal que:*

$$\langle C_\pi\eta_1, C_\pi\eta_2 \rangle \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle V_{\eta_2}\varphi_1, V_{\eta_1}\varphi_2 \rangle \ \forall \ \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi, \ \forall \ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_\pi$$

2. *$\eta \in \mathcal{H}_\pi$ es admisible si y sólo si $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ y $\|C_\pi\eta\| = 1$.*

3. *Si G es unimodular entonces $\mathcal{D}_\pi = \mathcal{H}_\pi$ y existe $c_\pi > 0$ tal que puede tomarse:*

$$C_\pi = c_\pi Id_{\mathcal{H}_\pi}$$

Demostración. Comencemos por la primera afirmación.

Fijemos $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ con $\|\varphi\| = 1$ y definamos $B_\varphi : \mathcal{D}_\pi \times \mathcal{D}_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$B_\varphi(\eta_1, \eta_2) = \langle V_{\eta_2}\varphi, V_{\eta_1}\varphi \rangle = \int_G \langle \varphi, \pi(x)\eta_2 \rangle \langle \pi(x)\eta_1, \varphi \rangle dx$$

Es claro que B_φ es una forma sesquilineal simétrica; queremos ver que además es definida positiva y cerrada para luego aplicar el Corolario 3.19.

Como π es irreducible, si $\eta \neq 0$ entonces η es cíclico, y por lo tanto $\{\pi(x)\eta : x \in G\}^\perp = \{0\}$. Luego existe $x \in G$ tal que $\langle \varphi, \pi(x)\eta \rangle \neq 0$.

Dado que $V_\eta \varphi$ es continua, lo anterior implica que $V_\eta \varphi \neq 0$ en $L^2(G)$ y por lo tanto:

$$B_\varphi(\eta, \eta) = \int_G \langle \varphi, \pi(x)\eta \rangle \langle \pi(x)\eta, \varphi \rangle dx = \int_G |V_\eta \varphi(x)|^2 dx = \|V_\eta \varphi\|^2 > 0$$

Luego B_φ es definida positiva.

Para ver que es cerrada supongamos que $(\eta_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{D}_\pi$ tal que $\eta_n \longrightarrow \eta$ en $\mathcal{H}_\pi$ y satisface que $B_\varphi(\eta_m - \eta_n, \eta_m - \eta_n) \longrightarrow 0$.

Entonces $(V_{\eta_n} \varphi)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en $L^2(G)$ pues:

$$B_\varphi(\eta_m - \eta_n, \eta_m - \eta_n) = \|V_{\eta_m} \varphi - V_{\eta_n} \varphi\|^2$$

Luego existe $f \in L^2(G)$ tal que $V_{\eta_n} \varphi \longrightarrow f$ en $L^2(G)$. Por un resultado de teoría de la medida sabemos que existe una subsucesión que converge puntualmente a f en casi todo punto, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V_{\eta_n} \varphi(x) \longrightarrow f(x)$ para casi todo $x \in G$.

Por otro lado tenemos:

$$|V_\eta \varphi(x) - V_{\eta_n} \varphi(x)| = |\langle \varphi, \pi(x)(\eta - \eta_n) \rangle \leq \|\varphi\| \|\eta - \eta_n\| = \|\eta - \eta_n\|$$

Sigue que $V_{\eta_n} \varphi(x) \longrightarrow V_\eta \varphi(x) \; \forall \; x \in G$. Esto implica que $V_\eta \varphi(x) = f(x)$ en casi todo $x \in G$ y por lo tanto $V_\eta \varphi = f$ en $L^2(G)$.

Gracias al Lema 3.14, lo anterior prueba que $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ y también implica que:

$$B_\varphi(\eta - \eta_n, \eta - \eta_n) = \|V_\eta \varphi - V_{\eta_n} \varphi\|^2 = \|f - V_{\eta_n} \varphi\|^2 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto B_φ es cerrada.

Como B_φ es una forma sesquilineal, simérica, definida positiva y cerrada, entonces sabemos que existe un operador $C_\pi : \mathcal{D}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ cerrado e inyectivo tal que:

$$B_\varphi(\eta_1, \eta_2) = \langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2 \rangle \; \forall \; \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$$

Ahora supongamos que $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ con $\|\xi\| = 1$. Como $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es cuadrado integrable entonces, por el Lema 3.14, si $0 \neq \eta \in \mathcal{D}_\pi$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda\eta$ es admisible. Lo anterior equivale a decir que existe una isometría $S : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow L^2(G)$ tal que $\lambda V_\eta = S$ y por lo tanto:

$$B_\xi(\eta, \eta) = \langle V_\eta \xi, V_\eta \xi \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \langle S\xi, S\xi \rangle = \frac{1}{\lambda^2}$$

La última expresión vale para cualquier $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ con $\|\xi\| = 1$. Luego $B_\xi(\eta, \eta) = B_\varphi(\eta, \eta)\ \forall\ \eta \in \mathcal{D}_\pi$. Entonces, usando la identidad de polarización, se obtiene que $B_\xi = B_\varphi$ para $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ con $\|\xi\| = 1$ y sigue que si $\xi \neq 0$ entonces:

$$\frac{\langle V_{\eta_2}\xi, V_{\eta_1}\xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle} = B_{\frac{\xi}{\|\xi\|}}(\eta_1, \eta_2) = B_\varphi(\eta_1, \eta_2) = \langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle\ \forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$$

Más en general, si $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ es cualquiera, entonces:

$$\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle \langle \xi, \xi\rangle = \langle V_{\eta_2}\xi, V_{\eta_1}\xi\rangle\ \forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$$

Supongamos que $\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle \neq 0$ para ciertos $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$, entonces tenemos la siguiente forma sesquilineal simétrica de $\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto \frac{\langle V_{\eta_2}\varphi_1, V_{\eta_1}\varphi_2\rangle}{\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle}$$

Conocemos el valor de esta forma cuando $\varphi_1 = \varphi_2$; luego usando la identidad de polarización se tiene que:

$$\frac{\langle V_{\eta_2}\varphi_1, V_{\eta_1}\varphi_2\rangle}{\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle} = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$$

Esto prueba la primera afirmación cuando $\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle \neq 0$, mientras que si $\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle = 0$, entonces consideramos la forma sesquilineal simétrica de $\mathcal{H}_\pi \times \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto \langle V_{\eta_2}\varphi_1, V_{\eta_1}\varphi_2\rangle$$

Como la misma vale cero siempre que $\varphi_1 = \varphi_2$, sigue por la identidad de polarización que si $\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2\rangle = 0$ entonces:

$$\langle V_{\eta_2}\varphi_1, V_{\eta_1}\varphi_2\rangle = 0$$

Para la segunda afirmación observamos que $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ es admisible si y sólo si $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ y V_η es una isometría. Lo último es equivalente a que:

$$\langle C_\pi \eta, C_\pi \eta\rangle \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle V_\eta \varphi_1, V_\eta \varphi_2\rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle\ \forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_\pi$$

Lo anterior es cierto si y sólo si $\|C_\pi \eta\| = 1$.

Para probar la tercera afirmación supongamos que G es unimodular.

Dada $f \in L^2(G)$ definimos $f^* : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Observemos que $f^* \in L^2(G)$ ya que, como G es unimodular, usando el Teorema 2.8, se tiene:

$$\int_G |f^*(x)|^2 dx = \int_G |f(x^{-1})|^2 \Delta(x^{-1}) dx = \int_G |f(x)|^2 dx$$

Además se cumple que:

$$\langle f^*, g^* \rangle = \langle g, f \rangle \ \forall \ f, g \in L^2(G)$$

Esto es porque:

$$\int_G \overline{f(x^{-1})} g(x^{-1}) dx = \int_G \overline{f(x^{-1})} g(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) dx = \int_G \overline{f(x)} g(x) dx$$

Si $\eta, \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene que:

$$V_\eta \varphi^*(x) = \overline{\langle \varphi, \pi(x^{-1}) \eta \rangle} = \langle \eta, \pi(x) \varphi \rangle = V_\varphi \eta(x)$$

Entonces si $\eta_1, \eta_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_\pi$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2 \rangle \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \langle V_{\eta_2} \varphi_1, V_{\eta_1} \varphi_2 \rangle \\
&= \langle V_{\eta_1} \varphi_2^*, V_{\eta_2} \varphi_1^* \rangle \\
&= \langle V_{\varphi_2} \eta_1, V_{\varphi_1} \eta_2 \rangle \\
&= \langle C_\pi \varphi_1, C_\pi \varphi_2 \rangle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle
\end{aligned}$$

Si fijamos $0 \neq \varphi_1 = \varphi_2 \in \mathcal{D}_\pi$ entonces lo anterior implica que existe $c_\pi > 0$ tal que:

$$\langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2 \rangle = c_\pi^2 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$$

Ahora consideremos $\eta, \varphi \in \mathcal{H}_\pi$ arbitrarios y una sucesión $(\eta_n)_{n \geq 1}$ en $\mathcal{D}_\pi$ tal que $\eta_n \longrightarrow \eta$ en $\mathcal{H}_\pi$.

$$\begin{aligned}
\|V_{\eta_n} \varphi - V_{\eta_m} \varphi\|^2 = \|V_{\eta_n - \eta_m} \varphi\|^2 &= \langle \varphi, \varphi \rangle \langle C_\pi(\eta_n - \eta_m), C_\pi(\eta_n - \eta_m) \rangle \\
&= c_\pi^2 \|\varphi\|^2 \|\eta_n - \eta_m\|^2
\end{aligned}$$

Entonces $(V_{\eta_n} \varphi)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en $L^2(G)$ y por lo tanto converge a cierta $f \in L^2(G)$. Tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que la convergencia es puntual en casi todo punto.

Por otra parte, $(V_{\eta_n} \varphi)_{n \geq 1}$ converge puntualmente a $V_\eta \varphi$ pues:

$$|V_\eta \varphi(x) - V_{\eta_n} \varphi(x)| = |\langle \varphi, \pi(x)(\eta - \eta_n) \rangle \leq \|\eta - \eta_n\| \|\varphi\|$$

Luego $V_\eta \varphi = f$ en $L^2(G)$ y por lo tanto $\eta \in \mathcal{D}_\pi$. Es decir que si G es unimodular entonces $\mathcal{D}_\pi = \mathcal{H}_\pi$.

Por último notamos que:

$$\langle c_\pi \eta_1, c_\pi \eta_2 \rangle = \langle C_\pi \eta_1, C_\pi \eta_2 \rangle$$

Por lo tanto podemos tomar $C_\pi = c_\pi Id_{\mathcal{H}_\pi}$. □

3.5. Las transformadas wavelet continuas del grupo afín

En esta sección emplearemos las herramientas que hemos desarrollado para hallar las transformadas wavelet continuas del grupo afín cuando consideramos la representación unitaria $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ que hemos introducido en los preliminares:

$$\pi(b,a)f(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Será conveniente trabajar con la transformada de Fourier, de cuya teoría los principales resultados pueden encontrarse en el apéndice.

Observamos que:

$$(\widehat{\pi(b,a)} f)(\omega) = \sqrt{|a|} e^{-ib\omega} \hat{f}(a\omega)$$

Proposición 3.21. *Sean $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ y la siguiente constante no necesariamente finita:*

$$c_\eta^2 = \int_{\mathbb{R}^\times} \frac{|\hat{\eta}(a)|^2}{|a|} da$$

Entonces para cada $g \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple que:

$$\|V_\eta g\|_2 = c_\eta \|g\|_2$$

En particular η es cuadrado integrable si y sólo si $c_\eta < \infty$ y es admisible si y sólo si $c_\eta = 1$.

Demostración. Vamos a usar el teorema de Plancherel:

$$\begin{aligned}
\|V_\eta g\|_2^2 &= \int_G |\langle g, \pi(b,a)\eta\rangle|^2 d\mu(b,a) \\
&= \int_G |\langle \hat{g}, \widehat{\pi(b,a)\eta}\rangle|^2 d\mu(b,a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)\sqrt{|a|}e^{ib\omega}\overline{\hat{\eta}(a\omega)}d\omega \right|^2 \frac{dbda}{|a|^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)\overline{\hat{\eta}(a\omega)}e^{ib\omega}d\omega \right|^2 \frac{dbda}{|a|}
\end{aligned}$$

Definimos $\phi_a(\omega) = \hat{g}(\omega)\overline{\hat{\eta}(a\omega)}$, entonces tenemos:

$$\|V_\eta g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi_a}(-b)|^2 db \frac{da}{|a|}$$

Ahora aplicamos nuevamente el teorema de Plancherel:

$$\begin{aligned}
\|V_\eta g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)\overline{\hat{\eta}(a\omega)}|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^\times} |\hat{g}(\omega)|^2 |\hat{\eta}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \int_{\mathbb{R}^\times} |\hat{\eta}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} d\omega
\end{aligned}$$

Observamos que $|a|^{-1}da$ es una medida de Haar bi invariante para $(\mathbb{R}^\times, \times)$: esto puede probarse en forma idéntica a como se probó que $|a|^{-2}dbda$ es una medida de Haar para el grupo afín. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|V_\eta g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \int_{\mathbb{R}^\times} |\hat{\eta}(a)|^2 \frac{da}{|a|} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \int_{\mathbb{R}^\times} |\hat{\eta}(a)|^2 \frac{da}{|a|} = c_\eta^2 \|g\|_2^2
\end{aligned}$$

Por el Teorema 4.8, lo anterior se cumple aún cuando c_η no es finito. $\square$

La proposición anterior también implica que, si η es no nulo, entonces V_η es inyectivo, en particular, η es un vector cíclico. Luego, todos los vectores no nulos de $L^2(\mathbb{R})$ son cíclicos y esto implica que $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ es irreducible. Además, como es irreducible y posee vectores admisible entonces $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ es también cuadrado integrable por el Teorema 3.16.

Ahora que sabemos que $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ es irreducible y cuadrado integrable puede interesarnos hallar el operador de Duflo-Moore. Como el grupo afín no es unimodular no cabe esperar que este operador sea un múltiplo de la identidad.

Proposición 3.22. *El operador de Duflo-Moore asociado a* $(\pi, L^2(\mathbb{R}))$ *es* $C_\pi : \mathcal{D}_\pi \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ *tal que:*

$$\widehat{(C_\pi \eta)}(\omega) = \frac{\hat{\eta}(\omega)}{\sqrt{|\omega|}}$$

Demostración. Llamemos T al operador propuesto en el enunciado de la proposición, es decir que $T : \mathcal{D}_\pi \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es el operador dado por la siguiente expresión:

$$\widehat{(T\eta)}(\omega) = \frac{\hat{\eta}(\omega)}{\sqrt{|\omega|}}$$

Consideremos $\eta \in \mathcal{D}_\pi$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces por el teorema de Plancherel tenemos que:

$$\langle T\eta, T\eta\rangle\langle g, g\rangle = \langle \widehat{T\eta}, \widehat{T\eta}\rangle\langle g, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\eta}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \|g\|_2 = c_\eta^2 \|g\|_2^2$$

Por lo tanto, la Proposición 3.21 implica que:

$$\langle V_{\eta_2} g, V_{\eta_1} g\rangle = \langle T\eta_1, T\eta_2\rangle\langle g, g\rangle \; \forall \; \eta_1 = \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$$

En efecto, en cada lado de la igualdad tenemos una forma sesquilineal simétrica definida en $\mathcal{D}_\pi \times \mathcal{D}_\pi$. Como la igualdad es cierto cuando $\eta_1 = \eta_2$, entonces la identidad de polarización implica que la igualdad vale siempre.

Ahora, fijados $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$ tales que $\langle T\eta_1, T\eta_2\rangle \neq 0$ tenemos:

$$\langle V_{\eta_2} g_1, V_{\eta_1} g_2\rangle = \langle T\eta_1, T\eta_2\rangle\langle g_1, g_2\rangle \; \forall \; g_1 = g_2 \in L^2(\mathbb{R})$$

En efecto, esta vez en cada lado de la igualdad tenemos una forma sesquilineal simétrica definida en $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ que coinciden cuando $g_1 = g_2$; entonces nuevamente por la identidad de polarización son iguales.

Finalmente, si fijamos $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi$ tales que $\langle T\eta_1, T\eta_2\rangle = 0$ entonces:

$$\langle V_{\eta_2} g_1, V_{\eta_1} g_2\rangle = 0 \; \forall \; g_1 = g_2 \in L^2(\mathbb{R})$$

Nuevamente razonando en la misma forma se concluye que en este caso la igualdad vale cualesquiera sean $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

Por lo tanto:

$$\langle V_{\eta_2} g_1, V_{\eta_1} g_2\rangle = \langle T\eta_1, T\eta_2\rangle\langle g_1, g_2\rangle \; \forall \; \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}_\pi \; \forall \; g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$$

□

3.6. Idempotentes de convolución

Recordamos que, tal como lo hicimos en la demostración del Teorema 3.20, dada una función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ podemos definir otra función $f^* : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante:

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

Además, dadas $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles, se define su convolución $f * g$ en los puntos en los que la siguiente integral converge:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

Nos interesará lo que ocurre cuando consideramos funciones en $L^2(G)$

Proposición 3.23. *1. Si $f, g \in L^2(G)$ entonces $g * f^* \in C_0(G)$.*

2. Si $(g * f)(x)$ está definido entonces:

$$(g * f)^*(x) = (f^* * g^*)(x)$$

Demostración. En primer lugar observamos que:

$$(g * f^*)(x) = \int_G g(y)\overline{f(x^{-1}y)}dy = \langle g, L_x f\rangle = V_f g(x)$$

Por lo tanto la integral converge absolutamente en cada $x \in G$ y también sabemos que $g * f^* \in C_b(G)$.

Supongamos ahora que $f, g \in C_c(G)$. Entonces si $(g * f^*)(x) \neq 0$ debe cumplirse que exista $y \in G$ tal que $y^{-1}x \in sop(f)^{-1}$ e $y \in sop(g)$. Por lo tanto $sop(g * f^*) \subset sop(g)sop(f)^{-1}$ y es compacto por ser un subconjunto cerrado de un compacto. Entonces en este caso $g * f^* \in C_c(G) \subset C_0(G)$.

Si $f, g \in L^2(G)$ son funciones cualesquiera entonces podemos tomar sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ en $C_c(G)$ tales que $f_n \longrightarrow f$ y $g_n \longrightarrow g$ en $L^2(G)$.

$$\begin{aligned} |(g * f^*)(x) - (g_n * f_n^*)(x)| &= |\langle g, L_x f\rangle - \langle g_n, L_x f_n\rangle| \\ &= |\langle g - g_n, L_x f\rangle + \langle g_n, L_x f - L_x f_n\rangle| \\ &\leq \|g - g_n\|_2 \|f\|_2 + \|g_n\|_2 \|f - f_n\|_2 \end{aligned}$$

Como $g_n \longrightarrow g$ en $L^2(G)$, entonces $\|g_n\|_2$ está acotada y lo anterior implica que $(g_n * f_n^*)(x) \longrightarrow (g * f^*)(x)$ uniformemente. Dado que $C_0(G)$ es cerrado según la norma infinito sigue que $g * f^* \in C_0(G)$.

Para probar la segunda afirmación alcanza con hacer el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
(g * f)^*(x) &= \overline{\int_G g(y)f(y^{-1}x^{-1})dy} \\
&= \int_G g^*(y^{-1})f^*(xy)dy \\
&= \int_G g^*((x^{-1}y)^{-1})f^*(y)dy \\
&= \int_G f^*(y)g^*(y^{-1}x)dy = (f^* * g^*)(x)
\end{aligned}$$

□

Cabe observar que, tal como se vio en la proposición anterior, se cumple que si $f \in L^2(G)$ entonces el operador de coeficientes asociado a f, cuando consideramos la representación regular izquierda, está dado por:

$$V_f g = g * f^* \ \forall \ g \in L^2(G)$$

Ahora podemos definir los idempotentes de convolución.

Definición 3.24. *Decimos que $S \in L^2(G)$ es un **idempotente de convolución** si cumple que:*

$$S = S * S^* = S^*$$

Al comienzo de la sección anterior vimos que si una representación unitaria admite un vector asmisible entonces dicha representación es unitariamente equivalente a una subrepresentación de la representación regular izquierda. Los idempotentes de convolución nos permitirán caracterizar las subrepresentaciones anteriores.

Proposición 3.25.

1. *Sean $S \in L^2(G)$ un idempotente de convolución y $\mathcal{H} = \overline{span}(L(G)S)$. Entonces la proyección ortogonal $P : L^2(G) \longrightarrow \mathcal{H}$ está dada por:*

$$Pf = f * S = V_S f$$

2. *Si $T \in L^2(G)$ es otro idempotente de convolución tal que $L^2(G) * T = \mathcal{H}$, entonces $T = S$.*

3. *$S \in L^2(G)$ es un idempotente de convolución si y sólo si existen una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y un vector admisible $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ tales que $S = V_\eta \eta$.*

Demostración. Supongamos que $f \in span(L(G)S)$; podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $x \in G$ tal que $f = L_x S$, el argumento siguiente no se modifica al tomar combinaciones lineales finitas de funciones como la anterior.

$$\begin{aligned}
(f * S)(y) &= (L_x S * S)(y) \\
&= \int_G S(x^{-1}z)S(z^{-1}y)dz \\
&= \int_G S(z)S(xz^{-1}y)dz \\
&= \int_G S(z)\overline{S(y^{-1}zx^{-1})}dz \\
&= \int_G S(yz)\overline{S(zx^{-1})}dz \\
&= \int_G S(yz)S(xz^{-1})dz \\
&= \int_G S(x^{-1}yz)S(z^{-1})dz \\
&= \overline{\int_G S(z^{-1}y^{-1}x)S(z)dz} \\
&= \overline{(S * S)(y^{-1}x)} = (S * S)^*(x^{-1}y) = L_x(S * S)^*(y) = f(y)
\end{aligned}$$

Es decir que $(f * S) = f \ \forall \ f \in span(L(G)S)$, mientras que si $f \in \mathcal{H}^{\perp}$ se tiene que $(f * S) = 0$ pues:

$$(f * S)(y) = \int_G f(x)S(x^{-1}y)dx = \int_G f(x)\overline{S(y^{-1}x)}dx = \langle f, L_y S\rangle = 0$$

Por lo tanto $P = V_S$ en un subespacio denso de $L^2(G)$. Ahora, si $f \in L^2(G)$ podemos tomar una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en dicho subespacio tal que $f_n \longrightarrow f$ en $L^2(G)$. Como P es acotado y $V_S f_n = P f_n \ \forall \ n \geq 1$ lo anterior implica que $V_S f_n \longrightarrow Pf$ en $L^2(G)$, y como V_S es un operador cerrado sigue que $f \in \mathcal{D}_S$ y $V_S f = Pf$. Esto prueba la primera afirmación.

Para probar la segunda afirmación observemos que, como $V_T = P = V_S$, entonces:

$$T = T^* = (V_S T)^* = (T * S)^* = S^* * T^* = S * T = V_T S = S$$

Ahora probemos el recíproco de la tercera afirmación. Para ello notemos que:

$$V_\eta \eta(x) = \langle \eta, \pi(x)\eta\rangle = \langle \pi(x^{-1})\eta, \eta\rangle = \overline{V_\eta \eta(x^{-1})} = (V_\eta \eta)^*(x)$$

Además, de acuerdo a la Proposición 3.8, como la proyección ortogonal sobre $ranV_\eta$ está dada por convolución a derecha con $V_\eta \eta$ sigue que:

$$V_\eta \eta = V_\eta \eta * V_\eta \eta = V_\eta \eta * (V_\eta \eta)^*$$

Por lo tanto $V_\eta \eta$ es un idempotente de convolución.

Para el directo definamos $\mathcal{H}_\pi = L^2(G) * S$ y tomemos $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ como la restricción de L a $\mathcal{H}_\pi$. Sabemos que $\mathcal{H}_\pi = \overline{span}(L(G)S)$ es cerrado e invariante a izquierda, por lo que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una subrepresentación de la representación regular izquierda. Además, si $\eta = S$ entonces $V_\eta : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow L^2(G)$ es la proyección sobre $\mathcal{H}_\pi$ y por lo tanto es una isometría.

Finalmente observemos que:

$$V_\eta \eta = \eta * \eta^* = S * S^* = S$$

$\square$

Dada una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ con un vector admisible η vimos que $V_\eta : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow ranV_\eta$ es una equivalencia unitaria entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(L|_{ranV_\eta}, ranV_\eta)$.

Según la proposición anterior $S = V_\eta \eta$ es un idempotente de convolución, y sabemos, por la Proposición 3.8, que la proyección sobre $ranV_\eta$ está dada por convolución a derecha con $V_\eta \eta$, por lo que $ranV_\eta = L^2(G) * S$. Además, la proposición anterior prueba que S es el único idempotente de convolución que cumple lo anterior.

Recíprocamente, si $S \in L^2(G)$ es un idempotente de convolución entonces $L^2(G) * S$ es un subespacio cerrado e invariante a izquierda y S es un vector admisible para $(L|_{L^2(G)*S}, L^2(G) * S)$.

Por lo tanto, para conocer, a menos de equivalencias unitarias, las representaciones que poseen vectores admisibles, nos alcanza con conocer los subespacios $L^2(G) * S$ con $S \in L^2(G)$ un idempotente de convolución.

3.7. Un ejemplo sencillo

Hemos visto que si una representación unitaria posee un vector admisible, entonces es unitariamente equivalente a una subrepresentación de la representación regular izquierda. Además, en la sección anterior vimos que las subrepresentaciones anteriores corresponden a los subespacios de la forma $L^2(G) * S$, con S un idempotente de convolución.

En esta sección estudiaremos el caso en que $G = \mathbb{R}$ con la suma, que es llamado *toy example* en [2], comenzando por el problema de caracterizar los subespacios cerrados e invariantes a izquierda de $L^2(\mathbb{R})$. Una vez que hayamos resuelto el problema anterior, fijaremos un tal subespacio y daremos una condición de admisibilidad, respecto de la subrepresentación asociada, para los vectores del subespacio considerado. Finalmente, caracterizaremos aquellos subespacios cerrados e invariantes a izquierda en los que la condición se satisface en algún vector.

En varias oportunidades recurriremos al análisis de Fourier y nos serán útiles las siguientes notaciones. Dado $\tau \in \mathbb{R}$ definiremos $e_\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $e_\tau(\omega) = e^{-i\tau\omega}$. Además, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiremos su trasladada a izquierda por τ como la función $f_\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_\tau(t) = f(t - \tau)$.

Observemos que $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado e invariante a izquierda si y sólo si su imagen por la transformada de Fourier $\hat{\mathcal{H}} \subset L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado e invariante por multiplicación por exponenciales. La observación anterior se debe a que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ y a la siguiente propiedad:

$$\widehat{f_\tau} = e_\tau \hat{f}$$

Dado $U \subset \mathbb{R}$ medible definiremos el siguiente subespacio de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}_U = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : m(sop\hat{f} \setminus U) = 0\}$$

Proposición 3.26. *Sea $U \subset \mathbb{R}$ medible. Entonces $\mathcal{H}_U$ es un subespacio cerrado e invariante a izquierda de $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\hat{\mathcal{H}}_U$ la imagen de $\mathcal{H}_U$ por la transformada de Fourier. Nos alcanza probar que $\hat{\mathcal{H}}_U$ es un subespacio cerrado e invariante por multiplicación por exponenciales.

Como $\hat{\mathcal{H}}_U = \{\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) : m(sop\hat{f} \setminus U) = 0\}$, entonces es claro que $\hat{\mathcal{H}}_U$ es un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ invariante por multiplicación por exponenciales.

Para ver que $\hat{\mathcal{H}}_U$ es cerrado alcanza probar que $\hat{\mathcal{H}}_U = \hat{\mathcal{H}}_{U^c}^\perp$. La inclusión $\hat{\mathcal{H}}_U \subset \hat{\mathcal{H}}_{U^c}^\perp$ es inmediata. Para probar la igualdad observamos que si $\hat{f} \notin \hat{\mathcal{H}}_U$ entonces existe $V \subset U^c$ de medida positiva tal que $\hat{f}$ no se anula en V. Luego, como vemos a continuación, $\hat{f}\chi_V$ es un elemento de $\hat{\mathcal{H}}_{U^c}$ que no es ortogonal a $\hat{f}$, es decir que $\hat{f} \notin \hat{\mathcal{H}}_{U^c}^\perp$.

Notar que:

$$V = \bigcup_{n \geq 1} V \cap \{\omega \in \mathbb{R} : |\hat{f}(\omega)| \geq 1/n\}$$

Como la unión es numerable y V tiene medida positiva, existe $n \geq 1$ tal que $V \cap \{\omega \in \mathbb{R} : |\hat{f}(\omega)| \geq 1/n\}$ tiene medida positiva, y por lo tanto:

$$\langle \hat{f}, \hat{f}\chi_V \rangle = \int_V |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{n^2} m(V \cap \{\omega \in \mathbb{R} : |\hat{f}(\omega)| \geq 1/n\}) > 0$$

□

A continuación veremos que todos los subespacios cerrados e invariantes a izquierda de $L^2(\mathbb{R})$ son de la forma $\mathcal{H}_U$ para algún conjunto $U \subset \mathbb{R}$ medible.

Teorema 3.27. *Todo subespacio cerrado e invariante a izquierda de* $L^2(\mathbb{R})$ *es de la forma* $\mathcal{H}_U$ *para algún* $U \subset \mathbb{R}$ *medible. Además, si* $U, V \subset \mathbb{R}$ *son medibles, entonces* $\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_V$ *si y sólo si* $U \Delta V$ *tiene medida nula.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado e invariante a izquierda. Llamemos $\hat{\mathcal{H}} \subset L^2(\mathbb{R})$ a la imagen de $\mathcal{H}$ por la transformada de Fourier y $P : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}$ a la proyección ortogonal.

Dadas $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ sabemos que $g - Pg \perp Ph$ y, como $\hat{\mathcal{H}}$ es invariante por multiplicación por exponenciales, entonces también se cumple que $g - Pg \perp e_\tau Ph$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, esto es:

$$\int_{\mathbb{R}} (g - Pg)\overline{Ph} e_{-\tau} dm = 0$$

Estamos considerando la medida de Lebesgue normalizada por $\sqrt{2\pi}$.

Lo anterior quiere decir que la transformada de Fourier de $(g - Pg)\overline{Ph}$ es nula. La función anterior es el producto de dos funciones de $L^2(\mathbb{R})$ por lo que, por la desigualdad de Minkowski, se trata de una función que está en $L^1(\mathbb{R})$. Entonces, el teorema de inversión implica que $(g - Pg)\overline{Ph} = 0$.

Como $(g - Pg)\overline{Ph} = 0$ se tiene que $(g - Pg)Ph = 0$. Hemos probado que:

$$gPh = PgPh \ \forall \ g, h \in L^2(\mathbb{R})$$

La expresión anterior implica, cambiando g por h, que:

$$gPh = hPg \ \forall \ g, h \in L^2(\mathbb{R})$$

Fijemos $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $h(t) > 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, podemos tomar $h(t) = e^{-|t|}$. Lo anterior nos permite definir en casi todo punto una función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\varphi(t) = \frac{Ph(t)}{h(t)}$$

Ahora, sabemos que se cumple lo siguiente:

$$Pg = \varphi g \ \forall \ g \in L^2(\mathbb{R})$$

Observemos que como $P^2 = P$ se cumple que para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$ vale la siguiente igualdad:

$$\varphi g = Pg = P^2 g = \varphi Pg = \varphi^2 g$$

Por lo tanto $\varphi^2 = \varphi$ y esto implica que $\varphi(t) \in \{0, 1\}$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Como $g \in \hat{\mathcal{H}}$ si y sólo si $Pg = g$, se deduce que $\hat{\mathcal{H}} = \{g \in L^2(\mathbb{R}) : m(\text{sup}g \setminus \text{sup}\varphi) = 0\}$.

Luego, si definimos $U = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 1\}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{H}_U$ y esto prueba la primera afirmación.

Para probar la segunda afirmación supongamos que $U, V \subset \mathbb{R}$ son medibles. Observemos que basta probar que $\hat{\mathcal{H}}_U = \hat{\mathcal{H}}_V$ si y sólo si $U\Delta V$ tiene medida nula.

Si $U\Delta V$ tiene medida positiva podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $U \setminus V$ tiene medida positiva. Luego si $A \subset U \setminus V$ es un conjunto de medida positiva y finita, se cumple que $\chi_A \in \hat{\mathcal{H}}_U$ pero $\chi_A \notin \hat{\mathcal{H}}_V$. Es decir que si $U\Delta V$ no tiene medida nula entonces $\hat{\mathcal{H}}_U \neq \hat{\mathcal{H}}_V$.

Recíprocamente, si existe $\hat{g} \in \hat{\mathcal{H}}_U$ tal que $\hat{g} \notin \hat{\mathcal{H}}_V$ entonces existe un subconjunto de medida positiva $A \subset V^c$ donde $\hat{g}$ no se anula, y este conjunto cumple que $A \setminus U$ tiene medida nula. Por lo tanto:

$$m(U\Delta V) \geq m(A) > 0$$

$\square$

Antes de continuar probaremos el siguiente lema.

Lema 3.28. *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $f * g^* \in L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R})$. Además, si lo anterior ocurre se cumple que:*

$$\widehat{f * g^*} = \hat{f}\overline{\hat{g}}$$

Demostración. En primer lugar observamos que:

$$(f * g^*)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}dx = \langle f, g_t \rangle$$

Como $g \in L^2(\mathbb{R})$ es claro que $g_t \in L^2(\mathbb{R})$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por el teorema de Plancherel aplicado a f y g_t tenemos que:

$$(f * g^*)(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}e^{it\omega}d\omega$$

Consideremos la función $h(t) = (f * g^*)(-t)$. Observamos que $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^1(\mathbb{R})$ por ser el producto de dos funciones que están en $L^2(\mathbb{R})$ y h es su transformada de Fourier pues:

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}e^{-it\omega}d\omega$$

Ahora podemos aplicar el Teorema 4.8: $h \in L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R})$. Como $h \in L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $f * g^* \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $f * g^* \in L^2(\mathbb{R})$.

Finalmente, si $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R})$, entonces existe su preimagen por la transformada de Fourier. Como además $\hat{f}\overline{\hat{g}} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces el Teorema 4.7 y la siguiente igualdad prueban que dicha preimagen es $f * g^*$.

$$(f * g^*)(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}e^{it\omega}d\omega$$

□

Dado un subespacio $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R})$ cerrado e invariante a izquierda sabemos que existe un conjunto medible $U \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_U$. Ahora queremos caracterizar a los vectores admisibles de $(L|_{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$.

Teorema 3.29. *Sean $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $f \in \mathcal{H}_U$. Entonces f es un vector admisible de $\mathcal{H}_U$ si y sólo si $|\hat{f}(\omega)| = 1$ para casi todo $\omega \in U$.*

Demostración. Si $g \in \mathcal{D}_f$ sabemos que:

$$V_f g = g * f^*$$

Entonces el Lema 3.28 implica que:

$$\widehat{V_f g} = \hat{g}\overline{\hat{f}}$$

Llamemos M al operador de multiplicación por $\overline{\hat{f}}$. Queremos definir M de modo que tome valores en $L^2(\mathbb{R})$. El Lema 3.28 nos permite afirmar que el dominio natural para que esto ocurra es $\{\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{g}\overline{\hat{f}} \in L^2(\mathbb{R})\} = \hat{\mathcal{D}}_f$. Entonces lo anterior implica que:

$$V_f = \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}$$

Como $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es una isometría, su restricción a $\mathcal{D}_f$ también lo es. Entonces f será admisible si y sólo si M es una isometría.

Sigue que f es un vector admisible de $\mathcal{H}_U$ si y sólo si $|\hat{f}(\omega)| = 1$ para casi todo $\omega \in U$ □

También podemos ver que f es un vector cíclico de $\mathcal{H}_U$ si y sólo si $\hat{f}(\omega) \neq 0$ en casi todo $\omega \in U$. En este caso se tiene que f es cíclico sí y sólo si el operador de multiplicación por $\overline{\hat{f}}$ es inyectivo, de donde deriva la condición planteada.

Usando el resultado anterior podemos caracterizar los subespacios cerrados e invariantes a izquierda que admiten vectores admisibles, así como los idempotentes de convolución de $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.30. *Sean $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $S \in L^2(\mathbb{R})$.*

1. *$\mathcal{H}_U$ admite vectores admisibles si y sólo si U tiene medida finita.*
2. *S es un idempotente de convolución si y sólo si $\hat{S} = \chi_V$ en $L^2(\mathbb{R})$ para cierto $V \subset \mathbb{R}$ de medida finita.*

Demostración. Para la primera afirmación observamos si $f \in \mathcal{H}_U$ es un vector admisible, entonces $|\hat{f}(\omega)| = 1$ en casi todo $\omega \in U$. Como $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ necesariamente U tiene medida finita. Recíprocamente, si U tiene medida finita, entonces su función característica está en $L^2(\mathbb{R})$ y la preimagen de la misma por la transformada de Fourier es un vector admisible de $\mathcal{H}_U$.

Para el directo de la segunda afirmación comenzamos recordando que si S es un idempotente de convolución entonces es un vector admisible para $L^2(\mathbb{R}) * S$. Además, como $L^2(\mathbb{R}) * S$ es un subespacio cerrado e invariante a izquierda, sabemos que existe $V \subset \mathbb{R}$ medible tal que $\mathcal{H}_V = L^2(\mathbb{R}) * S$ y esto implica que $|\hat{S}(\omega)| = 1$ en casi todo $\omega \in V$.

Es fácil verificar que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$ por lo que se tiene que:

$$\hat{S} = (\widehat{S * S^*}) = \hat{S}\overline{\widehat{S^*}} = \hat{S}^2$$

Es decir que $\hat{S} = \hat{S}^2$ y esto implica que $\hat{S}(\omega) = 1$ en casi todo $\omega \in V$. Por lo tanto $\hat{S} = \chi_V$ en $L^2(\mathbb{R})$, y necesariamente V es de medida finita.

Para el recíproco supongamos que $\hat{S} = \chi_V$ para cierto $V \subset \mathbb{R}$ de medida finita.

Como $\widehat{S^*} = \overline{\hat{S}} = \hat{S}$ y la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ entonces $S^* = S$. Además como $\hat{S}\overline{\widehat{S^*}} \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $S * S^* \in L^2(\mathbb{R})$, y se cumple que:

$$\widehat{S * S^*} = \hat{S}\overline{\widehat{S^*}} = \hat{S}$$

Por lo tanto también tenemos que $S*S^* = S$, y sigue que S es un idempotente de convolución. $\square$

4. Apéndice

4.1. Transformada de Fourier

En esta sección se recogen los enunciados de algunos resultados importantes sobre la transformada de Fourier, la mayor parte de los cuales fueron tomados de [3].

Vamos a considerar una medida μ, definida a partir de la medida de Lebesgue sobre los reales, de modo que $\sqrt{2\pi}d\mu = dm$ y trabajaremos con los espacios $L^p = L^p(\mu)$. Emplearemos la normalización anterior tan sólo para simplificar la notación.

Definición 4.1. *Dada $f \in L^1$ definimos su **transformada de Fourier** $\hat{f}$ mediante:*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Cabe observar que, como $f \in L^1$, entonces la integral anterior converge para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.2. *Si $f \in L^1$, entonces $\hat{f} \in C_0$ y se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

A continuación se listan algunas de las propiedades básicas que cumple la transformada de Fourier.

Proposición 4.3. *Sean $g, h \in L^1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $f(t) = g(t)e^{i\alpha t}$, entonces $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - \alpha)$.*
2. *Si $f(t) = g(t - \alpha)$, entonces $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)e^{-i\alpha\omega}$.*
3. *Si $f = g * h$, entonces $\hat{f} = \hat{g}\hat{h}$.*
4. *Si $f(t) = \overline{g(-t)}$, entonces $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}$.*
5. *Si $f(t) = g(\alpha^{-1}t)$ y $\alpha > 0$, entonces $\hat{f}(\omega) = \alpha\hat{g}(\alpha\omega)$.*
6. *Si f es tal que $-itf(t) = g(t)$, entonces $\hat{f}$ es diferenciable y $\hat{f}' = \hat{g}$.*

Una de las principales propiedades de la transformada de Fourier es que existe una fórmula de inversión.

Teorema 4.4 (Teorema de Inversión)**.** *Sean $f \in L^1$, tal que $\hat{f} \in L^1$, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:*

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Entonces $g \in C_0$ y $f(t) = g(t)$ en casi todo punto.

Corolario 4.5 (Teorema de Unicidad)**.** *Si $f \in L^1$ y $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo $\omega \in \mathbb{R}$, entonces $f(t) = 0$ en casi todo $t \in \mathbb{R}$.*

Hasta ahora hemos definido un operador $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow C_0$, podemos restringir el dominio de este operador a $L^1 \cap L^2$ y extender su codominio a L^2. El operador resultante de la restricción anterior puede extenderse por continuidad a L^2, esta extensión se llama transformada de Plancherel, o transformada de Fourier al igual que el mapa original.

Teorema 4.6 (Teorema de Plancherel)**.** *Puede asociarse a cada $f \in L^2$ una función $\hat{f} \in L^2$ de modo que se cumplan las siguientes propiedades:*

1. *Si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f que se definió previamente, es decir:*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

2. *El mapa $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$ tal que $f \longrightarrow \hat{f}$ es unitario.*

3. *Dada $f \in L^2$, definimos para cada $A \in \mathbb{R}$ las siguiente funciones:*

$$\varphi_A(\omega) = \int_{-A}^{A} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Entonces $\|f - \psi_A\|_2, \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 \longrightarrow 0$ cuando $A \longrightarrow \infty$.

La última afirmación se conoce como el teorema de inversión para L^2 y permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Si $f \in L^2$ y $\hat{f} \in L^1$, entonces para casi todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Según el teorema de Plancherel si $f \in L^2$ entonces $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Esto último se generaliza a funciones en L^1 como puede verse en el ejemplo 2.28 de [2].

Teorema 4.8. *Si $f \in L^1$, entonces $f \in L^2$ si y sólo si $\hat{f} \in L^2$.*

En particular, si $f \in L^1$ entonces también se cumple que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

4.2. Teoría espectral

4.2.1. Operadores acotados

En esta sección se incluyen las definiciones y resultados fundamentales para poder enunciar el teorema de cálculo funcional continuo para operadores acotados. Por más detalles puede consultarse [4].

Vamos a considerar operadores acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

Definición 4.9. *El **espectro de un operador** $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es invertible}\}$$

*El **radio espectral** de T se define como:*

$$r(T) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Puede decirse lo siguiente acerca del espectro y el radio espectral de un operador acotado.

Teorema 4.10. *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$. Además, $r(T) \leq \|T\|$.*

En el caso de que el operador sea autoadjunto el espectro está contenido en $\mathbb{R}$ y el radio espectral es exactamente la norma del operador.

Teorema 4.11. *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ y $r(T) = \|T\|$.*

Ahora podemos enunciar el teorema de cálculo funcional para un operador acotado y autoadjunto.

Teorema 4.12 (Cálculo funcional continuo)**.** *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto. Entonces existe un único mapa $\phi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con las siguientes propiedades:*

1. *ϕ es un $*$-homomorfismo algebraico, es decir que es un homomorfismo que cumple que $\phi(\overline{h}) = \phi(h)^*$ para toda función de Borel acotada h.*

2. *ϕ es continuo y $\|\phi(h)\| = \|h\|_\infty$.*

3. *Si $h(\lambda) = \lambda \ \forall \ \lambda \in \sigma(T)$, entonces $\phi(h) = T$.*

4. *Si $T\varphi = \lambda\varphi$ para cierto $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\phi(h)\varphi = h(\lambda)\varphi$.*

5. *$\sigma(\phi(h)) = \{h(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Cabe observar que es común emplear la notación $h(T)$ para $\phi(h)$ y que emplearemos indistintamente ambas notaciones.

El cálculo funcional en el caso de polinomios corresponde a lo esperado, si $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ es un polinomio y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, entonces:

$$p(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$$

Como T es autoadjunto $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, entonces si $p \in C(\sigma(T))$ es un polinomio su conjugado también es un polinomio perteneciente a $C(\sigma(T))$. Por lo tanto, los polinomios de $C(\sigma(T))$ forman una subálgebra autoadjunta que separa puntos (si $\alpha, \beta \in \sigma(T)$ son distintos existe un polinomio p tal que $p(\alpha) \neq p(\beta)$) y no se anula (si $\alpha \in \sigma(T)$ existe un polinomio p tal que $p(\alpha) \neq 0$). Luego, el teorema de Stone-Weierstrass implica que los polinomios de $C(\sigma(T))$ son densos en $C(\sigma(T))$.

Si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador que conmuta con T, entonces es claro que también conmuta con $p(T)$ para cualquier polinomio $p \in C(\sigma(T))$. Ahora, si $f \in C(\sigma(T))$, podemos tomar una sucesión de polinomios $(p_n)_{n\geq 1}$ que converja a f en $C(\sigma(T))$ y el Teorema 4.12 implica que $p_n(T) \longrightarrow f(T)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Luego se deduce que:

$$f(T)S = Sf(T) \ \forall \ f \in C(\sigma(T))$$

4.2.2. Operadores no acotados

En esta sección se incluyen las definiciones y resultados fundamentales para poder enunciar dos versiones del teorema espectral para operadores no acotados: la de operador de multiplicación (sólo válida para espacios de Hilbert separables) y la de cálculo funcional. Por más detalles puede consultarse [4].

Un operador densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapa lineal $T : \mathcal{D}_T \longrightarrow \mathcal{H}$ definido en un subespacio vectorial denso de $\mathcal{H}$. El subespacio $\mathcal{D}_T$ en el que está definido el operador se llama dominio del operador.

Definición 4.13. *El **gráfico de un operador** T densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es el subespacio $G_r(T) = \{(\eta, T\eta) : \eta \in \mathcal{D}_T\}$ de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Diremos que T es un **operador cerrado** si su gráfico es cerrado.*

Definición 4.14. *Sean T_1 y T_2 operadores densamente definidos sobre $\mathcal{H}$. Diremos que T_2 es una* ***extensión*** *de T_1 si se cumple que $G_r(T_1) \subset G_r(T_2)$, denotaremos lo anterior mediante $T_1 \subset T_2$.*

Definición 4.15. *Diremos que un operador T densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es* ***clausurable*** *si admite una extensión cerrada. En tal caso, existe una extensión cerrada $\overline{T}$ de T tal que cualquier otra extensión cerrada de T es una extensión de $\overline{T}$; llamamos a $\overline{T}$* ***clausura*** *de T.*

Existe la siguiente relación entre los gráficos de un operador clausurable y su clausura.

Proposición 4.16. *Si T es clausurable entonces $G_r(\overline{T}) = \overline{G_r(T)}$.*

A continuación se define el adjunto de un operador.

Definición 4.17. *Sea T un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Definimos $\mathcal{D}_{T^*}$ como el conjunto de los $\eta \in \mathcal{H}$ para los que existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que:*

$$\langle T\psi, \eta \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \ \forall \ \psi \in \mathcal{D}_T$$

También definimos $T^*\eta = \varphi$. El operador resultante T^* se llama ***adjunto*** *de T.*

Cabe observar que como T es densamente definido si $\eta \in \mathcal{D}_{T^*}$ entonces $T^*\eta$ queda definido en forma única por la relación anterior:

$$\langle T\psi, \eta \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \ \forall \ \psi \in \mathcal{D}_T$$

También observamos que si $S \subset T$ son operadores densamente definidos sobre $\mathcal{H}$, entonces $T^* \subset S^*$.

En general, no es cierto que $\mathcal{D}_{T^*}$ es denso en $\mathcal{H}$. Sin embargo, si T^* es un operador densamente definido, entonces puede definirse T^{**} y se tiene la siguiente relación entre el operador adjunto y la clausura.

Teorema 4.18. *Sea T un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Entonces:*

1. *T^* es cerrado.*
2. *T es clausurable si y sólo si $\mathcal{D}_{T^*}$ es denso y en ese caso $\overline{T} = T^{**}$.*
3. *Si T es clausurable, entonces $\overline{T}^* = T^*$.*

Ahora definiremos los operadores simétricos y autoadjuntos.

Definición 4.19. *Diremos que un operador T densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es* ***simétrico*** *si $T \subset T^*$.*

Notar que T es simétrico si y sólo si $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_T^*$ y se cumple que:

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T\psi \rangle \ \forall \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}_T$$

Los operadores simétricos son siempre clausurables porque $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$ y esto implica que $\mathcal{D}_{T^*}$ es denso. Además, como T^* es una extensión cerrada de T, se tiene que:

$$T \subset T^{**} \subset T^*$$

Si además se tiene que T es cerrado entonces:

$$T = T^{**} \subset T^*$$

Definición 4.20. *Diremos que un operador T densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es* ***autoadjunto*** *si $T = T^*$.*

En el caso de operadores autoadjuntos se cumple que:

$$T = T^{**} = T^*$$

Teorema 4.21. *Sea T un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es autoadjunto.*
2. *T es cerrado y $ker(T^* \pm i) = \{0\}$.*
3. *$ran(T \pm i) = \mathcal{H}$.*

A continuación veremos una clase especial de operadores densamente definidos y autoadjuntos. En realidad, veremos más adelante que todos los operadores densamente definidos y autoadjuntos, en espacios separables, son de esta forma.

Proposición 4.22. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, con μ una medida finita, y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y finita en casi todo punto. Definimos un operador M_f en $\mathcal{D}_{M_f} = \{g \in L^2(\mu) : fg \in L^2(\mu)\}$ mediante:*

$$M_f g = fg$$

Entonces M_f es un operador densamente definido sobre $L^2(\mu)$ que es autoadjunto.

Además, M_f es acotado si y sólo si f es esencialmente acotada y en tal caso se cumple que:

$$\|M_f\| = \|f\|_{ess} = inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

La siguiente versión del teorema espectral para operadores no acotados nos dice que todos los operadores densamente definidos y autoadjuntos son de la forma anterior, a menos de una conjugación por una isometría.

Teorema 4.23 (Teorema Espectral - operador de multiplicación)**.** *Sea T un operador densamente definido sobre el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y autoadjunto. Entonces existen un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, con μ una medida finita, un operador unitario $U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mu)$, y una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y finita en casi todo punto, tales que:*

1. *$\eta \in \mathcal{D}_T$ si y sólo si $U\eta \in \mathcal{D}_{M_f}$.*
2. *Si $g \in U(\mathcal{D}_T)$, entonces $UTU^{-1}g = M_f g$.*

Dada una función de Borel $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos definir un operador $M_{h\circ f} : L^2(X, \mu) \longrightarrow L^2(X, \mu)$ tal que:

$$M_{h\circ f}\, g(t) = h(f(t))g(t)$$

Supongamos que T es el operador del teorema anterior, entonces para cada función función de Borel $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos definir un operador $h(T) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ del siguiente modo:

$$h(T) = U^{-1} M_{h\circ f} U$$

Usando esta definición puede probarse la siguiente versión del teorema espectral para operadores no acotados.

Teorema 4.24 (Teorema Espectral - cálculo funcional)**.** *Sea T un operador autoadjunto densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único mapa ϕ, de las funciones de Borel acotadas de $\mathbb{R}$ en los operadores acotados de $\mathcal{H}$, con las siguientes propiedades:*

1. *ϕ es un $*$-homomorfismo algebraico.*
2. *ϕ es continuo y $\|\phi(h)\| \leq \|h\|_\infty$.*
3. *Si $(h_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones de Borel acotadas tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|h_n(x)| \leq |x|\ \forall\ n \geq 1$ y $h_n(x) \longrightarrow x$, entonces si $\varphi \in \mathcal{D}_T$ se tiene que $\phi(h_n)\varphi \longrightarrow T\varphi$.*
4. *Si $h_n(x) \longrightarrow h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\|h\|_\infty$ es una sucesión acotada, entonces $\phi(h_n) \longrightarrow \phi(h)$ según la norma de los operadores.*
5. *Si $T\varphi = \lambda\varphi$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\phi(h)\varphi = h(\lambda)\varphi$.*

Con más trabajo y recurriendo a medidas espectrales puede probarse el siguiente resultado, por más detalles puede consultarse [4].

Teorema 4.25. *Si T es un operador autoadjunto y positivo ($\langle T\eta, \eta\rangle > 0 \forall\ \eta \in \mathcal{D}_T$), densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único operador positivo S tal que:*

$$T = S^2$$

Referencias

[1] A. Deitmar and S. Echterhoff. *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, 2009.

[2] H. Führ, *Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms*, Springer, 2005.

[3] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1987.

[4] M. Reed and B. Simon,*Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 1980.

[5] M. Duflo and C. C. Moore, *On the regular representation of a non-unimodular locally compact group*, J. Funct. Anal. 21 (1976), 209-243.

[6] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, *Transforms associated to square integrable group representations I: General results*, J. Math. Phys. 26 (1985), 2473-2479.