

TRABAJO MONOGRÁFICO

# Estimación de Longitudes y Áreas

*Una aproximación no paramétrica*

Alejandro Cholaquidis

*Orientador: Ricardo Fraiman*

*Centro de Matemática*

Licenciatura en Matemática

---

Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

## Resumen

El objetivo de ésta monografía es presentar un método para estimar el contenido de Minkowski de un subconjunto  $G$  de  $\mathbb{R}^d$  (donde  $G$  será un subconjunto compacto, igual a la clausura de su interior), así como de mostrar resultados concernientes a la consistencia de dicho método. Si  $G$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  su contenido de Minkowski respresenta su longitud y en  $\mathbb{R}^3$  el área de su superficie. Para dicha estimación nos basaremos en una muestra de  $n$  puntos distribuidos uniformemente en un rectángulo que contenga a  $G$ . La monografía esta basada en [1].

Usaremos la siguiente notación para el contenido de Minkowski:  $L_0(G)$ .

*Palabras Claves:* Contenido de Minkowski, Estimación no paramétrica.

## Abstract

The aim of this monography is to introduce a method to estimate the Minkowski content of a subset  $G$  of  $\mathbb{R}^n$  (where  $G$  will be a compact subset, equal to the closure of its interior) and to show results regarding the consistency of such methods. If  $G$  is a subset of  $\mathbb{R}^2$  its Minkoski content represents its length, and in  $\mathbb{R}^3$  the area of its surface. The estimation will be based on a sample of n point uniformly distributed on a rectangle which includes G. The monography is based on [1].

We will use the following notation for the Minkowski content:  $L_0(G)$ .

*Keywords:* Minkoski content, Non parametric estimation.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
Motivación . . . . .	3
Sobre la aproximación de conjuntos . . . . .	3
Estimación de $\partial S$ . . . . .	4
Estimación del soporte de una densidad . . . . .	5
Sobre la estimación de $L_0(G)$ . . . . .	5
<b>1. Definiciones y resultados previos</b>	<b>7</b>
1.1. Notación . . . . .	7
1.2. Medidas de conjuntos . . . . .	7
1.3. Sobre los conjuntos que estudiaremos . . . . .	9
<b>2. El estimador</b>	<b>12</b>
<b>3. Resultados Teóricos</b>	<b>14</b>
3.1. Primer Resultado . . . . .	14
3.2. Segundo Resultado . . . . .	17
3.2.1. Una cota para $E(L_n)$ . . . . .	17
3.3. Tercer Resultado . . . . .	20
<b>4. Aplicación a casos concretos</b>	<b>23</b>
4.1. El cubo de Tschirnhausen . . . . .	23
<b>A. Apéndice</b>	<b>26</b>
A.1. Desigualdades de tipo Bernstein . . . . .	26
A.1.1. Primera desigualdad . . . . .	26
A.1.2. Segunda desigualdad . . . . .	27
A.1.3. Tercera desigualdad . . . . .	28
A.2. Consistencia de la frontera del estimador de Devroye-Wise a la frontera del conjunto . . . . .	29
A.3. Demostración del Teorema 1.8 . . . . .	30
A.3.1. Definiciones previas . . . . .	30

A.3.2. La demostración . . . . .	31
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

# Introducción

## Motivación

El problema de la estimación de longitudes y áreas de la frontera de un conjunto tiene numerosas aplicaciones, y ha sido desarrollado en varios trabajos en el área de esterología relacionado con el análisis de imágenes. En esta monografía consideraremos este problema desde un punto de vista diferente, usando herramientas de la estimación no paramétrica de conjuntos. En este sentido, se puede considerar la estimación de longitudes y áreas de la frontera como una etapa posterior a la estimación del volumen de un conjunto, la estimación del propio conjunto y la estimación de su frontera. Desde el punto de vista de las aplicaciones, en el análisis de imágenes en medicina, la longitud de la frontera aparece en la definición del “Contour Index”, una medida de forma utilizada como herramienta adicional de diagnóstico. Este capítulo presenta alguno de esos trabajos, en el siguiente presentamos algunas definiciones y conceptos que serán necesarios para leer el capítulo referente a los resultados teóricos, y finalmente, en el capítulo 4, mostramos los resultados de una simulación hecha para calcular la longitud y el área del cubo de Tschirnhausen.

## Sobre la estimación de conjuntos

Existen varios trabajos, (ver [2], [3]), donde se presentan métodos para la estimación de conjuntos. Es de particular interés el caso en que el conjunto es el soporte de una densidad  $f$ , o un conjunto de nivel  $\{x : f(x) \geq \lambda\}$  donde  $\lambda$  es un número real, (ver también [8]). En dichos casos, se parte de una cantidad finita de puntos  $\{X_1, \dots, X_n\}$  y se construye un conjunto que, bajo ciertas hipótesis, converge al conjunto deseado. Un criterio adecuado para medir la proximidad entre dos conjuntos es:

$$d_{\mathcal{L}^d}(T, S) = \mathcal{L}^d(T \Delta S),$$

donde  $\Delta$  denota la diferencia simétrica y  $\mathcal{L}^d$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ . Otra forma es considerar la distancia de Hausdorff entre ellos, definida como:

$$d_H(T, S) = \inf\{\varepsilon > 0 : T \subset S \oplus \varepsilon B \quad y \quad S \subset T \oplus \varepsilon B\},$$

donde  $S \oplus \varepsilon B$  denota la unión de bolas cerradas de radio  $\varepsilon$  con centro en puntos de  $S$ .

### Estimación de $S$ y de su frontera $\partial S$

En [10] se considera el siguiente estimador de  $S \subset \mathbb{R}^d$ :  
 Si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  son puntos al azar correspondientes a una distribución cuyo soporte es  $S$ , se define el estimador:

$$\hat{S}_n(\varepsilon_n) = \bigcup_{i=1}^n B(X_i, \varepsilon_n),$$

donde  $\varepsilon_n$  es una sucesión de números reales. Este estimador, fue propuesto por Devroye, L. y Wise, G.L. en 1980, en relación con un problema de control, donde se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la convergencia casi segura en la métrica de Hausdorff de  $S_n$  a  $S$  - para más detalles, ver [10]. Cuevas y Rodríguez-Casal [2] estudian el problema de la convergencia de las frontera  $\partial S_n$  del estimador de Devroye y Wise a la frontera del conjunto  $\partial S$ . En particular, se demuestra en [2] el siguiente teorema:

**Teorema** Sea  $S \subset \mathbb{R}^d$  compacto. Sean  $X_1, \dots, X_n, \dots$  observaciones independientes de una distribución  $P_X$  con soporte  $S$ .  $\varepsilon_n$  una sucesión de números reales. Si:

- i)  $S \subset \hat{S}_n(\varepsilon_n)$  a partir de un cierto  $n$ , c.s.
- ii)  $\varepsilon_n \rightarrow 0$

entonces

$$d_H(\partial \hat{S}_n, \partial S) \rightarrow 0 \quad c.s..$$

Una demostración de este teorema se encuentra en la segunda sección del Apéndice, o en [2]. En dicho trabajo, se prueban resultados relativos a la velocidad de convergencia del estimador, bajo ciertas hipótesis en  $S$ . Observemos que la condición i) del Teorema es consecuencia de la convergencia en la métrica de Hausdorff del conjunto  $\hat{S}_n(\varepsilon_n)$  a  $S$ , que se verifica bajo las hipótesis de [10],

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \frac{n}{\log(n)} \varepsilon_n^d \rightarrow \infty,$$

para  $n \rightarrow \infty$ .

## Estimación del soporte de una densidad

En [3] se demuestran resultados sobre la estimación del soporte de una densidad  $f$  (es decir el menor cerrado con  $f$ -probabilidad 1) y en [8] resultados relativos a la estimación de conjuntos de nivel de  $f$ . Se parte del estimador de densidad basado en núcleos  $\hat{f}_n$  que se define como:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i),$$

donde  $h = h_n$  es una sucesión de parámetros,  $K$  es una función núcleo, y  $K_h(t) = \frac{1}{h^d} K(t/h)$ .

En [3] se estima  $S$  por:

$$S_n = \{\hat{f}_n > \alpha_n\},$$

donde  $\alpha_n$  es una sucesión que tiende a 0.

En ese mismo trabajo se demuestra que bajo ciertas hipótesis sobre  $K$  y sobre  $S$  hay convergencia de  $S_n$  hacia  $S$  en los dos sentidos mencionados anteriormente, casi seguramente.

En [8] se busca estimar  $L(\lambda) = \{x : f(x) \geq \lambda\}$ .

Se definen:

$$\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\},$$

$$\mathcal{X}_n^+(\lambda) = \{X \in \mathcal{X}_n : \hat{f}_n(X_i) \geq \lambda\},$$

$$\mathcal{X}_n^-(\lambda) = \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{X}_n^+(\lambda),$$

y se estima  $L(\lambda)$  por

$$L_n(\lambda) = ((\mathcal{X}_n^-(\lambda) \oplus r_n B)^c \cap \mathcal{X}_n^+(\lambda)) \oplus r_n B,$$

donde  $r_n$  es una sucesión de números reales (hemos usado la misma notación que al definir  $d_H$ ). En dicho trabajo se demuestra que el estimador  $L_n(\lambda)$  converge a  $L(\lambda)$  c.s bajo ciertas hipótesis en  $K$ , en el parámetro  $h_n$  y en la densidad  $f$ . En ambos trabajos se llega a ordenes distintos, los dos son de la forma  $(n/\log(n))^\alpha$  donde  $\alpha$  depende de  $d$ . (En el caso de [8] puede depender del orden de  $K$ ).

## Sobre la estimación de $L_0(G)$

Como se dijo anteriormente, lo que se hará será presentar un método para aproximar  $L_0(G)$ , (asumiremos sin pérdida de generalidad que  $G \subset [0, 1]^d$ ), a partir de una cantidad finita de puntos con distribución uniforme en  $[0, 1]^d$ .

Supondremos en este marco que además, disponemos de información para determinar si un cierto punto  $X$  está o no en  $G$ . En particular en aquellos puntos tal que la bola de radio epsilon centrada en ellos intersecta a  $G$  y a  $G^c$ .

# Capítulo 1

## Definiciones y resultados previos

### 1.1. Notación

De aquí en adelante, salvo que se especifique lo contrario, vamos a trabajar en  $\mathbb{R}^d$ , usaremos la notación usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para el producto interno, y  $\| \cdot \|$  para la norma Euclidea. Para  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  escribiremos  $e(x) := x/\|x\|$ .  $B(x, r)$  denotará la bola cerrada de centro en el punto  $x$  y radio  $r$ , y  $B := B(0, 1)$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^d$ , entonces  $A^c$ ,  $\overline{A}$ ,  $int(A)$ ,  $\partial A$  y  $conv(A)$  denotan complemento, clausura, interior, borde, y envolvente convexa de  $A$ , respectivamente. Definimos  $diam(A) := \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$  el diámetro de  $A$ . Para  $A, C \subset \mathbb{R}^d$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  escribiremos:

$$\begin{aligned}\lambda A &:= \{\lambda a : a \in A\}, \\ A \oplus C &:= \{a + c : a \in A, c \in C\} \text{ para la suma de Minkowski, y} \\ A \ominus C &:= \{x : x + C \subset A\} \text{ para la diferencia de Minkowski.}\end{aligned}$$

### 1.2. Medidas de conjuntos

**Definición 1.1 (Conjunto Rectificable).** Sea  $E \subset X$  donde  $X$  es un espacio métrico, decimos que  $E$  es *m-rectificable* si existe una función de Lipschitz de un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^m$  sobre  $E$ .

**Definición 1.2 (Medida de Hausdorff de un conjunto).** Sean  $X$  un espacio métrico,  $p \geq 0$ ,  $\delta > 0$  números reales, y  $A \subset X$  definimos:

$$H_{p, \delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (diam(B_j))^p : A \subset \bigcup_j B_j, diam(B_j) \leq \delta \right\},$$

donde convenimos en que  $\inf \emptyset = \infty$ . Es claro que  $H_{p,\delta}(A)$  decrece cuando  $\delta$  tiende a 0.

El número

$$H_p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{p,\delta}(A),$$

se denomina *medida de Hausdorff p-dimensional de A*

**Definición 1.3 (Contenido de Minkowski).** Sean  $S \subset \mathbb{R}^d$  no vacío y acotado, y  $\varepsilon > 0$  un número real. Definimos el contenido inferior de Minkowski, de dimensión  $m$  ( $m \leq d$ ), de  $S$  como:

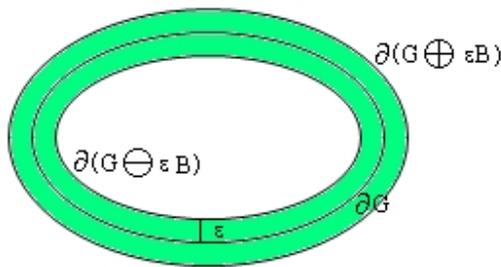
$$\mathcal{M}_{*m}(S) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^d\{x : d(x, S) \leq \varepsilon\}}{\varepsilon^{d-m} \alpha(d-m)},$$

y el superior como:

$$\mathcal{M}^{*m}(S) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^d\{x : d(x, S) \leq \varepsilon\}}{\varepsilon^{d-m} \alpha(d-m)},$$

donde  $\mathcal{L}^d$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  y  $\alpha(d-m)$  es la medida de Lebesgue de la bola de centro cero y radio 1 en  $\mathbb{R}^{d-m}$ . Si ambos valores coinciden, dicho valor se denomina contenido de Minkowski de dimensión  $m$  de  $S$  y se anota  $\mathcal{M}^m(S)$ . Si  $G$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^d$  e igual a la clausura de su interior, anotaremos  $L_0(G)$  al contenido de Minkowski de dimensión  $d-1$  de  $\partial G$  en caso de que éste exista. Es decir:

$$L_0(G) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^d\{x : d(x, \partial G) \leq \varepsilon\}}{2\varepsilon}. \quad (1.1)$$



En [5] se encuentra una prueba del siguiente teorema:

**Teorema 1.4.** Si  $E$  es un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^d$   $m$ -rectificable entonces:

$$\mathcal{M}^m(E) = H_m(E).$$

**Proposición 1.5.** Si  $H_p(A) < \infty$  entonces  $H_q(A) = 0$  para todo  $q > p$ , y si  $H_p(A) > 0$  entonces  $H_q(A) = \infty$  para todo  $q < p$ .

*Demostración.* Es suficiente demostrar la primera afirmación. Si  $H_p(A) < \infty$ , para todo  $\delta > 0$  existe  $B_j$  tal que  $A \subset \cup_j B_j$  y  $\text{diam}B_j \leq \delta$  y

$$\sum_j (\text{diam}B_j)^p \leq H_p(A) + 1.$$

Por otro lado, tenemos que  $(\text{diam}B_j)^{q-p} \leq \delta^{q-p}$  y por lo tanto

$$\sum_j (\text{diam}B_j)^q \leq \delta^{q-p} \sum_j (\text{diam}B_j)^p \leq \delta^{q-p}(H_p(A) + 1),$$

es decir

$$H_{q,\delta} \leq \delta^{q-p}(H_p(A) + 1),$$

finalmente, como  $q > p$  y  $H_p(A) < \infty$ ,  $\delta^{q-p}(H_p(A) + 1)$  tiende a 0 cuando  $\delta$  tiende a 0.  $\square$

De la definición de  $\mathcal{M}^m(S)$  se sigue que una proposición idéntica es válida para el contenido de Minkowski. Sobre propiedades y ejemplos de los conceptos introducidos anteriormente se puede ver [6] y [5].

### 1.3. Sobre los conjuntos que estudiaremos

Nos van a interesar los conjuntos  $G$  tales que para ellos podamos definir  $L_0(G)$ . En esta sección vamos a introducir un concepto que será equivalente a la condición de Lipschitz necesaria para que sea valido el teorema anterior.

**Definición 1.6 (Rodamiento libre de una bola).** Sean  $S$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^d$  y  $r > 0$  un número real, decimos que una bola de radio  $r$  *rueda libremente por fuera de  $S$*  si para todo  $x \in \partial S$  existe  $c \in \mathbb{R}^d$  tal que:

$$x \in B(c, r) \subset \overline{S^c},$$

análogamente decimos que *rueda libremente por dentro de  $S$*  si para todo  $x \in \partial S$  existe  $c \in \mathbb{R}^d$  tal que:

$$x \in B(c, r) \subset S.$$

**Definición 1.7 (Conjunto parcialmente expandible).** Sea  $S \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto de Borel, acotado. Decimos que  $S$  es *parcialmente expandible* si existen una constantes  $r > 0$  y  $C(S) \geq 1$  tal que:

$$d_H(\partial S, \partial(S \oplus \varepsilon B)) \leq C(S)\varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < r. \quad (1.2)$$

Para el caso en que (1.2) se cumple para todo  $\varepsilon > 0$  decimos que  $S$  es *expandible*.

En [2] se demuestra la siguiente proposición:

**Proposición**  $S \subset \mathbb{R}^d$  es parcialmente expandible con constante  $C(S) = 1$  si y solo si para algún  $r > 0$  la bola de radio  $r$  rueda libremente por fuera de  $S$ .

En [7] y en el apéndice del presente trabajo se puede encontrar una prueba de un teorema del cual en particular nos interesan las siguientes equivalencias:

**Teorema 1.8.** Sean  $S \neq \emptyset$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  compacto y conexo por caminos, y  $r_0 > 0$  un número real dado. Son equivalentes:

- i) Una bola de radio  $r$  rueda libremente por dentro de  $S$  y de  $\overline{S^c}$  para todo  $0 \leq r \leq r_0$ .
- ii)  $\partial S$  es una  $d-1$  subvariedad de  $\mathbb{R}^d$  de clase  $C^1$  cuyo vector normal saliente  $n(s)$  en  $s \in \partial S$  satisface la siguiente condición de Lipschitz:

$$\|n(s) - n(t)\| \leq \frac{1}{r_0} \|s - t\| \quad \text{para todo } s, t \in \partial S.$$

**Observación 1.9.** Por el teorema anterior, tenemos que si se cumple i),  $\partial S$  es localmente difeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{d-1}$ , en la demostración del teorema se ve que dicho difeomorfismo es de Lipschitz, y que la union de los dominios de todos los difeomorfismos que permiten cubrir  $\partial S$  son un conjunto acotado, luego si se cumple i) tenemos que  $\partial S$  es rectificable.

**Definición 1.10 (Conjunto Estándar).** Sea  $S \subset \mathbb{R}^d$  de Borel, decimos que  $S$  es estándar respecto a una medida de Borel  $\mu$  si existen  $\lambda > 0$  y  $\delta > 0$  tales que:

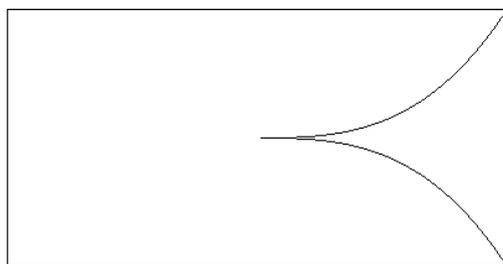
$$\mu(B(x, \varepsilon) \cap S) \geq \delta \mu(B(x, \varepsilon)), \quad \text{para todo } x \in S, \quad 0 < \varepsilon \leq \lambda.$$

**Ejemplo 1.11.** Para el caso en que  $S$  es un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$  es claro que basta tomar  $\delta = 1/4$ , y para el círculo,  $1/4 < \delta < 1/2$ .

**Definición 1.12 (Alcance de un conjunto).** Se define el *alcance* de un conjunto  $G \subset \mathbb{R}^d$  como el supremo de los  $\varepsilon > 0$  (posiblemente infinito) tal que si  $x \in \mathbb{R}^d$  y la distancia de  $x$  a  $G$  (definida como  $\inf_{a \in G} d(x, a)$ ) es menor que  $\varepsilon$  existe un único  $a \in G$  que está a esa distancia.

**Ejemplo 1.13.** Un ejemplo de un conjunto que no es parcialmente expandible, no es estándar, ni rueda libremente por fuera de el, una bola de radio  $\varepsilon$  para ningun  $\varepsilon$ , es el siguiente (extraído de [2]):

Consideremos  $S_1 = \{(x, y) : -1 \leq x < 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1\}$  y  $S_1^-$  la simetría de  $S_1$  respecto del eje  $y = 0$ .



En [4] se demuestra que si  $G$  es un conjunto con alcance  $r_0$  positivo la medida de Lebesgue de  $G \oplus \varepsilon B$  coincide localmente ( $\varepsilon \in (0, r_0)$ ) con un polinomio de grado a lo sumo  $d$ , cuyo término independiente es la medida de Lebesgue de  $G$ .

## Capítulo 2

# El estimador

Vamos a considerar de aquí en adelante un subconjunto  $G$  de  $[0, 1]^d$  tal que su contenido de Minkowski está bien definido, es estrictamente positivo y finito, y observaciones independientes idénticamente distribuidas  $(Z_1, \delta_1), \dots, (Z_n, \delta_n)$  de una variable aleatoria  $(Z, \delta)$  con distribución uniforme en  $[0, 1]^d$ , donde  $\delta = 1$  si  $Z \in G$ ,  $\delta = 0$  si  $Z \in [0, 1]^d \setminus G$ . De aquí en adelante denotaremos por  $R = [0, 1]^d \setminus G$ ,  $P_X$  y  $P_Y$  la distribución condicional de  $G$  y  $R$  respectivamente, es decir, la distribución de  $Z_{\{\delta=1\}}$  y  $Z_{\{\delta=0\}}$ . Observemos que tanto  $P_X$  como  $P_Y$  son uniformes en  $G$  y  $R$  respectivamente. Dado un  $z \in [0, 1]^d$  y  $\varepsilon > 0$  denotaremos por  $G_z(\varepsilon)$  el número de observaciones que pertenecen a la bola  $B(z, \varepsilon)$

$$G_z(\varepsilon) \equiv G_{n,z}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\delta_i=1, \|Z_i-z\| \leq \varepsilon\}},$$

y análogamente  $R_z(\varepsilon)$

$$R_z(\varepsilon) \equiv R_{n,z}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\delta_i=0, \|Z_i-z\| \leq \varepsilon\}}.$$

**Observación 2.1.**  $G_z(\varepsilon)$  tiene distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p_X(z, \varepsilon) = P(\|Z - z\| \leq \varepsilon, \delta = 1) = \mathcal{L}^d(G)P_X(B(z, \varepsilon))$ . Asimismo  $R_z(\varepsilon)$  tiene distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p_Y(z, \varepsilon) = (1 - \mathcal{L}^d(G))P_Y(B(z, \varepsilon))$ .

**Definición 2.2 (El estimador).** Tomemos  $\{\varepsilon_n\}$  una sucesión de números reales positivos, que converja a 0 cuando  $n$  tiende a infinito. Sea  $T = \partial G$ . El estimador que usaremos para  $T \oplus \varepsilon_n B$  será:

$$T_n = \{z \in [0, 1]^d : R_z(\varepsilon_n) \geq 1 \text{ y } G_z(\varepsilon_n) \geq 1\}.$$

Como se dijo anteriormente, para el estimador propuesto nos interesan aquellos puntos tales que un entorno de radio  $\varepsilon_n$  interceptan a  $G$  y a  $R$ . Y para estimar

$L_0 = L_0(G)$ :

$$L_n = \frac{\mathcal{L}^d(T_n)}{2\varepsilon_n}.$$

Es claro que la convergencia de  $L_n$  a  $L_0$  dependerá de una “buena” elección de  $\varepsilon_n$  así como también, de imponerle a  $G$  cierta regularidad.

## Capítulo 3

# Resultados Teóricos

### 3.1. Primer Resultado

En este capítulo presentaremos los resultados concernientes a la convergencia de  $L_n$  hacia  $L_0$ , que fueron definidos en el capítulo anterior, ambos resultados refieren a convergencia casi segura.

**Teorema 3.1.** *Supongamos que:*

a)  $G$  y  $R$  son estandar en  $T$ , es decir, existe una constante  $C > 0$  tales que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño:

$$P_X(B(t, \varepsilon)) \geq C \mathcal{L}^d(B(t, \varepsilon)) \quad \text{y} \quad P_Y(B(t, \varepsilon)) \geq C \mathcal{L}^d(B(t, \varepsilon)) \quad \text{para todo } t \in T.$$

b) La sucesión  $\{\varepsilon_n\}$  cumple que:

$$\varepsilon_n \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{n\varepsilon_n^d}{\log(n)} \longrightarrow \infty,$$

entonces

$$L_n = \frac{\mathcal{L}^d(T_n)}{2\varepsilon_n} \longrightarrow L_0, \quad \text{c.s..}$$

*Demostración.* La demostración es consecuencia de las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 1.**  $T_n \subset T \oplus \varepsilon_n B$  c.s..

**Afirmación 2.** Para todo  $0 < \alpha < 1$  tenemos que c.s., a partir de un cierto  $n$

$$T \oplus \varepsilon'_n B \subset T_n,$$

donde  $\varepsilon'_n = \alpha\varepsilon_n$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Demostración de la afirmación 1.** Si  $z \in T_n$  entonces  $B(z, \varepsilon_n)$  interseca a  $G$  y a su complemento  $R$ , por lo tanto  $B(z, \varepsilon_n)$  interseca el borde de  $G, T$ , por lo tanto  $z \in T \oplus \varepsilon_n B$ , lo cual concluye la prueba de la afirmación 1.

**Demostración de la afirmación 2.** Por el Lema de Borel-Cantelli es suficiente demostrar que:

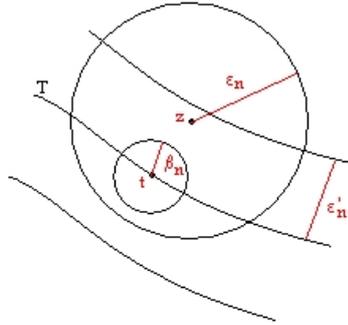
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T \oplus \varepsilon'_n B \not\subseteq T_n) < \infty.$$

Como

$$\begin{aligned} P(T \oplus \varepsilon'_n B \not\subseteq T_n) &\leq P(\exists z \in T \oplus \varepsilon'_n B : G_z(\varepsilon_n) = 0) \\ &\quad + P(\exists z \in T \oplus \varepsilon'_n B : R_z(\varepsilon_n) = 0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

intentaremos encontrar cotas para las probabilidades del lado derecho de la última desigualdad. Si  $z \in T \oplus \varepsilon'_n B$  existe un  $t \in T$  para el cual  $B(t, \beta_n) \subset B(z, \varepsilon_n)$  donde  $\beta_n = (1 - \alpha)\varepsilon_n$ . Por lo tanto:

$$P(\exists z \in T \oplus \varepsilon'_n B : G_z(\varepsilon_n) = 0) \leq P(\exists t \in T : G_t(\beta_n) = 0).$$



Denotemos  $T(\beta_n)$  el conjunto (con cardinal  $D(\beta_n)$ ) de los centros correspondientes a un cubrimiento minimal de  $T$  por bolas de radio  $\beta_n/2$ . Es decir, consideraremos el conjunto  $\{B(s, \beta_n/2) : s \in T(\beta_n) \subset T\}$  tal que:

$$T \subset \bigcup_{s \in T(\beta_n)} B\left(s, \frac{\beta_n}{2}\right).$$

Como  $\{\exists t \in T : G_t(\beta_n) = 0\} \subset \{\exists s \in T(\beta_n) : G_s(\beta_n/2) = 0\}$  tenemos:

$$\begin{aligned}
P(\exists t \in T : G_t(\beta_n) = 0) &\leq P\left(\exists s \in T(\beta_n) : G_s\left(\frac{\beta_n}{2}\right) = 0\right) \\
&\leq \sum_{s \in T(\beta_n)} P\left(G_s\left(\frac{\beta_n}{2}\right) = 0\right) \\
&= \sum_{s \in T(\beta_n)} \left(1 - p_X\left(s, \frac{\beta_n}{2}\right)\right)^n \\
&\leq \sum_{s \in T(\beta_n)} \exp\left(-np_X\left(s, \frac{\beta_n}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado que  $(1 - x) \leq e^{-x}$  para  $0 \leq x \leq 1$ . El lado derecho de la desigualdad anterior puede ser fácilmente acotado usando la hipótesis de que  $G$  y  $R$  son estándar, para  $n$  suficientemente grande tenemos que:

$$p_X\left(s, \frac{\beta_n}{2}\right) \geq C\alpha(d)\mathcal{L}^d(G)\frac{\beta_n^d}{2^d} = K_1\varepsilon_n^d,$$

donde  $\alpha(d) = \mathcal{L}^d(B(0, 1))$  y  $K_1$  es una constante que depende de  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\mathcal{L}^d(G)$  y  $C$ . Por lo tanto:

$$P(\exists z \in T \oplus \varepsilon'_n B : G_z(\varepsilon_n) = 0) \leq D(\beta_n) \exp(-nK_1\varepsilon_n^d).$$

Para acotar  $D(\varepsilon)$  recordemos que éste representa el cardinal de un cubrimiento mínimo  $\mathcal{C}(\varepsilon/2)$  de  $T$  por bolas de radio  $\varepsilon/2$ . Observar que las bolas de radio  $\varepsilon/4$  con los mismos centros que en  $\mathcal{C}(\varepsilon/2)$  son disjuntas, (de lo contrario  $\mathcal{C}(\varepsilon/2)$  no sería minimal). Entonces su medida de Lebesgue debe ser menor o igual que  $\mathcal{L}^d(T \oplus (\varepsilon/4)B)$ , luego:

$$D(\varepsilon)(\varepsilon/4)^d \alpha(d) \leq \mathcal{L}^d(T \oplus (\varepsilon/4)B).$$

Como estamos suponiendo que existe el contenido de Minkowski de  $\partial G$  y es finito, tenemos que  $D(\varepsilon) \leq A\varepsilon^{1-d}$  para alguna constante  $A$  y por lo tanto:

$$P(\exists z \in T \oplus \varepsilon'_n B : G_z(\varepsilon_n) = 0) \leq K_2\varepsilon_n^{1-d} \exp(-K_1n\varepsilon_n^d),$$

donde  $K_2 = (1 - \alpha)^{1-d}A$ . La condición  $n\varepsilon_n^d/\log(n) \rightarrow \infty$  nos asegura la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1-d} \exp(-K_1n\varepsilon_n^d)$ . La otra probabilidad en (3.1) se acota de forma análoga, lo que concluye la prueba de la afirmación 2. El teorema 1, es consecuencia directa de las afirmaciones 1 y 2, tenemos que, con

probabilidad 1,

$$\alpha L_0 = \lim_n \frac{\mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon'_n B)}{2\varepsilon_n} \leq \liminf_n L_n \leq \limsup_n L_n \leq \lim_n \frac{\mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon_n B)}{2\varepsilon_n} = L_0.$$

Como se cumple para todo  $\alpha \in (0, 1)$  se sigue la conclusión del teorema.  $\square$

## 3.2. Segundo Resultado

### 3.2.1. Una cota para $E(L_n)$

Consideremos la función  $L(\varepsilon) = \mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon B)/(2\varepsilon)$ , la cual es una aproximación de  $L_0$ . Mostraremos que bajo ciertas condiciones de regularidad en  $G$  y  $R$  se cumple que  $|L(\varepsilon) - L_0| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Observemos que:

$$T \oplus \varepsilon B = (G \oplus \varepsilon B) \cap (R \oplus \varepsilon B),$$

de donde:

$$\mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon B) = \mathcal{L}^d(G \oplus \varepsilon B) + \mathcal{L}^d(R \oplus \varepsilon B) - \mathcal{L}^d([0, 1]^d \oplus \varepsilon B).$$

De esta última identidad, y por lo expuesto en el capítulo 1, sabemos que si  $G$  tiene alcance positivo, la medida de Lebesgue de  $T \oplus \varepsilon B$  coincide localmente ( $\varepsilon \in (0, r_0)$ ) con  $P(\varepsilon)$  un polinomio de grado a lo sumo  $d$  con término independiente igual a 0. Observemos que (en vistas de que asumimos que el  $L_0$  es finito) el coeficiente en  $\varepsilon$  de  $P(\varepsilon)$  coincide con  $2L_0$ , por lo tanto  $L(\varepsilon) - L_0$  es un polinomio en  $\varepsilon$  con término independiente nulo. En particular obtenemos que  $L(\varepsilon)$  es diferenciable en  $\varepsilon = 0$ .

Como se ve en la prueba del teorema 3.1, tenemos, con probabilidad 1, que  $T_n \subset T \oplus \varepsilon B$  a partir de un cierto  $n$  y por lo tanto:

$$L_n \leq L(\varepsilon_n) \quad c.s.. \tag{3.2}$$

Lo cual significa que  $L_n$  aproxima a  $L_0$  inferiormente, cuando el valor de  $L(\varepsilon)$  es próximo a  $L(0) = L_0$ .

**Teorema 3.2.** *Supongamos que se cumplen la condición a) del teorema anterior, que la función  $F(\varepsilon) := \mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon B)$  es diferenciable en un entorno de 0 y su derivada es continua en 0. Entonces*

$$E(L_n) \geq L(\varepsilon_n) - I_n, \tag{3.3}$$

donde

$$I_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} \exp(-Kn(\varepsilon_n - d(z, T))^d) dz,$$

siendo  $K$  una constante positiva y  $d(z, T) = \inf\{\|z - t\| : t \in T\}$ .

Además

$$I_n = \mathcal{O}((n\varepsilon_n^d)^{-1/d}).$$

**Observación 3.3.** De acuerdo a lo comentado anteriormente es suficiente que  $G$  tenga alcance positivo para que se cumpla la condición sobre  $F(\varepsilon)$ .

*Demostración.* La esperanza de  $L_n$  puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} E(L_n) &= \frac{E(\mathcal{L}^d(T_n))}{2\varepsilon_n} = \frac{1}{2\varepsilon_n} E\left(\int \mathbb{I}_{\{z \in T_n\}} \mathcal{L}^d(dz)\right) = \frac{1}{2\varepsilon_n} \int E(\mathbb{I}_{\{z \in T_n\}}) \mathcal{L}^d(dz) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_n} \int P(z \in T_n) \mathcal{L}^d(dz) = \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} P(z \in T_n) \mathcal{L}^d(dz), \end{aligned}$$

donde hemos usado en la ultima igualdad que, con probabilidad 1,  $T_n \subset T \oplus \varepsilon_n B$ . Es claro que:

$$P(z \notin T_n) \leq P(G_z(\varepsilon_n) = 0) + P(R_z(\varepsilon_n) = 0). \quad (3.4)$$

Como  $G_z(\varepsilon_n)$  tiene distribución binomial con parametros  $n$  y  $p_X(z, \varepsilon_n)$  tenemos que

$$P(G_z(\varepsilon_n) = 0) = (1 - p_X(z, \varepsilon_n))^n \leq \exp(-np_X(z, \varepsilon_n)).$$

Tomemos  $P_T z \in T$  la proyección de  $z$  sobre  $T$ . Entonces, para todo  $z \in T \oplus \varepsilon_n B$

$$B(P_T z, \varepsilon_n - d(z, T)) \subset B(z, \varepsilon_n).$$

Usando la condición a) del teorema 3.1 tenemos que para  $\varepsilon_n$  suficientemente pequeño,

$$p_X(B(z, \varepsilon_n)) \geq C\alpha(d)(\varepsilon_n - d(z, T))^d,$$

y por lo tanto

$$P(G_z = 0) \leq \exp(-K_1 n(\varepsilon_n - d(z, T))^d),$$

donde  $K_1$  es una constante positiva que depende solamente de  $\mathcal{L}^d(G)$ ,  $C$  y  $d$ . Análogamente obtenemos que  $P(R_z = 0) \leq \exp(-K_2 n(\varepsilon_n - d(z, T))^d)$ , para cierta constante positiva  $K_2$  que solo depende de  $\mathcal{L}^d(R)$ ,  $C$  y  $d$ . Usando estas dos acotaciones y (3.4) obtenemos:

$$P(z \in T_n) \geq 1 - 2 \exp(-Kn(\varepsilon_n - d(z, T))^d),$$

donde  $K = \min(K_1, K_2)$ , finalmente

$$\begin{aligned}
 E(L_n) &= \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} P(z \in T_n) dz \\
 &\geq \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} (1 - 2 \exp(-Kn(\varepsilon_n - d(z, T))^d)) dz \\
 &= L(\varepsilon_n) - \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} \exp(-Kn(\varepsilon_n - d(z, T))^d) dz = L(\varepsilon_n) - I_n,
 \end{aligned}$$

si escribimos

$$I_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{T \oplus \varepsilon_n B} g_n(d(z, T)) dz,$$

siendo  $g_n(w) = \exp(-Kn(\varepsilon_n - w)^d)$ . Haciendo un cambio de variable obtenemos

$$I_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} g_n(w) F(dw),$$

donde  $F(w) = \mathcal{L}^d\{z : d(z, T) \leq w\}$ . Como supusimos que  $F$  es diferenciable en 0 y que  $L_0$  existe y es finito, tenemos que  $F'(0) = 2L_0$ , además, como  $F'(0)$  es continua, para  $w$  suficientemente pequeño se cumple que  $F'(w) \leq 3L_0$ . Finalmente para  $n$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
 I_n &\leq \frac{3L_0}{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} \exp(-Knt^d) dt = \frac{3L_0}{\varepsilon_n} \int_0^{Kn\varepsilon_n^d} \exp(-u) \frac{1}{d(Kn)^{1/d}} u^{-(d-1)/d} du \\
 &\leq \frac{3L_0}{dK^{1/d}(\varepsilon_n^d n)^{1/d}} \int_0^\infty \exp(-u) u^{-(d-1)/d} du = \frac{A}{(\varepsilon_n^d n)^{1/d}},
 \end{aligned}$$

en la primera desigualdad hemos usado  $F'(w) \leq 3L_0$  y el cambio de variable  $t = \varepsilon_n - w$ , en la primera igualdad el cambio de variable  $u = Knt^d$ , finalmente, la segunda desigualdad se debe a que el integrando es positivo.  $\square$

**Corolario 3.4.** *El siguiente corolario refiere a la convergencia en  $L_1$  de  $L_n$ .*

a) *En las mismas hipótesis que en el teorema anterior, tenemos que:*

$$E|L_n - L_0| \leq I_n + |L(\varepsilon_n) - L_0|, \quad (3.5)$$

*es decir, si  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  y  $n\varepsilon_n^d \rightarrow \infty$  se cumple  $E|L_n - L_0| \rightarrow 0$ .*

b) Si además asumimos que  $G$  tiene alcance positivo, tenemos que  $|L(\varepsilon_n) - L_0| = \mathcal{O}(\varepsilon)$  y por lo tanto el orden óptimo para (3.5) es  $\mathcal{O}(n^{-1/(2d)})$  que se obtiene si  $\varepsilon_n = n^{-1/(2d)}$ .

*Demostración.* a) Aplicando la desigualdad triangular tenemos que

$$E(|L_n - L_0|) \leq E(|L_n - L(\varepsilon_n)|) + |L(\varepsilon_n) - L_0| \leq I_n + |L(\varepsilon_n) - L_0|,$$

donde acotamos el primer sumando usando (3.2) y (3.3). □

Como consecuencia del corolario anterior, tenemos que, en las hipótesis del Corolario parte b)

$$\begin{aligned} E|L_n - E(L_n)| &\leq E(|L_n - L(\varepsilon_n)|) + |L(\varepsilon_n) - E(L_n)| \\ &\leq 2I_n = \mathcal{O}((n\varepsilon_n^d)^{-1/d}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_0 - E(L_n) &\leq (L(\varepsilon_n) - E(L_n)) + (L_0 - L(\varepsilon_n)) \\ &\leq \mathcal{O}((n\varepsilon_n^d)^{-1/d}) + \mathcal{O}(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

### 3.3. Tercer Resultado

Los estimadores  $L_n$  y  $T_n$  deben ser calculados para cada elección de  $\varepsilon_n$  lo cual supone un problema práctico importante. La idea de la presente sección es presentar un resultado teórico en el cual, el cálculo de  $\mathcal{L}^d(T_n)$  se realiza aplicando el método de Monte Carlo. Tomemos  $Z_1^*, \dots, Z_B^*$  una muestra aleatoria, (independiente de  $Z_1, \dots, Z_n$ ) con distribución uniforme en el cuadrado unitario  $[0, 1]^d$ . Como  $T_n \subset [0, 1]^d$  a partir de un cierto  $n$  c.s., tenemos que  $\mathcal{L}^d(T_n) = P(Z_1^* \in T_n)$ , y para  $B$  suficientemente grande,

$$\mu_B(T_n) = \frac{\sum_{i=1}^B \mathbb{I}_{\{Z_i^* \in T_n\}}}{B},$$

es una buena aproximación de  $\mathcal{L}^d(T_n)$ . Observar que es fácil chequear cuando un punto  $Z^*$  pertenece a  $T_n$ . A partir de esta aplicación del método de Monte Carlo construimos el estimador

$$L_{n,B}^* = \frac{\mu_B(T_n)}{2\varepsilon_n}.$$

La pregunta que surge naturalmente, es cómo elegir  $B$  (como función de  $n$ ) para asegurar que  $L_{n,B}^*$  es un estimador consistente de  $L_0$ , el siguiente teorema provee una respuesta a esa pregunta.

**Teorema 3.5.** *Además de las hipótesis del teorema 3.1 supongamos que*

$$\frac{B\varepsilon_n}{\log(n)} \longrightarrow \infty, \quad (3.6)$$

entonces

$$L_{n,B}^* \longrightarrow L_0 \quad c.s..$$

*Demostración.* Es suficiente demostrar que  $L_{n,B}^* - L_n \longrightarrow 0$ . Para eso, en virtud de Lemma de Borel–Cantelli, bastará probar que para todo número real  $\rho > 0$  se verifica que

$$\sum_n P(|L_{n,B}^* - L_n| > \rho) < \infty. \quad (3.7)$$

Para mostrar (3.7) acotaremos el término general de la serie.

$$\begin{aligned} P(|L_{n,B}^* - L_n| > \rho) &= E(P(|L_{n,B}^* - L_n| > \rho | Z_1, \dots, Z_n)) \\ &= E(P(|\mu_B(T_n) - \mathcal{L}^d(T_n)| > 2\rho\varepsilon_n | Z_1, \dots, Z_n)) \\ &\leq E\left(2 \exp\left(-\frac{4\rho^2\varepsilon_n^2 B}{2\mathcal{L}^d(T_n)(1 - \mathcal{L}^d(T_n)) + (4/3)\rho\varepsilon_n}\right)\right). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado la siguiente desigualdad de Bernstein:

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_m$  variables aleatorias tal que  $E(X_i) = 0$  y  $|X_i| \leq M$  para  $i = 1, \dots, m$ , donde  $M$  es un número real. Entonces

$$P\left(\sum_{i=1}^m X_i > t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{\sum_{i=1}^m E(X_i^2) + Mt/3}\right) \quad \text{para todo } t > 0.$$

En nuestro caso aplicamos la desigualdad anterior con  $X_i = \mathbb{I}_{\{Z_i^* \in T_n\}} - \mathcal{L}^d(T_n)$  y  $t = 2B\rho\varepsilon_n$ . Para una prueba de esta y otras desigualdades de tipo Bernstein ver el Apéndice. Vamos a acotar  $\mathcal{L}^d(T_n)$ , sabemos, por el teorema 3.1 que (con probabilidad 1)  $T_n \subset T \oplus \varepsilon_n B$  y por lo tanto  $\mathcal{L}^d(T_n) \leq \mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon_n B)$ . Como  $L(\varepsilon_n) \longrightarrow L_0$  tenemos que para  $n$  suficientemente grande  $\mathcal{L}^d(T \oplus \varepsilon_n B) \leq 4L_0\varepsilon_n$ . Por lo tanto

$$E\left(2 \exp\left(-\frac{4\rho^2\varepsilon_n^2 B}{2\mathcal{L}^d(T_n)(1 - \mathcal{L}^d(T_n)) + (4/3)\rho\varepsilon_n}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq E \left( 2 \exp \left( -\frac{4\rho^2 \varepsilon_n^2 B}{8L_0 \varepsilon_n + (4/3)\rho \varepsilon_n} \right) \right) \\ &= 2 \exp(-K_{\rho, L_0} \varepsilon_n B), \end{aligned}$$

donde  $K_{\rho, L_0}$  es una constante positiva. La condición  $B\varepsilon_n/\log(n) \rightarrow \infty$  nos asegura, para todo  $\rho > 0$

$$\sum_n \exp(-K_{\rho, L_0} \varepsilon_n B) < \infty$$

y por lo tanto, se cumple (3.7) de donde se sigue la conclusión del teorema.  $\square$

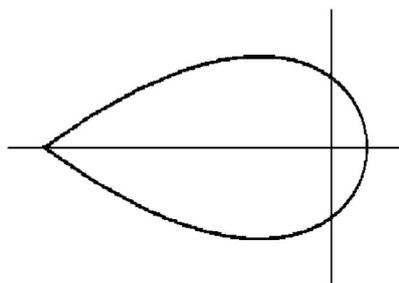
## Capítulo 4

# Aplicación a casos concretos

### 4.1. El cubo de Tschirnhausen

La idea del presente capítulo es mostrar los resultados (tomados de [1]) de una simulación hecha para el caso particular en que  $G$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado en coordenadas polares por (ver imagen).

$$\begin{aligned} r &= a \sec^3(\theta/3) && \text{si } \theta \in (0, \pi), \\ r &= a \sec^3((2\pi - \theta)/3) && \text{si } \theta \in (\pi, 2\pi). \end{aligned}$$



La razón para la elección de esta curva es la existencia de una expresión simple para su contenido de Minkowski ( $L_0 = 12a\sqrt{3}$ ) y su área ( $A = 72a^3\sqrt{3}/5$ ). Vamos a usar el estimador  $L_{n,B}^*$  para el caso  $a = 1$ , en el cual  $L_0=20.7846$  y  $A=24.9415$ . Tomaremos dos valores de  $n$ ,  $n = 3000$  y  $n = 10000$ , los puntos se tomarán en el cuadrado  $[-9,2] \times [-5.5,5.5]$  que contiene a toda la figura.

Los resultados de la simulación, que se muestran en las tablas, corresponden a 500 realizaciones de la simulación, para los valores de  $n$  mencionados anteriormente, donde el parámetro  $B$  usado para calcular  $\mathcal{L}^2(T_n)$  fue  $B = 1500$  en ambos casos. A partir de los datos de la tabla se calculan el promedio, la desviación estandar y la mediana. El área fue calculada por el método de Monte

Carlo. El promedio, la desviación estandar y la mediana obtenidas para ésta simulación fueron respectivamente 24.9196, 0.4458 y 24.9125 para  $n = 30000$  y 24.9485, 0.7842 y 24.9889 para  $n = 10000$ .

Tabla 1

Promedio, desviación estandar y medianas de  $L_n$  calculadas para 500 repeticiones, con  $n = 30000$

$\varepsilon_n$	<b>0.76</b>	<b>0.78</b>	<b>0.80</b>	<b>0.82</b>	<b>0.84</b>	<b>0.86</b>	<b>0.88</b>
Promedio	19.7301	19.7416	19.7621	19.7644	19.7818	19.7918	19.7859
Dv. Stan.	1.3940	1.3935	1.3793	1.3448	1.3470	1.3200	1.3072
Mediana	19.7548	19.7920	—	19.7576	19.8930	19.8249	19.8081
$\varepsilon_n$	<b>0.90</b>	<b>0.92</b>	<b>0.94</b>	<b>0.96</b>	<b>0.98</b>	<b>1.0</b>	<b>1.2</b>
Promedio	19.7901	19.7949	19.8109	19.8208	19.8290	19.8230	19.8237
Dv. Stan.	1.2952	1.2917	1.2636	1.2331	1.2159	1.2031	1.0666
Mediana	19.8863	19.9150	19.8522	19.8804	19.8209	19.8804	19.8627

Tabla 2

Promedio, desviación estandar y medianas de  $L_n$  calculadas para 500 repeticiones, con  $n = 10000$

$\varepsilon_n$	<b>0.76</b>	<b>0.78</b>	<b>0.80</b>	<b>0.82</b>	<b>0.84</b>	<b>0.86</b>	<b>0.88</b>
Promedio	19.0026	18.8594	18.9512	18.9370	18.9507	19.0806	19.1083
Dv. Stan.	1.3908	1.3586	1.3260	1.2627	1.3075	1.3398	1.2467
Mediana	18.9736	18.9221	18.9791	18.9300	18.9842	19.0359	19.0852
$\varepsilon_n$	<b>0.90</b>	<b>0.92</b>	<b>0.94</b>	<b>0.96</b>	<b>0.98</b>	<b>1.0</b>	<b>1.2</b>
Promedio	19.0492	19.1409	19.1408	19.2057	19.2134	19.2384	19.3679
Dv. Stan.	1.2956	1.1936	1.1599	1.2460	1.2157	1.1777	1.0394
Mediana	19.0381	19.1774	19.1303	19.1735	19.2150	19.2548	19.3679

Algunas observaciones sobre la simulación:

- a) El valor real  $L_0=20.7846$  es sistemáticamente subestimado con un error relativo de alrededor de 4.7% para el caso  $n = 30000$  y 8.1% para  $n = 10000$ . El promedio (sobre todos los valores de  $\varepsilon_n$ ) de los promedios es 19.0890 para  $n = 10000$  y 19.7900 para  $n = 30000$ .
- b) La simulación muestra una considerable estabilidad respecto de los valores del parámetro  $\varepsilon_n$ . Esta estabilidad se mantiene incluso para valores pequeños de  $\varepsilon_n$  (no incluidos en la tabla).

- c) La distribución de la muestra es casi simétrica, con la mediana muy cerca del promedio, en todos los casos.
- d) Hay una leve, pero consistente, disminución de la variabilidad alrededor del promedio, a medida que el parámetro aumenta.
- e) Como era de esperarse, los resultados mejoran al aumentar el valor de  $B$ . Por ejemplo, los valores obtenidos del promedio, la desviación estandar, y la mediana de  $L_n$  para  $\varepsilon_n=0.92$ ,  $n = 30000$  y  $B = 2000$  son 19.8341, 1.0790 y 19.8458 respectivamente. Para  $n = 10000$ , con el mismo valor de  $\varepsilon_n$  los correspondientes valores para  $B = 3000$  son 19.2229, 0.8490 y 19.1774.
- f) En este ejemplo hemos implementado el método en un caso donde conocíamos exactamente la ecuación del borde del conjunto. Es decir, no hay un proceso de digitalización. Si hicieramos un proceso de digitalización del conjunto  $G$  obteniendo un  $G^h$ , unión de píxeles, a distancia  $h$  fija, y si consideráramos la distancia  $L^h$  del borde de la imagen digitalizada, como el número de píxeles que separan regiones de diferentes colores, se puede ver que  $L^h$  no necesariamente tiene que tender a la longitud real, cuando  $h$  tiende a 0. Lo cual resulta razonable si pensamos que si el borde del conjunto contiene un segmento paralelo a la diagonal  $x = y$  estamos sobrestimando su distancia en un factor de  $\sqrt{2}$  cuando aproximamos  $G$  por  $G^h$ . El uso de más píxeles no mejora el resultado, por ejemplo para el caso anterior, a  $600 \times 600$   $L^h \cong 26.5$ , y a  $1024 \times 1024$  píxeles, se obtiene un resultado aun peor,  $L^h = 28.1875$ . Es importante observar que está limitado por la cantidad de píxeles empleados, es decir, si usamos  $1024 \times 1024$  píxeles, el mínimo razonable para  $\varepsilon_n$  será  $1/1024 = 0.000976$ .
- g) Es importante observar que tanto el estimador  $L_n$  como  $L_{n,B}^*$  pueden ser usados en el caso en que sólo se dispone de información incompleta (Los puntos que caen en  $T_n$ ), en algún sentido, el método propuesto, puede ser pensado como una refinación del método estudiado en [2].

## Apéndice A

# Apéndice

### A.1. Desigualdades de tipo Bernstein

En el presente capítulo, vamos a suponer que tenemos  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes tales que  $E(X_i) = 0$ ,  $E(X_i^2) = b_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  donde  $b_i$  son números reales, y supondremos que existe  $c > 0$  tal que si  $h > 2$  se cumple:

$$E(|X_i|^h) \leq \frac{h!}{2} b_i c^{h-2} \quad i = 1, \dots, n.$$

#### A.1.1. Primera desigualdad

En las hipótesis antes mencionadas, se cumple que:

$$A := E \left( \exp \left( \varepsilon \sum_{i=1}^n X_i \right) \right) < \exp \left( \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{2(1-\delta)} \right),$$

donde  $\delta$  es un número real positivo, menor que uno, y  $\varepsilon$  es un número positivo, tal que  $\varepsilon c \leq \delta$

*Demostración.* Sabemos que

$$\exp(\varepsilon X_j) \leq 1 + \varepsilon X_j + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} |X_j|^i,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} E(\exp(\varepsilon X_j)) &\leq 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} E(|X_j|^i) \leq 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i b_j \frac{i!}{2i!} c^{i-2} \\ &= 1 + \varepsilon^2 \frac{b_j}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon c)^i < \exp\left(\frac{b_i \varepsilon^2}{2(1-\delta)}\right), \end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad hemos usado que  $1/(1-\varepsilon c) \leq 1/(1-\delta)$ , finalmente, el resultado se sigue de la desigualdad anterior ya que, por la independencia:

$$E\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n E(\varepsilon \exp(X_i)).$$

□

### A.1.2. Segunda desigualdad

Vamos a introducir la siguiente notación:

$$B_n = \sum_{i=1}^n b_i.$$

En las mismas hipótesis que antes:

$$Q := P\left(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{B_n \varepsilon}{2(1-\delta)} + \frac{t^2}{\varepsilon}\right) \leq e^{-t^2}.$$

*Demostración.* Sabemos por la desigualdad de Chebishev que

$$P\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i > A e^{t^2}\right)\right) \leq \frac{1}{A e^{t^2}} A = e^{-t^2},$$

además

$$Q = P\left(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{B_n \varepsilon}{2(1-\delta)} + \frac{t^2}{\varepsilon}\right) = P\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i\right) > \exp\left(\frac{B_n \varepsilon^2}{2(1-\delta)} + t^2\right)\right),$$

si ahora usamos la primera desigualdad tenemos que:

$$Q \leq P\left(\exp\left(\varepsilon \sum_{i=1}^n X_i > A e^{t^2}\right)\right).$$

□

### A.1.3. Tercera desigualdad

En las mismas hipótesis que antes, se cumple que:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \leq w\right) > 1 - 2 \exp\left(-\frac{w}{2B_n + 2cw}\right),$$

donde  $w$  es un número real positivo.

*Demostración.* Tenemos un mínimo de

$$F(\varepsilon) = \frac{B_n \varepsilon}{2(1-\delta)} + \frac{t^2}{\varepsilon} \quad \text{en} \quad \varepsilon = \frac{t\sqrt{2(1-\delta)}}{\sqrt{B_n}},$$

y luego despejando en  $F(\varepsilon)$  obtenemos

$$F(t) = t\sqrt{\frac{2B_n}{1-\delta}} \quad \text{si hacemos} \quad F = w = t\sqrt{\frac{2B_n}{1-\delta}},$$

resulta

$$t = \frac{w}{\sqrt{\frac{2B_n}{1-\delta}}} \quad \text{y entonces} \quad \varepsilon = \frac{w}{B_n}(1-\delta).$$

Como  $\varepsilon c \leq \delta$ , debe ser

$$\frac{cw}{B_n}(1-\delta) \leq \delta \quad \text{y tomamos } \delta \text{ tal que} \quad \frac{cw}{B_n}(1-\delta) - \delta = 0,$$

es decir  $\delta = \frac{cw}{B_n + cw}$ , finalmente  $t = \frac{w}{\sqrt{2B_n + 2cw}}$ .

Si aplicamos la segunda desigualdad, tenemos que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > w\right) \leq \exp(-w/(2B_n + 2cw)).$$

La otra desigualdad es analoga, con lo que se concluye la prueba. En el caso particular en que  $|X_i| \leq M$  para  $M$  constante, tenemos que si  $h > 2$

$$E(|X_i|^h) \leq \frac{M^2}{2} h! (M/3)^{h-2},$$

y tomando  $c = M/3$  resulta la desigualdad usada en el teorema 3.3.1:

$$P\left(\sum_{i=1}^m X_i > t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{\sum_{i=1}^m E(X_i^2) + Mt/3}\right) \quad \text{para todo } t > 0.$$

Sobre otras desigualdades de Bernstein, se puede ver [9]. □

## A.2. Consistencia de la frontera del estimador de Devroye-Wise a la frontera del conjunto

Recordemos que en la introducción introdujimos el siguiente estimador de  $S \subset \mathbb{R}^d$  compacto:

$$\hat{S}_n(\varepsilon_n) = \bigcup_{i=1}^n B(X_i, \varepsilon_n),$$

donde como se dijo  $\{X_1, \dots, X_n\}$  son puntos al azar correspondientes a una distribución cuyo soporte es  $S$ . Vamos a demostrar el siguiente teorema:

**Teorema A.1.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  observaciones independientes de una distribución  $P_X$  con soporte  $S$ . Sea  $\hat{S}_n$  el estimador de Devroye-Wise. Supongamos que*

- i)  $S \subset \hat{S}_n$  a partir de un cierto  $n$ , c.s.
- ii)  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,

entonces

$$d_H(\partial\hat{S}_n, \partial S) \rightarrow 0 \quad \text{c.s.} \quad (\text{A.1})$$

*Demostración.* Supongamos por absurdo que no se cumple la tesis, luego, tenemos dos casos:

Caso 1. Con probabilidad positiva, existe un  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $\{y_{n_k}\}$ , que denotaremos  $\{y_n\}$  por simplicidad,  $y_n \in \hat{S}_n$  y tal que

$$d(y_n, \partial S) = \inf_{y \in \partial S} \|y_n - y\| > \varepsilon \quad \text{para todo } n. \quad (\text{A.2})$$

Es claro que  $y_n \notin \partial S$  y que  $y_n \notin \text{int}(S)$  (ya que  $\text{int}(S) \subset \text{int}(\hat{S}_n)$ ), por lo tanto  $y_n \in S^c$ . Como  $y_n \in \hat{S}_n$  y  $X_i \in S$  c.s. entonces  $B(y_n, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ . Esto, junto con  $y_n \in S^c$  implica (ya que  $B(y_n, \varepsilon_n)$  es conexa) que  $B(y_n, \varepsilon_n) \cap \partial S \neq \emptyset$ . Luego  $d_H(y_n, \partial S) \leq \varepsilon_n$ , pero, como por hipótesis  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  esto último contradice (A.2).

Caso 2. Con probabilidad positiva existe  $\varepsilon > 0$  y una subsucesión, que denotaremos  $\{y_n\}$ , con  $y_n \in \partial S$  tal que

$$d(y_n, \partial\hat{S}_n) = \inf_{y \in \partial\hat{S}_n} \|y_n - y\| > 2\varepsilon \quad \text{para todo } n.$$

Como  $\{y_n\} \in \partial S$  y  $\partial S$  es compacto, existe una subsucesión convergente, (que denotaremos  $\{y_n\}$ ), tal que  $y_n \rightarrow y \in \partial S$ . Por la desigualdad

triangular, esto implica que, con probabilidad positiva se cumple que  $d(y, \partial\hat{S}_n) > \varepsilon$  a partir de un cierto  $n$ . Entonces:

$$B(y, \varepsilon) \cap \partial\hat{S}_n = \emptyset \quad \text{a partir de un cierto } n, \text{ c.s.} \quad (\text{A.3})$$

Como los sucesos  $I_k = \{X_k \in B(y, \varepsilon)\}$  son independientes y  $P(I_k) = P_X(B(y, \varepsilon)) > 0$ , por el Lema de Borel-Cantelli tenemos que, con probabilidad 1 existe una subsucesión  $X_{n_k} \in B(y, \varepsilon)$ , por lo tanto  $B(y, \varepsilon) \cap \hat{S}_{n_k} \neq \emptyset$ . Como  $B(y, \varepsilon)$  es conexa, por (A.3) tenemos que  $B(y, \varepsilon) \subset \text{int}(\hat{S}_{n_k})$ . Como  $y \in \partial S$  existe  $y_0 \in S^c$  tal que  $\|y - y_0\| < \varepsilon/2$ . Más aun, como  $S^c$  es abierto, existe un  $r \in (0, \varepsilon/2)$  tal que  $B(y_0, r) \subset S^c$  y  $B(y_0, r) \subset B(y, \varepsilon) \subset \text{int}(\hat{S}_{n_k})$ . Para  $k$  suficientemente grande, tal que  $\varepsilon_{n_k} < r$  implica que  $y_0 \notin \hat{S}_{n_k}$ . Lo cual contradice que  $B(y, r) \subset \text{int}(\hat{S}_{n_k})$ .

En ambos casos llegamos a una contradicción, lo cual prueba (A.1). Observemos que la hipótesis  $S \subset \hat{S}_n$  sólo se uso en 1.  $\square$

### A.3. Demostración del Teorema 1.8

El objetivo de la presente sección es demostrar un teorema debido a Walther. G (ver [7]), en el cual se prueba en particular, el teorema 1.8 enunciado en el capítulo 1 de este trabajo.

#### A.3.1. Definiciones previas

**Definición A.2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^d$  y  $\lambda \geq 0$  se define la granulometría del conjunto  $A$  respecto de  $B = B(0, 1)$  como la función  $\lambda \rightarrow \psi_\lambda(A)$  con  $\lambda \geq 0$  tal que:

$$\psi_\lambda(A) := (A \ominus \lambda B) \oplus \lambda B = \bigcup_{B(x, \lambda) \subset A} B(x, \lambda).$$

La granulometría representa la “distribución de tamaño” de  $A$ , en el sentido de que el mapa  $\lambda \rightarrow \mathcal{L}^d(\psi_\lambda(A))$  da el volumen ocupado por los trasladados de  $\lambda B$  incluidos en  $A$ . Extenderemos la definicion anterior de la siguiente manera:

$$\psi_{-\lambda}(A) := (A \oplus \lambda B) \ominus \lambda B \quad \lambda > 0.$$

**Definición A.3.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^d$  decimos que  $A$  es  $r$ -convexo ( $r > 0$ ) si  $A = C_r(A)$  donde

$$C_r(A) = \bigcap_{\text{int}B(x, r) \cap A = \emptyset} (\text{int}B_r(x))^c.$$

### A.3.2. La demostración

**Teorema.** Sea  $S \neq \emptyset$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  compacto y conexo por caminos y  $r_0 > 0$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\psi_\lambda(S) = S$  para  $\lambda \in (-r_0, r_0]$ .
- ii)  $S$  y  $\overline{S^c}$  son  $r_0$ -convexos y  $\text{int}(S) \neq \emptyset$
- iii) Una bola de radio  $r$  rueda libremente dentro de  $S$  y fuera de  $\overline{S^c}$  para todo  $0 \leq r \leq r_0$
- iv) Para todo  $r_1 \in [0, r_0]$ , y  $r_2 \in [0, r_0)$  existen  $A, D \subset \mathbb{R}^d$  tales que  $S = A \oplus r_1 B = D \ominus r_2 B$ .
- v)  $\partial S$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^d$  de dimensión  $(d-1)$  y clase  $C^1$ , cuyo vector normal saliente  $n(s)$  en  $s \in \partial S$  satisface la condición de Lipschitz:

$$\|n(s) - n(t)\| \leq \frac{1}{r_0} \|s - t\| \quad \text{para todo } s, t \in \partial S$$

*Demostración.* Vamos a usar el siguiente Lema, cuya demostración se omite.

**Lema.** Sea  $A \in \mathbb{R}^d$  y  $r_1, r_2 > 0$ . Supongamos que existen  $s, x \in \mathbb{R}^d$  y sucesiones  $\{s_n\}, \{x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  con  $s_n \rightarrow s$  tal que  $s_n \in B(x_n, r_1) \subset S$  para todo  $n$  y  $s \in B(x, r_2) \subset \overline{S^c}$ . Entonces  $x_n \rightarrow s + (r_1/r_2)(s - x)$ . Esto continúa siendo válido si intercambiamos  $S$  y  $\overline{S^c}$ .

$i) \Rightarrow iv)$ : Basta tomar  $A := S \ominus r_1 B$  y  $D := S \oplus r_2 B$ .

$iv) \Rightarrow v)$ : La demostración está basada en las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 1:** Para todo  $s \in \partial S$  existe un único vector  $n(s)$  tal que

$$B(s - r_0 n(s), r_0) \subset S, \quad \text{y} \quad \text{int}(B(s + r_0 n(s), r_0)) \subset S^c.$$

**Afirmación 2:** Para todo  $s, u \in \partial S$ ,

$$\|n(s) - n(u)\| \leq \frac{1}{r_0} \|s - u\|.$$

Fijemos  $s \in \partial S$ , definamos el hiperplano  $H_s := s + (n(s))^\perp$  donde  $\perp$  denota el complemento ortogonal, el entorno  $U'_s := \{x \in H_s : \|x - s\| < r_0/4\}$ , y el entorno  $U_s$  de  $s$  como  $U_s := \{x : x = u' + \alpha n(s), u' \in U'_s, \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < r_0/4\}$ .

**Afirmación 3:** Para todo  $u \in U_s \cap \partial S$ ,  $\langle n(s), n(u) \rangle \geq \frac{15}{16}$

**Afirmación 4:** Sea  $u \in \partial S \cap U_s$ . El segmento  $g_u(\alpha) := u + \alpha n(s)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , corta a  $\partial S \cap U_s$  únicamente en  $u$ .

**Afirmación 5:** Si  $x \in U'_s$  entonces  $g_x(\cdot) \cap \partial S \cap U_s \neq \emptyset$ .

Las afirmaciones 4 y 5 muestran que en  $U_s$ ,  $\partial S$  es el gráfico de una función  $f_s$  a valores reales, definida en  $U'_s \subset H_s$  graficada con el eje de las ordenadas en la dirección de  $n(s)$ :  $f_s$  está dada en  $x \in U'_s$  por el único valor  $\alpha \in (-r_0/4, r_0/4)$  que satisface  $g_x(\alpha) \in \partial S$ .

**Afirmación 6:** Sea  $u' \in U'_s$  y  $u := u' + f_s(u')n(s) \in U_s \cap \partial S$ . Entonces, para todo  $x \in U'_s$

$$f_s(x) = f_s(u') - \frac{1}{\langle n(s), n(u) \rangle} \langle n(u), x - u' \rangle + \mathcal{O}(\|x - u'\|^2).$$

De esta última afirmación obtenemos que  $f_s$  es de clase  $C^1$  en  $U'_s$ , siempre que el mapa  $u' \rightarrow (1/\langle n(s), n(u) \rangle)$  sea continuo, pero esto es consecuencia de las afirmaciones 2 y 3, y del hecho de que el mapa  $u' \rightarrow u$  es continuo, por la continuidad de  $f_s$ . Si usamos el Teorema 2.1.2 en [11], concluimos que  $\partial S$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^d$ , de dimensión  $d-1$ , y de clase  $C^1$ . La condición de Lipschitz sobre el vector normal saliente se sigue de la afirmación 2. Resta probar las afirmaciones 1 a 6.

La afirmación 1 es una consecuencia inmediata de iv) y el lema anterior.

Para ver la afirmación 2, observemos que la 1 implica que para  $s, u \in \partial S$ :

$$\|(s - r_0 n(s)) - (u + r_0 n(u))\| \geq 2r_0,$$

y

$$\|(u - r_0 n(u)) - (s + r_0 n(s))\| \geq 2r_0.$$

La primera desigualdad es equivalente a:

$$\|s - u\|^2 + r_0^2 \|n(s) + n(u)\|^2 - 2r_0 \langle s - u, n(s) + n(u) \rangle \geq 4r_0^2,$$

y la segunda a:

$$\|s - u\|^2 + r_0^2 \|n(s) + n(u)\|^2 + 2r_0 \langle s - u, n(s) + n(u) \rangle \geq 4r_0^2.$$

Sumando estas dos desigualdades y usando que  $\|n(s) + n(u)\|^2 = 4 - \|n(s) - n(u)\|^2$ , obtenemos la afirmación 2. La afirmación 3 se sigue de la 2, usando que

$\|s - u\|^2 \leq r_0^2/8$  para  $u \in U_s$ . Para demostrar la afirmación 4, sea  $u \in U_s \cap \partial S$  y anotemos por  $u' \in U'_s$  la proyección ortogonal de  $u$  sobre  $H_s$ . Para un  $x \in U'_s$  un cálculo elemental, junto con la afirmación 1 y 3 muestran que:

$$\begin{aligned} g_x(\alpha) &\in \text{int}B(u + r_0 n(u), r_0) \subset S^c && \text{para } \bar{\alpha}(x) < \alpha < r_0/4, \\ g_x(\alpha) &\in \text{int}B(u - r_0 n(u), r_0) \subset \text{int}(S) && \text{para } -r_0/4 < \alpha < \underline{\alpha}(x), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

siendo

$$\bar{\alpha}(x) = \langle n(s), u - u' \rangle + r_0 \langle n(s), n(u) \rangle - \sqrt{r_0^2 \langle n(s), n(u) \rangle^2 + 2r_0 \langle n(u), x - u' \rangle - \|x - u'\|^2}$$

y

$$\underline{\alpha}(x) = \langle n(s), u - u' \rangle - r_0 \langle n(s), n(u) \rangle + \sqrt{r_0^2 \langle n(s), n(u) \rangle^2 - 2r_0 \langle n(u), x - u' \rangle - \|x - u'\|^2}$$

Para demostrar la afirmación 4 tomemos  $x = u'$ . Entonces  $\bar{\alpha}(x) = \underline{\alpha}(x) = \langle n(s), u - u' \rangle$ , luego,  $g_{u'}(\cdot)$  corta  $\partial S \cap U_s$  solamente en  $g_{u'}(\langle n(s), n(u) \rangle) = u$  y lo mismo sucede con  $g_u(\cdot)$ .

Para probar la afirmación 5, tomemos  $u = s$ . Entonces  $u' = s$ , para  $x \in U'_s$ , tenemos que  $-r_0/4 < \underline{\alpha}(x)$  y  $\bar{\alpha}(x) < r_0/4$  y por lo tanto  $g_x(\alpha) \in U_s \cap \partial S$  para algún  $\alpha \in (-r_0/4, r_0/4)$ .

Tomemos  $u$  y  $u'$  como en la afirmación 6,  $u'$  es la proyección de  $u$  sobre  $H_s$ ,  $f_s(u') = \langle n(s), u - u' \rangle$  y para  $x \in U'_s$ ,  $\underline{\alpha}(x) \leq f_s(x) \leq \bar{\alpha}(x)$ , por A.4. Usando el desarrollo de Taylor:  $\sqrt{1+x} = 1 + 1/2x + \mathcal{O}(|x|^2)$  tenemos que:

$$\underline{\alpha}(x) = \langle n(s), u - u' \rangle - \frac{1}{\langle n(s), n(u) \rangle} \langle n(u), x - u' \rangle + \mathcal{O}(\|x - u'\|^2),$$

el mismo desarrollo es válido para  $\bar{\alpha}(x)$  lo cual prueba la afirmación 6.

$v) \Rightarrow iii)$  Tomemos  $s \in \partial S$ , la demostración está basada en las siguientes afirmaciones:

**Afirmación 1:** Existe algun  $0 < \tilde{r} < \tilde{l} \leq r_0$  tal que

$$\text{conv}(\{s\} \cup B(s - \tilde{l}n(s), \tilde{r})) \subset S$$

**Afirmación 2:** Si  $0 < r < l \leq r_0$  y  $\text{conv}(\{s\} \cup B(s - ln(s), r)) \subset S$  entonces

$$B(s - ln(s), l) \subset S$$

Supongamos que dichas afirmaciones son válidas, tomemos  $\tilde{r}, \tilde{l}$  como en la afirmación 1, luego por la afirmación 2 tenemos que para todo  $\tilde{l}' \in (\tilde{l}, 2\tilde{l})$  existe  $0 < \tilde{r}' < \tilde{l}'$  tal que se cumple la afirmación 1 para  $\tilde{r}'$  y  $\tilde{l}'$ . Iterando este procedimiento tantas veces como sea necesario vemos que la afirmación 1 se cumple para  $\tilde{l} = r_0$ , y algún  $0 < \tilde{r} < \tilde{l}$ . Si usamos ahora la afirmación 2, tenemos que  $B(s - rn(s), r) \subset S$  para todo  $0 < r \leq r_0$ . Para demostrar que  $S \ominus rB$  es conexo para  $0 < r \leq r_0$ , tomemos  $a, b \in S \ominus rB$ . Anotemos  $r_a$  el máximo  $\tilde{r}$  tal que  $B(a, \tilde{r}) \subset S$ , tenemos que  $r_a \geq r$ , tomemos ahora un  $s_a \in \partial S \cap B(a, r_a)$ . El hiperplano tangente a  $\partial S$  en  $s_a$  debe ser necesariamente tangente a  $B(a, r_a)$  en  $s_a$ , y por lo tanto  $a = s - r_a n(s_a)$ . Como  $r_a \geq r$ , el mapa  $\Gamma_a := t \in [0, r_a - r] \rightarrow s_a - (r_a - t)n(s_a)$  es un camino en  $S \ominus rB$  que conecta  $a$  y  $s_a - rn(s_a)$ . Tomemos  $\Gamma_b$  un camino para  $b$ , de forma análoga, y  $\Gamma \subset \partial S$  un camino que conecte  $s_a$  y  $s_b$ . Luego  $\Gamma_{ab} := \{s - rn(s), s \in \Gamma\}$  es un subconjunto de  $S \ominus rB$  ya que  $B(s - n(s), r) \subset S$ . Como  $n(s)$  es continua,  $\Gamma_{ab}$  es un camino que conecta  $s_a - rn(s_a)$  y  $s_b - rn(s_b)$ . Luego, una bola de radio  $r \leq r_0$  rueda libremente en  $S$ . De forma análoga se demuestra que una bola de radio  $r_0$  rueda libremente en  $\overline{S^c}$  usando que  $\partial \overline{S^c} \subset \partial S$ . Resta probar las afirmaciones 1 y 2.

El teorema 2.1.2 en [11] y un argumento de diferenciabilidad estandar muestran que para toda elección de  $0 < r < l$ , existe un entorno  $N_{r,l}$  de  $s$  tal que  $\text{conv}(\{s\} \cup B(s - ln(s), r)) \cap N_{r,s} \subset S$ . La afirmación 1 es una consecuencia directa de esto. Para demostrar la afirmación 2, sean  $r$  y  $l$  como estan ahí, definamos  $C_{r,l} := \text{conv}(\{s\} \cup B(s - ln(s), r))$ . Se sigue de la compacidad de  $S$  que existe un  $\bar{r} \leq l$  maximal, tal que  $C_{\bar{r},l} \subset S$ . Supongamos que  $\bar{r} < l$ . Entonces  $\partial C_{\bar{r},l}$  debe cortar a  $\partial S$  en algun punto  $t \neq s$ .

Como  $C_{r,l} \subset S$  tenemos que el hiperplano tangente a  $\partial S$  en  $t$  debe coincidir con algún hiperplano de  $C_{r,l}$  en  $t$ . Luego  $\langle n(t), t - s \rangle \bar{r} e$  para algún  $\alpha \in [0, 1)$  y algún  $e \in \partial B$ . Argumentos estandar de geometría convexa muestran que  $e = n(t)$ , luego  $t - s = (1 - \alpha)(\bar{r}n(t) - ln(s))$  para algún  $\alpha \in [0, 1)$ . De ésta igualdad y la condición de Lipschitz resulta que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\bar{r}}{l}\right) \langle n(s), n(t) \rangle &= \frac{1}{2} (2 - \|n(s) - n(t)\|^2) - \frac{\bar{r}}{l} \langle n(s), n(t) \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} (2 - \frac{1}{r_0^2} \|s - t\|^2) - \frac{\bar{r}}{l} \langle n(s), n(t) \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{r_0^2} (\bar{r}^2 + l^2 - 2\bar{r}l \langle n(s), n(t) \rangle) \right) - \frac{\bar{r}}{l} \langle n(s), n(t) \rangle \end{aligned}$$

si ahora usamos que  $r_0 \geq l$  obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{r_0^2} (\bar{r}^2 + l^2 - 2\bar{r}l \langle n(s), n(t) \rangle) \right) - \frac{\bar{r}}{l} \langle n(s), n(t) \rangle \geq \frac{1}{2} (1 - \bar{r}^2 l^2)$$

si ahora usamos que  $\frac{1}{2}(1 - x^2) > (1 - x)x$  tenemos que:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{l^2} \right) > \left( 1 - \frac{\bar{r}}{l} \right) \frac{\bar{r}}{l} \geq \left( 1 - \frac{\bar{r}}{l} \right) \left( \frac{\bar{r}}{l} - \left[ \frac{1}{1 - \alpha} \right] \langle t - s, n(t) \rangle \right)$$

donde hemos usado que  $\bar{r} < l$  y que  $\langle n(t), t - s \rangle \geq 0$ . Este último termino es igual a  $(1 - \frac{\bar{r}}{l}) \langle n(s), n(t) \rangle$  ya que  $t - s = (1 - \alpha)(\bar{r}n(t) - ln(s))$ . Esta contradicción prueba que  $\bar{r} \geq l$ .

*iii) ⇒ ii)* De el hecho de que  $S^c$  sea abierto, junto con *iii)* tenemos que:

$$\partial \overline{S^c} = \partial S \text{ y } \text{int}(\overline{S^c}) = S^c. \quad (\text{A.5})$$

Para demostrar *ii)* veamos primero que:

$$s \in \text{int}(S) \Rightarrow s \in \text{int}(B(x, r_0)) \subset \text{int}(S) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.6})$$

Como  $\partial S$  es compacto existe  $t \in \partial S$  tal que  $r_s := \|s - t\| = \inf_{y \in \partial S} \|s - y\| \geq 0$ . Si  $r_s < r_0$  se sigue de *iii)*, A.5 y el lema anterior que existe  $x \in \mathbb{R}^d$  tal que  $t \in B(s, r_s) \subset B(x, r_0) \subset S$  lo cual demuestra A.5. Haciendo lo mismo con  $\overline{S^c}$  llegamos a que A.5 se cumple para  $S^c$ . De éstas dos versiones de A.5 se sigue que:

$$\text{int}(S) = \bigcup_{\text{int}(B(x, r_0)) \subset \text{int}(S)} \text{int}(B(x, r_0)),$$

y

$$S^c = \bigcup_{\text{int}(B(x, r_0)) \subset S^c} \text{int}(B(x, r_0)).$$

Por *iii)* sabemos que  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Luego *ii)* es consecuencia de que  $\text{int}(S) = (\overline{S^c})^c$  que es cierto en general.

*ii) ⇒ i)*. Si  $S$  es  $r_0$ -convexo tenemos que para todo  $0 < \lambda < r_0$ :

$$S^c = \bigcup_{\text{int}(B(x, r_0)) \subset S^c} \text{int}(B(x, r_0)) \subset \bigcup_{B(x, \lambda) \subset S^c} B(x, \lambda) \subset S^c.$$

Y por lo tanto  $\psi_\lambda(S) = S$  para  $\lambda \in (-r_0, 0)$ .

De el hecho de que  $\overline{S^c}$  es  $r_0$ -convexo, que  $\text{int}S = (\overline{S^c})^c$  y que  $S$  es cerrado tenemos:

$$\text{int}(S) = \bigcup_{\text{int}(B(x,r_0)) \subset \text{int}(S)} \text{int}(B(x,r_0)) \subset \bigcup_{B(x,r_0) \subset S} B(x,r_0). \quad (\text{A.7})$$

Sea  $s \in \partial S$ . Veremos más adelante que:

$$\inf_{y \in \text{int}(S)} \|s - y\|. \quad (\text{A.8})$$

Ésta última afirmación junto con A.7 muestran que existe una sucesión  $\{s_n\} \subset \text{int}(S)$  que converge a  $s$  y una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $s_n \in \text{int}(B(x_n, r_0)) \subset \text{int}(S)$ . Sea  $\bar{x}$  un punto de acumulación de la sucesión  $\{x_n\}$ . Concluimos que  $s \in B(\bar{x}, r_0) \subset S$  ya que  $S$  es cerrado, y por lo tanto:

$$\partial S \subset \bigcup_{B(x,r_0) \subset S} B(x,r_0).$$

Considerando A.7 obtenemos que

$$S \subset \bigcup_{B(x,r_0) \subset S} B(x,r_0) \subset \bigcup_{B(x,\lambda) \subset S} B(x,\lambda), \text{ para todo } \lambda \in [0, r_0].$$

Es decir  $\psi(S) = S$  para todo  $\lambda \in [0, r_0]$ .

Nos queda por probar A.8. Supongamos que no es cierto. Como  $\text{int}(S) \neq \emptyset$  y  $S$  es conexo por caminos podemos encontrar  $t \in \partial S$  tal que:

$$d := \inf_{y \in \text{int}(S)} \|t - y\| \text{ con } 0 < d < r_0/10.$$

De A.5 tenemos que existe  $x$  tal que:

$$0 < \|x - t\| \leq r_0 + d \quad \text{y} \quad \text{int}(B(x, r_0)) \subset \text{int}(S). \quad (\text{A.9})$$

Sea  $b := t + [d/(2\|x - t\|)](x - t)$ , observemos que  $\inf_{y \in \text{int}(S)} \|b - y\| > 0$ , y por lo tanto podemos tomar una sucesión  $\{b_n\} \in S^c$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , y una sucesión  $\{c_n\}$  de modo que

$$b_n \in \text{int}(B(c_n, r_0)) \subset S^c. \quad (\text{A.10})$$

Como  $t \in S$  se cumple que para todo  $n$

$$\|c_n - t\|^c \geq r_0^2 > \|c_n - b_n\|^c = \|c_n - t\|^2 + \|t - b_n\|^2 + 2\langle c_n - t, t - b_n \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Si usamos la definición de  $b$  tenemos que

$$\limsup_n \langle c_n - t, t - x \rangle = \limsup_n \langle c_n - t, t - b \rangle 2\|x - t\|/d = \limsup_n \langle c_n - t, t - b_n \rangle 2\|x - t\|/d.$$

De A.11, como  $\{c_n - t\}$  es acotada tenemos que  $\langle c_n - t, t - b_n \rangle = -\|t - b_n\|^2/2$ , finalmente

$$\limsup_n \langle c_n - t, t - x \rangle \leq - \limsup_n (\|t - b_n\|^2/2)(2\|x - t\|/d) = -\|t - b\|^2\|x - t\|/d \leq 0.$$

Junto con A.9, y A.10, llegamos a que

$$\begin{aligned} \limsup_n \|c_n - x\|^2 &\leq \limsup_n (\|c_n - b_n\| + \|b_n - b\| + \|b - t\|)^2 + \|t - x\|^2 \\ &< (r_0 + d/2)^2 + (r_0 + d)^2 < 3r_0^2. \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos que  $d < r_0/10$ , éste último resultado contradice que  $\|c_n - x\| \geq 2r_0$  para todo  $n$ , que se sigue inmediatamente de A.9, y A.10.  $\square$

# Bibliografía

- [1] CUEVAS, A., FRAIMAN, R. y RODRIGUEZ-CASAL, A. (2006). A non-parametric approach to the estimation of lengths and surface areas, *Ann. Statist.* 0, Vol. 0 No. 00, 1-23
- [2] CUEVAS, A. y RODRIGUEZ-CASAL, A. (2004). On boundary estimation. *Adv. in Appl. Probab.* **36** 340-354. MR2058139 (2005b:62068).
- [3] CUEVAS, A., FRAIMAN, R. (1997). A plug-in approach to support estimation. *Ann. Statist.* **25** 2300-2312. MR1604449(99m:62040).
- [4] FEDERER, H. (1959). Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** 418-491. MR0110078
- [5] FEDERER, H. (1969). Geometric measure theory. *Springer Verlag* ISBN 3-540-60656-4
- [6] MATTILA, P (1995). Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Vol. **44**. Cambridge University Press, Cambridge. Fractals and rectifiability. MR1333890(96H:28006).
- [7] WALTHER, G. (1999). On a generalization of Blaschke's rolling theorem and the smoothing of surfaces. *Math. Methods Appl. Sci.* **22** 301-316. MR1671447(99M:46174).
- [8] WALTHER, G. (1997). Granulometric smoothing. *Ann. Statist.* **25** 2273-2299. MR1604445 (99B:6270).
- [9] USPENSKY, J.V., Introduction to Mathematical Probability.
- [10] DEVROYE, L. y WISE, G.L. (1980). Detection of abnormal behavior via nonparametric estimation of the support. *SIAM J. Appl. Math* **38**, 480-488.
- [11] BERGER, M. y GOSTIAUX, B. (1988). Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces. *Springer, New York*.