Dinámicas expansivas en variedades.

Joaquín Brum, Orientador: Miguel Paternain

18 de diciembre de 2008

1. Introducción

En esta monografía se tratará la dinámica de los homeomorfismos expansivos en variedades. Como ejemplos paradigmáticos tenemos los difeomorfismos de Anosov, los difeomorfismos pseudo-Anosov en superficies (ver [?]), y los quasi-Anosov, que no son necesariamente de Anosov (ver[?]). El producto de homeomorfismos expansivos es expansivo, por lo que tomando productos de los anteriormente mencionados, tenemos una buena fuente de ejemplos.

La clasificación de Thurston [?] de las clases de isotopía de homeomorfismos en superficies, dice que un homeomorfismo que ni el, ni una potencia preserven una clase no trivial de isotopía libre de curvas, es isotópico a un pseudo-Anosov. Por su parte, Lewowicz y Hiraide ([?][?])prueban que cualquier expansivo en superficies es conjugado a un pseudo-Anosov. Además, el pseudo-Anosov es único módulo conjugaciones en la clase de isotopía, y cualquier homeomorfismo de ésta, es semiconjugado al pseudo-Anosov. Lo anterior hace de un expansivo en una superficie un representante canónico de su clase de isotopía.

Comenzaremos exponiendo la clasificación de homeomorfismos expansivos en superficies, siguiendo el trabajo de Lewowicz [?]. En este trabajo se prueba la existencia de estructura de producto local en entornos reducidos de cualquier punto. Esto se logra gracias a la existencia de conexos estables de tamaño uniforme en todos los puntos de la variedad. Las propiedades de los conjuntos estables e inestables locales de semicontinuidad, intersección trivial local, de tener interior vacío, y que estables e inestables formen "ángulos grandes"implican que la única forma de coexistir en la variedad es con la mayor regularidad posible (estuctura de producto local). Si la variedad es una superficie alcanza con saber que tengo un conexo, (básicamente porque desconecta localmente) para lograr la estructura, pero en dimensiones mayores no es suficiente con la existencia del mismo. De hecho hay ejemplos en dimensión tres, donde no hay estructura de producto local en toda la variedad [?], siendo la dimensión de los conjuntos estables e inestables uno, en un abierto denso (el conjunto errante).

Siguiendo con esta heurística, Vieitez en [?], y [?], asume la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos para un expansivo en una variedad de dimensión tres. Ahora, la existencia de un conjunto denso de puntos con variedades estables e inestables de tamaño uniforme y dimensión complementaria, implica la existencia de un abierto denso con estructura de producto local, probando finalmente que dicho abierto es toda la variedad, que ésta es un toro, y que el expansivo es conjugado a un Anosov lineal. Luego en [?] Vieitez, asumiendo diferenciabilidad ($f \in C^{1+\varepsilon}$) y utlilizando técnicas de teoría ergódica diferenciable obtiene el mismo resultado, si el conjunto errante es vacío.

Luego, expondremos una generalización de los trabajos de Vieitez (realizada conjuntamente con Alfonso Artigue y Rafael Potrie [?]), sin restricciones en la dimensión de la variedad. En esta, asumiendo la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos, obtenemos un abierto denso con estructura de producto local. Si además hay un punto periódico cuyo conjunto estable (o inestable) tenga codimensión uno, probaremos que la variedad tiene estructura de producto local uniforme, esta es un toro ($\mathbb{T}^n$), y el expansivo es conjugado a un Anosov lineal.

La heurística es la misma, pero debimos sustituir argumentos de conexión, por argumentos homológicos para probar que los conjuntos estables e inestables de puntos periódicos cercanos a uno dado se cortan. Una vez obtenida esta intersección se obtiene la estructura de producto local utilizando el teorema de invariancia del dominio. La forma de descartar las singularidades en el caso de que haya un periódico de codimensión uno, es probando que el conjunto de singularidades es estable, lo que implica que consiste de una cantidad finita de puntos, hecho que descartamos posteriormente. Finalmente la estructura de producto local obtenida nos da una foliación de codimensión uno, por hojas homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$ lo que implica que la variedad es un toro, y en este caso con la ayuda de un teorema de Hiraide tenemos que el expansivo es conjugado a un Anosov lineal.

Si observamos el producto de dos pseudo-Anosov, vemos que un abierto denso con estructura de producto local es un resultado óptimo sin la hipótesis de un periódico de codimensión uno (cabe recalcar que los difeomorfismos pseudo-Anosov, tienen un conjunto denso de puntos periódicos topologicamente hiperbólicos, y por tanto también lo tienen productos de ellos).

1.1. Definiciones y esquema de la monografía

En esta sección definiremos los conceptos que se usarán en la monografía y enunciaremos los resultados principales.

Definición 1.1. *Decimos que un homeomorfismo $f\colon M \to M$ es* expansivo *si existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ tales que $x \neq y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $dist(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$.*

Definición 1.2. *Decimos que $p \in M$ tiene estructura de producto local si existe un mapa $h\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$ homeomorfismo sobre su imágen ($p \in Im(h)$) y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ se cumple que $h(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = W^s_\varepsilon(h(x, y)) \cap Im(h)$ y $h(\mathbb{R}^k \times \{y\}) = W^u_\varepsilon(h(x, y)) \cap Im(h)$. Diremos que la estructura de producto local es uniforme si existe $r > 0$ de forma tal que para todo $x \in M$ se cumple que los puntos de $B_r(x)$ admiten estructura de producto local.*

En la sección **??** se expondrá la clasificación de homeomorfismos expansivos en superfices basandonos en [**?**], y [**?**]. Un paso fundamental es encontrar que la expansividad implica la existencia de producto local en toda la variedad salvo finitos puntos.

La existencia de estas foliaciones ya alcanza como una obstrucción topológica para la existencia de homeomorfismos expansivos en la esfera S^2. En los casos de superficies de género mayor o igual a uno, se utiliza la clasificación de las clases de isotopia de homeomorfismos para completar la clasificación de los homeomorfismos expansivos en dichas superficies.

Definición 1.3. *Decimos que un punto $p \in M$ de período l es* topológicamente hiperbólico *($p \in Per_H$) si f^l es localmente conjugado al mapa lineal $L\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ dado por $L(x, y) = (x/2, 2y)$. En este caso decimos que $p \in Per^r_H \subset Per_H$ (diremos que p es un p.t.h. de índice r).*

Como es usual definimos los conjuntos estables e inestables de un punto $x \in M$ como $W^s(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to +\infty\}$ y $W^u(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to -\infty\}$. Los conjuntos estables e inestables locales (ε-local) se defininen como $W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ y $W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\}$. Denotaremos como $cc_p(X)$ a la componente conexa de $X \subset M$ que contiene a p.

Observación 1.1. *Si $f : M \to M$ es un homeomorfismo expansivo y $z \in M$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $S_z = cc_z(W^s(z) \cap B_\delta(z))$ entonces $S_z \subset W^s_\varepsilon(z)$. Para esto ver [**?**].*

Siguiendo con esta heurística asumimos de las sección 5 en adelante la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos, lo que junto con la observación previa y la Proposición **??** nos da buenos conjuntos estables e inestables de tamaño uniforme y dimensión complementaria en un conjunto denso de puntos. Por el Teorema **??** tenemos que $Per^0_H = Per^n_H = \emptyset$ ya que no puede haber puntos estables.

Probamos una propiedad de separación homológica que verifican el conjunto estable y el inestable local de un punto $p \in Per^r_H$. La demostración de esta proposición sigue las ideas de [**?**], [**?**] cambiando la conexión (H^0) por módulos de homología de órdenes superiores, y se desarrolla en la sección **??**. La propiedad es la siguiente.

Proposición 1.1. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in M$, $p \in Per^k_H \cap B_\varepsilon(x)$ y $V \subset B_\varepsilon(x)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ que contiene a p se cumple que $H_{n-k-1}(V \setminus S_p) \cong \mathbb{R}$ siendo $S_p = cc_p(V \cap W^s(p))$.*

Consideraremos el resultado análogo para la variedad inestable con identica demostración.

Observar que el conjunto de puntos con estructura de producto local es abierto. Llamaremos singulares a los puntos sin estructura de producto local.

Teorema 1.1. *Sea $f\colon M \to M$ un homeomorfismo expansivo tal que $\overline{Per_H} = M$. Entonces todo punto de Per_H tiene estructura de producto local. En particular, hay un abierto denso de puntos con estructura de producto local.*

Una vez conseguido esto, en [?] se estudian las singularidades, descartando su existencia. Como fue comentado, en el producto de pseudo-Anosov coexisten puntos periódicos topológicamente hiperbólicos densos y singularidades. En la sección **??**, se verá que si $Per_H^{n-1} = Per_H$, puede descartarse la existencia de singularidades.

Vale la pena observar que un abierto denso con estructura de producto local, no implica a priori, que el índice de los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos sea constante (aunque tenemos la fuerte convicción de que así es). En **??** probaremos que si $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$ el índice es constante.

Teorema 1.2. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo que verifica que $\overline{Per_H} = M$. Entonces $Per_H^{n-1} = Per_H$ o $Per_H^{n-1} = \emptyset$. Análogamente para Per_H^1.*

Corolario 1.1. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo de una variedad conexa de dimensión 3 o 4 con $\overline{Per_H(f)} = M$. Entonces, todos los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos tienen el mismo índice.*

Demostración. En dimensión 3 se cumple que $Per_H = Per_H^1 \cup Per_H^2$ (ver [?] donde se prueba que no hay puntos estables) el teorema **??** concluye la prueba. En dimensión 4, se tiene $Per_H = Per_H^1 \cup Per_H^2 \cup Per_H^3$ y dado que si $Per_H^1 \cup Per_H^3 \neq \emptyset$ el índice es constante, (nuevamente por el teorema **??**), tenemos lo que queríamos.

$\square$

En la sección **??** estudiamos las singularidades en el caso de codimensión uno, descartando su existencia y concluyendo la existencia de una estructura de producto local uniforme en toda la variedad.

Definición 1.4. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo, decimos que verifica la propiedad de sombreado si es cierto que para todo $\alpha > 0$ existe $K > 0$ de forma tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cumple que dist$(x_n, f(x_{n-1})) < \alpha$ entonces existe $x \in M$ de forma tal que dist$(f^n(x), x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 1.3. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo, que verifica que $\overline{Per_H} = M$ y que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o que $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces, hay estructura de producto local uniforme en toda la variedad, en particular se cumple la propiedad del sombreado.*

En el caso anterior, se sabe del trabajo de Franks, que si la foliación es diferenciable, la variedad es homeomorfa a $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Este también es el caso sin la hipótesis de diferenciablidad, para probarlo se requiere adaptar los argumentos que aparecen en [?] y [?], donde se prueba en dimensión 3 sin la hipótesis de diferenciabilidad.

Corolario 1.2. *Sea $f : M^n \to M^n$ homeomorfismo expansivo, que verifica que $\overline{Per_H} = M^n$. Supongamos que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o que $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces $M = \mathbb{T}^n$, y f es conjugado a un difeomorfismo de Anosov Lineal.*

Demostración. Esto es consecuencia del teorema **??** junto con el resultado de [**?**] que asegura que un homeomorfismo expansivo de $\mathbb{T}^n$ con la propiedad del sombreado es conjugado a un Anosov lineal.

$\square$

2. Preliminares

2.1. Topología de puntos

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico metrizable y separable. Diremos que $\emptyset$ tiene dimensión -1. Decimos que X, tiene dimensión $\leq n$ en un punto x, si éste tiene una base de entornos abiertos, cuyos bordes tienen dimensión $\leq n-1$. Decimos que X tiene dimensión n en p, si tiene dimensión $\leq n$ y es falso que tiene dimensión $\leq n-1$. Si X tiene dimensión n en todos sus puntos, decimos que tiene dimensión n.*

La dimensión topológica es claramente un invariante topológico. Esta dimensión coincide con los conceptos de dimensión para variedades.

Teorema 2.1. *Un espacio que es unión numerable de cerrados de dimensión $\leq n$, tiene dimensión $\leq n$.*

Para la prueba de esto ver [**?**] pg. 30.

Teorema 2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de una variedad de dimensión n, tenga dimensión n, es que contenga un abierto de la misma*

Teorema 2.3. *Una variedad de dimensión n no se puede desconectar quitando un subconjunto de dimensión topológica de dimensión $\leq n-2$.*

Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar también en [**?**] pg. 44,48 respectivamente.

Un teorema fundamental para encontrar estructura de producto local es el siguiente, el que llamaremos Teorema de Invariancia del Dominio:

Teorema 2.4. *Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva, entonces es abierta*

Para una prueba de esto ver [**?**].

Finalmente, para clasificar los homeomorfismos de superficies, utilizaremos el siguiente teorema de topología del plano.

Teorema 2.5. *Si A y B son subconjuntos compactos conexos del plano. Entonces $A \cup B$ separa el plano si y solo si $A \cap B$ es disconexo.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [**?**] pg, 506.

2.2. Preliminares de topología algebraica

Sea $\mathbb{R}^\infty$ el conjunto de las sucesiónes de reales con sporte compacto, y $E_i \in \mathbb{R}^\infty$ tal que $E_i(i) = 1$, $E_i(n) = 0$ si $n \neq i$. Sea Δ_n la envolvente convexa de $\{E_0, ...E_n\}$, el símplice n-dimensional. Dados $p_1, ..., p_n$, puntos de $\mathbb{R}^\infty$ notamos $(p_0, ..., p_n)$ al único mapa lineal afín que lleva E_i en p_i.

Dado un espacio topológico X. Notamos por $S_q(X)$ al $\mathbb{R}$-módulo libre, generado por los mapas $\sigma\colon \Delta_n \to X$. Definimos ahora los mapas borde $\partial_q\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, definiendolo sobre los símplices como $\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i \sigma \circ (E_0, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n)$. Definimos $\partial_0 = 0$

Se cumple que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Entonces podemos definir el q-ésimo módulo de homología de X, $H_q(X)$ como $ker\partial_q / Im\partial_{q+1}$. Si cambiamos ∂_0 por un mapa $\varepsilon\colon S_0(X) \to \mathbb{R}$ que a $\sum_x \nu_x \sigma_x$ lo manda a $\sum_x \nu_x$ tenemos lo que llamaremos homología reducida. A los elementos de $ker\partial_q$ los llamaremos q-ciclos y a los de $Im\partial_{q+1}$ q-bordes.

Definición 2.2. *Un complejo de cadenas es una sucesión de módulos C_q, y una sucesión de homomorfismos $\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$, que cumplen $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$*

Dada una cadena C, se pueden definir los q-ésimos módulos de homología como $H_q(C) = ker\partial_q / Im\partial_{q+1}$.

Definición 2.3. *Dados (C_q, ∂_q), (C'_q, ∂'_q) dos complejos de cadenas. Decimos que una sucesión de homomorfismos $f_q\colon C_q \to C'_q$ es un mapa de cadenas si se cumple que $\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$.*

Es claro de la definición de mapa de cadenas, que estos llevan ciclos en ciclos y bordes en bordes, por lo que cada mapa de cadenas, define homomorfismos a nivel de los módulos de homología. Observar que si tenemos $f\colon X \to Y$, esto define un homomorfismo $S_q(f)\colon S_q(X) \to S_q(y)$ como $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$. Es facil ver que la sucesión de homomorfismos $S_q(f)$ es un mapa de cadenas entra las cadenas $S_q(X)$ y $S_q(Y)$.

Dado $A \subset X$, consideremos $S_q(A) \subset S_q(X)$ las q-cadenas que se mapean sobre A. Podemos considerar el módulo cociente $S_q(X)/S_q(A)$ y los mapas $\overline{\partial_q}\colon S_q(X)/S_q(A) \to S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)$ que cumplen $\overline{\partial_q}([c]) = [\partial c]$. Claramente $\overline{\partial_{q-1}} \circ \overline{\partial_q} = 0$ lo que permite definir la homología para el complejo de cadenas de los módulos cocientes, y los homomorfismos $\overline{\partial_q}$.

Notamos $H_q(X, A) = ker\overline{\partial_q}/Im\overline{\partial_{q+1}}$ al q-ésimo módulo de homología de X módulo A. Es fácil ver que las proyecciónes canónicas $\pi_q\colon S_q(X) \to S_q(X)/S_q(A)$ son un mapa de cadenas, entre las cadenas en consideración.

Podemos definir un mapa $\overline{\partial}\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ como $\overline{\partial}([c]) = [\partial c]$. Es una buena definición ya que no depende del representante.

Definición 2.4. *Sea X un espacio topológico. El módulo de cocadenas singulares en X es $Hom_R(S_q(X), R)$. Lo notaremos $S^q(X)$*

Definición 2.5. *Definimos los mapas de coborde* $\delta^q \colon S^q(X) \to S^{q+1}(X)$ *como* $\delta^q(c) = c \circ \partial_{q+1}$.

Y ahora definamos el q-ésimo módulo de cohomología de X, que notaremos $H^q(X)$ como $\ker\delta^q/\mathrm{Im}\delta^{q-1}$ (cociclos/cobordes).

Si $f \colon X \to Y$, entonces podemos definir $S^q(f) \colon S^q(Y) \to S^q(X)$ como $S^q(f)(c) = c \circ S_q(f)$. Claramente $\delta^q \circ S^q(f) = S^{q+1}(f) \circ \delta^{q+1}$ por lo que f define homomorfismos a nivel de cohomología $H^q(f) \colon H^q(Y) \to H^q(X)$.

Supongamos ahora $A \subset X$, definimos $S^q(X,A) = Hom_R(S_q(X)/S_q(A), R)$. Definamos ahora un nuevo coborde $\overline{\delta_q} \colon S^q(X,A) \to S^{q+1}(X,A)$ como $\overline{\delta_q}(c) = c \circ \overline{\partial_{q+1}}$ donde $\overline{\partial_{q+1}} \colon S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A) \to S_q(X)/S_q(A)$ es el borde definido durante la definición de homología relativa. Nuevamente, se verifica $\overline{\delta_{q+1}} \circ \overline{\delta_q} = 0$ por lo que podemos definir $H^q(X,A) = ker\overline{\delta_q}/Im\overline{\delta_{q-1}}$.

Un conjunto dirigido, es un un conjunto I junto con una relación de orden parcial $i \leq j$, de forma de que dados $i, j \in I$, $\exists k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Definición 2.6. *Supongamos* $(M_i)_{i\in I}$ *una familia de* R*-módulos indexada en* I *un conjunto dirigido, y que para* $i \leq j$ *tenemos homomorfismo* $\Phi_{j,i} \colon M_i \to M_j$ *que verifica* $\Phi_{k,j} \circ \Phi_{j,i} = \Phi_{k,i}$ *para* $i \leq j \leq k$, *y* $\Phi_{i,i} = Id$. *Llamamos a esto un sistema dirigido de módulos.*

Definición 2.7. *Un límite directo para un sistema dirigido de módulos* $(M_i)_{i\in I}$, *es un módulo* M *junto con una familia de homomorfismos* $\Phi_i \colon M_i \to M$ *indexada en* I, *que cumple la propiedad* $\Phi_j \circ \Phi_{j,i} = \Phi_i$. *Y que además verifica la siguiente siguiente propiedad universal. Para cualquier* R*-módulo* N, *y familia* Ψ_i *de homomorfismos* $\Psi_i \colon M_i \to N$ *que cumpla* $\Psi_j \circ \Phi_{j,i} = \Psi_i$ *si* $i \leq j$. *Existe un único homomorfismo* $\psi \colon M \to N$ *que cumple* $\Psi_i = \Psi \circ \Phi_i$ *para todo* i.

Se prueba que dado cualquier sistema dirigido de módulos $(M_i)_{i\in I}$, existe un límite directo, y de la propiedad universal se deduce facilmente que el límite es único, por lo que podemos hablar de el límite directo de un sistema dirigido de módulos. Lo notaremos $lim_{\rightarrow} M_i$. Un ejemplo de esto es el conjunto de todos los submódulos ordenados por la inclusión, donde los morfismos sean las inclusiones, en este caso el límite directo es el módulo original.

Definición 2.8. *La cohomología singular de soporte compacto sobre* X, $H^q_c(X)$, *la definimos como* $H^q_c(X) = lim_{\rightarrow} H^q(X, X-K)$ *donde el conjunto dirigido es el conjunto de subconjuntos compactos* K *con la inclusión, y los morfismos son los inducidos por la inclusión.*

Claramente si X es compacto, las definiciones coinciden.

A continuación enunciamos una aplicación del teorema de dualidad de Alexander que se puede encontrar en [**?**]pg.301.

Teorema 2.6. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad cerrada de dimensión k, entonces $H_{n-k-1}(\mathbb{R}^n/A)$ es isomorfo a $H_c^k(A)$*

Finalmente enunciamos el siguiente teorema que puede encontrarse en [?] pg.245, teorema 3.35.

Teorema 2.7. *Si M es orientable, entonces $H_c^k(M) \cong H_{n-k}(M)$*

3. Clasificación de Homeomorfismos expansivos en superficies

En toda esta sección M es una superfice cerrada orientable sin borde, y $f\colon M \to M$ un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad α. Esta sección está basada en [?], y [?].

Definición 3.1. *$x \in M$ se dice estable para f, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ $\forall n \geq 0$*

Observación 3.1. *Si x es estable para f, entonces $\exists V$ entorno de x, tal que diam$(V) \to 0$ si $n \to \infty$. Sino existiría $\nu > 0$ y $n_k \to \infty$ de forma que diam$(f^{n_k}(V)) > \nu$, y podría tomar $y_k \in B_\delta(x)$ de forma que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y_k)) > \nu$. Tomando puntos límites de $w_k = f^{n_k}(x)$ y $z_k = f^{n_k}(y_k)$ que llamaremos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ tenemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $d(f^n(\hat{x}), f^n(\hat{y}))=$ $lim_{k\to\infty} d(f^n(w_k), f^n(z_k))$ que es menor que ε a partir de algún k, violando la expansividad.*

Teorema 3.1. *f no tiene puntos estables.*

Demostración. Sea $x \in M$ un punto estable, $\varepsilon < \alpha$ y δ el valor asociado a ε por la estabilidad. Para probar este teorema se hace uso del siguiente lema técnico.

Lema 3.1. *Sea $x \in M$ un punto estable, $\exists \sigma > 0$ y $N > 0$ tales que $\forall n \geq N$, $f^\nu(B_\sigma(f^{-n}(x))) \subset B_\delta(f^{-\nu+n}(x))$ con $\nu \in [0,n]$.*

Demostración. Si no fuese así, existirían $n_k \to \infty$ y $\sigma_{n_k} \to 0$ tales que $f^{\nu_k}(B_{\sigma_{n_k}}(f^{-n_k}(x))) \nsubseteq B_\delta(f^{-n_k+\nu_k}(x))$ para algún $\nu_k \in [0,n_k]$. Es decir, para algún punto en $B_{\sigma_{n_k}}(f^{-n_k}(x))$, su imágen según f^{ν_k} dista de $f^{-n_k+\nu_k}(x)$ más que δ. Uniendo este punto con $f^{-n_k}(x)$ por un arco contenido en $B_{\sigma_{n_k}}(f^{-n_k}(x))$, es posible encontrar un punto y_{n_k}, y algún ν'_k de forma que $d(f^{-n_k+\nu'_k}(x), f^{\nu'_k}(y_{n_k}) = \delta$ y $d(f^{-n_k+\nu}(x), f^\nu(y_{n_k}) \leq \delta$, para $\nu \in [0,n_k]$. Por la estabilidad del punto x, $f^{\nu'_k}(y_{n_k})$ y $f^{-n_k+\nu'_k}(x)$ están a menos de ε para el futuro, y como σ_{n_k} tiende a cero, $\nu'_k \to \infty$. Por lo tanto tomando subsucesiones de $f^{\nu'_k}(y_{n_k})$ y $f^{-n_k+\nu'_k}(x)$ encontramos puntos distintos que estan a menos de la constante de expansividad para el futuro y el pasado.

□

Continuemos con la demostración del Teorema. Observemos que el lema anterior nos da estabilidad en el $\alpha(x)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, y $\delta > 0$ asociado a ε por la estabilidad de x, ahora sea $\sigma > 0$ dado por el lema anterior para el δ. Si $z \in \alpha(x)$, con $f^{-n_k}(x) \to z$ y $w \in B_\sigma(z)$, tenemos que, para todo $n > 0$ $d(f^n(z), f^n(w)) = lim_{k\to\infty} d(f^{-n_k+n}(x), f^n(w))$, que es menor que ε a partir de algún k. Luego, debido a la compacidad de $\alpha(x)$ y a la observación **??**, podemos cubrir $\alpha(x)$ con finitos abiertos cuyos diámetros tienden a cero al iterarlos al futuro. Esto implica que $\alpha(x)$ consiste de una cantidad finita de puntos, en particular tenemos que $\alpha(x)$ es una órbita periódica atractora. Dado que por la observación **??**, la estabilidad es una propiedad abierta, los puntos cercanos a x deberían ser periódicos de f, lo que es absurdo por ser la órbita de x periódica atractora.

□

La no existencia de puntos estables está fuértemente basada en la arcoconexión local del espacio, hay ejemplos de expansivos con puntos estables. Un ejemplo de esto es la restricción del shift en $2^{\mathbb{Z}}$ al conjunto $C = \{\{a_n\} \colon a_j = a_{j-1} = 0, \implies a_i = 0 \forall i < j\}$

En esta sección notaremos $S_\varepsilon(x)$ $(U_\varepsilon(x))$ a $cc_x(W^s_\varepsilon(x))$ $(cc_x(W^u_\varepsilon(x)))$. Y fijada una bola $\overline{B_\sigma(x)}$, si $y \in B_\sigma(x)$ llamaremos $C_y(x,\sigma,\delta)(D_y(x,\sigma,\delta))$ a $cc_x(S_\delta(x) \cap \overline{B_\sigma(x)})(cc_x(U_\delta(x) \cap \overline{B_\sigma(x)}))$. Cuando estén implícitos los parámetros x, σ y δ, se omitirán.

Teorema 3.2. *Para cada $\varepsilon > 0$, diam($S_\varepsilon(x)$) y diam($U_\varepsilon(x)$) está acotado por encima de 0.*

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que dado $0 < \varepsilon < \alpha$ y $x \in M$, existen $n_k \to \infty$, $\sigma_k \to 0$ y $\nu_k \in [0, n_k]$ de forma que $f^{\nu_k}(B_{\sigma_k}(f^{-n_k}(x))) \nsubseteq B_\varepsilon(f^{-n_k+\nu_k}(x))$, ya que de otra forma obtendríamos puntos estables en el $\alpha(x)$. Esto permite encontrar puntos $y_k \in B_{\sigma_k}(f^{-n_k}(x))$, arcos $\gamma_k \subset B_{\sigma_k}(f^{-n_k}(x))$ uniendo $f^{-n_k}(x)$ con y_k, y $\nu'_k \in [0, n_k]$ de forma que $f^n(\gamma_k) \subset B_\varepsilon(f^{-n_k+n}(x))$ para todo $n \in [0, n_k]$ y $d(f^{\nu'_k}(y_k), f^{-n_k+\nu'_k}(x)) = \varepsilon$. Observar que si $n_k - \nu'_k$ no estuviese acotado superiormente en k y en x, tomando puntos límites encontraríamos pares de puntos que se mantienen a menos de $\varepsilon < \alpha$ para todo tiempo violando la expansividad. Llamemos d_k a $f^{n_k}(\gamma_k)$ cuyo diámetro está acotado por encima de cero, debido a la continuidad uniforme de los iterados de f y a la acotación de $n_k - \nu'_k$. Consideremos ahora $S = \bigcap_N \overline{\bigcup_{k=N}^\infty d_k}$, este conjunto es conexo por ser intersección decreciente de compactos conexos, y su diámetro está acotado por encima de cero por estarlo el de los arcos $f^{n_k}(\gamma_k)$. Para finalizar probemos que $S \subset S_\varepsilon(x)$, en efecto tomemos $y \in S$, por la construcción, existe $w_k \to y$ con $w_k \in d_k$, ahora, dado $n > 0$ $\mathrm{d}(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = lim_{k\to\infty} \mathrm{d}(f^{-n}(w_k), f^{-n}(x))$ que a partir de un momento es menor que ε ya que $n_k \to \infty$ y $f^{-n}(d_k) \subset B_\varepsilon(f^{-n}(x))$ para $n \in [0, n_k]$.

□

Nuevamente, la existencia de conexos estables está basado en la arcoconexión local del espacio, el conjunto no errante de un difeomorfismo de Denjoy es expansivo y si ε es suficientemente pequeño, se cumple que $W^s_\varepsilon(x) = \{x\}$.

Se utilizarán dos lemas que pasaremos a enunciar, pero que no llevarán demostración ya que, más adelante aparecerán versiones muy similares de éstos, que demostraremos.

Lema 3.2. *Fijados x, σ y δ, las funciones que mandan $y \to S_\delta(x)$ y $z \to C_z(x, \sigma, \delta)$ son superiormente semicontinuas (Lo mismo ocurre con $U_\delta(y)$ y $D_z(x, \sigma, \delta)$).*

Lema 3.3. *. Dados $\varepsilon > 0$ y $\rho > 0$, $\exists \mu > 0$ y $\sigma > 0$ de forma que si $d(x, x') < \sigma$, $y \in S_\varepsilon(x)$, $z \in U_\varepsilon(x')$, $d(x, y) \geq \rho$, $d(x', z) \geq \rho$ entonces $d(y, z) \geq \mu$.*

Un teorema clásico de topología general dice que un compacto conexo, localmente conexo es arcoconexo. Sabemos que que para todo x tanto $S_\varepsilon(x)$ como $U_\varepsilon(x)$ son compactos y conexos, el próximo teorema es justamente lo que falta para probar la arcoconexión de estos conjuntos.

Teorema 3.3. *$S_\delta(x)$ ($U_\delta(x)$) es localmente conexo.*

Demostración.

Consideremos $\delta < \alpha/2, \sigma_0 > 0$ de forma que si $\sigma < \sigma_0$, y $y \in B_\sigma(x)$ exista un conjunto conexo uniendo y con $\partial B_\sigma(x)$, contenido en $\overline{B_\sigma(x)} \cap W^s_{\delta/2}(y)$. Esto lo podemos hacer gracias al lema **??**.

Veamos que también podemos escoger σ_0 de forma que para $\sigma < \sigma_0$, si $y \in W^s_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$ entonces $y \in W^s_{\delta/2}(x)$. Si así no fuese, tendríamos $x_k \to x$ con $x_k \in W^s_\delta(x) \backslash W^s_{\delta/2}(x)$, por lo que existiría $n_k \to \infty$ con $\mathrm{d}(f^{n_k}(x_k), f^{n_k}(x)) > \delta/2$. Tomando puntos límite de $f^{n_k}(x_k)$ y $f^{n_k}(x)$ encontraríamos un par de puntos que se mantendrían cerca para todo tiempo.

Si $y \in S_\delta(x)$, llamemos C_y a la componente conexa que contiene a y de $\overline{B_\sigma(x)} \cap S_\delta(x)$. En virtud del σ escogido tenemos que los C_y llegan a $\partial B_\sigma(x)$. Si la tesis no fuera cierta, existirían $\sigma > 0$ y puntos $y \in S_\delta(x)$ arbitrariamente cerca de x de forma que $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Tomemos $y \in S_\delta(x)$ de forma que $C_x \cap C_y = \emptyset$. Unamos x con y por un segmento de recta γ_1 y C_x con C_y por un arco de circunferencia γ_2 contenido en el borde de $B_\sigma(x)$. Pero lo hacemos con el cuidado de que tanto γ_1, como γ_2 tengan solo un punto en común con C_x y C_y (eventualmente γ_1 corta a los conexos en puntos distintos de x e y). Ni C_x, ni C_y separan el plano, ya que el diámetro de los conjuntos estables locales tiende a cero y por tanto también tendería a cero el diámetro de las componentes acotadas del complemento de estos, teniendo así puntos estables, hecho ya descartado.

Usando el teorema **??** vemos que $\gamma_1 \cup C_x \cup C_y$ no separa el plano, pero que $L = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup C_x \cup C_y$ si, por lo que cada componente conexa del complemento de L debe tener a γ_1 en su borde. Esto implica que el complemento de L tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales es acotada. Tomemos ahora un segmento γ_3, incluído en la clausura de la componente acotada, con un extremo en C_x, otro en C_y y que solo corte a los conjuntos estables en los extremos. Además pidamos que si $y \in \gamma_3$ $U_\delta(y)$ no pueda cortar γ_1 ni γ_2 en virtud del lema **??** ver[?]. Entonces las $U_\delta(y)$ sobre puntos de γ_3 deben cortar el borde de la componente acotada pero en C_x o C_y.

Ahora, los puntos que cortan C_x son un cerrado de γ_3, y los que cortan C_y también, por lo que para algún y, $U_\delta(y)$ debe cortar a ambos. Observar que lo anterior resulta una contradicción, ya que tanto C_x como C_y están incluidos en $W^s_\delta(x)$. Esto prueba que $S_\delta(x)$ es localmente conexo en x.

Veamos ahora que $S_\delta(x)$ es localmente conexo en todos sus puntos. Sea $y \in S_\delta(x)$ y $z \in S_\delta(x)$ cerca de y. Por la conexión local de $S_{2\delta}(y)$ en y, hay un conexo C contenido en $B_\sigma(y) \cap S_{2\delta}(y)$. Luego $C \cap S_\delta(x)$ es conexo, y contiene a x y a z, lo que prueba la arcoconexión en y (si no fuese conexo, su unión separaría y habría puntos estables).

□

Dado x en la superficie, y $\sigma > 0$ como el del lema anterior, Llamemos A al conjunto de los arcos contenidos en C_x que salen de x y llegan al $\partial B_\sigma(x)$. Diremos que dos arcos en A son equivalentes si su intersección no es $\{x\}$.

Lema 3.4. *Hay una cantidad finita de clases de equivalencia en A.*

Demostración. Sea $\sigma > 0$ como en el teorema anterior. Llamemos X a la curva de Jordan $a \cup b \cup c$ con su interior, y D_x a la componente conexa que contiene a x de $U_\delta(x) \cap X$. Veamos que existe N un entorno de D_x en X que verifica que si $y \in \overline{N}$ entonces $U_{\delta/2}(y) \cap c = \emptyset$. Si este entorno no existiese, existiría una una sucesión de puntos $w_n \to y$ con $y \in D_x$ cumpliendo $U_{\delta/2}(w_n) \cap c \neq \emptyset$, y tomando $\bigcap_n \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} w_k}$ tendríamos que $U_\delta(x) \cap c \neq \emptyset$. Consideremos tal N, y asumamos que el borde de la componente conexa de $X \setminus N$ que contiene a c, que llamaremos V, es conexo. Si $y \in V$, $U_{\delta/2}(y) \cap c = \emptyset$, pero como $U_{\delta/2}(y) \cap \partial B_\sigma(x) \neq \emptyset$, debe intersectar a o b. Por la variación semicontínua de los conjuntos inestables, tenemos que los puntos de V que no salen por a son un abierto de V, así como los que no salen por b, como V es conexo, esto resulta una contradicción. En efectos, estos abiertos son disjuntos dado que tienen que salir por a o por b, por lo que la unión no puede cubrir V, teniendo entonces un $y \in V$ que sale por a y por b violando la expansividad. Concluimos entonces que hay una cota para la cantidad de clases no equivalentes dos a dos.

□

A un conjunto X como el del lema anterior lo llamaremos sector estable, y si cambiamos los arcos estables por inestables, lo llamaremos sector inestable.

Observación 3.2. *De la prueba del lema anterior, se deduce que si X es un sector estable y D_x separa X, en particular hay un arco en D_x uniendo x con $\partial B_\sigma(x)$. Lo mismo ocurre para un sector inestable y C_x.*

Lema 3.5. *Cada $x \in M$ tal que hay dos clases no equivalentes en A, tiene un entorno reducido tal que todos sus puntos tienen estructura de producto local.*

Demostración. Veamos primero que existe un $\sigma' > 0$ de forma que en A hay un solo representante por cada clase, al igual que para su análogo inestable B. Si $a, a' \in A$ son equivalentes, su intersección consiste de un arco (ya que debe ser conexa por no desconectar el plano). Si no existiese un arco común a todos los representantes de a, existiría una sucesión de puntos $x_n \to x$, con $x_n \in a$, y una sucesión de arcos disjuntos

d_n uniendo x_n con $\partial B_\sigma(x)$, donde $d_n \subset W^s_\delta(x)$. Utilizando argumentos análogos a los del lema anterior vemos que esto resulta una contradicción. Repitiendo lo mismo para los conjuntos inestables, vemos entonces que existe $\sigma' > 0$ de forma que tanto en a como en B hay un solo representante por cada clase de equivalencia.

Tomemos ahora X un sector estable delimitado por arcos a, b, c, donde $a, b \subset A$, y $c \subset \partial B_{\sigma'}(x)$, de forma que en el interior de X no hay otro elemento de A. Debido a la construcción de σ', si $y \in X$, $S_\delta(y) \cap \partial B_{\sigma'}(x) \subset c$. Nuevamente, debido a la elección de σ' y X, y por el lema **??**, tenemos que existen c_1, c_2 entornos en c de $a \cap c$ y $b \cap c$ respectivamente, y U entorno de x en X, de forma que si $y \in U$, $C_y \cap c \subset \{c_1 \cup c_2\}$. Llamemos D a $D_y \cap X$. Achicando U podemos suponer que si $y \in U$, $D_y \cap c \subset \{c_1 \cup c_2\}^c$. Debido a la observación anterior, sabemos que existe un arco $D' \subset D_x \cap X^c$ uniendo x con $\partial B_{\sigma'}(x)$. Nuevamente, usando la observación anterior, y considerando $D \cup D'$, vemos que si $y \in D \cap U$, entonces C_y une c_1 con c_2 dentro de X. En forma análoga, considerando $a \cup b$, vemos que si $z \in \{a \cup b\} \cap U$, entonces $D_z \cap c \neq \emptyset$. Si consideramos ahora un arco S, entorno de x en $\{a \cup b\} \cap U$, y un semiarco U entorno de x en $D \cap U$. Podemos definir $h\colon S \times U \to X$, como $h(z, y) = D_z \cap C_y$. D_z corta c fuera de $\{c_1 \cup c_2\}$, y C_y une c_1 con c_2, por le que es fácil ver que $D_z \cap C_y \neq \emptyset$, además, la intersección es única por la expansividad, por lo que el mapa está bien definido.

El mapa es inyectivo, en efecto, supongamos $h(z_1, w_1) = h(z_2, w_2) = p$ y, sin perder generalidad $z_1 \neq z_2$, tenemos entonces que z_1 y z_2 están en $U_\delta(p) \cap S_\delta(x)$ violando la expansividad. Veamos ahora que el mapa h es continuo, consideremos sucesiones $z_n \to z$, $y_n \to y$ con $lim_{n\to\infty} h(z_n, y_n) = l$, por el lema **??**, tenemos que $l \in D_z \cap C_y$, por lo que $l = h(z, y)$. Ahora, el Teorema de Invariancia del Dominio (ver Teorema**??**), no dice que la imágen del mapa h es un entorno de x en X. Es fácil ver que $z \times U$ se mapea por h en conjuntos inestables, y $S \times y$ se mapea en conjuntos estables, por lo que tenemos estructura de producto local en un entorno de x en X. Gracias al lema **??**, repitiendo este proceso, en todos los sectores estables (y también en los inestables, de forma de obtener estructura de producto local en los puntos de C_x), tenemos estructura de producto local en un entorno reducido de x.

□

Asumiremos el siguiente lema.

Lema 3.6. *Para todo $x \in M$, existe $\sigma > 0$ de forma que la familia A tiene por lo menos dos arcos no equivalentes.*

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente teorema fundamental.

Teorema 3.4. *Salvo un conjunto finito e invariante de puntos que llamaremos singularidades, todo $x \in M$ tiene estructura de producto local. El conjunto de singularidades consiste de órbitas periódicas.*

Demostración. Por los lemas **??**, **??**, y la compacidad de M tenemos que el conjunto de singularidades es finito. Como los conjuntos estables e inestables se mapean en si mismo por el homeomorfismo, tenemos que el conjunto de singularidades es invariante, y por ende, dado que es finito, consiste de órbitas periódicas.

□

Comenzemos ahora a estudiar los homeomorfismos expansivos según la topología de la superficie M.

3.1. El caso de la esfera S^2

Un rectángulo en M es la imágen de un homeomorfismo de $[0,1] \times [0,1]$ que lleva segmentos horizontales en conjuntos estables, y verticales en inestables. Los rectángulos tendrán diámetro menor que α (constante de expansividad), y contendrán a lo sumo una singularidad en uno de sus vértices. Podemos construir una familia finita R_i de rectángulos que cubren a la variedad, tal que si $i \neq j$, $R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j$, y que esta intersección consiste en a lo sumo un arco incluído en uno de los lados de cada rectángulo.

Sea x_1 un punto en un lado inestable de un rectangulo al que llamamos R_1 (puede ser un vértice), que no está en el conjunto estable de ninguna singularidad (hay un genérico de puntos con esta propiedad). En el lado inestable de R_1 opuesto al de x_1 y sobre el arco estable de R_1 que pasa por x_1 tomamos x_2, como x_2 pertenece la lado inestable de otro rectangulo, digamos R_2, podemos continuar con este procedimiento. Reindexando, encontramos de esta manera, una colección finita de rectangulos y puntos, que denotaremos R_i, x_i, $i = 1, ..., n$, de forma que

i) $R_i \neq R_j$ si $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n-1$ y $R_1 = R_n$.

ii) Para $i = 2, ..., n$, x_i pertenece a un lado inestable de R_{i-1} y de R_i.

En particular, x_n pertenece al lado inestable de R_1 por x_1, o por x_2. En el primer caso la unión de los arcos x_1x_2,x_2x_3,...,$x_{n-1}x_n$ y el arco inestable x_nx_1 nos da una curva de Jordan, así como en el segundo caso nos la da la concatenación de los arcos estables x_2x_3,...,$x_{n-1}x_n$ y el arco inestable x_nx_2.

Sea ahora M homeomorfa a S^2, y C una componente conexa del complemento de una de las curvas de Jordan definidas previamente.

Para cualquier $x \in M$, hay una secuencia x_k, $k = 0, 1, ..., n, ...$, de forma que $x_0 = x$, x_kx_{k+1} es un arco estable contenido en algún rectángulo R y $x_kx_{k+1} \cap x_{k'}x_{k'+1}$ consiste en a lo sumo un punto si $k \neq k'$. Es más, para todo k, x_k y x_{k+1} están en lados opuestos de un mismo rectángulo. La existencia de tal secuencia es una consecuencia de la no existencia de curvas estables cerradas. Llamaremos prolongación estable infinita a la unión de los arcos x_kx_{k+1}.

Lema 3.7. *C contiene una prolongación estable infinita.*

Demostración. Supongamos primero que dentro de C no hay puntos singulares. Llamemos u al arco inestable contenido en el borde de C. Si no hubiese prolongaciones estables infinitas dentro de C, esto nos permitiría definir un mapa h de u en si mismo de la siguiente forma. Tomemos un punto $x \in u$ y prolonguemos la estable que sale del, hacia dentro de C, al no haber prolongaciones estables infinitas dentro de C, esta tiene que salir de C cortando a u, este punto de corte será $h(x)$. El mapa es continuo por no haber singularidades en C, y tiene un punto fijo por el teorema de Brower, lo cual es un absurdo. Si dentro de C hubiese singularidades, y no hubiese prolongaciones estables infinitas, considero los arcos estables dentro de C que unen las singularidades pertenecientes a C con el arco u. Luego, puedo encontrar una curva de Jordan dentro de C, que consta de un arco $u' \subset u$ y dos arcos estables a, b que unen una singularidad $s \in C$ con u, y que dentro de ella no hay singularidades, esto permiten construir un mapa como el h anterior llegando a la misma contradicción.

□

Teorema 3.5. *S^2 no admite homeomorfismos expansivos.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto E, de todos los compactos delimitados por curvas de Jordan que consistan en un arco estable y uno inestable, y que no contengan puntos singulares. Veamos que $E \neq \emptyset$, dada una singularidad s_1, considerando una prolongación estable infinta, encontramos $a_1 \in E$ que no la contiene. Si dentro de a_1 hay una singularidad s_2, consideremos sus prolongaciones estables, si alguna de estas se mantiene dentro de a_1, encontramos a_2 que no contiene ni a_1 ni a_2. Si todas salen de a_1, al igual que en el lema anterior, encontramos una curva de Jordan en a_1 hecha de dos arcos estables y uno inestable que no contiene singularidades en su interior, dentro de esta curva hay un a_2 como el buscado. Dado que el conjunto de singularidades es finito, este procedimiento se detiene, probando la afirmación. Definamos el orden parcial $\leq$ en E, como $a \leq b$ si $b \subset a$. Por el lema anterior, dado $e \in E$, podemos encontrar $e' \in E$, con $e \leq e'$. Si tenemos $a_i \leq a_{i+1}$ $i = 1, \ldots$ $a_i \in E$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$ contiene en su interior una prolongación estable infinita. En efecto, el conjunto $A_i = \{x \in a_i; x$ tiene prolongación estable infinita en $a_i\}$ es un conjunto no vacío por el lema anterior, y compacto por el hecho de que no hay singularidades en a_i. Claramente $A_{i+1} \subset A_i$, luego $\bigcap A_i \neq \emptyset$ por ser una sucesión decreciente de compactos, lo cual prueba la afirmación anterior. Luego, por el Lema de Zorn, tenemos que hay un elemento maximal en E lo cual es absurdo por el lema anterior.

□

3.2. El caso del toro $\mathbb{T}^2$

Sea $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homeomorfismo expansivo, $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la proyección sobre $\mathbb{T}^2$ de su cubrimiento universal, y $F\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un levantamiento de f ($\pi \circ F = f \circ \pi$).

Cubramos $\mathbb{T}^2$ con rectángulos igual que en la sección anterior, pero además pidamos que el diámetro de estos sea menor que $\alpha/3$ (α es la constante de expansividad), y que un arco estable γ que una dos lados inestables de un rectangulo cumpla $\operatorname{diam}(f^n(\gamma)) < \alpha$ para $n \geq 0$. En estas condiciones, y por argumentos ya realizados repetidas veces, tenemos que $\exists N > 0$ tal que cualquier arco γ como el que se mencionó cumple que $f^{-N}(\gamma)$ atraviesa al menos dos rectángulos. Es fácil ver que el levantamiento por π de las foliaciones estables (inestables) de f, nos da las foliaciones estables (inestables) de F.

Lema 3.8. *Si γ un arco estable (inestable) de F, entonces diam($F^{-n}(\gamma)$)$\to \infty$ exponencialmente si $n \to \infty$ ($n\to -\infty$).*

Demostración. Levantemos ahora los descomposición en rectángulos de $\mathbb{T}^2$ a $\mathbb{R}^2$ por π. Ahora, sean γ y N como los ya definidos, entonces $F^{-kN}(\gamma)$ corta al menos 2^K rectángulos distintos, ya que ninguna prolongación estable ni inestable puede cortar dos veces el mismo rectángulo por argumentos similares a los de la sección anterior. Es claro que $\mathrm{diam}(F^{-kN}(\gamma))$ está a menos de $2\alpha/3$ del diámetro de la unión de los rectángulos que intersecta. La cantidad de rectángulos en $B_r(x)$ se puede acotar por Cr^m donde $C, m > 0$ sin depender de x, ya que la partición por rectángulos es invariante por transformaciones de cubrimiento, y la cantidad de dominios fundamentales en $B_r(x)$ crece polinomialmente en r. Luego, si la unión de 2^n rectángulos tiene diámetro d, entonces $Cd^m \geq 2^n$ lo que implica que $d \geq (2^{1/m})^n/C^{1/m}$ por lo que la unión de 2^n rectángulos tiene diámetro mayor o igual que $(2^{1/m})^n/C^{1/m}$ como queríamos.

□

Franks prueba en [**?**], que si $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es homotópico un difeomorfismo de Anosov Lineal A, existe una semiconjugación h ($h\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ continua y sobreyectiva) isotópica a la identidad que verifica $h \circ f = A \circ h$. Luego, existe H, levantamiento de h a $\mathbb{R}^2$, que cumple $H \circ F = \hat{A} \circ H$, donde $\hat{A}$ es el levantamiento de A. Por ser h isotópica a la identidad, se cumple que $\exists K > 0$ de forma que $\mathrm{d}(x, H(x)) < K$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$

Necesitaremos del siguiente lema, el cual tiene su análogo estable.

Lema 3.9. *Si f es homotópico a un difeomorfismo de Anosov Lineal, y x e y están unidos por un arco inestable γ, entonces d($F^n(x), F^n(y)$)$\to \infty$ si $n \to \infty$.*

Demostración. Sabemos que $\mathrm{diam}(F^n(\gamma))\to \infty$ si $n \to \infty$. Supongamos que existe una subsucesión n_k de forma que $\mathrm{d}(F^{n_k}(x), F^{n_k}(y))\leq K$. Llamemos x_k a $F^{n_k}(x)$, y_k a $F^{n_k}(y)$ y γ_k a $F^{n_k}(\gamma)$. Aplicando transformaciones de cubrimiento, podemos suponer que x_k, y_k está siempre en un mismo compacto L, y γ_k es un arco inestable que los une. Tomemos $z_k \in \gamma_k$ de forma que $\mathrm{d}(z_k, x_k)$ y $\mathrm{d}(z_k, y_k)$ tienda a infinito. Unamos x_k e y_k por un segmento s_k, entonces s_k y γ_k forman una curva de Jordan J_k. Prolongando el conjunto estable por z_k hacia dentro de J_k vemos que debe salir de J_k, pues sino cortaría dos veces un mismo rectángulo lo cual es absurdo como vimos en la sección anterior. Si el conjunto estable en cuestión corta γ_k en otro punto distinto de z_k, obtenemos una curva de Jordan hecha de un arco estable y uno inestable. Con argumentos utilizados en la sección anterior, vemos que esto nos daría una prolongación estable infinita dentro de esta curva lo cual nos lleva a una contradicción. Entonces el conjunto estable por z_k debe salir por un punto $w_k \in s_k$. En resumen, tenemos w_k, x_k sucesión de puntos a distancia acotada, y tal que $\mathrm{d}(W^s(w_k) \cap W^u(x_k), \{x_k, w_k\})\to \infty$. La semiconjugación H mencionada previamente preserva los conjuntos estables e inestables y está cerca de la identidad, por lo que esto nos daría que $\hat{A}$ tendría sucesiones de pares de puntos a distancia acotada cuyos conjuntos estables e inestables se cortan a distancias arbitrariamente grande, lo cual es un absurdo. $\square$

Teorema 3.6. *Si $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un homeomorfismo expansivo, homotópico a un Anosov Lineal A, entonces es conjugado a A.*

Demostración. Como ya mencionamos, el trabajo de Franks ([**?**]), nos da una semiconjugación h entre f y A. Veamos que esta semiconjugación es en efecto una conjugación. Si probamos que el levantamiento H de h, es localmente inyectivo, como además H es propia, sería un cubrimiento, pero como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, H sería un homeomorfismo. El hecho de h sea isotópica a la identidad, y que su levantamiento H a $\mathbb{R}^2$ sea un homeomorfismo, implica que h es un homeomorfismo, como queríamos. Dado $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno U de x, tal que cualquier par de puntos en U pueden unirse por un arco estable y uno inestable, esto implica que estos puntos se alejan infinitamente por iterados de F ya sea para el pasado o para el futuro. H restricta a U es inyectiva, ya que si tuviese $x, y \in U$ distintos, y $H(x) = H(y)$, esto implicaría que las órbitas de x e y por F estarían a distancia acotada para todo tiempo, dado que H lleva órbitas en órbitas y está cerca de la identidad. $\square$

Sea B la matriz de coeficientes enteros y determinante 1 o -1 tal que $F(x+\nu) = F(x)+B(\nu)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$,$\nu \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. $\exists H > 0$ tal que d$(F(x), 0)\geq H$ para todo x en un dominio fundamental de $\mathbb{R}^2$. Sea $x \in \mathbb{R}^2$, $x = x_0 + \nu_0$, con x_0 en el dominio fundamental, y $\nu_0 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces $F(x) = F(x_0) + B(\nu_0)$, $F(x_0) = x_1 + \nu_1$ con x_1 en el dominio fundamental y $\nu_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, d$(\nu_1, 0)\leq H + 1$. Definamos x_i, ν_i como $F(x_i) = x_{i+1} + \nu_{i+1}$ donde x_{i+1} está en el dominio fundamental y $\nu_{i+1} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, d$(\nu_{i+1}, 0)\leq H + 1$. Tenemos entonces $F^i(x) = x_i + \nu_i + B(\nu_{i-1}) + ... + B^i(\nu_0)$, y si para algún $s > 0$, la norma de $B^i \leq si$, tenemos que existen $C, D > 0$, tal que d$(F^i(x), 0)\leq C + 1/2Di(i + 1)$. Este sería el caso si la matriz B no fuese hiperbólica, y está en contradicción con el lema **??**. Por tanto B es hiperbólica y se puede ver que f es entonces isotópico al difeomorfismo lineal de Anosov que se obtiene de bajar a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el mapa B. Gracias a esto, y al Teorema anterior, tenemos:

Teorema 3.7. *$f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un homeomorfismo expansivo, entonces es conjugado a un difeomorfismo de Anosov Lineal.*

El caso de superficies S_g de genero mayor o igual a 2, es similar al caso del toro $\mathbb{T}^2$, primero se prueba que si $g\colon S_g \to S_g$ es un homeomorfismo expansivo, entonces es homotópico a un difeomorfismo pseudo-Anosov. Aquí es necesario utilizar la clasificación de Thurston de clases de isotopía para homeomorfismos de superficies (ver [**?**]), donde se prueba que si ningún iterado del homeomorfismo preserva una clase de homotopía libre de curvas no trivial, entonces el homeomorfismo es homotópico a un difeomorfismo pseudo-Anosov.

Justamente eso es lo que prueba Lewowicz, es decir que ningún homeomorfismo expansivo preserva un clase de homotopía libre de curvas (por tanto tampoco un iterado de él). Una vez que se tiene que el expansivo es homotópico a un pseudo-Anosov f, levantando ambos al disco hiperbólico, se encuentra que $\exists K > 0$ de forma que cualquier órbita de g es $K - sombreada$ por una órbita de f tanto para el pasado como para el futuro, dicha órbita es única por la expansividad de f, esta semiconjugación baja a la superficie. Para probar que la semiconjugación es de hecho una conjugación se procede igual que en el caso del toro. En definitiva

Teorema 3.8. *Si $f\colon S_g \to S_g$ es un homeomorfismo expansivo, entonces es conjugado a un difeomorfismo de tipo pseudo-Anosov.*

4. Propiedades de separación

En esta sección seguiremos ideas de [?] que nos permitirán probar la proposición **??**.

El siguiente lema es una propiedad homológica general de los espacios euclideos.

Lema 4.1. *Sean B homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $F \subset B$ cerrado conexo homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^k$. Entonces $H_{n-k-1}(B \setminus F) \cong R$*

Demostración. Por el Teorema **??** tenemos que $H_{n-k-1}(B \setminus F)$ es isomorfo a $H_c^k(F)$, y por el Teorema **??** $H_c^k(F) \cong H_0(F) \cong R$.

□

Un ejemplo concreto, donde convencerse del resultado anterior puede ser $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^k$, que al retraerse sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene que $H_m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^k) = \mathbb{R}$ si $m = n-1$ o $m = 0$, y 0 sino.

Lema 4.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $p \in Per_H^r$ existe $\phi : \overline{D^r} \to W^s(p)$ un homeomorfismo sobre su imagen de forma tal que: $\phi(0) = p$ y para todo $y : [0,1] \to \overline{D^r}$ continua tal que $y(0) = 0$ e $y(1) \in \partial D^r$ existe $s \in (0,1]$ tal que $\phi \circ y(s) \notin B_\varepsilon(p)$.*

Demostración. La expansividad asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo compacto conexo C de diámetro menor que ε se cumple que si el diámetro de $f^n(C)$ es mayor que la constante de expansividad α, para algún n negativo, entonces el diámetro de $f^m(C)$ es mayor que ε para todo $m < n$. Supongamos que esto no ocurre, entonces existe una sucesión de conexos C_n y un par de sucesiónes de naturales m_n y l_n tal que $-l_n < -m_n < 0$ y de forma que diam$(C_n)< 1/n$, diam$(f^{-l_n}(C_n))< 1/n$ y diam$(f^{-m_n}(C_n))> \alpha$. La conexión y compacidad de C_n, permite encontrar $k_n \in [-l_n, 0]$ y $x_n, y_n \in f^{k_n}(C_n)$ tal que d$(x_n, y_n)= \alpha/2$ y d$(f^j(x_n), f^j(y_n))< \alpha/2$ para $j \in [-l_n - k_n, -k_n]$. La continuidad uniforme de f implica que l_n+k_n y $-k_n$ tienden a infinito con n. Sean x e y puntos límite de x_n e y_n respectivamente. d$(f^j(x), f^j(y))= lim_{n\to\infty}d(f^j(x_n), f^j(y_n))$, por la construcción de x_n e y_n, d$(f^j(x_n), f^j(y_n))< \alpha/2$ a partir de un cierto n, por lo que d$(f^j(x), f^j(y))\leq \alpha/2$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ violando la expansividad.

Sin perder generalidad supongamos que p es un punto fijo y consideremos el mapa $h : \overline{D^r} \to W^s(p)$ que se obtiene al restringir la conjugación local dada por la definición de punto periódico hiperbólico. Existe $N < 0$ tal que para todo $x \in h(\partial D^r) \subset W^s(p)$ existe $n \in [N, 0]$ tal que $f^n(x) \notin B(p, \alpha)$ (si no, hay puntos en $h(\partial D^r)$ que se mantienen en $B(p, \alpha)$ por una cantidad arbitrariamente grande de iterados, tomando puntos límite de esas sucesiones, que existen por ser ∂D^r compacto, se viola la expansividad). Definimos entonces $\phi : \overline{D^r} \to W^s(p)$ por $\phi(x) = f^N \circ h(x)$. Luego, para toda curva y que conecte p con $\phi(\partial D^r)$ se cumple que $y([0, 1])$ es un conexo de diámetro mayor que ε. Para este ε se cumple la tesis.

□

Demostración de la Proposición **??**. Por lo ya probado, basta probar que si se tiene un homeomorfismo sobre su imágen $\phi : \overline{D^k} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(0) = 0$ y de forma que que para toda curva continua $y : [0, 1] \to \overline{D^k}$ tal que $y(0) = 0$ e $y(1) \in \partial D^k$ se verifica que $\phi \circ y([0, 1])$ no está contenido en $B_\varepsilon(0)$, entonces considerando X como la componente conexa de 0 en $\phi^{-1}(B_\varepsilon(0))$ entonces $H_{n-k-1}(B_\varepsilon(0) \setminus \phi(X)) = \mathbb{R}$.

Para eso, sean $F = \phi(X)$ y $B = B_\varepsilon(0)$. Como B es abierto tenemos que $\phi^{-1}(B)$ es abierto de $\overline{D^k}$. Como $\overline{D^k}$ es localmente arcoconexo, entonces X también lo es (por ser componente conexa de un abierto) además de ser abierto en $\overline{D^k}$. Eso implica que es arcoconexo.

Por hipótesis tenemos que $X \cap \partial D^k = \emptyset$ pues si no existiría una curva que une al 0 con ∂D^k cuya imagen por ϕ está incluida en B. Entonces F es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^k$. Como X es componente conexa, X es cerrado en $\phi^{-1}(B)$ por lo cual F es un cerrado de B. El lema **??** implica la tesis.

□

5. Estructura de producto local

La construcción de la estructura de producto local se basa fuertemente en conseguir que los conjuntos estables e inestables de los puntos periódicos se intersecten. Eso permite definir un mapa de $W^s_\varepsilon(p) \times W^u_\varepsilon(p)$ en un entorno de p que será un homeomorfismo con las propiedades deseadas por el teorema de la Invariancia del Dominio. En esta sección probaremos entonces que dicha interesección se da para puntos periódicos cercanos a uno dado.

Sea $\Delta^m = \{(x_1, \dots x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ x_i \geq 0 \ x_1 + \dots x_{m+1} = 1\}$ el símplice canónico de dimensión m. Notaremos $\gamma = \sum_i a_i\sigma_i$ denota una $m-$cadena, donde $\sigma_i \colon \Delta^m \to V$ ($a_i \in \mathbb{R}$). A lo largo de esta sección, γ hara mención tanto a la cadena propiamente dicha como a la unión de las imagenes de los σ_i.

Lema 5.1. *Para todo $x \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $V \subset B_\varepsilon(x)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $p \in V \cap Per_H^l$ existe un ciclo $\gamma \subset U_p$ no trivial en la homología de $V \setminus S_p$ de dimensión $n-l-1$ (siendo $S_p = cc_p(V \cap W^s(p))$ y $U_p = cc_p(V \cap W^u(p))$). Además, dado K compacto en V podemos suponer que $\gamma \subset V \setminus K$.*

Demostración. Por la proposición **??** sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $V \subset B_{\varepsilon_0}(x)$, $H_{n-l-1}(V \setminus S_p) \neq 0$. Sea γ un $n-l-1$-ciclo tal que su clase en homología $[\gamma]$ es no trivial en $V \setminus S_p$. Como $H_{n-l-1}(V) = 0$ podemos suponer que $\gamma = \partial\eta$ siendo η una cadena de dimensión $n-l$ en V.

Digamos que $\eta = \sum_{i=1}^{i=j} a_i\sigma_i$ con $\sigma_i \colon \Delta^{n-l} \to V$ $(a_i \in \mathbb{R})$.

Podemos suponer que cada σ_i y $\partial\sigma_i$ es topológicamente transversal a S_p de forma tal que la cantidad de cortes entre cada σ_i con S_p sea finita y $\partial\sigma_i \cap S_p = \emptyset$. Dado $\varepsilon_1 > 0$, mediante la subdivisión baricéntrica (ver [**?**]), podemos suponer también que $\mathrm{diam}(\sigma_i) < \varepsilon_1$. Observemos que si $\sigma_i \cap S_p = \emptyset$ entonces $\partial\sigma_i$ es trivial en $H(V \setminus S_p)$. Por lo tanto,tomando ε_1 suficientemente pequeño, podemos suponer que cada σ_i corta a S_q en y_i únicamente con $i = 1, ..., j$. Sea $h \colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ la conjugación local con el mapa hiperbólico en un entorno de p. Intersectando con V podemos suponer que $h(U) \subset V$ e iterando f, podemos suponer que $S_p \subset h(U)$. Podemos entonces pensar $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ (utilizando la identificación dada por h), $S_p \subset \mathbb{R}^l \times \{p_2\}$ y $U_p \subset \{p_1\} \times \mathbb{R}^{n-l}$ donde $p = (p_1, p_2)$. Podemos elegir ε_1 más chico, de forma que $B_{\varepsilon_1}(y_i) \subset U$. Como $y_i \in \sigma_i$ y $\mathrm{diam}(\sigma_i) < \varepsilon_1$ entonces $\sigma_i \subset B_{\varepsilon_1}(y_i)$. Sea $h_t^i \colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l} \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ continua dado por $h_t^i(a + y_i^1, b) = (ta + y_i^1, b)$ con $t \in [0, 1]$ donde $y_i = (y_i^1, y_i^2)$.

Luego para todo $t \in [0, 1]$, $h_t^i \circ \partial\sigma_i$ no corta a S_p, y está contenida en V. Además $h_1^i \circ \partial\sigma_i = \partial\sigma_i$ y $h_0^i \circ \sigma_i \subset \{y_i^1\} \times \mathbb{R}^{n-l}$. Como $h_0 \circ \partial\sigma_i$ es homotópico a $\partial\sigma_i$ tenemos que ambas son homólogas en $V \setminus S_p$.

Para cada $i = 1, ..., j$ sea $\beta_i \colon [0, 1] \to S_p$ una curva continua tal que $\beta(0) = y_i$ y $\beta(1) = p$. Achicamos nuevamente ε_1 de forma tal que $B_{\varepsilon_1}(\beta_i) \subset U$ para todo $i = 1, ..., j$.

Consideramos ahora $g_t^i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, otra homotopía, dada por $g_t^i(z) = z + \beta_i(t) - y_i$. Esta verifica que $g_t^i(h_0 \circ \partial\sigma_i)$ no corta a S_p para todo $t \in [0, 1]$, $g_0^i = id_{\mathbb{R}^n}$ y $g_1^i(y_i) = p$ por lo cual $\sum_{i=1}^j a_i g_1^i \circ h_0^i \circ \partial\sigma_i \subset U_p$, y como g_t^i es una homotopía, es homóloga a $\gamma = \sum_{i=1}^j a_i\partial\sigma_i$ que es no trivial en la homología de $V \setminus S_p$. Llamémosle γ a $\sum_{i=1}^j a_i g_1^i \circ h_0^i \circ \partial\sigma_i$.

Para ver que hay un representante homólogo a γ fuera de cualquier compacto en V, utilizaremos el análogo inestable del mapa de la demostración del lema **??** $\phi \colon \overline{D^{n-l}} \subset \mathbb{R}^{n-l} \to M$ que verifica que $U_p = \phi(X)$ donde $X = cc_0(\phi^{-1}(V))$. Consideremos una subdivisión de $\mathbb{R}^{n-l}$ en símplices de dimensión $n-l$ de diámetro menor que ρ. Digamos que $\mathbb{R}^{n-l} = \cup_{i=1}^\infty \theta_i$ y que $0 \in \mathbb{R}^{n-l}$ es interior a θ_0. Si consideramos un entorno $B \subset V$ de p con estructura lineal como antes, sabemos que $H_{n-l-1}(B \setminus S_p) \cong \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que existe un $a \in \mathbb{R}$ no nulo, tal que $\gamma = a\partial(\phi \circ \theta_0)$ en $H_{n-l-1}(B \setminus S_p)$ y en particular también en $H_{n-l-1}(V \setminus S_p)$. Sea $\eta_1 = \theta_0 - \sum_{\theta_i \subset X} \theta_i$. Observamos que $\partial(\phi \circ \eta_1)$ es un ciclo trivial en

$V \setminus S_p$. Entonces $a^{-1}\gamma$ es homólogo a $\gamma' = \partial\phi \circ (\sum_{\theta_i \subset X} \theta_i) = \sum_{\theta_i \subset X} \phi \circ \partial\theta_i$. Observar que podemos suponer $\sum_{\theta_i \subset X} \partial\theta_i \subset B_{2\rho}(\partial X)$. Siendo que podemos tomar ρ arbitrariamente pequeño y que ϕ es uniformemente continua, tenemos lo deseado.

$\square$

Corolario 5.1. *En las hipótesis del lema anterior, si $p \in Per_H^{n-1}$ entonces S_p separa a V en dos componentes conexas V_1 y V_2. Además p separa a U_p en dos componentes conexas U_1 y U_2 de forma tal que $U_1 \subset V_1$ y $U_2 \subset V_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Como estamos trabajando con la homología reducida tenemos, por el lema anterior, que $V \setminus S_p$ tiene dos componentes conexas. Además U_p es homeomorfo a $\mathbb{R}$, luego $U_p \setminus \{p\}$ tiene dos componentes conexas. Supongamos por absurdo que $U_1, U_2 \subset V_1$. Como V_1 es conexo tendríamos que cualquier $\gamma \subset U_1 \cup U_2$ sería trivial en la homología de $V \setminus S_p$, contradiciendo el lema anterior.

$\square$

Utilizaremos reiteradas veces el siguiente resultado acerca de la variación semicontinua de los conjuntos estables e inestables locales (ver [**?**]).

Lema 5.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Entonces, dado $\varepsilon, \nu > 0$, y $x \in M$, existe $\delta > 0$ de forma tal que si dist$(x, y) < \delta$ entonces, $W^s_\varepsilon(y) \in B_\nu(W^s_\varepsilon(x))$.*

DEMOSTRACIÓN. Si no fuese así, existiría $\varepsilon > 0$ y $x_n \to x$ de forma que existan puntos $y_n \in W^s_\varepsilon(x_n) \cap B_\nu(W^s_\varepsilon(x))^c$. Tomando z punto límite de y_n llegamos a un absurdo dado que $\operatorname{dist}(f^k(z), f^k(x)) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^k(y_n), f^k(x_n)) \leq \varepsilon$ para $k \geq 0$.

$\square$

Otro resultado que utilizaremos reiteradas veces hace referencia a las distancias entre las variedades estables e inestables locales de los puntos (ver también [**?**]).

Lema 5.3. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo de una variedad compacta. $\exists\delta > 0$, de forma que dados $V \subset U \subset B_\delta(x)$ entornos de x y ρ suficientemente pequeño, existe $W \subset V$ entorno de forma tal que si $y, z \in W$ se cumple que dist$(S_y \cap (U \setminus V), U_z \cap (U \setminus V)) > \rho$ (donde $S_y = cc_y$ $(W^s(y) \cap U)$ y $U_z = cc_z$ $(W^u(z) \cap U)$).*

DEMOSTRACIÓN. Para comenzar consideremos el δ dado por la obsevación **??**. Sea ahora $U \subset B_\delta(x)$, y $V \subset U$ entorno de x. Supongamos que no existiera dicho W, entonces existiria $y_n, z_n \to x$ tal que $d(S_{y_n} \cap (U \setminus V), U_{z_n} \cap (U \setminus V)) < 1/n$. Considerando $a_n \in S_{y_n} \cap (U \setminus V)$, y $b_n \in U_{z_n} \cap (U \setminus V)$ de forma tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ y tomando un punto límite $\overline{x}$, (observar que $\overline{x} \neq x$) vemos que $d(f^k(x), f^k(\overline{x})) < \varepsilon < \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, violando la expansividad.

$\square$

En la siguiente proposición probaremos que el índice de los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos es localmente constante y que si dos de ellos se encuentran cerca entonces sus estables e inestables se cortan. Como fue mencionado este es el paso clave para construir la estructura de producto local.

Proposición 5.1. *Sea $f\colon M \to M$ un homeomofismo expansivo. Entonces*

1. *para todo $k = 1, ..., n-1$, Per_H^k es abierto en Per_H y*

2. *para todo $p \in Per_H$ existen dos entornos de p abiertos V_1 y V_2 tales que para todo $q \in Per_H \cap V_1$ se cumple que $S_q \cap U_p \neq \emptyset$ y $U_q \cap S_p \neq \emptyset$, siendo $S_x = cc_x(W^s(x) \cap V_2)$, $U_x = cc_x(W^u(x) \cap V_2)$.*

Demostración. Sean $p \in Per_H^k$, $\varepsilon > 0$ del lema **??** aplicado a p y $h\colon B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n \to h(B_\rho(0)) \subset B_\varepsilon(p)$ la conjugación local, $h(0) = p$, entre f y $L\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dada por $L(x, y) = (x/2, 2y)$. En $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ consideramos la métrica $d((x, y), (u, v)) = \max\{\|x - u\|, \|y - v\|\}$. Fijemos $\rho_1 \in (0, \rho)$ (donde el ρ es el dado por el Lema **??**) y sea $V_2 = h(B_{\rho_1}(0))$. Para $q \in h(B_{\rho_1}(0))$ denotaremos $S'_q = h^{-1}(S_q)$ y $U'_q = h^{-1}(U_q)$.

Sean ρ_2 y ρ_3 dados por los lemas **??** y **??** tales que si $\mathrm{dist}(h^{-1}q, 0) < \rho_3$ entonces $U'_q \cap B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0)) = \emptyset$ y $S'_q \subset B_{\rho_2}(S'_p)$. Sea $V_1 = h(B_{\rho_3}(0))$.

Aplicando el lema **??** tenemos que si $q \in V_1 \cap Per_H^m$ entonces existe $h \circ \gamma \subset S_q$ un ciclo no trivial en la $(m-1)$ homología de $V_2 \setminus U_q$ de dimensión $m - 1$. Podemos suponer también por el lema **??** que $\gamma \subset B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))$

Sea $\pi_t\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dada por $\pi_t(x, y) = (x, ty)$ para $t \in [0, 1]$. Es claro que $\pi_t(B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))) \subset B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego $\pi_t \circ \gamma$ es una homotopía entre γ y $\pi_0 \circ \gamma \subset S'_p$ contenida en $B_{\rho_1}(0) \setminus U'_q$ y por lo tanto son homólogas en $B_{\rho_1}(0) \setminus U'_q$. Para concluir resta lo siguiente:

1. Si Per_H^k no es abierto en Per_H podemos suponer que existe $h(q) \in V_1 \cap Per_H^m$ con $m < k$. Luego γ es de dimensión $m - 1 < k - 1$ pero la homología de dimensión $m - 1$ de $S'_p \setminus U'_q$ es trivial (dado que S'_p es un disco) lo cual es absurdo.

2. Si $m = k$ entonces existe un ciclo $\eta \subset S'_p$ tal que $\partial\eta = \gamma$. Como $h \circ \gamma$ es no trivial en $V_2 \setminus U_q$ concluimos que $S_p \cap U_q \neq \emptyset$.

□

Demostración del Teorema. **??** Vamos a construir estructura de producto local en un entorno de cada $p \in Per_H$. Consideremos la notación del enunciado de la proposición **??**. Sea $\pi_s\colon \overline{V_1} \to S_p$ definida en los puntos $q \in Per_H$ como $\pi_s(q) = U_q \cap S_p$. Esta función está definida en un conjunto denso de V_1 por la proposición anterior. Sea $x \in \overline{V_1}$ y $q_n \to x$, $q_n \in Per_H$ con $\pi(q_n) \to y$. Observar que $y \in W^u_\varepsilon(x) \cap S_p$ y que por la expansividad este punto de intersección es único. Esto nos permite extender π_s a $\overline{V_1}$. Esta extensión es contínua por la misma razón. Ademas se cumple que $\pi_s(x) \in U_x \cap S_p$ y por la expansividad $\pi_s(x) = U_x \cap S_p$ para todo $x \in V_1$. La expansividad también implica que $\pi_s|S_x$ es inyectiva.

Si $q \in Per_H$ entonces el teorema de Invariancia del Dominio (ver [**?**]) nos dice que $\pi_s|S_q$ es abierta y un homeomorfismo sobre su imagen. Observar que si $\pi_s(r) \in \pi_s(S_q)$ con $r, q \in Per_H$ entonces $U_r \cap S_q \neq \emptyset$. Sea $W \subset S_p$, $p \in W$, W homeomorfo a el disco $\overline{D}^k$ y W entorno relativo de p en S_p. Afirmamos que existe V_3 entorno de p tal que para todo

$q \in V_3 \cap Per_H$, $W \subset \pi_s(S_q)$. Si no existe $q_n \to p$, $q_n \in Per_H$ y $W \nsubseteq \pi_s(S_{q_n})$. Entonces como W es conexo y $\pi_s|S_{q_n}$ es abierta debe existir un $y_n \in \partial\pi_s(S_{q_n}) \cap W$ (tomando la frontera relativa a S_p). Por lo tanto existe $x_n \in \partial V_1 \cap S_{q_n}$ tal que $\pi_s(x_n) = y_n$. Podemos suponer que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ a puntos de $S_{q_n} \cap \partial V_1$ y W respectivamente, lo primero debido a la semicontinuidad de los conjuntos estables locales. Debido a la construcción de la π, x e y estan sobre el mismo conjunto estable e inestable local contradiciendo la expansividad (observar que dist(W,$S_p \cap \partial V_1 > 0$) por lo cual $x \neq y$).
Sea $V_4 = \pi_s^{-1}(W) \cap V_3$, tenemos que para todo $q, r \in Per_H \cap V_4$ se cumple que $S_q \cap U_r \neq \emptyset$ y $S_r \cap U_q \neq \emptyset$ por construcción. Sean $A_s \subset S_p \cap V_4$ entornos relativos de p y $B_u \subset U_p \cap V_4$, homeomorfos a discos. Sean ahora $x \in A_s$ y $y \in B_u$, entonces tomando límite de los cortes de puntos periódicos que se acercan a x y a y respectivamente, por la semicontinudad de los conjuntos estables e inestables(lema **??**) y la expansividad, es fácil ver que $U_x \cap S_y$ es un único punto. Sea $h\colon A_s \times B_u \to V_1$ dada por $h(x, y) = U_x \cap S_y$. Es continua, inyectiva y por lo tanto, utilizando nuevamente el teorema de Invariancia del Dominio abierta. Esto completa la prueba de la existencia de estructura de producto local.

□

Observación 5.1. *Si bien el splitting de los periódicos topológicamente hiperbólicos no tiene en principio porqué ser el mismo, esto resulta inmediato a partir de los resultados obtenidos si se agrega la hipótesis de que f sea transitivo. Probaremos en la sección* **??** *que cuando $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$ el splitting es siempre el mismo.*

6. El caso de codimensión uno

6.1. Ordenación de puntos periódicos y sus propiedades

Dada una singularidad $x \in M$ estudiaremos la estructura de Per_H^{n-1} en un entorno de x definiendo un orden parcial local en Per_H^{n-1}. Consideremos $B_\nu(x)$ de forma que valga la proposición **??**. Sean

$$S_p = cc_p(W^s(p) \cap B_\nu(x)),$$
$$U_p = cc_p(W^u(p) \cap B_\nu(x)).$$

Supondremos además por la observación **??** que $S_p \subset W^s_\varepsilon(p)$ y $U_p \subset W^u_\varepsilon(p)$ para algún $\varepsilon > 0$. Para todo $p \in Per_H^{n-1} \cap B_\nu(x)$ definimos $\hat{p} = B_\nu \setminus cc_x(B_\nu(x) \setminus S_p)$

Dado $\delta > 0$ definiremos la siguiente relación. Si $p, q \in X_\delta = Per_H^{n-1} \cap B_\delta(x)$ decimos que $p \leq q$ si $\hat{p} \subset \hat{q}$. Es claro que esto es un orden parcial y el mismo depende de la singularidad $x \in M$, $\nu > 0$ de la proposición **??** y $\delta \in (0, \nu)$. Llamaremos cadena a todo subconjunto de X_δ que sea totalmente ordenado.

Observación 6.1. *Dado que conjuntos estables de puntos periódicos distintos no se intersectan, tenemos que si $\hat{p} \cap \hat{q} \neq \emptyset$ entonces los puntos p y q deben estar relacionados. Por lo tanto si $p \leq q$ y $p \leq r$ entonces $\hat{p} \subset \hat{q} \cap \hat{r}$ y por ende q y r estan relacionados. Esto implica que si $p \leq q$ y C es una cadena maximal conteniendo a p, entonces $q \in C$.*

Un buen lugar para visualizar el órden propuesto es alrededor de una singularidad de un pseudo-Anosov, donde hay más de dos cadenas maximales.

Lema 6.1. *Dado $x \in M$ y $\nu > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que en $B_\delta(x)$ hay finitas cadenas maximales, estas son disjuntas dos a dos y todas acumulan en x.*

Demostración. Supongamos que hubiese infinitas cadenas maximales distintas. Probaremos que hay conjuntos arbitrariamente grandes de puntos no relacionados dos a dos. Probaremos esto por inducción. Sean $p_1, ..., p_l$ no relacionados dos a dos. Sea C_i una cadena maximal tal que $p_i \in C_i$ y tomemos $C \neq C_i$ para todo i, otra cadena maximal. Dado que dos puntos en una misma cadena maximal están relacionados, a lo suma un p_i está en C. Si $p_i \notin C$ para todo $i = 1, ..., l$ entonces podemos elegir $p_{l+1} \in C \setminus (\bigcap_i C_i)$, quien no estara relacionado con ninguno de los p_i's por la Observación **??**. Si $p_i \in C$ para algún $1 \leq i \leq l$ entonces podemos tomar $p_i' \in C_i \setminus C$ y $p_{l+1} \in C \setminus C_i$ no relacionados. Entonces, los puntos $\{p_1, ..., p_i', ..., p_l, p_{l+1}\}$ serán dos a dos no relacionados, nuevamente por Observación **??**. Esto nos lleva a una contradicción, dado que el Lema **??** implica la existencia de $\delta > 0$ y $\nu' \in (0, \nu)$ tal que si $p \in X_\delta$ entonces

$$\operatorname{dist}(S_p \cap \partial B_{\nu'}(x), U_p \cap \partial B_{\nu'}(x)) > \rho$$

Dado $p_i \in X_\delta$ se cumple por el lema **??**, y la Observación **??**, que existe $q_i \in \hat{p} \cap \partial B_{\nu'}(x) \cap U_{p_i}$ de forma tal que $\operatorname{dist}(q_i, q_j) > \rho$ si $i \neq j$. Y luego la cantidad de puntos no relacionados dos a dos es acotada ya que $\partial B_{\nu'}(x)$ es compacto.

Siendo finitas cadenas maximales, las que no acumulan en x se encuentran todas fuera de un entorno de x. Por lo tanto achicando δ obtenemos que todas las cadenas maximales en $B_\delta(x)$ acumulan en x.

Sean C y C' dos cadenas maximales y $q \in C \cap C'$. Si achicamos δ de forma tal que $\hat{q}$ sea disjunto con $B_\delta(x)$ conseguimos reducir la cantidad de cadenas maximales. Luego podemos suponer que las cadenas maximales son disjuntas dos a dos.

□

Llamaremos $[p]$ a la cadena maximal de p en X_δ dada por el lema anterior. Vamos a definir ahora el conjunto

$$S_{[p]} = \overline{\bigcup_{q \in [p]} \hat{q}} \subset \overline{B_\nu(x)}$$

donde $p \in X_\delta$. Observar que se puede elegir ν de forma tal que para todo $p \in Per_H \cap B_\nu(x)$ se tenga $S_p \in W^s_\varepsilon(x)$ donde $0 < 2\varepsilon < \alpha$ siendo α la constante de expansividad

Lema 6.2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda cadena maximal $[p]$ se cumple que $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(x)$.*

Demostración. Por el lema **??** sabemos que $[p]$ acumula en x. Sea $q_n \in [p]$ tal que $q_n \to x$. Tomemos un punto $y \in \partial S_{[p]}$. Luego existe una sucesión $z_n \in \hat{q}_n$ tal que $z_n \to y$. Sin perder generalidad podemos suponer que $z_n \in S_{q_n}$.

Como la observación **??** nos asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_{q_n} \subset W^s_\varepsilon(z'_n)$, tenemos que para todo $m \geq 0$, $\text{dist}(f^m(y), f^m(x)) = \text{lím}_n\, d(f^m(z'_n), f^m(q_n)) \leq \varepsilon$ y por lo tanto $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Luego $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(x)$.

$\square$

Lema 6.3. *Supongamos* $\overline{Per_H} = M$ *y* $x \in M$ *una singularidad. Entonces, para todo* $p \in B_\delta \cap Per^{n-1}_H$, *existe un entorno* V *de* S_p *tal que* $Per_H \cap V \cap B_\delta(x) \subset [p]$.

Demostración. Por absurdo, supongamos que existe $y \in S_p \cap B_\delta(x)$ y $q_n \to y$ con $q_n \in [q] \neq [p]$ (recordar que por el teorema **??**, cerca de S_p hay estructura de producto local, entonces cerca de y todo periódico tiene el místmo índice que p). Entonces $y \in \partial S_{[q]}$ (porque pertenece al mismo tiempo a $\text{int}(S_{[p]})$ y a $S_{[q]}$, y los interiores de $S_{[p]}$ y $S_{[q]}$ tienen intersección vacía). Entonces, por el Lema **??**, $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Por lo tanto $x \in W^s(p)$ ya que $y \in S_p \subset W^s_\varepsilon(p)$. Pero, como $p \in Per_H$ es contradictorio con el hecho de que x es una singularidad, dado que el Teorema **??** nos da estructura de producto local en x, iterando por f^{-1} la estructura de producto local en p.

$\square$

Lema 6.4. *Si* $\overline{Per_H} = M$ *y* $x \in M$ *una singularidad. Entonces* $int(S_{[p]}) \cap B_\delta(x) = \bigcup_{q\in[p]} \hat{q} \cap B_\delta(x)$.

Demostración. La inclusión $\bigcup_{q\in[p]} \hat{q} \cap B_\delta(x) \subset \text{int} S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ es inmediata porque si $q \geq r$ entonces $\hat{r} \subset \text{int}\hat{q}$. Para obtener la otra inclusión razonaremos por absurdo suponiendo que existe $y \in B_\delta(x)$ en el interior de $S_{[p]}$ y que $y \notin \hat{q}$ para todo $q \in [p]$. Entonces existe $y_n \in S_{q_n}$ que cumple que $y_n \to y$ (esto en particular implica que $y \in W^s_\varepsilon(x)$ por el lema **??**) y $q_n \to x$. Usando el lema **??** y el hecho de que $\overline{Per_H} = M$ sabemos que existe $r_n \in [p]$ arbitrariamente cerca de y_n. Podemos suponer entonces $r_n \to y$ y que esta sucesión no está acotada para el órden de $[p]$. Por otro lado, consideremos $U_{r_n} = cc_{r_n}(B_\nu(x) \cap W^u(r_n)) \subset W^u_\varepsilon(r_n)$(ver Observación **??**) quien está separado por S_{r_n} en dos componentes conexas distintas (ver Corolario **??**). Sea $\gamma > 0$ y $z_n \in \partial B_\gamma(y) \cap U_{r_n}$ de forma que $z_n \notin \hat{r}_n$. Podemos suponer que $z_n \to z \in \partial B_{nu}(y)$ y usando la variación semicontinua de los conjuntos estable e inestables (Lema **??**) obtenemos que $z \in W^u_\varepsilon(y)$. Si probamos que $z \notin S_{[p]}$, como γ es arbitrario, tendremos que $y \in \partial S[p]$ lo que contradice el hecho de que $y \in \text{int}(S_{[p]})$. Sabemos que $z \notin \hat{q}$ para todo $q \in [p]$, entonces si $z \in S_{[p]}$ será acumulado por puntos en S_{q_n} y por lo tanto verificara $z \in W^s_\varepsilon(x)$. Entonces, $z \neq y$, $z \in W^u_\varepsilon(y)$ e $y, z \in W^s_\varepsilon(x)$ lo que contradice la expansividad (recordar que tomamos ε de forma tal que $2\varepsilon < \alpha$).

$\square$

Observación 6.2. *Como* $S_{[p]}$ *es un cerrado con interior no vacío y* $x \in \partial S_{[p]}$, *tenemos que su complemento en* $B_\nu(x)$ *que es abierto, también es no vacío. Esto implica que* $\partial S_{[p]}$ *separa* $B_\nu(x)$.

El siguiente lema muestra que los conjuntos estables de puntos periódicos convergen uniformemente al $\partial S_{[p]}$.

Lema 6.5. *Supongamos* $\overline{Per_H} = M$ *y sean* $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ *y* $\rho > 0$*. Entonces, existe* V *entorno de* z *de forma tal que si* $q \in [p] \cap V$ *entonces* $S_{[p]} \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q} \cup B_\rho(\partial S_{[p]})$*.*

Demostración. Dado $\rho > 0$ se cumple que $K = \left(S_{[p]} \setminus B_\rho(\partial S_{[p]})\right) \cap \overline{B_\delta(x)}$ es un compacto contenido en $\mathrm{int}(S_{[p]} \cap B_\delta(x))$, entonces usando el lema **??**, $\{\mathrm{int}(\hat{q})\}_{q\in[p]}$ es un cubrimiento por abiertos de K, por lo que existe $r \in [p]$ de forma tal que $K \subset \hat{r}$. Sea V un entorno de z disjunto de $\hat{r}$. Entonces, para todo $q \in [p] \cap V$ tenemos que $q \geq r$. Entonces, $K = (S_{[p]} \setminus B_\rho(\partial S_{[p]})) \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q}$ y por lo tanto $S_{[p]} \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q} \cup B_\rho(\partial S_{[p]})$.

□

Lema 6.6. *Para todo* $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ *y para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* V *entorno de* z *de forma tal que si* $q, r \in V \cap [p]$ *entonces* U_q *corta a* S_r *y a* $\partial S_{[p]}$ *en* $B_\varepsilon(z)$*.*

Demostración. Ses V un entorno de z tal que $z \in V \subset B_\delta(x)$. Por el corolario **??** le asociaremos a cada $q \in [p] \cap V$ dos puntos $y_1^q, y_2^q \in U_q \cap B_\delta(x)$ tales que $y_1^q \in \hat{q}$ e $y_2^q \notin \hat{q}$. Por el Lema **??** existe $\rho > 0$ (quizás achicando V) tal que para $i = 1, 2$ y $q \in [p] \cap V$

$$\mathrm{dist}(y_i^q, \partial S_{[p]}) > \rho \tag{1}$$

Al mismo tiempo, por el lema **??** podemos suponer que para todo $q \in [p] \cap V$,

$$S_{[p]} \cap B_\delta(x) \subset \hat{q} \cup B_{\rho/2}(\partial S_{[p]}) \tag{2}$$

Luego, como $y_2^q \notin \hat{q}$ e $y_2^q \notin B_\rho(\partial S_{[p]})$, tenemos que $y_2^q \notin S_{[p]}$. Por el lema **??** y como U_q es conexo tenemos que U_q corta a $\partial S_{[p]}$.

Tomemos $r \in V \cap [p]$ tal que $q \leq r$, es decir $\hat{q} \subset \hat{r}$. Consideramos y_1^r e y_2^r asociados a r de forma idéntica a lo hecho para q. Luego $y_1^q \in \hat{q} \subset \hat{r}$. Por otro lado $y_1^r \in S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y por (**??**) $y_1^r \in \hat{q} \cup B_{\rho/2}(\partial S_{[p]})$. Por (**??**) tenemos que $y_1^r \notin B_{\rho/2}(\partial S_{[p]})$ por lo tanto $y_1^r \in \hat{q}$. Entonces $y_1^r, y_1^q \in \hat{q} \subset \hat{r}$.

Por otro lado como $y_2^r \notin \hat{r}$ y $\hat{q} \subset \hat{r}$ tenemos que $y_2^r \notin \hat{q}$. Anteriormente dijimos que $y_2^q \notin S_{[p]}$. Aplicando la ecuación (**??**) (para r en lugar de q) tenemos que $y_2^q \notin \hat{r}$. Por lo tanto $y_2^q, y_2^r \notin \hat{r} \supset \hat{q}$.

Luego como $U_q \supset \{y_1^q, y_2^q\}$ y $U_r \supset \{y_1^r, y_2^r\}$ son conexos y S_q y S_r separan la bola $B_\nu(x)$ tenemos que $S_q \cap U_r$ y $U_q \cap S_r$ son no vacíos.

Dado $\varepsilon > 0$, la expansividad y la variación semicontinua de los conjuntos estables e inestables locales, permiten probar que podemos achicar V de forma que los cortes se den en $B_\varepsilon(z)$.

□

Los conjuntos $S_{[p]}$ resultarán ser semi-espacios con estructura de producto local, la siguiente proposición va en dirección a dotar a $S_{[p]}$ con la mencionada estructura.

Proposición 6.1. *Si* $\overline{Per_H} = M$ *entonces* $\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ *es una variedad topológica de dimensión* $n-1$.

Demostración. Sea $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$. Elegimos $\varepsilon > 0$ de forma tal que $B_\varepsilon(z) \subset B_\delta(x)$ y sea V entorno de z de forma tal que $q, r \in V \cap [p]$ entonces $U_q \cap S_r \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$. Además para todo $q \in V \cap [p]$ se cumple que $U_q \cap \partial S_{[p]} \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$. Esto es por el lema **??**.

Fijamos $q \in V \cap [p]$ y definimos $h_q\colon S_q \cap \overline{V} \to \partial S_{[p]} \cap \overline{B_\varepsilon(z)}$ dada por

$$h_q(y) = \lim_{q_n \to y} U_{q_n} \cap \partial S_{[p]}$$

que existe y es único por la expansividad y la variación semicontinua de los conjuntos inestables locales (junto con que $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(z)$ por el lema **??**). El hecho de que existe $q_n \in [p] \to y$ es una consecuencia del Lema **??** y del hecho de que $\overline{Per_H} = M$. El mismo argumento implica que h_q es continua e inyectiva. Además, dado que el dominio es compacto, h_q es un homeomorfismo sobre su imagen. Nuevamente, por el Lema **??**, podemos tomar V' y $\varepsilon' > 0$ de tal forma que $\overline{B_{\varepsilon'}(z)} \subset V$ y tal que si $q, r \in [p] \cap V'$, $U_q \cap S_r \cap B_{\varepsilon'}(z) \neq \emptyset$. Analogamente, tenemos que para todo $q \in V' \cap [p]$, $U_q \cap \partial S_{[p]} \cap \overline{B_{\varepsilon'}(x)} \neq \emptyset$. Si además $q \in V' \cap [p]$, todo $w \in \partial S_{[p]} \cap V'$ tiene preimágen en $S_q \cap V$ por h_q. Esto es cierto porque para todo $w \in \partial S_{[p]} \cap V'$ podemos encontrar $q_n \to w$, con $q_n \subset [p] \cap V'$ y de tal forma que $\emptyset \neq U_{q_n} \cap S_q \cap B_{\varepsilon'}(z) \subset V \cap S_q$. En particular, todo punto en $\partial S_{[p]} \cap V'$ tiene una preimágen por h_q en $S_q \cap \overline{B_{\varepsilon'}(z)} \subset S_q \cap V$. Como h_q es un homemorfismo sobre su imágen, $\partial S_{[p]} \cap V'$ es homeomorfo a su preimágen, que es un abierto de $S_q \cap V$ lo que prueba la proposición (recordar que $S_q \cap V$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$).

□

6.2. Descomposición constante

Demostración del Teorema **??**. Supongamos por absurdo que $\emptyset \neq \overline{Per^{n-1}_H} \neq M$ y tomemos una singularidad $x \in \partial \overline{Per^{n-1}_H}$. Consideremos ν y δ como en el lema **??**, para el cual se tiene que hay finitas cadenas maximales asociadas a x. Sea $[p]$ una cadena maximal que acumula en x.

Lema 6.7. *Existe* $\delta > 0$ *de forma tal que* $Per_H \cap S_{[p]} \cap B_\delta(x) \subset Per^{n-1}_H$.

Demostración. Por absurdo supongamos que existen $p_n, q_n \to x$ con $p_n \in S_{[p]} \cap Per_H \setminus Per^{n-1}_H$ y $q_n \in [p]$. Por el teorema **??** podemos suponer que $p_n, q_n \notin \partial S_{[p]}$. Luego U_{p_n} es una variedad topológica conexa (y por lo tanto arcoconexa) de dimensión por lo menos dos. Consecuentemente si le quitamos un punto a U_q continua siendo arcoconexa. Es claro que para todo q_n existe $p_m \notin \hat{q}_n$. Recordemos que $\partial S_{[p]}$ y S_{q_n} separan la bola $B_\nu(x)$.

Probaremos que $U_{p_m} \subset S_{[p]} \setminus \hat{q}_n$. Si no, supongamos que existe $y \in U_{p_m} \setminus S_{[p]}$. Como $\partial S_{[p]}$ separa la bola $B_\nu(x)$ tenemos que toda curva contenida en U_{p_m} que conecte a p_m con y debe cortar a $\partial S_{[p]}$. Por la expansividad U_{p_m} corta a $\partial S_{[p]}$ en un solo punto. Luego existen dos curvas contenidas en U_{p_m} que conectan a p_m con y y coinciden solo en los extremos. Luego existen dos puntos de corte distintos entre U_{p_m} y $\partial S_{[p]}$ contradiciendo la expansividad. Análogamente se razona si consideramos $y \in \hat{q}_n$.

Finalmente el hecho de que para todo n_0 existan $m, n \geq n_0$ tales que $U_{p_m} \subset S_{[p]} \setminus \hat{q}_n$ contradice el lema **??**.

□

Sea C el conjunto finito de las cadenas maximales en $B_\delta(x)$ y definimos

$$S = \bigcup_{[p] \in C} S_{[p]}$$

Como cada $S_{[p]}$ es cerrado en $B_\nu(x)$ tenemos que S es cerrado. Se cumple entonces que

$$B_\delta(x) \cap S = B_\delta(x) \cap \overline{Per_H^{n-1}} \tag{3}$$

Como $x \in \partial \overline{Per_H^{n-1}}$ resulta que S no puede ser un entorno de x. Veamos como eso conduce a un absurdo.

Para eso, utilizaremos la proposición **??** y el siguiente lema.

Lema 6.8. *Para todo $p \in Per_H^{n-1} \cap B_\delta(x)$ existe $A_{[p]} \subset \partial S_{[p]}$ tal que $A_{[p]}$ es abierto y denso relativo de $\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y $A_{[p]}$ que se encuentra en el interior de S.*

La proposición **??** asegura que $\partial S_{[p]}$ es una variedad topológica de dimensión $n-1$. Luego, por el lema **??** y el teorema**??**, tenemos que para toda $[p]$, $\operatorname{dimtop}(\partial S_{[p]} \setminus A_{[p]}) \leq n-2$. Además, como $\partial S \subset \bigcup \partial S_{[p]}$

$$\partial S \subset \bigcup_{[p] \in C} \partial S_{[p]} \setminus A_{[p]}$$

Por el teorema**??** tenemos que $\operatorname{dimtop}(\partial S) \leq n-2$. Entonces ∂S no puede separar $B_\delta(x)$, ya para esto debe tener dimensión topológica al menos $n-1$ (ver **??**). Esto constituye una contradicción.

Demostración del Lema **??**.

Sea $\varepsilon > 0$ y $z \in \partial S_{[p]}$. Por el Lema **??** , existe $q \in [p]$ de forma tal que $\{a\} = U_q \cap \partial S_{[p]}$ está en $B_\varepsilon(z)$. El teorema **??** implica que q tiene un entorno con estructura de producto local, interando este entorno para el pasado, obtenemos estructura de producto local en un entorno de a, entonces $a \in \operatorname{int}(S) = \operatorname{int}(\overline{Per_H^{n-1}}) \cap B_\delta(x)$.

□

6.3. Estructura de producto local uniforme

En esta sección probaremos el Teorema **??**. Por el Teorema **??**, sabemos que hay un abierto denso de puntos con estructura de producto local. Y por el Teorema **??** concluimos que, como $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$, $Per_H = Per_H^{n-1}$. Notemos S al conjunto de singularidades de f, es decir al conjunto de puntos que no admiten estructura de producto local. Probar el Teorema **??**, es probar que $S = \emptyset$. La próxima proposición nos da una especie de estructura de producto local en $S_{[p]}$.

Proposición 6.2. *Sea $x \in S$. Entonces, para todo $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ existe $h : I \times I^{n-1} \to S_{[p]}$ ($I = [0,1]$) un homeomorfismo sobre su imágen donde $h(\{a\} \times I^n)$ está contenido en un conjunto estable local, $h(I \times \{b\})$ está contenido en un conjunto inestable local y la imagen es un entorno de z relativo a $S_{[p]}$.*

Demostración. Por el lema **??** existe $V \subset B_\delta(x)$ entorno de z en M tal que si $q, r \in [p] \cap V$ entonces $S_q \cap U_r \neq \emptyset$ y $U_q \cap \partial S_{[p]} \neq \emptyset$. Sea $D_z \subset \partial S_{[p]} \cap V$ homeomorfo a I^{n-1} (ver proposición **??**) de forma tal que z esté en el interior de D_z relativo a $\partial S_{[p]}$. Sea $V' \subset V$ entorno de z tal que $q \in [p] \cap V'$, $S_q \cap U_r \cap V \neq \emptyset$ y $U_q \cap D_z \neq \emptyset$. Sea $q \in V' \cap [p]$, definimos $h\colon U_q \cap \overline{V} \cap S_{[p]} \times D_z \to S_{[p]}$ como $h(y, w) = W^s_\varepsilon(y) \cap W^u_\varepsilon(w)$. Debido a la definición de V, y con argumentos ya esobazodos anteriormente, vemos que h es un homeomorfismo sobre su imágen. Veamos ahora que la imágen de h contiene a $V' \cap S_{[p]}$, para esto es suficiente observar que debido a la definición de V', $[p] \cap V' \subset Im(h)$ (recordar que Per^{n-1}_H es denso en V'). Sea $U = h^{-1}(V' \cap S_{[p]})$ que es abierto porque h es un homeomorfismo sobre su imágen. Como $z \in V' \cap S_{[p]}$ un abierto relativo de la imágen de h y de $S_{[p]}$, $h^{-1}(z)$ está en el interior de U. Dado que $U_q \cap \overline{V} \cap S_{[p]} \times D_z$ es localmente conexo en $h^{-1}(z)$, podemos encontrar U homeomorfo a $I \times I^{n-1}$ entorno de $h^{-1}(z)$ cuya imágen va a ser un entorno relativo de z en $S_{[p]}$. El resto de las propiedades de h enunciadas en la proposición son inmediatas de la definición de h.

□

Lema 6.9. *Si $\overline{Per^{n-1}_H} = M$ entonces S (el conjunto de singularidades)es finito.*

Demostración. Como los puntos con estructura de producto local son un abierto invariante, el conjunto de singularidades es un compacto invariante. Entonces $f\colon S \to S$ es un homeomorfismo expansivo. Sea $z \in S$. Probaremos que existe un entorno de z de forma tal que toda singularidad en ese entorno pertenece al conjunto estable local de z. Eso se debe a que existe δ suficientemente pequeño (dado por el lema **??**) de forma tal que (por el hecho de que Per^{n-1}_H es denso) $B_\delta(z) \subset \bigcup_{i=1}^k S_{[p_i]}$. Por la proposición **??** se cumple que en el interior de $S_{[p_i]}$ hay estructura de producto local (quizas achicando δ) entonces se ha de cumplir que las singularidades deben estar en $\bigcup_{i=1}^k \partial S_{[p_i]}$. Luego por el lema **??** las singularidades de $B_\delta(z)$ están en el conjunto estable de z.

La expansividad implica que los puntos estables Lyapunov sean asintóticamente estables dado que en caso contrario, existirían puntos x e y cumpliendo que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon < \alpha$ (α constante de expansividad) y de forma que exista una subsucesión $n_j \to +\infty$ de forma tal que $d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) \geq \gamma > 0$. Tomando puntos límite de $f^{n_j}(x)$ y $f^{n_j}(y)$ se viola la expansividad.

Luego el conjunto de singularidades debe ser finito.

□

En el siguiente lema, provamos que si $dim(M) \geq 3$ no hay singularidades aisladas. Cabe recalcar que los homeomorfismos de tipo pseudo-Anosov en superficies cumplen que $\overline{Per_H} = M$ siendo estos de codimension uno, pero sin embargo existen singularidades aisladas.

Lema 6.10. *Si $dim(M) \geq 3$ y $\overline{Per_H^{n-1}} = M$ no hay singularidades aisladas*

Demostración. Supongamos por absurdo que $x \in M$ es una singularidad aislada. Sean $\nu, \delta > 0$ como en la proposición **??** y de forma tal que $B_\nu(x) \cap S = \{x\}$. Fijemos $[p]$ una cadena maximal acumulando en x, y sea $T = cc_x(\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x))$. Sabemos por la proposición **??** que T es una variedad topológica cerrada en $B_\delta(x)$. Sea $z \in T \setminus \{x\}$ y $[q] \neq [p]$ tal que $z \in \partial S_{[q]}$. Definamos $T' = cc_z(\partial S_{[q]} \cap B_\delta(x))$. Sea $F = T' \setminus \{x\} \cap T \setminus \{x\}$, que es un cerrado no vacío de $T \setminus \{x\}$ y de $T' \setminus \{x\}$. Como todo $w \in F$ tiene estructura de producto local, F es abierto en $T \setminus \{x\}$ y en $T' \setminus \{x\}$. Por lo tanto $F = T \setminus \{x\} = T' \setminus \{x\}$ porque $T \setminus \{x\}$ y $T' \setminus \{x\}$ son conexos ($dim(m) \geq 3$). Luego, como T' es cerrado, $x \in T'$, lo que implica que $T' = cc_x(\partial S_{[q]} \cap B_\delta(x))$. Como Per_H^{n-1} es denso en $S_{[p]}$ podemos aplicar la proposición **??** a x. Sea $h_p \colon [0,1) \times (-1,1)^{n-1} \to R_p \subset B_\delta(x)$ tal homeomorfismo, y de forma que R_p sea un entorno de x relativo a $S_{[p]}$ y $h_p(0,0) = x$. Sea $F_p = T \cap R_p = h_p(\{0\} \times (-1,1)^{n-1})$. También por la proposición **??** podemos considerar $h_q \colon (-1,0] \times (-1,1)^{n-1} \to R_q \subset B_\delta(x)$ un homeomorfismo satisfaciendo que R_q es un entorno de z relativo a $S_{[q]}$ y $h_q(0,0) = \{x\}$. Analogamente definimos $F_q = \partial S_{[q]} \cap R_q = h_q(\{0\} \times (-1,1)^{n-1}) \subset F$. Podemos considerar $F_q \subset F_p$. Sea $\pi_2 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección canónica sobre la segunda coordenada. Mas aún, si restringimos h_p al conjunto $[0,1) \times \pi_2(h_q^{-1}(F_q))$ podemos suponer $F_p = F_q$. Sea $h \colon (-1,1) \times F_p \to B_\delta(x)$ dada por $h(t,y) = h_p(t, \pi_2(h_p^{-1}(y)))$ si $t \geq 0$, y $h_q(t, \pi_2(h_q^{-1}(y)))$ si $t \leq 0$. Claramente $h(0,y) = y$ por lo que h es continua. Nuevamente usando el Teorema de la invariancia del dominio, tenemos que x tiene estructura de producto local, lo que constituye una contradicción.

□

Demostración del teorema **??**.

Una vez descartadas las singularidades es muy sencillo probar que hay una estructura de producto local uniforme dado que si no la hubiese, existirían puntos x_n que no admitan estructuras de producto local en las bolas de radio mayor que $1/n$. Tomando un punto límite, encontraríamos un punto que no podría admitir estructura de producto local, es decir, una singularidad.

La estructura de producto local uniforme implica inmediatamente la propiedad de sombreado a partir de los resultados de [**?**] que aseguran que existe una métrica hiperbólica en las coordenadas de la estructura de producto local (ver [**?**]) .

□

7. Apéndice

Lema 7.1. *Sea M una variedad de dimensión $n \geq 3$ y $f\colon M \to M$ un homeomorfismo que cumple $\overline{Per_H} = M$ y que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces M admite una foliación de codimensión uno con hojas homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. La estructra de producto local uniforme obtenida en el Teorema **??** muestra la existencia de la foliación. Supongamos que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$, entonces las hojas de la foliación son los conjuntos estables de los puntos. Sea $x \in M$, probaremos que $W^s(x)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$. Para ver esto es suficiente observar que $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(S_\varepsilon(f^n(x)))$. Donde $S_\varepsilon(z)$ es un disco de tamaño uniforme en $W^s_\varepsilon(z)$ (que existe por la estructura de producto local uniforme). Luego, $W^s(x)$ puede ser escrita (quizás tomando una subsucesión $n_j \to \infty$ de forma que $f^{-n_j}(S_\varepsilon(f^{n_j}(x))) \subset f^{-n_{j+1}}(S_\varepsilon(f^{n_{j+1}}(x))))$ como una unión creciente de discos de dimensión $n-1$, lo que implica la tesis.

□

Una ves que sabemos que las hojas son homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$, argumentos clásicos permiten probar que M es homeomorfa a $\mathbb{T}^n$. Vamos a hacer un esquema de algunos pasos de la prueba por razónes de autocontenido. Las ideas están basadas en [**?**] y [**?**]. El primer paso es probar que el cubrimiento universal de $M(\overline{M})$ es $\mathbb{R}^n$. Para probar que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$ alcanza con probar que dados $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{M}$, sus conjuntos estables e inestables respectivos se intersectan en un único punto. Para ver que la intersección tiene a lo sumo un punto, podemos ver que si las foliaciones se intersectan en más de un punto, entonces podemos obtener una curva cerrada transversal a la foliación de codimensión uno, que por ende es borde de un disco de dimensión dos. Utilizando los métodos de Solodov ([**?**]lema 5), vemos que el disco puede ser elegido para estar en posición general, de forma de que obtenemos una foliación en el disco, transversal a la frontera, con singularidades no degeneradas, y sin conexiones de silla(este es el único paso donde se usa la diferenciabilidad en [**?**]). Ahora, utilizando argumentos de Haefliger ([**?**] lema 2.11, o [**?**] lema 5.1) concluimos que hay una hoja de la foliación de codimensión uno con holonomía no trivial, en contradicción con el hecho de que las hojas son simplemente conexas.

Finalmente, probar que las hojas se intersectan es una adaptación de los argumentos de [**?**], lema 5.2, después de saber que las hojas de codimensión uno son densas en M (hecho que es cierto por la densidad de los periódicos topológicamente hiperbólicos). Una vez que tenemos lo anterior, no es difícil probar que $\Pi_1(M)$ es abeliano libre, estudiando la acción de $\pi_1(M)$ sobre $\mathbb{R}$ que permuta sin puntos fijos las hojas de la foliación de codimensión uno([**?**], capítulo VIII, sección 3). Ahora podemos seguir la prueba en [**?**], leyendo las pruebas de la Proposición(6.2), Teorema (4.2) y Teorema (3.6)(Recordar que homeomorfismos expansivos con estructura de producto local tienen coordenadas canónicas hiperbólicas [**?**]). Esto prueba que $M = \mathbb{T}^n$

Referencias

[ABP] A. Artigue, J. Brum y R. Potrie, Local product structure for expansive homeomorphisms *Arxiv2008*, aceptado en Topology and its applications.

[D] A.Dold, *Lectures on Algebraic Topology* Springer Verlag, New York 1980

[FLP] Fathi, A; Laudenbach, F and Poenaru, V.; Travaux de Thurston sur les surfaces, (Seminaire Orsay), Asterisque No. 66-67 (1979)

[FrRo] J. Franks y C. Robinson, A Quasi-Anosov Diffeomorphism that is not Anosov. *Trans. Am. Math. Soc.* **233** p.267-278. (1976).

[Fr] J. Franks, Anosov diffeomorphisms *Proc. Sympos. Pure Math, vol 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, (1970) p 61 - 93.

[H] K. Hiraide. Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of n-tori. *J. Math.Soc. Japan* **41** (3) (1989), 357-389.

[Ht] A. Hatcher, Algebraic Topology

[HW] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory (Princeton Math. Series 4)* Princeton University Press, 1948.

[HH] G.Hector, U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part B, Aspects Math., Vieweg, 1983

[Lew1] J. Lewowicz, Persistence in expansive systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **3** (1983), 567-578.

[Lew2] J. Lewowicz, Expansive Homemorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* **20** (1989), 113-133.

[Lew3] J. Lewowicz, *Dinámica de los homeomorfismos expansivos.* Monografias del IMCA (2003)

[Red] W. Reddy, Expansive canonical coordinates are hyperbolic, *Topology and its Appl.* **13** (1982), 327-334.

[Sv] V.V.Solodov, Components of topological foliations, Math. USSR Sb.47 (1984) 329-343

[Sp] Spanier E.H. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

[Th] Thurston, W., On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Preprint

[K] Kuratowski, Topology. Academic Press, (1966)

[Vie1] J.L. Vieitez, Three dimensional expansive homeomorphisms. *Pitman Research Notes in Math.* **285** p. 299-323 (1993).

[Vie2] J.L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on three manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16** p 591- 622 (1996).

[Vie3] J.L. Vieitez, A 3D-manifold with a uniform local product structure is $\mathbb{T}^3$. *Publ. Mat. Urug.* **8** p 47 - 62 (2000).

[Vie4] J.L. Vieitez, Lyapunov functions and expansive diffeomorphisms on 3D manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **22** p 601- 632 (2002).