

Trabajo Monográfico

# Cubrimientos Hiperelípticos

Marcos Barrios

Orientador: Armando Treibich

*Licenciatura en Matemática  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República  
Uruguay*

## Resumen

El objeto principal de este trabajo es el estudio de las superficies de Riemann compactas y los morfismos entre ellas.

Varios son los objetivos de ésta monografía. Primero de todo, dada una curva elíptica  $X$  y un natural  $n > 0$ , estudiar las propiedades de los cubrimientos por curvas hiperelípticas de grado  $n$  sobre  $X$ . En segundo lugar, definir una correspondencia biunívoca entre estos cubrimientos (llamados cubrimientos hiperelípticos) y morfismos de  $\mathbb{P}^1$  a  $\mathbb{P}^1$ . Por último, en el caso de cubrimientos por curvas hiperelípticas de género 2, encontrar sistemas de ecuaciones polinomiales que los describan, así como su resolución explícita para  $n = 2, 3, 4$ .

Este problema tiene una larga historia, partiendo de los trabajos de B.Riemann, quien con métodos topológico - combinatorios construyó cubrimientos de grado  $n$  de una superficie  $S$ , pegando  $n$  copias de  $S$  encima de un conjunto finito predeterminado de  $S$  [G-H]. En este trabajo se abordará el estudio desde un punto de vista geométrico-algebraico.

Para esto comenzaremos mostrando propiedades básicas de superficies de Riemann, como el género, y construyendo ejemplos concretos, con especial atención a la construcción de curvas hiperelípticas, a partir de una ecuación afín, y la desingularización de la curva completa asociada. Definiremos luego morfismos entre éstas y sus características básicas (e.g.: índice de ramificación de un morfismo en un punto, grado de un morfismo) y construiremos ejemplos auxiliares (funciones racionales, involuciones, proyecciones a  $\mathbb{P}^1$ , función norma), de gran utilidad ulteriormente. También demostraremos la fórmula de Riemann-Hurwitz, que vincula la ramificación de un morfismo con su grado y los géneros de las superficies respectivas. Por último caracterizaremos a las curvas hiperelípticas como cubrimientos de grado 2 de  $\mathbb{P}^1$ , y estudiaremos sus grupos de automorfismos.

En el capítulo 3 mostraremos cómo asociar a un cubrimiento hiperelíptico  $\pi : \Gamma \rightarrow X$  un morfismo  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Recíprocamente, dados un morfismo  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  y una curva elíptica  $X$ , veremos cómo asociarles un cubrimiento hiperelíptico  $\pi : \Gamma \rightarrow X$  (operación inversa de la precedente). Luego estudiaremos la relación entre los discriminantes de  $\pi$  y  $R$ , así como las condiciones que debe cumplir  $R$  para que el género de  $\Gamma$  sea 2, de la cual deduciremos un sistema cuadrado de ecuaciones polinomiales cuyas soluciones parametrizan los cubrimientos en cuestión.

En el capítulo 4 probaremos primero la existencia de cubrimientos hiperelípticos de género arbitrario  $g > 2$ , y luego resolveremos explícitamente algunos casos de los sistemas cuadrados precedentes, obteniendo todos aquellos de género  $g = 2$ .

# Índice general

<b>1. Definiciones y conceptos básicos</b>	<b>2</b>
1.1. Superficies de Riemann . . . . .	2
1.2. Morfismos . . . . .	6
<b>2. Propiedades de morfismos, construcciones auxiliares y curvas hiperelípticas</b>	<b>13</b>
2.1. Grado de morfismos y fórmula de Riemann-Hurwitz . . . . .	13
2.2. Morfismos auxiliares . . . . .	19
2.3. Curvas Hiperelípticas . . . . .	23
2.3.1. Automorfismos . . . . .	24
<b>3. Estructura y construcción de todos los cubrimientos hiperelípticos</b>	<b>26</b>
3.1. Caracterización de los cubrimientos hiperelípticos . . . . .	26
3.2. Construcción de sistemas de ecuaciones polinomiales para describir cubrimientos hiperelípticos por curvas de género 2 . . . . .	31
3.3. Curvas elípticas isomorfas . . . . .	35
<b>4. Construcción explícita de cubrimientos hiperelípticos de género 2 y grados bajos</b>	<b>36</b>
4.1. Cubrimientos hiperelípticos para género $g > 2$ . . . . .	36
4.2. Construcción de todos los cubrimientos hiperelípticos de grado 2 por curvas de género 2 . . . . .	37
4.3. Construcción de cubrimientos hiperelípticos de grado 3 por curvas de género 2 . . . . .	39
4.4. Construcción de cubrimientos hiperelípticos por curvas de género 2 con 2 puntos de ramificación y $\text{Disc}(\pi) = 2a$ . . . . .	40
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>

# Capítulo 1

## Definiciones y conceptos básicos

En este capítulo introducimos las definiciones y notaciones básicas que se usarán durante todo el trabajo.

Las demostraciones de propiedades elementales de análisis complejo que se usen, como el estudio de singularidades aisladas de funciones holomorfas, se pueden encontrar en [L].

A menos de mención explícita las topologías usadas serán las usuales, es decir:

- Si  $A$  es un espacio topológico y  $B \subset A$ , consideramos  $B$  espacio topológico con la topología inducida.
- Dados 2 espacios topológicos  $A$  y  $B$  en el espacio producto  $A \times B$  la topología producto.
- Dado un espacio topológico  $A$  y una relación de equivalencia  $\sim$ , en  $A/\sim$  la topología cociente.
- El plano complejo  $\mathbb{C}$ , con la topología de espacio métrico, luego  $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a| < r\} \subset \mathbb{C}$  también.

### 1.1. Superficies de Riemann

**Definición 1.1.1** (*Superficie*): Una superficie  $S$ , es un espacio topológico Hausdorff localmente homeomorfo a  $\mathbb{C}$ .

#### Ejemplo 1.1.2

- a) El propio  $\mathbb{C}$ .
- b) Cualquier  $U \subset \mathbb{C}$  abierto.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que un espacio topológico  $S$  sea Hausdorff no es consecuencia de que sea localmente homeomorfo a  $\mathbb{C}$ .

#### Ejemplo 1.1.3

Definimos en el espacio topológico  $Y = \mathbb{C} \times \{0, 1\}$  la relación de equivalencia  $\sim$  dada por:

$$[(x, n)] = \{(y, m) \text{ tal que } (y, m) = (x, n) \text{ o } x = y \neq 0\}$$

Notemos  $X = (\mathbb{C} \times \{0, 1\})/\sim$  y  $\pi : Y \rightarrow X$  la proyección canónica  $\pi(u) = [u]$ .  
Afirmación:  $X$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{C}$ .

Demostración: Para un punto  $(x, n)$  tal que  $x \neq 0$ , sea  $U_x = \{[(y, n)] \text{ con } y \in B(x, |x|)\} \subset X$ , claramente  $[(x, n)] \in U_x$ . Definimos el mapa  $\phi_x : U_x \rightarrow B(x, |x|)$  como  $\phi_x([(y, n)]) = y$ , que no depende del representante, ya que si  $(y, n) \sim (y', m)$  entonces  $y = y'$ . Este mapa es biyectivo y continuo. Como  $[(0, n)] \notin U_x$  se tiene que  $\phi_x^{-1}(y) = [(y, 1)] = [(y, 0)]$ , es decir  $\phi_x^{-1}(u) = \pi(u)$ , que es continua, por tanto  $U_x$  es homeomorfo a  $B(x, |x|)$ . Por último dado que  $B(x, |x|) = \pi^{-1}(\pi(B(x, |x|)))$  es un abierto saturado entonces  $U_x = \pi(B(x, |x|)) \subset X$  es abierto.

Para  $[(0, 1)]$  sea  $V_1 = \{[(x, 1)] \text{ con } x \in B(0, 1)\}$  y el mapa  $\psi_1 : V_1 \rightarrow B(0, 1)$  dado por  $\psi_1([(x, 1)]) = x$ , al igual que antes  $\psi_1$  es un homeomorfismo y  $V_x$  es un abierto. De forma análoga podemos definir para  $[(0, 0)]$  un homeomorfismo en un abierto con la expresión  $\psi_0([(x, 0)]) = x$ .

Sin embargo para todo par de abiertos  $U, V \subset X$  donde  $[(0, 1)] \in U$  y  $[(0, 0)] \in V$  se tiene que  $U \cap V \neq \emptyset$  por tanto  $X$  no es Hausdorff.

**Definición 1.1.4 (Carta):** Una carta de una superficie  $S$  es un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subset S$  y  $V \subset \mathbb{C}$  son abiertos.

**Definición 1.1.5 (Atlas):** Se llama atlas de una superficie  $S$  a una colección de cartas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ,  $\alpha \in I$  tal que  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = S$ .

Notación:  $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}\}$ .

**Observación 1.1.6** Toda superficie admite un atlas.

Notaremos  $(S, \mathcal{A})$  a una superficie con un atlas específico.

**Definición 1.1.7 (Cambio de carta):** Dada  $(S, \mathcal{A})$  una superficie con un atlas y dos cartas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ,  $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ , tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Llamaremos a la función  $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  cambio de carta de  $\beta$  a  $\alpha$ .

**Observación 1.1.8** La función cambio de carta es un homeomorfismo.

**Definición 1.1.9 (Superficie de Riemann):** Una superficie de Riemann es una superficie conexa con un atlas  $(S, \mathcal{A})$ , tal que todos los cambios de cartas del atlas son funciones holomorfas.

En particular, como los cambios son homeomorfismos, los cambios de carta son funciones biholomorfas.

### Ejemplo 1.1.10

a) Un abierto conexo  $U \subset \mathbb{C}$  con el atlas  $\mathcal{A} = (\phi, U)$ , donde  $\phi : U \rightarrow U$  es la identidad, es una superficie de Riemann.

b.1) (Toro): Consideremos la relación de equivalencia en  $\mathbb{C}$  dada por  $x \sim y$  si  $x - y \in \mathbb{Z}^2$ . Llamamos Toro al par  $(\mathbb{T}, \mathcal{A})$  donde  $\mathbb{T} = \mathbb{C} / \sim$  y  $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}\}$  con  $I = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 \leq \text{Re}(z) < 1, 0 \leq \text{Im}(z) < 1\}$  atlas dado por cartas  $\phi_\alpha$  con inversas  $\phi_\alpha^{-1} : B(\alpha, 1/4) \rightarrow \phi_\alpha^{-1}(B(\alpha, 1/4)) = U_\alpha$ ,  $\phi_\alpha^{-1}(z) = [z]$ , es decir  $\phi_\alpha^{-1} = \pi_{B(\alpha, 1/4)}$  donde  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / \sim$  es el mapa cociente.

Afirmación: El par  $(\mathbb{T}, \mathcal{A})$  es una superficie de Riemann.

Demostración: Todo punto de  $\mathbb{T}$  tiene un representante en  $I$  (dado  $z$  basta tomar  $\alpha = z - (p\text{Re}(z) + ip\text{Im}(z))$  donde  $p$  es parte entera), y como  $[\alpha] \in U_\alpha$  se tiene que  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha =$

$\mathbb{T}$ .

Dado  $\alpha \in I$ , el mapa  $\phi_\alpha^{-1}$  es biyectivo, ya que dos representantes de la misma clase distan al menos en 1 y  $\phi_\alpha^{-1} = \pi|_{B(\alpha, 1/4)}$ , además  $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^2} B(z + n, 1/4)$  es un abierto saturado, por tanto  $U_\alpha$  es abierto en el cociente  $(\mathbb{T})$ , concluimos así que  $\phi_\alpha$  al ser biyectiva es un homeomorfismo.

Falta ver que los cambios de cartas son funciones holomorfas. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}$  tal que  $[z] = [\alpha]$  y  $z \in B(\beta, 1/2)$ , como  $\alpha, \beta \in I$  y  $z \in B(\beta, 1/2)$  entonces por desigualdad triangular  $(\alpha - z) \in \{-1, 0, 1, i, -i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$ . Si  $\alpha = z$  entonces el cambio de cartas  $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta\alpha} = id$ . Si  $\alpha = z + k$  entonces el cambio de cartas  $\phi_{\alpha\beta} = id - k$ .

b.2) (Toros): Sean  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $a_1, a_2$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , llamemos  $G$  al subgrupo de  $\mathbb{C}$  generado por  $a_1, a_2$ . Sea  $\mathbb{T}_G = \mathbb{C} / \sim_G$  el espacio cociente de  $\mathbb{C}$  bajo la relación de equivalencia  $x \sim_G y$  si solo si existe  $n, m \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = y + na_1 + ma_2$ . Con una construcción análoga a la anterior, concluimos que  $\mathbb{T}_G$  es una superficie de Riemann.

c) La esfera,  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con la topología que tiene como base  $\mathcal{U} = \{U, U \subset \mathbb{C} \text{ abierto}\} \cup \{K^c \cup \{\infty\}, K \subset \mathbb{C} \text{ compacto}\}$ , es decir la compactificación por un punto. Tomando como cartas  $\phi_c : U_c \subset \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $U_c = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$  y  $\phi_c(z) = z$ , y  $\phi_d : U_d \subset \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $U_d = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ,  $\phi_d(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$

Por tanto  $U_c \cup U_d = \bar{\mathbb{C}}$  además los cambios de carta son  $\phi_{cd} = \phi_{dc} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$   $\phi_{cd}(z) = 1/z$ , entonces  $\bar{\mathbb{C}}$  es una superficie de Riemann.

d.1) No todas las superficies son superficies de Riemann.

Los cambios de cartas de una superficie de Riemann son biholomorfos, en particular el diferencial en cada punto, considerado como función de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es una roto-homotecia. Por lo tanto cualquier superficie no orientable no es una superficie de Riemann. Tenemos como ejemplo la banda de Möbius. [S]

d.2) Toda superficie orientable admite estructura de superficie de Riemann. [F-K]

**Definición 1.1.11** (Recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ ): Consideremos en  $(\mathbb{C}^2)^* = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  la relación de equivalencia dada por  $u \sim v \iff \exists \lambda \neq 0$  tal que  $u = \lambda v$ . La recta proyectiva es  $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2)^* / \sim$ .

A la clase de equivalencia de  $(x, y)$  la notaremos como  $(x : y)$ .

**Proposición 1.1.12** La recta proyectiva admite estructura de superficie de Riemann.

Demostración: Sean  $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{(0 : 1)\}$ ,  $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\}$  por tanto  $U_i$  abierto y  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ . Definimos  $\phi_1 : \mathbb{P}^1 \setminus \{(0 : 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\phi_1(x : y) = \phi_0(1 : y/x) = y/x$ , además  $x \neq 0$  por ser  $(x : y) \neq (0 : 1)$  y no depende del representante. De manera análoga  $\phi_0 : \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Afirmación: Los mapas  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son homeomorfismos.

El cambio de cartas  $\phi_{(1,0)} = \phi_1 \circ \phi_0^{-1} x = \phi_1(x : 1) = 1/x$  es holomorfo si  $x \neq 0$ , condición que cumple para  $(x : y) \in U_0 \cap U_1$ . Análogo para  $\phi_{(0,1)}$ .

Concluimos así que  $\mathbb{P}^1$  admite una estructura de superficie de Riemann. Usaremos la notación  $\square$  para el punto  $(1 : 0)$ .  $\square$

**Observación 1.1.13** La esfera es homeomorfa a  $\mathbb{P}^1$ .

Demostración: Consideremos la función  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida por  $f(x) = \begin{cases} (x : 1) & \text{si } x \neq \infty \\ (1 : 0) & \text{si } x = \infty \end{cases}$ , que es biyectiva, podemos definir así  $f^{-1}$ . Como  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$  falta verificar entonces en  $\infty$ . Sea  $x_n \rightarrow \infty$  entonces  $f(x_n) = (x_n : 1) = (1 : 1/x_n) \rightarrow (1 : 0)$ , por lo tanto  $f$  es continua. De forma análoga  $f^{-1}$  es continua, luego  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 1.1.14** (Curva algebraica plana): Se llama curva algebraica plana al subconjunto de ceros  $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ , de cualquier polinomio no constante  $P \in \mathbb{C}[x, y]$ .

**Proposición 1.1.15** Sean  $P \in \mathbb{C}[x, y]$  no constante y  $C$  la curva algebraica definida por  $C = \{(x, y) \text{ tal que } P(x, y) = 0\}$ . Si el conjunto  $D = (C - \text{sing}(C))$  no es vacío, donde  $\text{sing}(C) = \left\{ z \text{ tal que } \frac{\partial P}{\partial x}(z) = \frac{\partial P}{\partial y}(z) = 0 \right\}$ , entonces  $D$  admite una estructura de superficie de Riemann.

Demostración: Para todo  $(x_0, y_0) \in D$ , como  $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , según el teorema de la función implícita existen abiertos  $U_{x_0} \subset \mathbb{C}$ ,  $V_{x_0} \subset \mathbb{C}$  con  $x_0 \in U_{x_0}$ ,  $y_0 \in V_{x_0}$  y  $f_0 : U_{x_0} \rightarrow V_{x_0}$  función holomorfa, tales que,  $\forall x \in U_{x_0}$  el punto  $F_{x_0} := (x, f(x)) \in C$ . Además  $F_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow C \cap (U_{x_0} \times V_{x_0})$  es un homeomorfismo y  $\frac{\partial P}{\partial y}(z) \neq 0$  para  $z \in C \cap (U_{x_0} \times V_{x_0})$ , es decir  $(x, f(x)) \in D$ . En caso que  $\frac{\partial P}{\partial y}(z) = 0$  (en particular  $\frac{\partial P}{\partial x}(z) \neq 0$ ) realizamos una construcción análoga en  $y$ .

Si definimos las cartas como  $\phi_{(x_0, y_0)} : D \cap (U_{(x_0, y_0)} \times V_{(x_0, y_0)}) \rightarrow \mathbb{C}$ , donde

$$\phi_{(x_0, y_0)}(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \\ y & \text{en otro caso} \end{cases}, \text{ obtenemos un atlas en } D.$$

Observemos que para cada punto de  $D$  existe una carta,  $D = \bigcup_{(x_0, y_0) \in D} D \cap (U_{(x_0, y_0)} \times V_{(x_0, y_0)})$ .

Veamos que los cambios de cartas son holomorfos. Si  $(U_p \times V_p) \cap (U_q \times V_q) \neq \emptyset$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}(p) \neq 0 \neq \frac{\partial P}{\partial y}(q)$ , el cambio de cartas es  $\phi_q \circ \phi_p^{-1} = \phi_p \circ \phi_q^{-1} = id$ . Si  $\frac{\partial P}{\partial y}(p) = \frac{\partial P}{\partial y}(q) = 0$ , obtenemos lo mismo. En caso que  $\frac{\partial P}{\partial y}(p) \neq 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(q)$  los cambios de cartas son,  $\phi_q \circ \phi_p^{-1}(y) = \phi_q(f(y), y) = f(y)$ ,  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}(x) = \phi_p(x, g(x)) = g(x)$ , como  $f$  y  $g$  son holomorfas, concluimos que los cambios de cartas son holomorfos, por tanto  $D$  admite estructura de superficie de Riemann.  $\square$

**Definición 1.1.16** Dada la curva  $\Gamma \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  definida por

$$\Gamma = \left\{ ((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y_1^2 x_2^{2g+1} = y_2^2 \prod_i^{2g+1} (x_1 - a_i x_2) \right\}$$

con  $g \geq 1$  y  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ . Diremos que  $\Gamma$  es una curva hiperelíptica si  $g > 1$ , y que  $\Gamma$  es una curva elíptica si  $g = 1$ .

Notación: la ecuación  $y^2 = \prod_i^{2g+1} (x - a_i)$  será llamada ecuación afín de  $\Gamma$ , y notaremos  $(\infty, \infty)$  o simplemente  $\infty$  al punto  $((1 : 0), (1 : 0))$ .

Notar que la ecuación  $y_1^2 x_2^{2g+1} = y_2^2 \prod_i^{2g+1} (x_1 - a_i x_2)$  es homogénea en el par de variables  $x_1, x_2$  y también en  $y_1, y_2$ , por tanto la igualdad no depende de los representantes que se tomen.

**Definición 1.1.17** Sean  $g > 1$  y  $\Gamma$  la curva hiperelíptica definida por la ecuación afín  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i)$ . Llamaremos puntos de Weierstrass de  $\Gamma$  a los puntos del conjunto  $\Omega_\Gamma = \Gamma \cap (\{\infty\} \cup \{(a_i : 1), (0 : 1)\})$ .

**Proposición 1.1.18** Una curva hiperelíptica admite una estructura de superficie de Riemann.

Demostración: la proyección  $\pi_0 : \Gamma \setminus \{((1 : 0), (1 : 0))\} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , dada por  $\pi_0((x_0 : 1), (y_0 : 1)) = (x_0, y_0)$ , es un homeomorfismo sobre su imagen, la que coincide con  $C_\Gamma := \Gamma \setminus \{\infty\}$ . Como la ecuación afín que define a esta última es no singular,  $C_\Gamma$  es una superficie de Riemann. Obtenemos así un atlas para  $\Gamma$  fuera del punto  $\infty$ .

Falta dar una carta para el punto  $(\infty, \infty)$ .

Notemos  $\pi_1$  la proyección sobre el otro par de coordenadas  $\pi_1((1 : x_1), (1 : y_1)) = (x_1, y_1)$ , por lo que  $\pi_1(\infty, \infty) = (0, 0)$ . La curva imagen esta dada por la ecuación  $C_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, x^{2g+1} = y^2 \prod_i^{2g+1} (1 - a_i x)\}$ , y existe  $U_\infty$  entorno abierto de  $\infty = \pi_1^{-1}(0, 0) \in U_\infty$ , tal que  $\pi_1$  es un homeomorfismo, siendo  $(0, 0)$  el único punto singular de  $C_\infty$ .

Ahora veremos una construcción llamada explosión, que dará una carta en  $\infty = ((0 : 1), (0 : 1))$ . Sea  $e : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , el mapa dado por  $e(u, v) = (u, u^g v)$ .

$$e^{-1}(C_\infty) = D \cup \{(0, y), y \in \mathbb{C}\} \text{ donde } D = \left\{ (u, v) \text{ tal que } u = v^2 \prod_i^{2g+1} (1 - a_i u) \right\}, \text{ además } e|_D:$$

$D \rightarrow C_\infty$  es un homeomorfismo y  $(0, 0)$  no es singular en  $D$ . Tenemos así una carta de la curva  $\Gamma$  en  $(\infty, \infty)$  cuya inversa esta definida por  $\phi_\infty^{-1}(y) = \pi_1^{-1} \circ e(f(y), y)$  donde  $f(y)$  esta determinado por el teorema de función inversa. Falta ver que los cambios de cartas son holomorfos, para esto veremos explícitamente las cartas. Sean  $\phi_p : U_p \rightarrow V_p, \phi_\infty : U_\infty \rightarrow V_\infty$  cartas, con  $U_p \cap U_\infty \neq \emptyset$ . El cambio de cartas  $\phi_p \circ \phi_\infty^{-1}$  es:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{id=((1/x:1)(1/y:1))} & \Gamma \\ \uparrow (1:x), (1:y) & & \downarrow (1/x, 1/y) \\ x^{2g+1} = y^2 \prod_i (1 - a_i x) & & (\hat{y})^2 = \prod_i (\hat{x} - a_i) \\ \uparrow (u, u^g v) & & \downarrow \hat{x} \\ u = v^2 \prod_i (1 - a_i u) & & \hat{x} \\ \uparrow (f(v), v) & & \downarrow \\ v & & \end{array}$$

Por tanto  $\phi_p \circ \phi_\infty^{-1}(z) = 1/f(v)$  si  $v$  es tal que si  $\frac{\partial \prod_i (-2\hat{y})}{\partial \hat{y}}(1/f^g(v), v) \neq 0$ , está bien definido ya que para  $v = 0, \phi_\infty^{-1}(v) = \infty \notin U_p$ . Podemos restringir  $U_\infty$  de forma que  $f(v) = 0$  si solo si  $v = 0$ , en estas condiciones el cambio de cartas  $\phi_p \circ \phi_\infty^{-1}(z) = 1/z$  es holomorfo, y por tanto  $\phi_\infty \circ \phi_p^{-1}(z) = 1/f(z)$  también. Como las restricciones a  $U_\infty$  solo dependen de  $C_\infty$  los restantes cambios de cartas también son holomorfos, luego  $\Gamma$  es una superficie de Riemann.  $\square$

## 1.2. Morfismos

**Definición 1.2.1** (Morfismos): Sean  $(S, \mathcal{A})$  y  $(T, \mathcal{B})$  dos superficies de Riemann con sus respectivos atlas. Una función continua  $f : S \rightarrow T$  es un morfismo si  $\forall x \in S$ , existen abiertos  $U \subset S$  y  $V \subset T$ , entornos de  $x$  y  $f(x)$  respectivamente, y cartas  $\phi$  y  $\psi$ , tales que  $\psi|_V \circ f \circ \phi^{-1} : \phi^{-1}(U) \rightarrow \psi(V)$  es holomorfa.

La condición de que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi^{-1}(U) \rightarrow \psi(V)$  sea holomorfa no depende de las cartas, ya que los cambios de cartas son biholomorfos.

**Observación 1.2.2** La composición de morfismos es un morfismo.

**Definición 1.2.3** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos atlas de la superficie  $S$  tales que  $(S, \mathcal{A})$  y  $(S, \mathcal{B})$  son superficies de Riemann. Diremos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son equivalentes si el mapa  $id : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{B})$  es un morfismo.

**Corolario 1.2.4** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos atlas de la superficie  $S$  tales que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  y  $(S, \mathcal{A}), (S, \mathcal{B})$  son superficies de Riemann. Entonces  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son equivalentes.



No todos los atlas están en la misma relación de equivalencia. Por ejemplo, sean  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  los atlas dados por  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\phi(z) = z$  y  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $\psi(z) = \bar{z}$  respectivamente. Las funciones  $\phi$  y  $\psi$  son homeomorfismos y al estar compuestos por una sola carta son atlas. Sin embargo el mapa  $\psi \circ id \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\psi \circ id \circ \phi^{-1}(z) = \psi(z) = \bar{z}$  no es holomorfo.

Para las superficies de Riemann con atlas que ya hemos definido usaremos la clase de equivalencia de esos atlas.

En cada superficie de Riemann hay 2 clases [K].

### Ejemplo 1.2.5

- a.1) Para toda superficie de Riemann  $(S, \mathcal{A})$  la función identidad  $id : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{A})$  es un morfismo.
- a.2) Para un par de superficies cualesquiera  $(S, \mathcal{A})$  y  $(T, \mathcal{B})$  cualquier función constante  $f : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (T, \mathcal{B})$  es un morfismo.

b) Cualquier función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un morfismo.

c) Sea  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida como  $f(x_0 : x_1) = (P(x_0, x_1) : Q(x_0, x_1))$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios homogéneos del grado  $n$ , tales que  $P(x, y) = Q(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y = 0$ .

Primero veamos que  $f$  está bien definida. Dado que  $\lambda^n P(x, y) = P(\lambda x, \lambda y)$  al igual que  $Q$  entonces  $f$  no depende del representante además como  $P(x, y) = 0 = Q(x, y)$  solo se da en  $(0, 0)$ ,  $f(x_0 : x_1) \neq (0 : 0)$  concluimos así que está bien definida.

Veremos ahora que es un morfismo.

Sea  $(a : 1)$  tal que  $P(a, 1) \neq 0$  entonces existe  $U \subset \mathbb{C}$  abierto tal que  $a \in U$ ,  $P(x, 1) \neq 0$  si  $x \in U$ , luego  $h = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : U \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por  $h(x) = Q(x, 1)/P(x, 1)$ , por lo que  $h$  es holomorfa. Análogo para  $(1 : b)$  con  $h = \phi_1^{-1} \circ f \circ \phi_0$ . En el caso de que  $P(x, y) = 0$  tenemos que  $Q(x, y) \neq 0$  tomamos  $h = \phi_0^{-1} \circ f \circ \phi_1$  si  $y \neq 0$  y  $h = \phi_0^{-1} \circ f \circ \phi_0$  si  $x \neq 0$ .

Notación: Para  $f(x_0 : x_1) = (P(x_0, x_1) : Q(x_0, x_1))$  morfismo, notamos  $\hat{P}(t) = P(t : 1)$ ,  $\hat{Q}(t) = Q(t : 1)$ .

- d.1) Traslaciones en el toro: Una función de traslación en  $\mathbb{C}$ , esto es  $f(x) = x + a$ , induce la función  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  donde  $h([x]) = [x + a]$ , no depende del representante de ya que  $[x + n + im + a] = [x + a]$ . Se tiene que  $h$  es morfismo. Esta construcción vale para cualquier toro de 1.1.10.
- d.2) Multiplicación en el toro: La función de multiplicación por un entero en  $\mathbb{C}$ , esto es  $f(x) = kx$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , induce la función  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , donde  $h([x]) = [kx]$ . Si  $x \sim y$ ,  $x = n + im + y$  entonces  $kx = k(n + im + y) \sim ky$ ; tenemos así que está bien definida. Esta construcción también se puede extender a los toros de 1.1.10.
- d.3) Automorfismos extras: La función de  $f(x) = ix$  induce la función en  $\mathbb{T}$ ,  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  donde  $h([x]) = [ix]$ , si  $x \sim y$ ,  $x = n + im + y$  entonces  $kx = i(n + im + y) = -m + in + iy \sim iy$  por lo que  $h$  está bien definida. Este morfismo, a diferencia de las anteriores, no se puede extender a los toros de 1.1.10.
- e) Involución: Decimos que un morfismo  $f : S \rightarrow S$ , es una involución si y sólo si es distinto de  $id$  y  $f \circ f = id$ .
- e.1) El morfismo  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $f(x_0 : x_1) = (x_1 : x_0)$  es una involución.
- e.2) El morfismo del toro  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , donde  $f([x]) = [-x]$ , es una involución.
- e.3) En toda curva hiperelíptica el morfismo  $\tau_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ , tal que  $\tau_\Gamma((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = ((x_0 : x_1), (-y_0 : y_1))$  es una involución.

Es natural preguntarse si existe algún morfismo no constante entre dos superficies de Riemann cualesquiera. En general la respuesta es negativa, sin embargo, toda superficie de Riemann admite morfismos no constantes a  $\mathbb{P}^1$ . Esto se deduce del teorema de Riemann-Roch [F-K].

**Definición 1.2.6** (*Isomorfismo*): Un morfismo  $f : T \longrightarrow S$  es un isomorfismo, si y sólo si es biyectivo. En caso de que  $f : S \longrightarrow S$  sea un morfismo biyectivo diremos que es un automorfismo.

Notación:  $\text{Aut}(S) = \{f : S \longrightarrow S \text{ tal que } f \text{ es automorfismo} \}$

La composición de isomorfismos es un isomorfismo.

Verifiquemos que para todo isomorfismo  $f : T \longrightarrow S$  el mapa  $f^{-1} : S \longrightarrow T$  también lo es. Sea  $y \in S$  y  $x \in T$  tales que  $f^{-1}(y) = x$ . Existen entonces cartas y abiertos para los cuales  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \longrightarrow V$  es holomorfa. Como además es biyectiva, su inversa  $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} : V \longrightarrow U$  también es holomorfa, además de ser biyectiva; por lo tanto  $f^{-1}$  es un isomorfismo.

**Observación 1.2.7** Para toda superficie de Riemann  $S$ ,  $(\text{Aut}(S), \circ, id)$  es un grupo.

Las involuciones son automorfismos.

**Definición 1.2.8** (*superficies isomorfas*): Dadas dos superficies de Riemann  $(S, \mathcal{A})$  y  $(T, \mathcal{B})$ , decimos que son isomorfas si existe un isomorfismo  $f : S \longrightarrow T$ .

Notar que ser isomorfa es una relación de equivalencia entre las superficies de Riemann.

### Ejemplo 1.2.9

a) La esfera  $\bar{\mathbb{C}}$  y la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$  son superficies isomorfas. Basta con notar que el homeomorfismo de 1.1.13 es además un isomorfismo.

b) (Formas canónicas): Sean  $\Gamma$  una curva hiperelíptica con ecuación afín  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i)$  y  $\omega_0, \omega_1 \in \Omega_\Gamma$  donde  $\omega_i \neq \infty$ . Entonces existe una curva hiperelíptica  $\Gamma'$  con ecuación afín  $y^2 = x(x-1) \prod_{j=1}^{2g-1} (x - \hat{a}_j)$  y un isomorfismo  $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$  tal que  $f(\omega_0) = ((0 : 1), (0 : 1))$ ,  $f(\omega_1) = ((1 : 1), (0 : 1))$  y  $f(\infty) = \infty$ . Este mapa es realizar un cambio de variable, es decir, visto en las ecuaciones afines es  $x \longrightarrow \alpha x + \beta$ .

Podemos suponer  $\omega_2 = ((a_2 : 1)(0 : 1))$  y  $\omega_1 = ((a_1 : 1)(0 : 1))$ .

Definimos

$$f((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = \left( \frac{x_0 - a_1 x_1}{a_1 - a_2} + x_1 : x_1 \right), \left( \frac{y_0}{(a_1 - a_2)} : y_1 \right) = \\ = (x_0 - a_2 x_1 : (a_1 - a_2)x_1), (y_0 : (a_1 - a_2)y_1)$$

$$\text{en particular } f((x : 1)(y : 1)) = \left( \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} : 1 \right), \left( \frac{y}{a_1 - a_2} : 1 \right).$$

Si  $(u_0 : u_1)(v_0 : v_1) = f((x_0 : x_1), (y_0, y_1))$  entonces se cumple que  $y_0^2 x_1^{2g+1} = y_1^2 \prod_{i=1}^{2g+1} (x_0 - a_i x_1)$ , por lo tanto  $v_0^2 u_1^{2g+1} = v_1^2 \prod_{i=1}^{2g+1} (u_0 - u_1(a_i - a_2)/(a_1 - a_2))$ . Definimos entonces  $\Gamma'$  con ecuación afín  $y^2 = x(x-1) \prod_{i=1}^{2g-1} \left( x - \frac{a_{i+2} - a_2}{a_1 - a_2} \right)$ , entonces  $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$  es un morfismo biyectivo, por lo que es un isomorfismo, además  $f(\omega_0) = ((0 : 1), (0 : 1))$ ,  $f(\omega_1) = ((1 : 1)(0 : 1))$  y  $f(\infty) = \infty$ .

c) Los morfismos de 1.2.5.d y 1.2.5.e son biyectivos y por lo tanto isomorfismos.

d) Todo Toro como en 1.1.10 es isomorfo a una curva elíptica  $[\mathbb{K}]$ .

**Definición 1.2.10** Dada  $\Gamma$  curva hiperelíptica, decimos que está dada en forma canónica si y sólo si 0 y 1 son raíces de la ecuación afín.

**Definición 1.2.11** Para todo  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  notamos  $X_\lambda$  a la curva elíptica dada por la ecuación afín  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$

**Observación 1.2.12** Para toda curva elíptica  $S$  existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  tal que  $S$  es isomorfa a  $X_\lambda$ .

**Proposición 1.2.13** Todos los morfismos de  $\mathbb{P}^1$  son como en 1.2.9.c, es decir un cociente de polinomios.

Demostración: Por 1.2.9.a existe  $i : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$  un isomorfismo. Podemos trasladar así los morfismos de una superficie a la otra, esto es, dado  $R$  un morfismo de  $\mathbb{P}^1$ ,  $i^{-1} \circ R \circ i$  es un morfismo de  $\bar{\mathbb{C}}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{i} & \bar{\mathbb{C}} \\ R \downarrow & & \downarrow \hat{R} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{i^{-1}} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

Todo morfismo de  $\mathbb{P}^1$  llevado a la esfera es un cociente de polinomios (ya que esos son todos los morfismos de la esfera), como  $i$  es un isomorfismo simétricamente tenemos que todo morfismo de  $\mathbb{P}^1$  proviene de un cociente de polinomios, ya que estos procedimientos son inversos.

Sea  $\hat{R}$  un morfismo de la esfera  $\hat{R} = \hat{P}(t)/\hat{Q}(t)$  con  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  coprimos de grado  $n, m$  respectivamente, supongamos  $k = n - m \geq 0$ . Definimos  $P(x, y)$  polinomio homogéneo en  $x, y$  como  $P(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$  donde  $\hat{P}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  y  $Q$  dado por  $Q(x, y) = y^k \sum_{j=0}^m (b_j y^j x^{m-j})$  donde  $\hat{Q} = \sum_{j=0}^m b_j t^j$ , por lo tanto  $P$  y  $Q$  tienen el mismo grado. Sea  $R$  dado por  $R(x : y) = (P(x, y) : Q(x, y))$ , que está bien definido ya que como  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son coprimos por tanto  $P(x, 1) = Q(x, 1) = 0$  no ocurre para ningún  $x$ , en  $\infty$  se tiene  $P(1, 0) = a_n \neq 0$  por lo tanto  $R$  es como en 1.2.5.c, además  $R$  hace conmutar el diagrama. Concluimos así que todos los morfismos de  $\mathbb{P}^1$  son de la forma de 1.2.5.c.  $\square$

**Definición 1.2.14** (funciones meromorfas): Dada una superficie de Riemann  $S$ , una función meromorfa de  $S$  es un morfismo  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

**Observación 1.2.15**

Notar que si  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un morfismo y  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  es una carta entonces  $\phi_0 \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  es una función meromorfa en el sentido usual. Recíprocamente, si tenemos una función  $\hat{f} : S \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $\forall q \in S$  existen  $U_q$  abierto de  $q$  y  $\phi_q$  carta donde  $\hat{f} \circ \phi_q^{-1} : \phi_q^{-1}(U_q) \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa entonces se puede definir  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  morfismo tal que  $f(q) = \begin{cases} \phi_0^{-1} \circ \hat{f}(q) & \text{si } \phi_q^{-1}(q) \text{ no es polo de } \hat{f} \\ (1 : 0) & \text{en otro caso} \end{cases}$ . Si  $\hat{f}$  es como antes, entonces  $\hat{g} = 1/\hat{f}$  también cumple las propiedades, por lo tanto define un morfismo  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

**Corolario 1.2.16**

Sean  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  y  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  dos morfismos; entonces  $\forall q \in S$  existen abiertos  $U_1, U_2$  de  $q$  y cartas  $\psi_1, \psi_2$  tales que  $\hat{f} = \phi_0 \circ f \circ \psi_1^{-1} : \psi_1^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa. Lo mismo para  $\hat{g} = \phi_0 \circ g \circ \psi_2^{-1} : \psi_2^{-1}(U_2) \rightarrow \mathbb{C}$ . Podemos suponer  $U_1 = U_2$  y  $\psi_1 = \psi_2$ , definimos  $\hat{h} = \hat{f} \times \hat{g} : \psi_1^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{C}$  que es meromorfa por ser producto de meromorfas, esto vale para cualquier  $q$ , por lo tanto  $\hat{h}$  define un morfismo  $h : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  como en 1.2.15.

A partir de ahora solo consideraremos superficies de Riemann compactas.

**Proposición 1.2.17** *Un morfismo  $f : S \rightarrow T$  es constante o abierto.*

Demostración: Sea  $x \in S$ ,  $f(x) = y$  existen  $U_x \subset S$ ,  $V_y \subset T$  abiertos y  $\phi_x, \psi_y$  cartas tal que,  $x \in U_x$ ,  $y \in V_y$  y  $h = \psi_y \circ f \circ \phi_x^{-1} : \phi_x^{-1}(U_x) \rightarrow \psi_y(V_y)$  es holomorfa, por lo tanto  $h$  abierta o constante. Sean  $U_1, U_2$  definidos por  $U_1 = \{ x \in S \text{ tal que } \exists U_x \text{ abierto de } S \text{ y } x \in U_x \text{ con } f|_{U_x} \text{ abierta} \}$  y  $U_2 = \{ x \in S \text{ tal que } \exists U_x \text{ abierto de } S \text{ y } x \in U_x \text{ con } f|_{U_x} \text{ constante} \}$ . Tenemos así que  $U_1, U_2$  son abiertos, además  $S = U_1 \cup U_2$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , luego como  $S$  conexa  $U_1 = \emptyset$  o  $U_2 = \emptyset$ .

Si  $U_1 = \emptyset$  entonces  $f$  es localmente constante, de nuevo como  $S$  conexo  $f$  es constante. Si  $U_2 = \emptyset$  entonces  $f$  es localmente abierta por tanto es abierta  $\square$

**Proposición 1.2.18** *Si  $f : S \rightarrow T$  es un morfismo no constante, entonces  $\#f^{-1}(y) < \infty, \forall y \in T$ .*

Demostración: Supongamos que  $\exists y_0 \in T$  tal que  $\#f^{-1}(y_0) = \infty$ . Como  $S$  compacto  $\exists x_0$  tal que  $x_0$  es de acumulación de  $f^{-1}(y_0)$ , además como  $f$  continua  $f(x_0) = y_0$ . Sean  $U, V$  abiertos con  $x_0 \in U$  y  $\phi, \psi$  cartas de  $S$  y  $T$  respectivamente como en la definición 1.2.1 entonces como  $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi^{-1}(U) \rightarrow \psi(V)$  holomorfa y además  $y_0$  tiene preimagenes que acumulan entonces  $h$  es constante, por lo que  $f$  es constante.  $\square$

**Observación 1.2.19** *Sea  $f : S \rightarrow S$  un morfismo, entonces si  $f \neq id$ , la cantidad de puntos fijos es finita.*

Definamos ahora algunas propiedades de los morfismos.

**Definición 1.2.20** (*índice*): Sean  $S$  y  $T$  dos superficies de Riemann con sus respectivos atlas,  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante y  $x \in S$ . Sean  $U \subset S$  abierto con  $x \in U$ ,  $V \subset T$  abierto con  $f(x) \in V$  y cartas  $\phi : U \rightarrow U'$  y  $\psi : V \rightarrow V'$  tales que  $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi^{-1}(U) \rightarrow \psi(V)$  es holomorfa. El índice de  $f$  en  $x$  (Notación  $ind_f(x)$ ) es el grado de  $h$  en  $\phi(x)$ ; es decir,  $ind_f(x) = grado_h(\phi(x))$ .

Para que la definición tenga sentido basta ver que no depende de las cartas elegidas, es decir que para  $\phi_1, \psi_1$  y otras cartas tales que  $\phi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1} = h_1$  es holomorfa,  $grado_h(\phi(x)) = grado_{h_1}(\phi_1(x))$ . Para eso alcanza con notar que los cambios de cartas son biholomorfismos, es decir,  $h_1 = \psi_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi_1^{-1} = \psi_1 \circ \psi^{-1} \circ h \circ \phi \circ \phi_1^{-1}$  que es composición de  $h$  con los cambios de cartas, por lo que el índice no cambia.

**Definición 1.2.21** (*Punto de ramificación*): Dado un morfismo  $f : S \rightarrow T$ ,  $x \in S$  es de ramificación si  $ind_f(x) > 1$ . Además notaremos  $Ram_f(x) = ind_f(x) - 1$ .

Notación:  $Ram_f(S) = \{x \in S \text{ tal que } ind_f(x) > 1\}$ .

**Ejemplo 1.2.22**

- Cualquier isomorfismo  $f : S \rightarrow T$  cumple que para todo  $\forall x \in S$ ,  $ind_f(x) = 1$ . En particular  $Ram_f(S) = \emptyset$ .
- Sea  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida como  $f(x_0 : x_1) = (x_0^n : x_1^n)$ . Dado  $(x : 1)$  entonces  $\phi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\phi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1}(x, 1) = x^n$  holomorfa, tenemos así que  $ind_f(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .  
Para  $(1 : 0)$  tomamos las cartas  $\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}(x) : x^n$ , como  $(1 : 0) = \phi_1^{-1}(0)$  se tiene  $ind_f(1 : 0) = n$ .
- Para todo  $k \neq \pm 1$  la multiplicación por  $k$  en el toro (1.2.5.d.2) no es un isomorfismo pero no tiene puntos de ramificación.

**Proposición 1.2.23** Dado  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante, entonces  $\# \text{Ram}_f(S) < \infty$ .

Demostración: Supongamos que hay una cantidad infinita de puntos de ramificación. Sea una sucesión  $x_n$  con  $\text{ind}_f(x_n) > 1$ , como  $S$  es compacta podemos tomar  $x_n \rightarrow x$ . Existen entonces  $U_x, V_x, \phi_x, \psi_x$  como en 1.2.20, luego  $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi_x^{-1} \rightarrow \psi_x(V_x)$  es holomorfa,  $\phi_x^{-1}(x_n) \rightarrow \phi_x^{-1}(x)$  y  $h'(\phi_x^{-1}(x_n)) = 0$  por lo tanto  $h$  constante. Concluimos así que  $f$  es constante.  $\square$

**Definición 1.2.24** (Ramificación de un morfismo): Sea  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante. La ramificación de  $f$  es la suma formal finita de los puntos de ramificación con coeficiente el índice de ramificación correspondiente.

$$\text{Notación: } \text{Ram}(f) = \sum_{x \in \text{Ram}_f(S)} \text{Ram}(x) x.$$

$$\text{Notación } \text{deg}(\text{Ram}(f)) = \sum_{x \in \text{Ram}_f(S)} \text{Ram}(x).$$

**Proposición 1.2.25** Sean  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante y  $x \in S$ . Entonces existen abiertos  $U \subset S, V \subset T$  donde  $x \in U$  y  $f(U) = V$  y cartas  $\phi : S \rightarrow D(0,1)$  con  $\phi(x) = 0$ ,  $\psi : T \rightarrow D(0,1)$  tales que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : D(0,1) \rightarrow D(0,1)$  cumple  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^n$ , donde  $n = \text{ind}_f(x)$ .

Demostración: Dado  $x \in S$  sean  $\hat{U} \subset S, \hat{V} \subset T$  abiertos con  $x \in \hat{U}$  y  $\hat{\phi} : \hat{U} \rightarrow U_1, \hat{\psi} : \hat{V} \rightarrow V_1$  cartas donde  $\hat{h} = \hat{\psi} \circ f \circ \hat{\phi}^{-1} : U_1 \rightarrow V_1$  holomorfa. Podemos asumir que  $(\hat{U} \setminus \{x\}) \cap \text{Ram}_f(S) = \emptyset$ , por ser  $\# \text{Ram}_f(S) < \infty$ . Sean  $a = \hat{\phi}(x)$  y  $b = \hat{\psi}(f(x))$ , como  $\hat{\phi}(x) = a \in U_1 \subset \mathbb{C}$  abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset U_1$  definimos  $h_1 = t_{-b} \circ \hat{h} \circ g : B(0,1) \rightarrow t_{-b}(V_1) (= W_1)$  donde  $g^{-1}(z) = \frac{z-a}{r}$  y  $t_{-b}(z) = z - b$ , por lo tanto  $h_1$  es holomorfa. Como  $h_1(0) = 0$  se tiene que  $h_1(z) = z^n H_1(z)$  donde  $H_1$  holomorfa y  $H_1(0) \neq 0$ , además como  $g$  y  $t_{-b}$  son biholomorfas entonces  $n = \text{ind}_f(x)$ .

El mapa  $F(z) = z/H(z)$  está bien definido en un abierto  $W_2$  de  $0 \in W_2$ . Luego  $F$  holomorfa,  $F(0) = 0$  y  $F'(0) \neq 0$ , por tanto existe un abierto  $W_3 \subset W_2, 0 \in W_3$  donde es biholomorfa a su imagen. Sea  $s > 0$  tal que  $B(0, s) \subset h_1^{-1}(W_3)$ . Definimos  $h : D(0,1) \rightarrow D(0,1)$  dada por  $h = p_{s^n} \circ F \circ h_1 \circ p_{s^{-1}}$  donde  $p_u(z) = uz$ , que es biholomorfo, luego  $h(z) = z^n$ . Como en cada paso solo se tomaron restricciones y composición con funciones biholomorfas,  $\phi = \hat{\phi} \circ p_{s^{-1}}^{-1}$  y  $\psi = p_{s^n} \circ F \circ \hat{\psi}$  son cartas, por último  $h = \psi \circ f \circ \phi$ .  $\square$

**Proposición 1.2.26** Sean  $f : S \rightarrow S$  una involución y  $x \in S$  tales que  $f(x) = x$ . Entonces existen un abierto  $U \subset S$  y una carta  $\phi : U \rightarrow D(0,1)$ , tales que  $x \in U, f(U) = U$  y  $h = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : D(0,1) \rightarrow D(0,1)$  es  $h(z) = -z$ .

Demostración: Sean  $V \subset S$  un abierto tal que  $x \in V$  y  $f(v) \neq v, \forall v \in V \setminus \{x\}$  y  $\hat{\phi} : V \rightarrow B(0,1)$  una carta con  $\hat{\phi}(x) = 0$ . Existe entonces  $W \subset V$  abierto,  $x \in W$  tal que  $f(W) \subset V$  y  $f^{-1}(W) \subset V$ . Luego  $\exists r > 0$  donde  $\hat{\phi}(W) \subset B(0, r)$ . Sea  $\hat{U} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(W)$ , se tiene que  $x \in \hat{U}$  y  $f(\hat{U}) = \hat{U}$ . Como  $f^2(W) = W, \hat{U}$  es abierto por ser intersección finita de abierto.

Tomemos  $D \subset \hat{D}$  la componente conexa de  $0 = \hat{\phi}(x)$  donde  $\hat{D} = \hat{\phi}(\hat{U}) \subset B(0, r)$ . Veamos que  $D$  es simplemente conexo. Como  $\hat{\phi} \circ f \circ \hat{\phi}^{-1}(\hat{D}) = \hat{D}, \hat{\phi} \circ f \circ \hat{\phi}^{-1}(0) = 0, 0 \in D$  y  $D$  componente conexa, entonces  $\hat{\phi} \circ f \circ \hat{\phi}^{-1}(D) = D$ .

Veamos que  $D$  es simplemente conexo. Sea  $\gamma : S^1 \rightarrow D \subset B(0, r)$  una curva,  $\gamma$  es homotópica a 0 en  $B(0, r)$ , de hecho,  $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow B(0, r)$ , dada por  $H(t, s) = t\gamma(s) \subset B(0, r)$  es una homotopía. Para  $F = \hat{\phi} \circ f \circ \hat{\phi}^{-1} \circ H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow B(0, 1)$  se tiene  $F(1, s) = \hat{f}(\gamma(s)) \subset D \subset B(0, r)$ , como además  $|H(t, s)| = |t\gamma(s)| \leq |\gamma(s)|$  entonces por el principio de módulo máximo  $F([0, 1] \times S^1) \subset B(0, r)$ . Se deduce así que  $\text{Im}(H) \subset D$  por tanto  $D$  simplemente conexo. Definimos  $U = \hat{\phi}^{-1}(D)$ .

Como  $D$  es simplemente conexo y  $0 \in D$ , existe  $g : D \rightarrow B(0, 1)$  biholomorfa tal que  $g(0) = 0$ . Definimos así la carta  $\phi : U \subset S \rightarrow B(0, 1)$  por la fórmula  $\phi = g \circ \hat{\phi}$ . Por último,  $h = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  es una función holomorfa biyectiva, donde  $h(0) = 0$ . Por tanto es una rotación no trivial, y como además  $h \circ h(z) = z$  deducimos que  $h(z) = -z$ .  $\square$

El resultado 1.2.26 no se cumple para cualquier punto fijo de índice 1. De hecho, no es ni siquiera suficiente que  $f$  sea un automorfismo.

**Ejemplo 1.2.27**

El mapa  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ , definido por  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq \infty \\ \infty & \text{si } x = \infty \end{cases}$ , es un automorfismo.

Sea  $U \subset \bar{\mathbb{C}}$  abierto tal que  $\infty \in U$ ,  $U = K^c$  donde  $K$  compacto. Dado  $x \in \mathbb{C}$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^n(x) \in U$  ( $x \notin K$ ). Por tanto el único abierto  $U$  con  $\infty \in U$  tal que  $f(U) = U$  es  $U = \bar{\mathbb{C}}$ . Luego no existe una carta como en la observación 1.2.26.

**Definición 1.2.28** (*Discriminante*): Sea  $f : S \rightarrow T$  un morfismo, cuya ramificación es  $Ram(f) = \sum Ram(x)x$  y  $Y = \{y \in T \text{ con } y = f(x) \text{ } x \text{ de ramificación}\}$ . El discriminante es la suma formal de las imágenes de los puntos de ramificación, esto es,

$$Disc(f) = \sum_{y \in Y} \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} Ram(x) \right) y.$$

Si  $y$  es tal que  $\exists x$  de ramificación tal que  $f(x) = y$ , diremos que  $y$  está en el discriminante.

**Definición 1.2.29** Para  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante, el soporte del discriminante de  $f$  es el conjunto  $Sop(Disc_f) = \{y \in T \text{ con } y = f(x) \text{ } x \text{ de ramificación}\}$ .

**Corolario 1.2.30** El soporte del discriminante es finito.

Alcanza con notar que los puntos de ramificación son una cantidad finita.

**Definición 1.2.31** (*Divisor de ceros y polos*): Dada una función meromorfa  $f$ , el divisor de ceros y polos es la suma formal de puntos de las preimágenes de cero  $(0:1)$  menos las preimágenes de infinito  $(0:1)$ , esto es  $(f) = \sum_{x \in f^{-1}(1:0)} ind_f(x)x - \sum_{x \in f^{-1}(0:1)} ind_f(x)x$ . Además notaremos  $(f)_0 = \sum_{x \in f^{-1}(1:0)} ind_f(x)x$  y  $(f)_\infty = \sum_{x \in f^{-1}(0:1)} ind_f(x)x$ .

**Observación 1.2.32** Si  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un morfismo entonces para  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida por  $1/\hat{f}$  como en 1.2.15 se tiene que  $(h) = -(f)$ .

**Observación 1.2.33** Si  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  y  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  son morfismos entonces  $h : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  definido por  $\hat{h} = \hat{f} \times \hat{g}$  como en 1.2.16 cumple que  $(h) = (f) + (g)$ .

## Capítulo 2

# Propiedades de morfismos, construcciones auxiliares y curvas hiperelípticas

### 2.1. Grado de morfismos y fórmula de Riemann-Hurwitz

**Definición 2.1.1** (*Cantidad de preimágenes contadas con multiplicidad*) Dados  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante y  $z \in T$ . Llamamos cantidad de preimágenes contadas con multiplicidad al número  $E_f(y) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{ind}_f(x)$ .

Está bien definido ya que por 1.2.18 todo punto tiene un número finito de preimágenes.

Un polinomio  $f$  de grado  $n$  es un morfismo de  $\bar{\mathbb{C}}$  en el que genéricamente (salvo en  $\text{Sop}(\text{Disc}_f)$ ) cada punto tiene  $n$  preimágenes. Además se tiene que  $E_f(y) = n, \forall y \in \bar{\mathbb{C}}$ . Este resultado se generaliza a cualquier morfismo entre superficies de Riemann compactas.

**Lema 2.1.2** Sean  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante y  $x \in S$  tales que  $\text{ind}_f(x) = n$ . Existen abiertos  $U_x \subset S, V_x \subset T$  donde  $x \in U_x, f(x) \in V_x$  para los que  $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_x$  cumple que  $\#f|_{U_x}^{-1}(z) = n$  para  $z \neq f(x)$  y  $\#f|_{U_x}^{-1}(f(x)) = 1$ .

Demostración: Se deduce de 1.2.25.

**Proposición 2.1.3** Si  $f : S \rightarrow T$  es un morfismo no constante, entonces existe un entero positivo  $n$ , tal que  $E_f(y) = n$  para todo  $y \in T$ .

Demostración: Probaremos que los conjuntos  $T_n = \{y \in T \text{ tal que } E_f(y) \geq n\}$  son abiertos y cerrados en  $T$ . Por tanto, como  $T$  es conexo, o bien  $T_n = T$  o bien  $T_n = \emptyset$ , además  $T_n \supset T_{n+1}$  y  $T_0 = T$ . Luego existe  $n$  tal que  $T_n = T$  y  $T_{n+1} = \emptyset$ , es decir  $E_f(y) = n$  para todo  $y \in T$ .

Afirmación:  $T_n$  es abierto. Para  $y_0 \in T_n$ , sean  $x_1, \dots, x_l$  las preimágenes de  $y_0$  y  $m = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \text{ind}_f(x) \geq n$ . Existen abiertos  $U_{x_i}, V_{x_i}$  como en el lema anterior y además podemos asumir que  $U_{x_i} \cap U_{x_j} = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Sea  $V = \bigcap_i V_{x_i}$ , que es abierto por ser intersección finita de abiertos. Luego si  $y \in V \setminus \{y_0\}$  tenemos que  $\#f^{-1}(y) \cap U_{x_i} = \text{ind}_f(x_i)$  es decir  $k = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ind}_f(x) \geq m \geq n$  por lo que  $y \in T_n$ . Concluimos así que  $T_n$  es abierto.

Afirmación:  $T_n$  es cerrado. Sea  $y_i \in T_n$  una sucesión convergente  $y_i \rightarrow y$ . Como  $\text{Sop}(\text{Disc}_f)$  es finito, podemos suponer que  $y_i \notin \text{Sop}(\text{Disc}_f)$ , por tanto como  $E_f(y_i) \geq n$  entonces  $\#\{f^{-1}(y_i)\} \geq n$ . Podemos tomar así  $n$  sucesiones  $x_{(i,k)}$  donde,  $k = 1, \dots, n, x_{(i,k)} \neq x_{(i,k')}$  para  $k \neq k'$  y  $f(x_{(i,k)}) =$

$y_i$ . Como  $S$  compacto cada una de esas sucesiones tiene una subsucesión convergente, podemos suponer que  $x_{(i,k)} \rightarrow x_k$ . Los  $x_k$  no tienen por qué ser distintos.

Llamemos  $x_m$  a los distintos puntos límite. Para cada  $x_m$  existen abiertos  $U_m, V_m$  tal que  $\forall z \in V_m \setminus \{y\}$  se tiene que  $\#f^{-1}(z) \cap U_m = t_m$  donde  $t_m = \text{ind}_f(x_m)$ . Podemos considerar  $V_m = V_{m'}$  y  $U_m \cap U_{m'} = \emptyset$  si  $m \neq m'$ . Como  $x_{(i,k)} \rightarrow x_k \exists i_0$  tal que  $x_{(i,k)} \in U_k$  para  $i > i_0$ , es decir que  $\#\{f^{-1}(y_i)\} \cap (\bigcup_m U_m) \geq n$  por lo tanto  $\sum t_i \geq n$  es decir  $E_f(y) \geq n$ . Concluimos así que  $T_n$  es cerrado.  $\square$

**Corolario 2.1.4** *Todo morfismo no constante entre dos superficies de Riemann compactas es sobreyectivo.*

**Definición 2.1.5** (Grado): Sea  $f : S \rightarrow T$  un morfismo no constante. El grado de  $f$  es la cantidad de preimágenes de un punto, es decir  $E_f(q)$  con  $q \in T$ .

Por 2.1.3 está bien definido ya que no depende de punto.

Notación:  $\text{deg}(f)$ .

**Lema 2.1.6** Dados  $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow Z$  morfismos y  $x \in S$ . Entonces  $\text{ind}_{g \circ f}(x) = \text{ind}_g(f(x)) \text{ind}_f(x)$ .

Demostración: Por definición de índice existen abiertos  $U \subset S, V_1 \subset T$  tal que  $x \in U, f(x) \in V_1$  y cartas  $\phi : U \rightarrow U', \psi_1 : V_1 \rightarrow V'_1$  donde  $\text{ind}_f(x) = \text{grado}_{\psi_1 \circ f \circ \phi^{-1}}(\phi(x))$ . Análogo para  $g$  con  $V_2 \subset T, W \subset Z$  abiertos y  $\psi_2 : V_2 \rightarrow V'_2, \varphi : W \rightarrow W'$  cartas para las cuales  $\text{ind}_g(f(x)) = \text{grado}_{\varphi \circ g \circ \psi_2^{-1}}(\psi_2(f(x)))$ . Podemos suponer que  $V_1 = V_2$  y  $\psi_1 = \psi_2$ . Tenemos así que

$$\begin{aligned} \text{ind}_{g \circ f} &= \text{grado}_{\varphi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}}(\phi(x)) = \text{grado}_{\varphi \circ g \circ \psi^{-1}}(\psi(f(x))) \text{grado}_{\psi \circ f \circ \phi^{-1}}(\phi(x)) \\ &= \text{ind}_g(f(x)) \text{ind}_f(x). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 2.1.7** Sean  $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow Z$  son morfismos tales que  $\text{deg}(f) = n$  y  $\text{deg}(g) = m$ . Entonces  $g \circ f : S \rightarrow Z$  es un morfismo y  $\text{deg}(g \circ f) = mn$ .

Demostración: Como  $g \circ f$  es un morfismo, alcanza con contar la cantidad de preimágenes de  $z \in Z$  donde  $z \notin \text{Sop}(\text{Disc}_{g \circ f})$ , ya que en ese caso  $E_{(g \circ f)}(z) = \#\{(g \circ f)^{-1}(z)\}$ . Por el lema 2.1.6, dado  $x \in S, x \notin \text{Ram}_{g \circ f}(S)$  si solo si  $x \notin \text{Ram}_f(S)$  y  $f(x) \notin \text{Ram}_g(T)$ . Como  $\text{Ram}_{f \circ g}(S)$  es un conjunto finito existe  $z \in Z$  tal que  $(g \circ f)^{-1}(z) \cap \text{Ram}_{f \circ g}(S) = \emptyset$ . Como  $z \notin \text{Sop}(\text{Disc}_g), \#g^{-1}(z) = m$  y a su vez para cada  $y_i \in g^{-1}(z)$  como  $y_i \notin \text{Sop}(\text{Disc}_f)$  se tiene  $\#f^{-1}(y_i) = n$ . Por último  $\#\{(g \circ f)^{-1}(z)\} = nm$  y  $z \notin \text{Sop}(\text{Disc}_{g \circ f})$  entonces  $E_{(g \circ f)}(y) = nm$  y  $\text{deg}(g \circ f) = nm$ .  $\square$

Veremos ahora como se refleja un atributo de las superficies (género) en términos de la ramificación de sus morfismos.

**Definición 2.1.8** *Triangulación:*

Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta. Una triangulación de  $S$  es una terna  $C = (V, E, F)$  tal que:

- El conjunto  $V$  es finito,  $V \subset S$  y  $V \neq \emptyset$ . Llamamos vértices a los elementos de  $V$ .
- El conjunto  $E$  es finito,  $E \neq \emptyset$  y si  $e \in E$ , entonces  $e : [0, 1] \rightarrow S$  es una función continua. Llamamos aristas a los elementos de  $E$ .
- El conjunto  $F$  es finito,  $F \neq \emptyset$  y si  $f \in F$ , entonces  $f : \Delta \rightarrow S$  es una función continua. Donde  $\Delta$  es el triángulo del plano delimitado por las ecuaciones  $1 - x \geq y, y \geq 0, x \geq 0$ . Llamamos caras a los elementos de  $E$ .

Además  $C$  satisface las siguientes propiedades.



- (i) El conjunto de vértices es  $V = \{e(0), e \in E\} \cup \{e(1), e \in E\}$  (es decir los puntos extremos de las aristas).
- (ii) Si  $e \in E$ , entonces  $e|_{(0,1)}: (0,1) \rightarrow e(0,1)$  es un homeomorfismo y  $\text{Im}(e|_{(0,1)}) \cap V = \emptyset$ .
- (iii) Si  $f \in F$  entonces  $f_{\Delta}$  es un homeomorfismo a una componente conexa  $K_f$  de  $S \setminus A$  donde  $A = \bigcup_{e \in E} e([0,1])$ , la unión de las imágenes de las aristas. Además para  $r: [0,1] \rightarrow [0,1]$  y  $\sigma_i: [0,1] \rightarrow A$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  definidos por:

$$r(t) = 1 - t, \sigma_1(t) = (t, 0), \sigma_2(t) = (1 - t, t), \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

Entonces o bien  $f \circ \sigma_i$  o bien  $f \circ \sigma_i \circ r$  es una arista para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

- (iv) El mapa  $f \rightarrow K_f$  definido de  $F$  a las componentes conexas de  $S \setminus A$  es una biyección.
- (v) Para todo  $e \in E$  existe exactamente una cara  $f_e^+$  tal que  $e = f_e^+ \circ \sigma_{i_+}$  y existe exactamente una cara  $f_e^-$  tal que  $e = f_e^- \circ \sigma_{i_-} \circ r$

Más allá de la definición formal, una triangulación es una forma cubrir la superficie con triángulos, de forma que se peguen “bien”.

La condición (iii) determina que la superficie está cubierta por triángulos abiertos y sus clausuras, que son aristas. A su vez por la condición (ii) y (i) el interior de cada arista es homeomorfo a  $(0,1)$ , y su clausura son los vértices. Recordar que además tanto aristas como caras se extienden continuamente. Por último la condición (v) nos dice que cada arista es compartida por exactamente 2 caras, y es recorrida una vez en cada sentido.

**Corolario 2.1.9** Sean  $i: S \rightarrow T$  un isomorfismo y  $C = (V, E, F)$  una triangulación de  $T$ . Existe una triangulación  $C' = (V', E', F')$  en  $S$ , definida por  $V' = \{i^{-1}(v), v \in V\}$ ,  $E' = \{i^{-1} \circ e, e \in E\}$ ,  $F' = \{i^{-1} \circ f, f \in F\}$ .

**Ejemplo 2.1.10** Existe una triangulación para  $\mathbb{P}^1$ .

Demostración: La esfera puede ser cubierta con 8 triángulos, obtenidos por la división de cortar por tres líneas de ecuador (dos pasando por dos puntos opuestos y la tercera perpendicular a las dos primeras. Luego como la esfera es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  podemos trasladar la triangulación.

Sea  $D$  el disco unitario y  $A_i$  los 4 cuadrantes del plano, llamemos  $D_i = D \cap A_i$ . Sea  $f_1: \Delta \rightarrow D_1$  definido por  $f_1(x, y) = \begin{cases} \left(x, \frac{y(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (1, 0) & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$

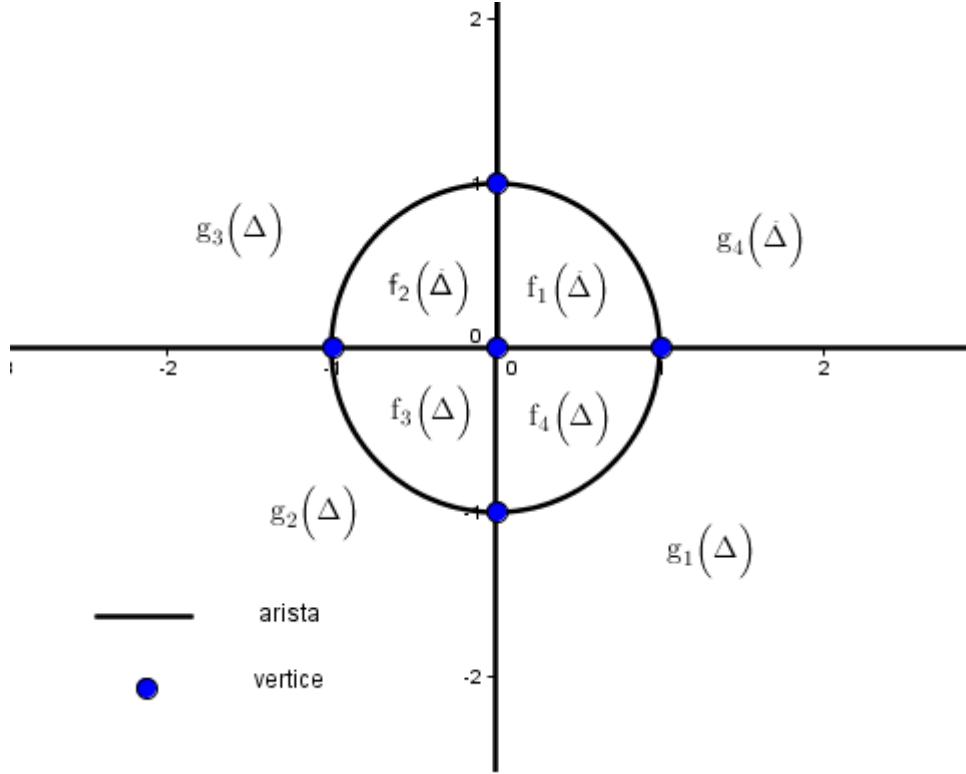
Afirmación:  $f_1$  es un homeomorfismo. Por definición  $f_1$  es continua salvo en a lo sumo  $(1, 0)$ . Como  $f_1$  fija la primer coordenada,  $f_1(x, 0) = (x, 0)$  y  $f_1(x, 1-x) = \left(x, (1-x) \left(\frac{(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}\right)\right) = (x, (1-x^2)^{1/2})$ . Para el segmento de recta  $I = [(x, 0), (x, 1-x)]$  se tiene que  $f_1(I) = [(x, 0), (x, (1-x^2)^{1/2})]$  es continua, además  $f_1$  restringida a  $I$  es lineal, por lo tanto es biyectiva. Como  $\Delta$  y  $D_1$  son compactos Hausdorff, entonces  $f_1$  es un homeomorfismo.

Definimos  $f_k(z) = f_1(z)i^{k-1}$  para  $k \in \{1, \dots, 4\}$ , es decir una rotación. Se tiene entonces que  $f_k$  es un homeomorfismo en su imagen, que es  $D_k$ . Luego definimos  $g_k(z) = 1/f_k(z)$ , tenemos así que  $\bigcup_k (f_k(\Delta) \cup g_k(\Delta)) = \bar{C}$ . Definimos así  $C = (V, E, F)$  como  $F = \{f_k, g_k\}$ ,  $E = \{f_k \circ \sigma_j, g_k \circ \sigma_j$  donde  $\sigma_j$  como en la definición de triangulación} y  $V = \{0, 1, -1, i, -i, \infty\}$ .

Veamos que hemos obtenido una triangulación.

Las propiedades (i) y (ii) son inmediatas por la definición de  $C$ . Para (iii) y (iv), las caras son homeomorfismos de  $\Delta$  en su imagen. La unión de las imágenes de las aristas es  $A = \bigcup_{e \in E} e([0,1]) = \{z, \text{Re}(z) = 0\} \cup \{z, \text{Im}(z) = 0\} \cup \{z, |z| = 1\} \cup \{\infty\}$ , así que las componentes de  $C \setminus A$  son  $\overset{\circ}{D}_i$  y  $1/\overset{\circ}{D}_i$ . Por lo tanto las caras son homeomorfas a las componentes conexas de  $C \setminus A$ , y por como definimos las aristas estas son  $f \circ \sigma$ , para alguna cara  $f$ .

(v) La arista  $e_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $e_0(t) = t$ ,  $\text{Im}(e_0) \subset D_1$ ,  $\text{Im}(e_0) \subset D_4$  por lo que  $f_1 \circ \sigma_1 = e_0 = f_4 \circ \sigma_3 \circ r$ . Para la arista con  $\text{Im}(e) \not\subset \{z, |z| = 1\}$  o bien  $e(t) = i^k e_0(t)$  o bien  $e(t) = \frac{1}{i^k e_0(t)}$ , por tanto cumple (v). Para  $e_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $e_1(t) = \cos(t\pi/2) + i \sin(t\pi/2)$ , entonces  $\text{Im}(e_1) \subset D_1$ ,  $\text{Im}(e_1) \subset 1/D_1$ , tenemos así que  $f_1 \circ \sigma_2 = e_1 = g_1 \circ \sigma_2 \circ r$ , por lo que  $e_1$  cumple (v). Análogo el resto de las aristas que cumplen que  $\text{Im}(e) \subset \{z \text{ tal que } |z| = 1\}$ , ya que son rotaciones de  $e_1$ . Concluimos así que  $C$  es una triangulación para  $\mathbb{C}$ . Luego existe una triangulación para  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$



Proyección de la triangulación de 2.1.10 sobre  $\mathbb{C}$

Esto no es una particularidad de  $\mathbb{P}^1$ , ya que es sabido que toda superficie de Riemann admite una triangulación.

**Proposición 2.1.11** Sean  $S$  una superficie de Riemann,  $C = (V, E, F)$  una triangulación de  $S$  y  $z \in S$ . Existe una triangulación  $C' = (V', E', F')$  de  $S$  tal que  $V' = V \cup \{z\}$ .

Demostración: Sea  $C$  una triangulación con caras  $E$  aristas  $F$  y vértices  $V$ , si  $z \in V$  es inmediato. Si  $z$  está en el interior de una cara, es decir existe  $f_0 \in F$  tal que  $z \in f_0(\Delta)$ , tomamos los segmentos de recta que unen los vértices de  $\Delta$  con  $(x_0, y_0) = f_0^{-1}(z)$ . Esto genera 3 triángulos  $\Delta_i$   $i=1,2,3$ .  $\Delta_1$  delimitado por las ecuaciones  $y \geq 0$ ,  $y \geq \left(\frac{y_0}{x_0}\right)x$ ,  $1 + \left(\frac{y_0-1}{x_0}\right)x \geq y$ ,  $\Delta_2$  delimitado por  $x \geq 0$ ,  $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)x \geq y$ ,  $\frac{y_0(1-x)}{x_0-1} \geq y$  y  $\Delta_3$  delimitado por  $x-1 \geq y$ ,  $y \geq 1 + \left(\frac{y_0-1}{x_0}\right)x$ ,  $y \geq \frac{y_0(1-x)}{x_0-1}$  que están bien definidos por ser  $(x_0, y_0)$  interior. Sea  $g_1: \Delta \rightarrow \Delta_1$  el homeomorfismo lineal  $g_1(x, y) = x(x_0, y_0) + y(0, 1)$  además  $g_1$  fija la arista común. De manera análoga tenemos  $g_i: \Delta \rightarrow \Delta_i$  con  $i=2,3$ .

Definimos así  $f_i = f_0 \circ g_i$  y  $e_i = f_0 \circ g_i \circ \sigma_i$ . Sea  $C' = (V', E', F')$  dado por  $F' = (F \setminus \{f_0\}) \cup \{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $E' = E \cup \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $V' = V \cup \{z\}$ . Veamos que  $C'$  es una triangulación.

Las propiedades (a), (b) y (c) son inmediatas.

Los extremos de las aristas que se agregaron están en  $V'$ , y a su vez  $z$  es extremo de  $f_1$ , por lo tanto se tiene (i).

Para (ii) alcanza con notar que  $\text{Im}(e_i) \subset f_0(\Delta)$ .

Dada  $f \in F \setminus \{f_0\}$  una cara,  $f|_{\Delta} : \overset{\circ}{\Delta} \rightarrow f(\overset{\circ}{\Delta})$  es un homeomorfismo donde  $f(\overset{\circ}{\Delta})$  es una componente de  $S \setminus A = \left( \bigcup_{e \in E'} e[0, 1] \right)^c$  ya que  $e_i([0, 1]) \cap f(\overset{\circ}{\Delta}) = \emptyset$ . Dado  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $f_i|_{\Delta} : \overset{\circ}{\Delta} \rightarrow f_i(\overset{\circ}{\Delta})$  es un homeomorfismo, a su vez  $f_i(\overset{\circ}{\Delta})$  esta delimitados por las aristas de  $f_0$  y los  $e_i$ , tenemos entonces (iii). De lo anterior se deduce también (iv).

Verifiquemos ahora (v). Dada una arista  $e \in E$  tal que  $\text{Im}(e) \cap \text{Im}(f_0) = \emptyset$  entonces existen exactamente dos caras  $f, \hat{f} \in F \setminus \{f_0\}$  tales que  $e = f \circ \sigma_i = \hat{f} \circ \sigma_j \circ r$ . Si  $e \in E$ ,  $\text{Im}(e) \cap \text{Im}(f_0) \neq \emptyset$  y  $e \neq e_i$  entonces  $e = f_0 \circ \sigma_i$  o bien  $e = f_0 \circ \sigma_i \circ r$  y existe  $\hat{f} \in F \setminus \{f_0\}$  tal que  $f_0 \circ \sigma_i = \hat{f} \circ \sigma_j \circ r$ . Además si  $f \in F \setminus \{f_0\}$  es tal que  $\text{Im}(f) \cap e \neq \emptyset$  entonces  $f \in \{\hat{f}, f_0\}$ .

Para  $e_i$  alcanza con notar que 2 de los  $f_i$  lo recorren uno en cada sentido.

Por último si  $\exists e \in E$  tal que  $z \in e(0, 1)$ , entonces existen  $f_1, f_2 \in F$  tales que  $z \in \text{Im}(f_1) \cap \text{Im}(f_2)$ ,  $f_1 \neq f_2$ . Tomamos  $\phi : U \rightarrow V$  una carta tal que  $z \in U$ ,  $U \cap \text{Im}(e') = \emptyset$ ,  $\forall e' \in E \setminus \{e\}$  y  $\text{Im}(f') \cap U = \emptyset$ ,  $\forall f' \in F \setminus \{f_1, f_2\}$ . Luego existe un homeomorfismo  $h$  de  $V$  que se puede extender al borde como la identidad tal que  $\phi(z) \notin h(\phi(\text{Im}(f_1) \cap U))$ . Cambiando luego  $f_i$  por  $\hat{f}_i$  donde  $\hat{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } f_i(x) \notin U \\ \phi^{-1} \circ h \circ \phi \circ f_i(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$ .

De esta forma tenemos una triangulación que no cambio los vértices y que esta en las hipótesis del caso anterior.  $\square$

**Definición 2.1.12** Sean  $S$  una superficie de Riemann y  $C$  una triangulación de  $S$ . La característica de Euler, que notaremos  $\chi_{(S,C)}$ , es igual a  $\chi_{(S,C)} = \#F - \#E + \#V$

**Teorema 2.1.13** La característica de Euler no depende de la triangulación elegida.

Demostración: [K]

Como la característica de Euler no depende de la triangulación  $C$ , la notaremos  $\chi_S$ .

**Definición 2.1.14** El género de una superficie de Riemann triangulable  $S$ , es  $g = \frac{1}{2}(2 - \chi_S)$ .

**Ejemplo 2.1.15** El género de  $\mathbb{P}^1$  es 0.

Demostración: Basta con notar que en la triangulación de 2.1.10 tenemos 8 caras, cuyas imágenes son  $D_k$  y  $1/D_k$ , 6 vértices  $\{1, i, -1, -i, 0, \infty\}$  y 12 aristas.

El corolario 2.1.9 muestra cómo dada una triangulación de la superficie  $T$ , y un isomorfismo  $f : S \rightarrow T$ , podemos dar una triangulación de  $S$ . Veamos que esto se puede generalizar a un morfismo cualquiera.

**Lema 2.1.16** Sean  $S$  y  $T$  dos superficies de Riemann,  $\pi : S \rightarrow T$  un morfismo de grado  $n > 0$  y  $V \subset T$  un abierto homeomorfo a  $B(0, 1)$ , tal que  $V \cap \text{Sop}(\text{Disc}_\pi) = \emptyset$ . Entonces  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ , donde los abiertos  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  son disjuntos entre sí y  $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  es un homeomorfismo, para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Demostración: Sean  $U$  una componente conexa de  $\pi^{-1}(V)$ ,  $f : V \rightarrow B(0, 1)$  un homeomorfismo y  $x_0 \in U$  con  $\pi(x_0) = y_0$ . Como  $V$  es un abierto y  $\pi$  continua,  $U$  es un abierto.

Afirmación:  $\pi|_U : U \rightarrow V$  es sobreyectiva.

Dado  $y \in V$ , sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$  una curva donde  $\gamma(0) = y_0$  y  $\gamma(1) = y$ . Sea  $\epsilon = \sup\{t \text{ tal que } \pi^{-1}(s) \cap U \neq \emptyset, \forall s \in [0, t]\}$ , es decir hasta cuando hay una preimagen por  $\pi$  de  $\gamma$ . Como  $V$  abierto y  $\pi$  es localmente un isomorfismo en  $x_0$ ,  $\text{Sop}(\text{Disc}_f) \cap V = \emptyset$ . Luego  $\epsilon > 0$ .

Veamos que  $\epsilon$  es máximo. Sean  $t_n \rightarrow \epsilon$  y  $\pi(x_n) = \gamma(t_n)$ , como  $S$  compacto, podemos suponer que  $x_n \rightarrow x$ . Por lo tanto  $\pi(x) = \lim_n \pi(x_n) = \lim_n \gamma(t_n) = \gamma(\epsilon) \in V$ . Sea  $U'$  la componente conexa de  $\pi^{-1}(V)$  con  $x \in U'$ , como  $U'$  es abierto existe  $n_0$  tal que  $x_n \in U' \forall n > n_0$ , por tanto  $U = U'$  y  $\epsilon$  es máximo.

Luego el mismo argumento que muestra que  $\epsilon > 0$  concluye que  $\epsilon = 1$ . Por tanto  $\pi|_U$  es sobreyectiva.

Afirmación:  $\pi|_U : U \rightarrow V$  es inyectiva.

Sea  $m = \max\{\#\pi^{-1}(y) \cap U, \text{ con } y \in V\} \leq \text{grado}(\pi) < \infty$ . Si  $m = 1$  entonces  $\pi$  inyectiva. Supongamos que  $m > 1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $y_0$  realiza el máximo  $m$  y que  $f(y_0) = 0$ .

Como  $\pi$  es localmente isomorfismo en  $U$ , existe  $t > 0$  tal que  $(f \circ \pi)^{-1}(B(0, t))$  son  $m$  abiertos disjuntos, en particular restricto a cada abierto es un homeomorfismo. Definimos  $\epsilon = \sup\{t \text{ tal que } (f \circ \pi)^{-1}(B(0, s)) \text{ son } m \text{ abiertos disjuntos } \forall s \in (0, t)\}$ . Si  $\epsilon = 1$  entonces  $U$  no es conexo lo que es una contradicción. Claramente  $\epsilon$  es máximo. Llamemos  $U_i$  a cada una de las componentes de  $(f \circ \pi)^{-1}(B(0, \epsilon))$ . Si  $[\partial U_i \cap \partial U_j] \cap U = \emptyset, \forall i \neq j$  entonces existen  $U'_i \supseteq U_i$  abiertos para los cuales la  $f \circ \pi$  es un homeomorfismo, en particular  $\bigcap_{i=1}^m (f \circ \pi(U'_i)) \supseteq B(0, \epsilon)$ , por tanto  $\epsilon$  no es máximo lo que es una contradicción.

Podemos suponer  $x \in \partial U_1 \cap \partial U_2 \cap U$ , en particular  $f \circ \pi(x) = z \in \partial B(0, \epsilon)$ . Como  $f \circ \pi$  es localmente un homeomorfismo existe  $\delta$  para el cual  $(f \circ \pi)^{-1}(B(z, \delta))$  son  $k$  abiertos disjuntos y restricto a cada uno de ellos  $f \circ \pi$  es un homeomorfismo. Sea  $W$  la componente que contiene a  $x$ , en particular  $W \cap U_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2$ . Tenemos que  $(f \circ \pi)^{-1}(B(z, \delta) \cap B(0, \epsilon))$  son  $m$  abiertos conexos no vacíos, notemos  $W_i$  y  $W_i \subset U_i$ . Luego  $W \cap U_1 \subset W_1$  y como  $W \cap U_2 \neq \emptyset$  se tiene que  $W \cap U_1 \subsetneq W_1$ , lo que es una contradicción ya que  $x \in W \cap \bar{W}_1$  por tanto  $W \cup W_1$  es conexo. Concluimos así que  $m = 1$  y  $\pi|_U$  es inyectiva.

Por último  $\pi|_U$  es localmente un homeomorfismo, por lo tanto es un homeomorfismo.  $\square$

**Proposición 2.1.17** Sean  $S, T$  Superficies de Riemann y  $\pi : S \rightarrow T$  un morfismo de grado  $n$ . Si  $T$  admite una triangulación entonces  $S$  admite una triangulación.

Demostración: Dada una triangulación de  $T$ , podemos construir otra  $C = (V, E, F)$  tal que  $V \subset \text{Sop}(\text{Disc}_f)$ , por 2.1.11 se puede afinar una triangulación hasta conseguir esa propiedad.

Sea  $e \in E$ , notemos  $\gamma = \text{Im}(e(0, 1))$ . Como  $\text{Sop}(\text{Disc}_\pi)$  es finito, existe un abierto  $V \subset T$  tal que  $\gamma \subset V$ ,  $V$  homeomorfo a  $B(0, 1)$  y  $V \cap \text{Sop}(\text{Disc}_\pi) = \emptyset$ . Por tanto,  $\pi^{-1}(\gamma)$  son  $n$  componentes conexas y para  $\gamma'$  una componente tenemos que  $\pi|_{\gamma'} : \gamma' \rightarrow \gamma$  es un homeomorfismo. Podemos definir así  $e_{\gamma'} : (0, 1) \rightarrow S$  como  $e_{\gamma'}(t) = \gamma' \cap \pi^{-1}(e(t))$ , veamos ahora que se puede extender a  $[0, 1]$ .

Como  $S$  compacto sabemos que  $\{e_{\gamma'}(1/m), m \in \mathbb{N}\}$  tiene algún punto límite. Supongamos que tiene más de 1, sean  $x, y$  a 2 puntos límite y  $\delta_1, \dots, \delta_n$  curvas simples disjuntas que separan  $x$  e  $y$ . Como  $x, y$  son puntos límite tenemos que existen sucesiones  $t_{(m,k)} \rightarrow 0$  tal que  $e_{\gamma'}(t_{(m,k)}) \in \delta_k$  por lo tanto tenemos  $n + 2$  puntos límite distintos. Pero  $\pi(e_{\gamma'}(t_{(m,k)})) = \pi(e(t_{(m,k)})) \rightarrow \pi(e(0))$ , lo cual es absurdo ya que  $\text{grado}(\pi) = n$  pero  $e(0)$  tendría al menos  $n + 2$  preimágenes.

Construimos así, para cada arista  $e \in E$ , las aristas  $e_{\gamma'} \in E'$  definida como  $e_{\gamma'} : [0, 1] \rightarrow \bar{\gamma}'$  donde  $\gamma'$  es una componente conexa de  $\pi^{-1}(\gamma)$  y  $e_{\gamma'}(t) = \pi^{-1}e(t) \cap \gamma'$ . Luego  $e_{\gamma'}$  es continua y  $e_{\gamma'}|_{(0,1)}$  es un homeomorfismo sobre su imagen.

Para las caras podemos hacer un razonamiento análogo. Sea  $f \in F$ ,  $V = f(\overset{\circ}{\Delta})$  por el lema anterior tenemos que  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$  donde  $U_i$  son abiertos disjuntos y  $\pi|_{U_i}$  es un homeomorfismo sobre

su imagen. Podemos definir así  $f_i : \overset{\circ}{\Delta} \rightarrow U_i$  como  $f_i(z) = \{\pi^{-1}(f(z))\} \cap U_i$ ,  $f_i$  es un homeomorfismo que además, al igual que en las aristas, se puede extender continuamente al borde. Definimos así  $F' = \{f_i\}$

Por último el conjunto de vértices será  $V' = \{\pi^{-1}(V)\}$ .

Veamos ahora que  $C' = (V', E', F')$  es una triangulación en  $S$ .

- (i) Si  $e_i \in E$  asociada a  $e \in E$ , entonces  $\pi(e_i(0)) = \lim \phi(e_i(t)) = \lim(e(t)) = e(0) \in V$ , por lo tanto  $e_i(0) \in V'$ . Análogo para  $e_i(1)$ .

- (ii) Ya está probado.
- (iii) Para probar que  $f_i \in F'$  restricta a  $\overset{\circ}{\Delta}$  es un homeomorfismo a una componente de  $C' - \bigcup_{e' \in E} e'([0, 1])$ , basta con notar que  $\pi(\bigcup_{e' \in E'} e') = (\bigcup_{e \in E} e)$ . Luego las componentes de la preimagen son por definición  $e'(\overset{\circ}{\Delta})$ .
- (iv) está probado.
- (v) Se deduce del hecho de que ocurre en C.

**Teorema 2.1.18** (Fórmula de Riemann-Hurwitz): Si  $S, T$  superficies de Riemann,  $\pi: S \rightarrow T$  un morfismo de grado  $n$  y  $T$  triangulable de género  $g_2$ . Entonces  $S$  triangulable, con género  $g_1$  y se tiene la siguiente fórmula

$$g_1 = n(g_2 - 1) + 1 + \sum_{x \in \text{Ram}_f(S)} \frac{\text{Ram}(x)}{2}$$

Demostración: Por 2.1.17 tenemos que dada una triangulación  $C = (V, E, F)$  en  $T$ ,  $\pi$  nos permite construir una triangulación en  $S$ ,  $C' = (V', E', F')$ . Por cada cara en  $F$  obtenemos  $n$  caras en  $F'$ , es decir  $n\#F = \#F'$ . Igual para las aristas  $n\#E = \#E'$ . Para  $v \in V$  se tiene que  $E_\pi(v) = n = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ind}_f(x)$ , por tanto la cantidad de vértices en  $V'$  es  $n\#V - \sum_{x \in \text{Ram}} (\text{Ram}(x)) = \#V'$ . Concluyendo así la fórmula.

**Corolario 2.1.19**

- Si  $f: S \rightarrow T$  morfismo de grado 1, por tanto isomorfismo. Entonces, como no hay puntos de ramificación, se tiene que  $g_1 = g_2$ .
- Si  $f: X_\lambda \rightarrow X_\mu$  morfismo con  $X_\lambda$  y  $X_\mu$  curvas elípticas, en particular  $g_1 = g_2 = 1$ . Entonces  $f$  no tiene puntos de ramificación.
- Si  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow T$  morfismo de grado  $n$ . Como  $g_1 = 0$  entonces  $g_2 = 0$  y la ramificación es  $2n - 2$ .
- Si  $f: S \rightarrow T$  morfismo con  $g_2 > 0$ . Entonces  $g_1 \geq g_2$ , más aun, si  $\text{deg}(f) > 1$  y  $g_2 > 1$  entonces  $g_1 > g_2$ .

**Teorema 2.1.20** Toda superficie de Riemann admite una triangulación.

Basta notar que toda superficie de Riemann admite un morfismo no constante sobre  $\mathbb{P}^1$  que es triangulable, de nuevo por el teorema Riemann-Roch [F-K] .

Ahora mostraremos ciertos morfismos particulares que nos ayudaran a la resolución de del problema principal.

## 2.2. Morfismos auxiliares

**Definición 2.2.1** (proyección canónica): Sea  $\Gamma$  la curva hiperelíptica dada por la ecuación afín  $y^2 = \prod(t - a_i)$ . La función  $\varphi_\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida por  $\varphi_\Gamma((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = (x_0 : x_1)$  es un morfismo.

Demostración: Recordemos que para los puntos  $(x_0 : x_1), (y_0 : y_1)$  con  $y_0 \neq 0$ , tenemos una carta proveniente del teorema de función inversa donde  $\phi^{-1}(x) = (x : 1), (f(x) : 1)$ , con  $f$  es holomorfa. Por lo tanto  $\phi_0 \circ \varphi_\Gamma \circ \phi^{-1}(x) = x$ . Faltan solamente los puntos de Weierstrass, que son una cantidad finita. Como además  $\varphi_\Gamma$  continua, se deduce que  $\varphi_\Gamma$  es morfismo.

**Corolario 2.2.2**  $\deg(\varphi_\Gamma) = 2$ .

**Corolario 2.2.3** Sea  $\Gamma$  la curva hiperelíptica dada por la ecuación afín  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (t - a_i)$  entonces el género de  $\Gamma$  es  $g$ .

Demostración: Para cada  $(x_0 : x_1) \notin \Omega_\Gamma$ , de la ecuación afín se deduce que  $\#\tau_\Gamma^{-1}(x_0 : x_1) = 2$ . Luego por tanto  $\Omega_\Gamma = \text{Ram}_{\varphi_\Gamma}(\Gamma)$ , concluyendo así, por la formula de Riemann-Hurwitz, que  $\Gamma$  tiene grado  $g$ .

**Proposición 2.2.4** (Función norma): Dados  $f : T \rightarrow \mathbb{P}^1$  y  $\psi : T \rightarrow S$  morfismos de superficies de Riemann. Se puede construir una morfismo  $N_\psi(f) : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  (llamada función norma de  $f$  asociada a  $\psi$ ) tal que

$$(N_\psi(f)) = \sum_i a_i \psi(p_i) \text{ donde } \sum_i a_i p_i = (f)$$

Demostración: Para simplificar la notación diremos  $N$  en vez de  $N_\psi(f)$ . La función que construiremos será, para  $y \in S$ , tal que  $f(p_i) \neq (1 : 0) \forall p_i \in \psi^{-1}(y)$ , dada por la ecuación  $\phi_0(N(y)) = \prod_i \phi_0(f(p_i))^{\text{ind}_\psi(p_i)}$  donde  $\{p_i, i = 1, \dots, k\} = \psi^{-1}(y)$ . Veremos luego que se puede extender a todo  $S$  de forma que sea morfismo y que cumple la relación entre los divisores.

$$\text{Notemos } (f) = \sum_i a_i x_i \text{ y } \text{Disc}(\psi) = \sum_j b_j y_j.$$

Sea  $q \notin \text{Sop}(\text{Disc}_\psi)$  y  $\psi^{-1}(q) \cap \{x_i, i = 1, \dots, k\} = \emptyset$ , es decir que las preimágenes de  $q$  por  $\psi$  no son de ramificación para  $\psi$  ni ceros ni polos para  $f$ . Solo una cantidad finita de puntos de  $S$  no cumplen esta condición. Sea  $p_i \in \psi^{-1}(q)$ , como  $\psi$  morfismo, existen cartas  $\phi_\alpha, \phi_\beta$  y abiertos  $U_{(q,i)} \subset T$  disjuntos y  $V_{(q)} \subset S$ , tal que  $g_{(q,i)} = \phi_\beta \circ \psi \circ \phi_\alpha^{-1} : U_{(q,i)} \rightarrow V_{(q)}$  es holomorfa con  $g_{(q,i)}(\phi(p_i)) = \phi_\beta^{-1}(q)$ . Además como  $q \notin \text{Sop}(\text{Disc}_\psi)$  tenemos que  $g'_{(q,i)}(\phi(p_i)) \neq 0$ , por lo cual podemos elegir los abiertos para que  $g|_{U_{(q,i)}} : U_{(q,i)} \rightarrow V_{(q)}$  es biholomorfa. Podemos suponer que  $f(U_{(q,i)}) \cap \{(1 : 0)\} = \emptyset$  ya que  $\psi(q) \neq (1 : 0)$ .

Definimos  $n_{(q,i)} = \phi_0 \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ g^{-1} \circ \phi_\beta : V_{(q)} \rightarrow \mathbb{P}^1$ , como  $(1 : 0) \notin \text{Im}(n_{(q,i)})$  tenemos que  $n_{(q,i)}$  es holomorfa, por ser composición de funciones holomorfas. Luego el producto  $\prod_i \phi_0(n_{(q,i)})$ , definido en  $V_{(q)}$  también es holomorfo, por ser una cantidad finita de  $i$ . Definimos así  $n_q : \prod_i \phi_0(n_{(q,i)})$ .

Afirmación:  $n_q = n_{q'}$  en la intersección de sus dominios. Alcanza con notar que  $n_q(u)$  solo depende de las preimágenes de  $\psi^{-1}(u)$ .

Definimos así  $N(q) = \phi_0^{-1} \circ n_q(q)$ ,  $N : S \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $A$  son una cantidad finita de puntos, veamos ahora que se puede extender continuamente al resto de los puntos.

En los puntos  $q$  tal que  $q \notin \text{Sop}(\text{Disc}_\psi)$ , el argumento anterior se puede repetir para definir  $n_{(q,i)}$ . Si bien  $n_q$  no tiene por qué ser holomorfa, va a ser meromorfa y como producto de funciones meromorfas es meromorfa se obtiene que  $N$  es continua en  $q$ .

Si  $q \in \text{Sop}(\text{Disc}_\psi)$ , quiere decir que para en alguna de las preimágenes, digamos  $p_i$  existen cartas  $\phi_\beta, \phi_\alpha$  tal que  $g = \phi_\beta \circ \psi \circ \phi_\alpha^{-1} : U_{(q,i)} \rightarrow V_{(q,i)}$  es  $g(z) = z^k$  donde  $k > 1$ .

Para probar la continuidad realizaremos una prueba similar a 2.1.3. Dada  $y_k$  sucesión,  $y_k \rightarrow q$ , podemos tomar  $y_k \notin \text{Sop}(\text{Disc}_\psi)$  y  $f(y_k) \neq (1 : 0)$ . Notemos  $\{x_j, j=1, \dots, m\} = \psi^{-1}(q)$  y  $\{x_{(k,i)}\}_{i=1, \dots, n} = \psi^{-1}(y_k)$ . Existen abiertos  $U_j \subset T$  tal que  $x_j \in U_j, U_j \cap U_{j'} = \emptyset$  si  $j \neq j'$  y  $\psi|_{U_j} : U_j \rightarrow V$  cumple que  $\#\psi^{-1}(y) \cap U_j = d_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

Ordenamos las preimágenes de  $y_k$  de forma que  $x_{(k,i)} \in U_j$  si  $\sum_{h=1}^{j-1} d_h < i \leq \sum_{h=1}^j d_h$  (notemos  $e_i = \sum_{h=1}^i d_h$ ). Por lo tanto  $\prod_{j=1}^{d_1} \phi_0(f(x_{(k,i)})) \rightarrow (\phi_0(f(x_1)))^{\text{ind}_\psi(x_1)}$ , por ser  $f$  continua. Definimos  $f_1$  como  $\phi_0^{-1} \left( \prod_{i=1}^{d_1} \phi_0(f(x_{(k,i)})) \right)$ , luego  $\phi_0 \circ f_1 : V \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa. De forma análoga  $f_j$  dada

por  $\phi_0^{-1} \left( \prod_{i=d_{j-1}+1}^{d_j} \phi_0(f(x_{(k,i)})) \right)$ . Por último tenemos que  $\phi_0 \circ N = \prod_{i=1}^m \phi_0 \circ f_i$  es meromorfa en  $q$ , concluyendo así que  $N$  es morfismo.

Veamos ahora el divisor de  $N$ . Recordemos que si  $g : A \rightarrow B$  holomorfa  $g(x) = 0$ , entonces  $\text{grado}_g(x) = t$  donde  $t$  es el único natural que cumple que  $\lim_{z \rightarrow x} \frac{g(z)}{(z-x)^t} = L \notin \{0, \infty\}$ . Ahora llevaremos a las preimágenes de  $(0 : 1)$  a estas situaciones.

Dado  $q \in S$  con  $N(q) = (0 : 1)$ , sea un abierto  $V_q \subset S$   $q \in V_q$  y  $U_i$  como antes. Tomemos ahora  $\phi_q : V_q \rightarrow B(0, 1)$  una carta, podemos además suponer que  $\phi_q(q) = 0$ . Para determinar  $\text{ind}_N(q)$  calculemos  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\phi_0 \circ N \circ \phi_q^{-1}(z)}{(z)^t}$  donde

$$\phi_0 \circ N \circ \phi_q^{-1}(z) = \prod \phi_0 \circ f(x_i) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=e_k}^{e_{k+1}} \phi_0(f(x_{(j)})) = \prod_h \phi_0(f_h(x_{(z,i)})).$$

Sea  $x \in \psi^{-1}(q) \cap U_1$  con  $\text{ind}_\psi(x) = d$ ,  $\text{ind}_f(x) = l$  y  $\phi_x : U_x \rightarrow B(0, 1)$  una carta con  $\phi_x(x) = 0$ . Como ya vimos  $f_1$  es un función meromorfa. Supongamos que  $f_1(x) = 0$ , sean  $x_{(z,i)}$  las preimágenes de  $z$  en  $U_x$ , es decir  $\phi_q \circ \psi(x_{(z,i)}) = z$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\prod_i \phi_0 \circ f_1(x_{(z,i)})}{(z)^t} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\prod_i (\phi_0 \circ f_1 \circ \phi_x^{-1})(\phi_x(x_{(z,i)})) (\phi_x(x_{(z,i)}))^k}{\phi_x(x_{(z,i)})^k (z)^t}$$

como  $\text{ind}_\psi(x) = d$  si tomamos  $k = dt$  tenemos que  $\exists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\phi_x(x_{(z,i)}))^k}{(z)^t} =$

$$\lim_{x_{z,i} \rightarrow 0} \frac{(\phi_x(x_{(z,i)}))^{dt}}{(\phi_q \circ \psi \circ \phi_x^{-1}(\phi_x(x_{(z,i)})))^t} \notin \{0, \infty\} \text{ por tanto}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\prod_i \phi_0 \circ f_1(x_{(z,i)})}{(z)^t} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\prod_i (\phi_0 \circ f_1 \circ \phi_x^{-1})(\phi_x(x_{(z,i)}))}{\phi_x(x_{(z,i)})^{dt}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\phi_x(x_{(z,i)}))^{dt}}{(z)^t}.$$

Concluimos así que el orden de 0 de  $f_1$  en  $x$  es  $l$ . La misma cuenta vale para  $\infty$  y el orden de polo, por tanto como  $\phi_0 \circ N(y) = \prod \phi_0 f_i(y)$  salvo en una cantidad finita de puntos, concluimos que  $(N) = \sum_i a_i \psi(p_i)$  donde  $\sum_i a_i p_i = (f)$ .  $\square$

**Proposición 2.2.5** Sea  $\Gamma$  la curva hiperelíptica de ecuación afín  $y^2 = x \prod_{i=1}^{2g} (x - a_i)$ . Existe una curva hiperelíptica  $\Gamma'$  y  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un isomorfismo tal que  $f((0 : 1), (0 : 1)) = \infty$ .

Definimos  $f((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = ((x_1 : x_0), (y_0 x_1^g : y_1 x_0^g)) = (u_0 : u_1)(v_0 : v_1)$ , salvo en  $\infty$  y  $((0 : 1), (0 : 1))$ . Para chequear que  $f$  está bien definida basta con notar que  $(y_0 x_1^g : y_1 x_0^g)$  no depende de la elección de los representantes, además los únicos puntos en  $\Gamma$  donde  $y_0 x_1 = 0 = y_1 x_0$  son  $\infty$  y  $((0 : 1)(0 : 1))$ , en los cuales  $f$  se extiende continuamente.

Veamos que la imagen es una curva hiperelíptica. En ecuaciones afines tenemos que  $(u, v) = (1/x, y/x^g) = f(x, y)$  fuera de  $(0, 0)$

$$y^2 = x \prod_{i=1}^{2g} (x - a_i)$$

sustituyendo por  $v$

$$v^2 x^{2g} = x \prod_{i=1}^{2g} (x - a_i)$$

luego sustituyendo por  $u$  y recordando que  $x \neq 0$

$$v^2 = u \prod_{i=1}^{2g} (1 - a_i u)$$

por último

$$v^2 = u \prod_{i=1}^{2g} (u - 1/a_i)$$

Sea entonces  $\Gamma'$  la curva hiperelíptica definida por la ecuación afín  $v^2 = u \prod^{2g} (u - 1/a_i)$ . Para  $z \notin \{\infty, ((0 : 1)(0 : 1))\}$  se cumple que  $f(z) \in \Gamma'$ , luego existen cartas  $\phi, \psi$  como en 1.1.18 donde  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$  es holomorfa. Falta verificar que se puede extender continuamente a  $\infty$  y  $((0 : 1), (0 : 1))$ .

Veamos que existe  $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \Gamma} f(z)$ . Para  $z \in \Gamma$  con  $z \rightarrow \infty$ , notemos  $z = ((1 : t)(1 : s))$ , se tiene que  $t \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow 0$ . Estudiemos el límite en las ecuaciones afines y notemos  $z = (1/t, 1/s)$

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \Gamma} f(z) = \lim_{(t,s) \rightarrow (0,0), (1:t)(1:s) \in \Gamma} ((t : 1), (t^g : s)),$$

como  $(1/t, 1/s)$  verifican la ecuación afín de  $\Gamma$  y elevando al cuadrado tenemos que

$$(t^g/s)^2 = \frac{t^{2g}}{t \prod (t - a_i)} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto definiendo  $f(\infty) = (0 : 1)(0 : 1) \in \Gamma'$ ,  $f$  es continua en  $\infty$ . El mismo procedimiento para  $((0 : 1), (0 : 1))$  determina que

$$\begin{aligned} \lim_{(t,s) \rightarrow (0,0), ((t:1)(s:1)) \in \Gamma} ((t : 1), (s : t^g)), \\ \text{y } (t^g/s)^2 = \frac{t^{2g}}{t \prod (t - a_i)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

definiendo  $f((0 : 1), (0 : 1)) = \infty \in \Gamma'$ ,  $f$  es continua, por tanto morfismo.  $\square$

**Corolario 2.2.6** Dada  $\Gamma$  curva hiperelíptica con forma canónica y  $\omega \in \Omega_\Gamma$ . Existe  $i : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  isomorfismo tal que  $\Gamma'$  curva hiperelíptica con forma canónica y  $i(\omega) = \infty$

**Proposición 2.2.7** Dada una curva elíptica  $X_\lambda$  y un punto  $q \in X_\lambda$ . Existe un isomorfismo  $f : X_\lambda \rightarrow X_{\lambda'}$  tal que  $f(q) = (\infty, \infty)$ .

Demostración: Si  $q = \infty$  basta tomar  $i = id$ . Si  $q = ((u_0, u_1), (0 : 1))$ , por 1.2.9.b y 2.2.5 podemos construir un isomorfismo tal que  $i(q) = \infty$ .

Sea  $q = ((a : 1), (-b : 1))$  con  $b \neq 0$ . Dado  $(x, y)$  en la curva afín tal que  $(x, y) \notin \{(a, -b), (a, b)\}$ . Notamos  $r_{(x,y)} = t(x - a, y - b) + (a, b)$  la recta que une  $(x, y)$  y  $(a, -b)$ . Como la curva afín es de grado 3 la recta  $r_{(x,y)}$  corta genéricamente en 3 puntos, uno además de  $(x, y)$ ,  $(a, -b)$ . Definimos así  $f(x, y)$  como el tercer punto de corte.

Sustituyendo  $r_{(x,y)}$  sustituyendo en la ecuación afín tenemos

$$(ty + (1 - t)b)^2 = (tx + (1 - t)a)(tx + (1 - t)a - 1)(tx + (1 - t)a - \lambda)$$

agrupando como polinomio en  $t$

$$(x - a)^3 t^3 - [(y - b)^2 + (x - a)^2(a + (a + 1) + (a + \lambda))]t^2$$

$$+ [-2(y - b)b + (x - a(a(a - 1) + (a - 1)(a - \lambda) + a(a - \lambda)))]t + (-b^2 + a(a - 1)(a - \lambda))$$

Pero sabemos que 0 y 1 son raíces por lo tanto, por relación entre coeficientes y raíces, la otra raíz es

$$t_0(x, y) = \frac{(y - b)^2}{(x - a)^3} + \frac{3a + (1 + \lambda)}{(x - a)} - 1$$

sustituyendo en la recta tenemos que el tercer punto de corte es  $(x_0, y_0)$  con

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(y - b)^2}{(x - a)^2} + 3a - (\lambda + 1) + (x - a) + a \\ y_0 &= \frac{(y - b)^3}{(x - a)^3} + \frac{(y - b)(3a + (1 + \lambda))}{(x - a)} + (y - b) + b \end{aligned}$$

Llamemos  $r(x, y)$  a ese punto, y definimos en coordenadas afines  $f(x, y) = r(x, y)$ , para los puntos con  $x \neq a$ . Para los puntos que no son de la forma  $(x, 0)$  y  $(a, \pm b)$ , que son una cantidad finita, se tiene que:



$$\begin{array}{ccccc}
x & \longrightarrow & (x, g(x)) & \longrightarrow & ((x : 1), (g(x) : 1)) \\
& & \downarrow r & & \downarrow f \\
\frac{(g(x) - b)^2}{(x - a)^2} + 4a - (\lambda + 1) & \longleftarrow & r(x, g(x)) & \longleftarrow & (x, g(x))
\end{array}$$

con  $g$  como en 1.1.18 proveniente del teorema de función implícita, por lo tanto holomorfa, tenemos así que  $\phi_{r(x,y)} \circ f \circ \phi_x^{-1}$  es holomorfa salvo para una cantidad finita de puntos. Veamos entonces que  $f$  es continua, concluyendo entonces que es un morfismo.

Para  $\infty$  veamos que pasa con  $t_0$  la tercera raíz del polinomio,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} t_0(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left( \frac{(y-b)^2}{(x-a)^3} + \frac{3a - (1-\lambda)}{(x-a)} - 1 \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{(y-b)^2}{(x-a)^3}$$

como  $(y-b)^2 \sim y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \sim (x-a)^3$  entonces  $t_0 \rightarrow 1$  por lo tanto definiendo  $f(\infty) = (a, -b)$ ,  $f$  es continua en  $\infty$ .

Para  $(a, -b)$  basta ver que para  $(x, y) \rightarrow (a, -b)$  tenemos que la primer coordenada de  $r(x, y)$  es

$$x_0 = \frac{(y-b)^2}{(x-a)^2} + 3a - (\lambda + 1) + (x-a) + a$$

como  $(y-b)^2 \sim y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \sim (x-a)^3$  tenemos  $x_0 \rightarrow a$ , luego  $y_0 = \frac{(y-b)^3}{(x-a)^3} + \frac{(y-b)(3a + (1+\lambda))}{(x-a)} + (y-b) + b \rightarrow \infty$ , tenemos así que definiendo  $f(a, b) = \infty$  es continua

Para  $(a, b)$  se tiene cuando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  la recta que pasa por  $(x, y)$  y  $(a, b)$  tiende a la recta tangente a la curva afín por  $(a, b)$ , que como  $b \neq 0$  tenemos que hay otro punto de intersección. Definiendo  $f(a, b)$  como ese punto, que a priori podría ser el mismo  $(a, b)$ , tenemos así que  $f$  es continua en  $(a, b)$ .

Para el resto de los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(\lambda, 0)$ ,  $r$  está bien definida y por tanto  $f$  es continua, tengo así que  $f$  es un morfismo.

Tenemos además que la única preimagen de  $\infty$  es  $(a, -b)$  y como por la formula de Riemann Hurwitz un morfismo entre superficies de género 1 no tiene ramificación es un isomorfismo.  $\square$

Hasta ahora los morfismos que hemos visto son:

- Una caracterización de todos los morfismos  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ .
- Para los toros 1.1.10.b.2 tenemos una familia de morfismos 1.2.5.d.1 y 1.2.5.d.2.
- Para curvas hiperelípticas tenemos los isomorfismos dados por la forma canónica 1.2.9.b y el isomorfismo dado en 2.2.5.
- Para un curva elíptica fija y dados 2 puntos  $p, q$  podemos construir  $f$  isomorfismo con  $f(p) = q$ . Se deduce de 2.2.7.

**Definición 2.2.8** *Un cubrimiento hiperelíptico es un morfismo  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  con  $\Gamma$  una curva hiperelíptica y  $X_\lambda$  una curva elíptica.*

Hasta ahora no sabemos que existan dichos morfismos.

## 2.3. Curvas Hiperelípticas

Veremos en esta sección algunas propiedades de las curvas hiperelípticas, así como una caracterización intrínseca.

Sea  $\Gamma$  la curva hiperelíptica definida por la ecuación afín  $y^2 = x(x-1) \prod_{i=1}^{2g-1} (x-a_i)$ . La proyección canónica  $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un morfismo con  $\deg(\varphi_\Gamma) = 2$  y  $\text{Disc}(\varphi) = (0 : 1) + (1 : 1) + \infty + \sum_{i=1}^{2g-1} (a_i : 1)$ . Esta situación solo se da en superficies isomorfas a curvas hiperelípticas.

**Teorema 2.3.1** *Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g > 0$  tal que existe  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo con  $\deg(f) = 2$  y  $\text{Disc}(f) = (0 : 1) + (1 : 1) + \infty + \sum_{i=1}^{2g-1} (a_i : 1)$ . Entonces existe un isomorfismo  $i : \Gamma \rightarrow S$ , donde  $\Gamma$  es la curva hiperelíptica definida por la ecuación afín  $y^2 = x(x-1) \prod_{i=1}^{2g-1} (x-a_i)$ .*

Demostración: Sea  $p \in S$  tal que  $\text{ind}_f(p) = 1$ . Por definición existen abiertos  $U_1, U_2$  y cartas  $\phi_1, \phi_2$  donde  $p \in U_1 \subset S$ ,  $f(p) \in U_2 \subset \mathbb{P}^1$  y  $h = \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \rightarrow \phi_2(U_2)$  es biholomorfa.

Como  $\text{Disc}(\pi) = \text{Disc}(f)$ , entonces  $\varphi_\Gamma^{-1}(f(p)) = \{q, \tau_\Gamma(q)\}$ . Luego existen abiertos  $V_2, U_3$  y cartas  $\psi_2, \phi_3$  donde  $f(p) \in V_2$ ,  $\varphi_\Gamma(a) = f(p)$ ,  $q \in U_3$  y  $s = \psi_2 \circ \varphi \circ \phi_3^{-1} : \phi_3(U_3) \rightarrow \psi_2(V_2)$  es biholomorfa. En particular podemos considerar  $V_2 = U_2$ , y  $\psi_2 = \phi_2$ .

El mapa  $i_{U_1} : U_1 \subset S \rightarrow U_3 \subset \Gamma$  definido por  $i_{U_1} = \phi_3 \circ s^{-1} \circ \phi_2 \circ f$  cumple que  $\phi_3 \circ i_{U_1} \circ \phi_2^{-1}$  es biholomorfa.

Sea  $I = \{i_U : U \subset S \rightarrow V \subset \Gamma \text{ morfismo entre superficies de Riemann} / U \text{ conexo, } x \in U, i_U(p) = q \text{ y } \varphi_\Gamma(i_U(x)) = f(x)\}$ . Luego definimos el orden parcial  $(I, \prec)$  dado por  $i_U \prec i_V$  si  $U \subset V$ . Notar que si  $i_{U_\alpha}, i_{U_\beta} \in I$  entonces  $i_{U_\alpha}(x) = i_{U_\beta}(x), \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ .

Dada  $\{i_{U_\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$  es una cadena creciente, veamos que esta acotada. Definimos  $U = \cup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$  y  $i_U : U \rightarrow \Gamma$  donde  $i_U(x) = i_{U_\alpha}(x), \forall x \in U_\alpha$ ,  $i_U$  esta bien definida además  $i_{U_\alpha} \prec i_U \forall \alpha \in \Delta$ . Entonces como  $I \neq \emptyset, (i_{U_1} \in I)$ , según el lema de Zorn existe un elemento maximal,  $i : U \rightarrow \Gamma$ , que es un morfismo.

Si  $x_0 \in \partial U$  y  $\text{ind}_f(x_0) = 1$ , realizando la misma construcción que para  $p$ , se tiene que  $i_V : V \rightarrow \Gamma$  es un morfismo. Además, eligiendo adecuadamente  $y_0 = i_V(x_0)$ , entonces  $i_V(x) = i_U(x)$  para  $x \in U \cap V$ , por lo que  $U \supseteq (S \setminus \text{Ram}_f(S))$ .

Veamos que  $i$  se puede definir continuamente en  $\text{Ram}_f(S)$  y por tanto  $i : S \rightarrow \Gamma$  morfismo.

Para  $\hat{x} \in S$  tal que  $f(\hat{x}) = (1 : 1)$ . Tenemos  $\text{ind}_f(\hat{x}) = 2$ , dada  $x_n$  sucesión tal que  $x_n \rightarrow \hat{x}$ . Como  $f$  continua  $f(x_n) \rightarrow f(\hat{x}) = (1 : 1)$ . Notemos  $y_n = i(x_n)$ , como  $\Gamma$  compacto,  $y_n$  tiene alguna subsucesión  $y_{n_k} \rightarrow y$  entonces  $f(x_{n_k}) = \varphi_\Gamma(y_{n_k}) \rightarrow \varphi_\Gamma(y) = (1 : 1)$ . Luego  $\varphi^{-1}(1 : 1) = \{(1 : 1)(0 : 1)\}$ ,  $\Gamma$  compacto y  $y_n \rightarrow (1 : 1)(0 : 1)$  por tanto  $i$  se puede extender continuamente a  $\hat{x}$ . Análogo para  $x \in \text{Ram}_f(S)$ , concluimos así que  $U = S$  y  $i : S \rightarrow \Gamma$  morfismo.  $\square$

Para concluir que  $i$  es un isomorfismo, basta notar que  $f = \varphi_\Gamma \circ i$ , lo que implica que  $\deg(f) = \deg(i) \times \deg(\varphi_\Gamma)$ . Luego,  $\deg(i) = 1$ .  $\square$

Notar que como  $h : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  tiene grado igual a 2, existe un isomorfismo  $r : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $r \circ h$  está en las hipótesis del teorema 2.3.1.

**Corolario 2.3.2** *Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g > 0$ , tal que existe un morfismo  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  con  $\deg(f) = 2$ . Entonces  $S$  es isomorfa a una curva hiperelíptica.*

En particular se puede definir a las curvas hiperelípticas como cubrimientos (de género  $g > 1$  y de) grado 2 de  $\mathbb{P}^1$ .

### 2.3.1. Automorfismos

Sea  $\Gamma$  una curva hiperelíptica de género  $g > 1$ . Veamos algunas propiedades del conjunto de puntos de Weierstrass  $\Omega_\Gamma$  en relación con propiedades de  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

**Lema 2.3.3** *Sean  $\Gamma$  una curva hiperelíptica y  $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un automorfismo. Si existe  $\omega \in \Omega_\Gamma$  tal que  $\theta(\omega) \in \Omega_\Gamma$ , entonces  $\theta(\Omega_\Gamma) = \Omega_\Gamma$ .*

Demostración: Supongamos por absurdo que existe  $a \in \Gamma$  tal que  $\tau_\Gamma(a) \neq a$  y  $\theta(a) \in \Omega_\Gamma$ . Tenemos así que  $\text{ind}_{\varphi_\Gamma \circ \theta}(\omega) = \text{ind}_{\varphi_\Gamma \circ \theta}(a) = 2$ , luego existe  $f_1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  automorfismo tal que el divisor de ceros y polos de  $f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta$  es  $(f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta) = 2a - 2\omega$ . De forma análoga existe  $f_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  automorfismo tal que  $(f_2 \circ \varphi_\Gamma) = 2\omega - a - \tau_\Gamma(a)$ . Luego por 1.2.33 tenemos que  $h$  el morfismo inducido por  $[f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta] \times [f_2 \circ \varphi_\Gamma]$  cumple  $(h) = a - \tau_\Gamma(a)$  y por tanto es un isomorfismo, lo que es absurdo.  $\square$

**Teorema 2.3.4** *Sean  $\Gamma$  una curva hiperelíptica de género  $g > 1$  y  $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un automorfismo. Entonces  $\theta(\Omega_\Gamma) = \Omega_\Gamma$ .*

Demostración: Supongamos que  $\theta(\Omega_\Gamma) \neq \Omega_\Gamma$ . Por el Lema anterior tenemos entonces que  $\theta(\Omega_\Gamma) \cap \Omega_\Gamma = \emptyset$ . Sea  $\{p_0, \dots, p_{2n+1}\} = \theta^{-1}(\Omega_\Gamma)$ , existe entonces un automorfismo  $f_1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $(f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta) = 2p_0 - 2p_1$ . Luego como  $\tau_\Gamma(p_i) \neq p_i$ , existe un automorfismo  $f_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $(f_2 \circ \varphi_\Gamma) = p_0 + \tau_{\varphi_\Gamma}(p_0) - p_1 - \tau_\Gamma(p_1)$ . Sea  $h$  el morfismo inducido por  $\frac{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}{f_2 \circ \varphi_\Gamma}$  el divisor de ceros y polos es  $\left(\frac{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}{f_2 \circ \varphi_\Gamma}\right) = p_0 - \tau_{\varphi_\Gamma}(p_0) - p_1 + \tau_\Gamma(p_1)$ . El divisor de  $h \circ \tau_\Gamma$  es  $(h \circ \tau_\Gamma) = \tau_{\varphi_\Gamma}(p_0) - p_0 - \tau_\Gamma(p_1) + p_1 = -\left(\frac{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}{f_2 \circ \varphi_\Gamma}\right)$  de donde se deduce que el morfismo  $f$  inducido por

$$\frac{h}{h \circ \tau_\Gamma} = \left(\frac{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}{f_2 \circ \varphi_\Gamma}\right) \times \left(\frac{f_2 \circ \varphi_\Gamma \circ \tau_\Gamma}{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta \circ \tau_\Gamma}\right) = \frac{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta \circ \tau_\Gamma}$$

es constante. Entonces existe  $f_3 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  automorfismo tal que  $f_3 \circ f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta = f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta \circ \tau_\Gamma$ . Como  $\deg(f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta) = 2$  y  $\tau_\Gamma(\omega_i) = \omega_i$  entonces  $f_3$  tiene al menos  $g + 1$  punto fijo por tanto  $f_3 = id$ , además como  $f_1$  es automorfismo se concluye que  $\varphi_\Gamma \circ \theta = \varphi_\Gamma \circ \theta \circ \tau_\Gamma$

Por último  $f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta(p_0) = f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta(\tau_\Gamma(p_0)) = \infty$ ,  $p_0 \neq \tau_\Gamma(p_0)$  y  $\text{ind}_{f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta}(p_0) = 2$  por tanto  $\deg(f_1 \circ \varphi_\Gamma \circ \theta) \geq 3$  lo que es absurdo.  $\square$

**Teorema 2.3.5** Sean  $\Gamma$  una curva hiperelíptica de género  $g > 1$  y  $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un automorfismo. Entonces  $\tau_\Gamma \circ \theta = \theta \circ \tau_\Gamma$

Demostración: por el teorema anterior sabemos que  $\varphi_\Gamma \circ \theta = \varphi_\Gamma \circ \theta \circ \tau_\Gamma$ , luego  $\forall a \in \Gamma$  o bien  $\theta(a) = \theta \circ \tau_\Gamma(a)$  o bien  $\tau_\Gamma \circ \theta(a) = \theta(a) \circ \tau_\Gamma(a)$ .

Sean  $\Gamma' = \Gamma \setminus \Omega_\Gamma$  y  $p \in \Gamma'$  con  $\theta(p) \neq \theta \circ \tau_\Gamma(p)$ .  $\Gamma'$  es un abierto cuyo complemento tiene una cantidad finita de puntos. Por lo tanto sigue siendo conexo. Por otro lado,  $\theta$  y  $\theta \circ \tau_\Gamma$  siendo continuas, existe un abierto  $U \in \Gamma$  tal que  $p \in U$  y  $\forall z \in U$  se tiene que  $\theta(z) \neq \theta \circ \tau_\Gamma(z)$ . Trabajamos de manera análoga para un punto  $p$  tal que  $\theta(p) = \theta \circ \tau_\Gamma(p)$ .

Definimos  $\Gamma^+ = \{a \in \Gamma' \text{ tal que } \varphi_\Gamma \circ \theta(a) = \theta \circ \tau_\Gamma(a)\}$  y  $\Gamma^- = \{a \in \Gamma' \text{ tal que } \theta(a) = \theta \circ \tau_\Gamma(a)\}$  ambos son abiertos, luego  $\Gamma'$  es unión de abiertos disjuntos, por tanto  $\Gamma^+ = \emptyset$  o  $\Gamma^- = \emptyset$  por tanto como  $\theta$  es inyectiva  $\theta \circ \tau_\Gamma = \tau_\Gamma \circ \theta$ .  $\square$

**Corolario 2.3.6** Sean  $\Gamma$  curva hiperelíptica de género  $g > 1$  y  $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma$  un automorfismo que fija al menos tres puntos de Weierstrass de  $\Gamma$ . Entonces  $\theta \in \{id, \tau_\Gamma\}$

**Teorema 2.3.7** Sean  $\Gamma$  una curva hiperelíptica de género  $g > 1$  y  $\Omega_\Gamma = \{\omega_i\}_{i=1, \dots, 2g+2}$  los puntos de Weierstrass. Entonces la función  $s : \text{Aut}(\Gamma) \rightarrow \text{Per}(2g + 2)$ , tal que  $(s(\theta))(i) = j$  si y sólo si  $\theta(\omega_i) = \omega_j$ , es un homomorfismo de grupos, cuyo núcleo es  $\ker(s) = \{id, \tau_\Gamma\}$

**Corolario 2.3.8** Sea  $\Gamma$  una curva hiperelíptica de género  $g > 1$ , entonces  $\#\text{Aut}(\Gamma) < \infty$

En realidad, para una superficie de Riemann de género  $g > 1$  arbitraria, existe una cota superior que sólo depende del género.

**Teorema 2.3.9** Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g > 1$ , entonces  $\#\text{Aut}(S) \leq 84(g - 1)$

Demostración: [M]

## Capítulo 3

# Estructura y construcción de todos los cubrimientos hiperelípticos

En este capítulo construiremos explícitamente todos los isomorfismos de curvas elípticas y desarrollaremos herramientas para construir cubrimientos hiperelípticos, cuya existencia no habíamos aún demostrado. Veremos además como vincular los cubrimientos hiperelípticos con morfismos de  $\mathbb{P}^1$  (1.2.5.c).

Recordemos que:

- $X_\lambda$  es la curva elíptica definida por la ecuación afín  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$
- Si  $\Gamma$  curva hiperelíptica.
  - La involución  $\tau_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$  está definida por  $\tau_\Gamma((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = ((x_0 : x_1), (-y_0 : y_1))$
  - Notamos  $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  el morfismo definido por  $\varphi_\Gamma((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = (x_0 : x_1)$

### 3.1. Caracterización de los cubrimientos hiperelípticos

**Teorema 3.1.1** *Sea  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico tal que  $\pi(\infty) = \infty$ , donde  $\Gamma$  tiene forma canónica. Entonces existe un morfismo  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $R(\infty) = \infty$ , y que satisface el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 \infty \in \Gamma & \xrightarrow{\tau_\Gamma} & \infty \in \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \infty \in \mathbb{P}^1 \\
 \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow R \\
 \infty \in X_\lambda & \xrightarrow{\tau_{X_\lambda}} & \infty \in X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \infty \in \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

*Demostración:* Sea  $q \in \Gamma \setminus \{\infty\}$  y  $p = \pi(q)$ . El morfismo  $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  cumple que  $\varphi_\Gamma \circ \tau_\Gamma = \varphi_\Gamma$  y  $\varphi_\Gamma^{-1}(\varphi_\Gamma)(q) = \{q, \tau_\Gamma(q)\}$ . Existe entonces un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  cuyo divisor de ceros y polos es  $(f) = (f)_0 - (f)_\infty = q + \tau_\Gamma(q) - 2\infty$ . Podemos hacer la misma construcción desde  $X_\lambda$  con  $p$ . Es decir, existe un morfismo  $g : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $(g) = (g)_0 - (g)_\infty = p + \varphi_{X_\lambda}(p) - 2\infty$ . Tomando ahora la función norma de  $f$ ,  $N_\pi(f) : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ , el divisor de  $N_\pi(f)$  es  $(N_\pi(f)) = \pi(q) + \pi(\tau_\Gamma(q)) - 2\infty$ .

Ya que  $g$  y  $N_\pi(f)$  son funciones meromorfas, de acuerdo a 1.2.15 y 1.2.16 el cociente  $h$  también lo es. Entonces  $h : X_\lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un morfismo con divisor de ceros y polos  $(h) = (g) - (N_\pi(f)) = \varphi_{X_\lambda}(p) - \pi(\varphi_\Gamma)(q)$ . Dado que  $\pi(q) = p$ , si  $\varphi_{X_\lambda}(p) \neq \varphi_\Gamma(q)$  deduciríamos que  $h$  es un isomorfismo. Pero ello no es posible puesto que  $X_\lambda$  y  $\mathbb{P}^1$  tienen distinto género. Por lo tanto  $\varphi_{X_\lambda} \circ \pi(q) = \pi \circ \varphi_\Gamma(q)$ . Para  $q = \infty$  la igualdad se obtiene trivialmente.

Notemos  $\gamma = \varphi_{X_\lambda} \circ \pi$ .

Dado  $(x_0 : 1) \in \mathbb{P}^1$ , definimos  $R(x_0 : 1) = \gamma(p)$ , donde  $\varphi_\Gamma(p) = (x_0 : 1)$ . Está bien definido ya que  $\varphi_\Gamma^{-1}(x_0 : 1) = \{p, \tau_\Gamma(p)\}$  y  $\pi(p_1) = \tau_{X_\lambda}(\pi(p_2))$ . Luego  $\varphi_{X_\lambda}(\pi(p_1)) = \varphi_{X_\lambda}(\tau_{X_\lambda}(\pi(p_2)))$ . Además  $R(\infty) = \infty$ . Tenemos así que el mapa  $R$  verifica el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma & \xleftarrow{\varphi_\Gamma^{-1}} & \mathbb{P}^1 \\
\pi \downarrow & \searrow \gamma & \downarrow R = \gamma \circ \varphi_\Gamma^{-1} \\
X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \mathbb{P}^1
\end{array}$$

Afirmación:  $R$  es un morfismo.

Sea  $y^2 = \prod_i (x - a_i)$  la ecuación afín de  $\Gamma$ . Dado  $(x_0 : 1)$  con  $x_0 \neq a_i \forall i$ , sea  $p$  con  $\varphi_\Gamma(p) = (x_0 : 1)$ . Como  $\text{ind}_{\varphi_\Gamma}(p) = 1$  existen cartas  $\phi_\alpha, \phi_\beta$  y abiertos  $U \subset \Gamma, V \subset \mathbb{P}^1$  tales que  $p \in U, (x_0 : 1) \in \mathbb{P}^1$  y  $f = \phi_\beta \circ \varphi_\Gamma \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U) \rightarrow \phi_\beta(V)$  es biholomorfa. Por lo tanto  $f^{-1}$  también es biholomorfa.

Como  $\gamma$  es morfismo, existen abiertos  $U', V'$  y cartas  $\phi_{\alpha'}, \phi_{\beta'}$  tales que  $g = \phi_{\alpha'} \circ \gamma \circ \phi_{\beta'}^{-1} : \phi_{\beta'}(V') \rightarrow \phi_{\alpha'}(U')$  es holomorfa. En particular podemos considerar  $\phi_\beta(V) = \phi_{\beta'}(V')$  y por lo tanto  $g \circ f^{-1} = \phi_{\beta'} \circ R \circ \phi_\alpha^{-1}$ , es holomorfa, por ser composición de holomorfas.

Para el resto de los puntos, que son una cantidad finita, basta probar que  $R$  es continua. Sean  $(x_n : 1) \in \mathbb{P}^1$  sucesión tal que  $(x_n : 1) \rightarrow (a_i : 1)$  y  $((x_n : 1), y_n) \in \Gamma$ , por lo tanto  $((x_n : 1), y_n) \rightarrow ((a_i : 1), (0 : 1))$ . Entonces  $R(x_n : 1) = \gamma((x_n : 1), y_n) \rightarrow \gamma((a_i : 1), (0 : 1)) = R(a_i : 1)$ , por lo tanto  $R$  continua en  $(a_i : 1)$ . De forma análoga se tienen que  $R$  es continua en  $\infty$ . Concluimos así que  $R$  es un morfismo.  $\square$

El teorema 3.1.1 determina  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  en función de  $\pi$ . Notaremos entonces  $R_\pi$  a este morfismo. Claramente  $R_{\pi \circ \tau_\Gamma} = R_\pi$ , diremos así que  $\pi$  es equivalente a  $\pi \circ \tau_\Gamma$ .

El hecho de que  $\Gamma$  tenga forma canónica y que  $\pi(\infty) = \infty$  no son restricciones.

**Corolario 3.1.2** *Sea  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico tal que  $\pi(\infty) = \infty$ . Entonces:*

- a) Si  $\omega \in \Omega_\Gamma$  y  $\pi(\omega) = ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \implies$ , o bien  $x_1 = 0$ , o bien  $x_0/x_1 \in \{0, 1, \lambda\}$ .
- b)  $\text{Sop}(\text{Disc}_\pi) = \tau_{X_\lambda}(\text{Sop}(\text{Disc}_\pi))$ .
- c) Si  $\omega \in \Omega_\Gamma$ , entonces  $\text{ind}_\pi(\omega)$  es impar.

Demostración: Tanto a) como b) se deducen inmediatamente del teorema anterior; falta entonces probar c).

Todo punto de Weierstrass  $p \in \Omega_\Gamma$  queda fijo por la involución  $\tau_\Gamma$ . De acuerdo a 1.2.26 existen  $U \subset \Gamma$  un abierto y una carta  $\phi : U \rightarrow B(0, 1)$ , tales que  $p \in U$  y  $f = \phi \circ \tau_\Gamma \circ \phi^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  es  $f(z) = -z$ . En particular  $\tau_\Gamma(U) = U$ . Por lo tanto, para  $V = \pi(U)$  se tiene que  $\tau_{X_\lambda}(V) = V$ . Luego, por 1.2.25 existen dos abiertos  $\hat{U} \subset \Gamma$  y  $\hat{V} \subset X_\lambda$ , y dos cartas  $\psi : \hat{U} \rightarrow B(0, 1)$  y  $\varphi : \hat{V} \rightarrow B(0, 1)$ , tales que  $p \in \hat{U} \subset U, \pi(\hat{U}) = \hat{V}$  y  $g = \varphi \circ \pi \circ \psi^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  satisface la igualdad  $g(z) = z^n$ , donde  $n = \text{ind}_\pi(p)$ . De nuevo, por 1.2.26, existen un abierto  $W \subset \hat{V} \subset X_\lambda$ , con  $\pi(p) \in W$ , y una carta  $\varpi : W \rightarrow B(0, 1)$ , tales que  $h = \varpi \circ \tau_\lambda \circ \varpi^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  satisface  $h(z) = -z$ . Las funciones  $F = \psi \circ \phi^{-1}$  y  $G = \varphi \circ \pi \circ \phi^{-1}$  son holomorfas y  $F(0) = G(0) = 0$ .

Se tiene así el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
B(0, 1) & & \\
\uparrow F & \searrow z^n & \\
B(0, 1) & \xrightarrow{G} & B(0, 1) \\
\downarrow -z & & \downarrow -z \\
B(0, 1) & & B(0, 1)
\end{array}$$

La igualdad  $\varphi \circ \pi \circ F = G$  implica que  $F^n(z) = G(z)$ . Por otro lado,  $\pi \circ \tau_\Gamma = \tau_{X_\lambda} \circ \pi$  implica que  $-F^n(z) = G(-z)$ . Por último  $G(z) = z^n G_1(z)$ , donde  $G_1$  es holomorfa y  $G_1(0) \neq 0$ . Luego  $n$  es impar.  $\square$

**Corolario 3.1.3**

Sean  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico y  $p \in \Gamma$  un punto cualquiera.

- Si  $p$  es de Weierstrass, entonces  $\text{ind}_\pi(p) = \text{ind}_{R_\pi}(\varphi_\Gamma(p))$ .
- Si  $p$  no es de Weierstrass y  $\tau(\pi(p)) = \pi(p)$ , entonces  $2\text{ind}_\pi(p) = \text{ind}_{R_\pi}(\varphi_\Gamma(p))$ .
- Si  $p$  no es de Weierstrass y  $\tau(\pi(p)) \neq \pi(p)$ , entonces  $\text{ind}_\pi(p) = \text{ind}_{R_\pi}(\varphi_\Gamma(p))$ .

Veremos ahora una forma de obtener, a partir de una curva elíptica  $X_\lambda$  y un morfismo  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , un cubrimiento hiperelíptico  $\pi$ , tal que  $R = R_\pi$ .

Recordemos que si  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo no constante, existen  $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$  polinomios homogéneos del mismo grado sin factores comunes tales que  $R(x : y) = (P(x, y) : Q(x, y))$ . Notamos  $\hat{P}(x) = P(x, 1)$ ,  $\hat{Q}(x) = Q(x, 1)$  y  $\hat{R} = \hat{P}/\hat{Q}$ , se puede suponer además que  $\hat{P}$  es mónico. Por último  $\text{deg}(R) = \max\{\text{deg}(\hat{Q}), \text{deg}(\hat{P})\}$

**Observación 3.1.4** Sean  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo y  $a \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\text{ind}_R(a : 1) = m$  y  $R(a : 1) = (b : 1)$  si y sólo si  $a$  es raíz de multiplicidad  $m$  del polinomio  $H(t) = \hat{P}(t) - b\hat{Q}(t)$ .

**Lema 3.1.5** Sea  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo de grado  $n$  tal que  $R(\infty) = \infty$ ,  $\text{ind}_R(\infty) \equiv 1 \pmod{2}$ . Entonces  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  el polinomio  $H = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - \hat{Q})(\hat{P} - \lambda\hat{Q})$  tiene al menos 3 raíces de multiplicidad impar.

Demostración: Como  $R(\infty) = \infty$  se tiene que  $\text{deg}(\hat{P}) > \text{deg}(\hat{Q})$ . Luego  $\text{ind}_R(\infty) = \text{deg}(\hat{P}) - \text{deg}(\hat{Q})$ , de donde  $\text{deg}(\hat{P}) - \text{deg}(\hat{Q})$  es impar.

Como  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  no tienen raíces comunes, entonces  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$ ,  $\hat{P} - \hat{Q}$  y  $\hat{P} - \lambda\hat{Q}$  son coprimos de a pares.

Si  $\text{deg}(\hat{P})$  es impar, entonces  $\hat{P}$ ,  $\hat{P} - \hat{Q}$  y  $\hat{P} - \lambda\hat{Q}$  tienen al menos una raíz de multiplicidad impar. Como son coprimos,  $H$  tiene al menos tres raíces de multiplicidad impar.

Si en cambio  $\text{deg}(\hat{P})$  es par, entonces  $\text{deg}(\hat{Q})$  es impar. Supongamos en este caso que  $H$  solo tiene una raíz de multiplicidad impar. Entonces  $\hat{Q}$  solo tiene una raíz de multiplicidad impar y  $\hat{P}$ ,  $\hat{P} - \hat{Q}$  y  $\hat{P} - \lambda\hat{Q}$  tienen todas sus raíces con multiplicidad par, es decir son cuadrados. Por otro lado,  $\text{deg}(R) = n = \text{deg}(\hat{P})$  y  $\text{deg}(\text{Ram}(R)) = 2n - 2$ . Notemos  $\{z_i\}$  a las raíces de  $H$ ,  $k = \text{deg}(\hat{P}) - \text{deg}(\hat{Q})$  y  $h = \#\{z_i, z_i \text{ raíz de } H\}$ . Tenemos así que  $h \leq 3n/2 + (n - k - 1)/2$ .

Entonces

$$\text{deg}(\text{Ram}(R)) = \sum \text{Ram}_R(x) \geq \sum_{(z_i:1)} \text{Ram}_R(z_i : 1) + \text{Ram}_R(\infty) = \sum_{(z_i:1)} \text{Ram}_R(z_i : 1) + k - 1.$$

además

$$\sum_{(z_i:1)} \text{Ram}_R(z_i : 1) + k - 1 = 4n - k - h + k - 1 > 2n - 1$$

Lo que es una contradicción que  $\text{deg}(\text{Ram}(R)) = 2n - 2$ .  $\square$

**Teorema 3.1.6** Sea  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo que cumple las siguientes condiciones:

- $R(\infty) = \infty$ .
- $\text{ind}_R(\infty) \equiv \text{ind}_R(0 : 1) \equiv \text{ind}_R(1 : 1) \equiv 1 \pmod{2}$ .
- $R(0 : 1), R(1 : 1) \in \{(0 : 1), (1 : 1), (\lambda : 1), \infty\}$ .

Entonces existe  $\Gamma$  una curva hiperelíptica y  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico tales que  $R \circ \varphi_\Gamma = \varphi_{X_\lambda} \circ \pi$ .

Demostración: Sea  $S$  el producto fibrado de  $\varphi_{X_\lambda}$  y  $R$ ,  $S = \{(p, q) \in X_\lambda \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } \varphi_{X_\lambda}(p) = R(q)\}$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{(t,s) \rightarrow s} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow (t,s) \rightarrow t & & \downarrow R \\ X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Vamos a construir a partir de  $S$  una curva hiperelíptica.

Como  $R$  es un morfismo de  $\mathbb{P}^1$ , sabemos que  $R(x_0 : x_1) = (P(x_0, x_1) : cQ(x_0, x_1))$ , donde  $c \neq 0$ ,  $P$  y  $Q$  polinomios homogéneos del mismo grado y sin factores comunes tales que  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son mónicos. Luego  $\deg(\hat{P}) > \deg(\hat{Q})$ , ya que  $R(\infty) = \infty$ .

Si  $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)), (t_0 : t_1) \in S$ , entonces

$$\varphi_{X_\lambda}((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = (x_0 : x_1) = R(t_0 : t_1)$$

Dado que la ecuación afín de  $X_\lambda$  es  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ , podemos notar  $S$  con la ecuación afín  $y^2 = \hat{R}(t)(\hat{R}(t)-1)(\hat{R}(t)-\lambda)$ . Multiplicando en ambos lados de la igualdad por  $(\hat{Q}^4)c^4$  tenemos

$$y^2(\hat{Q}(t)c)^4 = \hat{P}(t)(c)\hat{Q}(t)(\hat{P}(t)-(c)\hat{Q}(t))(\hat{P}(t)-\lambda(c)\hat{Q}(t))$$

Necesitamos además que  $\hat{P}(t)(c)\hat{Q}(t)(\hat{P}(t)-(c)\hat{Q}(t))(\hat{P}(t)-\lambda(c)\hat{Q}(t))$  sea mónico, para lo cual basta con dividir entre  $c$ , ya que  $\deg(\hat{P}) > \deg(\hat{Q})$ . Obtenemos de tal manera que:

$$y^2c^3(\hat{Q}(t))^4 = \hat{P}(t)\hat{Q}(t)(\hat{P}(t)-(c)\hat{Q}(t))(\hat{P}(t)-\lambda(c)\hat{Q}(t)).$$

Notamos el polinomio mónico  $H = \hat{P}(t)\hat{Q}(t)(\hat{P}(t)-(c)\hat{Q}(t))(\hat{P}(t)-\lambda(c)\hat{Q}(t))$ , como producto de sus raíces,  $H = \prod(t-v_j)$ . Luego, podemos descomponer  $H$  en un parte simple y una parte cuadrada. O sea  $\prod(t-v_j) = \prod_{i=1}^{2g+1}(t-a_i)B(t)^2$  con  $a_i$  distintos. Por el lema anterior  $g \geq 1$ .

Sea la curva hiperelíptica  $\Gamma$  definida por

$$\Gamma = \{(u_0 : u_1), (v_0 : v_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } v_0^2u_1^{2g+1} = v_1^2 \prod(u_0 - a_i u_1)\}$$

Queremos que  $\Gamma$  admita un cubrimiento hiperelíptico  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  tal que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow R \\ X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Es decir  $\varphi_{X_\lambda}(\pi((u_0 : u_1), (v_0 : v_1))) = (P(u_0, u_1) : cQ(u_0, u_1))$ . Para esto es suficiente que se cumpla que  $\pi((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) = ((P(u) : cQ(u)), (y_0 : y_1))$  y  $\pi((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \in X_\lambda$ , donde la segunda condición es:

$$y_0^2(cQ(u))^3 = y_1^2P(u)(P(u)-cQ(u))(P(u)-\lambda cQ(u)).$$

Definimos así  $(y_0 : y_1) = (v_0B(u_0, u_1)u_1^{k_1} : v_1u_1^{k_2}c^2Q(u_0, u_1)^2)$ , donde  $k_1, k_2$ , son tales que los polinomios sean homogéneos en  $u_0, u_1$  y del mismo grado en ambas coordenadas.

Veamos que se verifica la pertenencia a  $X_\lambda$ .

El único punto en  $\Gamma$  que cumple  $(u_0 : u_1) = (1 : 0)$  es  $\infty$ , y como  $R(\infty) = \infty$  tenemos forzosamente que  $\pi(\infty) = \infty \in X_\lambda$ .

Si  $(u_0 : u_1) \neq (1 : 0)$ , podemos suponer  $u_1 = 1, v_1 = 1$  por lo que:

$$\begin{aligned} y_0^2(cQ(u_0, u_1))^3 &= c^3v_0^2B(u_0, u_1)^2Q(u_0, u_1)^3 = \\ &= \prod_i(u_0 - a_i u_1)B(u_0, u_1)^2c^3Q(u_0, u_1)^3 = \\ P(u_0)(cQ(u_0))(P(u_0) - cQ(u_0))(P(u_0) - \lambda cQ(u_0))c^3Q(u_0)^3 &= \\ y_1^2P(u_0)(P(u_0) - cQ(u_0))(P(u_0) - \lambda cQ(u_0)) &= \\ y_1^2x_0(x_0 - x_1)(x_0 - \lambda x_1) \end{aligned}$$

Luego,  $\pi$  es un morfismo que hace conmutar el diagrama.  $\square$

Además la curva hiperelíptica  $\Gamma$  y el cubrimiento hiperelíptico  $\pi$  están determinados por el morfismo  $R$  y  $\lambda$ . Notaremos entonces  $\Gamma_{(R, \lambda)}$  y  $\pi_{(R, \lambda)}$ .

En la demostración del teorema anterior no se necesita la condición que afirma que  $ind_R(0)$  y  $ind_R(1)$  son impares. Sin embargo, si queremos que la curva  $\Gamma_{(R, \lambda)}$  tenga forma canónica, ello sí es necesario.

Esto nos da una forma de construir morfismos de cualquier grado, sobre cualquier curva elíptica.

**Corolario 3.1.7** *Existen cubrimientos hiperelípticos*

**Corolario 3.1.8** *Sean  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo,  $\pi_{(R,\lambda)} : \Gamma_{(R,\lambda)} \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico como en 3.1.6 y  $q \in \mathbb{P}^1$ , con  $\varphi_{\Gamma_{(R,\lambda)}}(p) = q$ . Entonces:*

- Si  $\text{ind}_R(q)$  es par y  $R(q) \notin \{(0:1), (1:0), (1:1), (\lambda:1)\}$ , entonces  $p$  no es de Weierstrass y  $\text{ind}_R(q) = \text{ind}_{\pi_{(R,\lambda)}}(p)$
- Si  $\text{ind}_R(q)$  es par y  $R(q) \in \{(0:1), (1:0), (1:1), (\lambda:1)\}$ , entonces  $p$  no es de Weierstrass y  $\text{ind}_R(q) = 2\text{ind}_{\pi_{(R,\lambda)}}(p)$
- Si  $\text{ind}_R(q)$  impar, entonces  $\text{ind}_R(q) = \text{ind}_{\pi_{(R,\lambda)}}(p)$ . Además  $p$  es punto de Weierstrass si y sólo si  $R(q) \in \{(0:1), (1:0), (1:1), (\lambda:1)\}$

El teorema 3.1.1 da, para cada cubrimiento hiperelíptico  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  tal que  $\pi(\infty) = \infty$ , un morfismo  $R_\pi$  de  $\mathbb{P}^1$ . El teorema 3.1.6 da para cada morfismo  $R$  de  $\mathbb{P}^1$  en sus hipótesis y la misma curva elíptica  $X_\lambda$ , una curva hiperelíptica  $\Gamma_{(R,\lambda)}$  y un cubrimiento hiperelíptico  $\pi_{(R,\lambda)}$ . Veamos que estos procedimientos son inversos, a menos de una equivalencia.

**Proposición 3.1.9** *Sea  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico que satisface las hipótesis de 3.1.1. Entonces, primero de todo,  $\Gamma = \Gamma_{(R_\pi,\lambda)}$  y, o bien  $\pi = \pi_{(R_\pi,\lambda)}$ , o bien  $\pi = \tau_{X_\lambda} \circ \pi_{(R_\pi,\lambda)}$ .*

Dado un cubrimiento hiperelíptico  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  de grado  $n$ , podemos construir un morfismo  $R_\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  también de grado  $n$ , como el diagrama del teorema 3.1.1. Además por 3.1.3, tenemos  $\hat{R}_\pi(0), \hat{R}_\pi(1) \in \{0, 1, \lambda, \infty\}$ .

Para  $\omega = ((a_i : 1), (0 : 1)) \in \Omega_\Gamma$ , tenemos

$$\pi(\omega) \in \{((0 : 1), (0 : 1)); ((1 : 1), (0 : 1)); ((\lambda : 1), (0 : 1)); \infty\}$$

donde  $\varphi_\Gamma(\omega) = (a_i : 1)$  y  $\text{ind}_\pi(\omega)$  es impar.

Por 3.1.1, se deduce que  $a_i$  es raíz de  $H = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$ . Por 3.1.3, se tiene que  $\text{ind}_\pi(\omega) = \text{ind}_{R_\pi}(a_i : 1)$  por lo tanto por 3.1.5, la multiplicidad de  $a_i$  es impar. En particular  $R(0 : 1) \in \{(0 : 1), (1 : 1), (\lambda : 1)(1 : 0)\}$  con  $\text{ind}_{R_\pi}(0 : 1)$  impar, lo mismo para  $(1 : 1)$ , concluimos así que  $R_\pi$  esta en las hipótesis de 3.1.6.

Sea  $\Gamma_{(R,\lambda)}$  la curva proveniente de aplicar el teorema 3.1.6 a  $R_\pi$ . Como  $a_i$  es raíz de orden impar de  $\hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$ , la ecuación afín de  $\Gamma_{(R,\lambda)}$  es  $y^2 = \prod^{2g+1} (t - a_i)(S(t))$ , donde  $S$  es un polinomio mónico, con todas sus raíces simples y diferentes a cualquier  $a_i$ .

Supongamos que  $\deg(S) \neq 0$ . Toda raíz  $b$  de  $S$ , es raíz de multiplicidad impar de  $\hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$ . En particular  $\pi(b : 1)(y_0 : y_1) \in \{(0 : 1), (1 : 1), (\lambda : 1), (0 : 1)\}$  y  $((b : 1), (y_0 : y_1))$  no es de Weierstrass. Por 3.1.3 tenemos que  $2\text{ind}_\pi((b : 1), (y_0 : y_1)) = \text{ind}_{R_\pi}(b : 1)$ , lo que es una contradicción pues  $\text{ind}_R(b : 1)$  es impar.

Concluimos así que  $\Gamma$  y  $\Gamma_{(R,\lambda)}$  tienen la misma ecuación afín.

Veamos ahora que, o bien  $\pi = \pi_{(R,\lambda)}$ , o bien  $\pi = \tau_{X_\lambda} \circ \pi_{(R,\lambda)}$ . Como  $\pi$  y  $\pi_{(R,\lambda)}$  cumplen el diagrama del teorema 3.1.1, la igualdad  $\pi(w) = ((x_0 : x_1)(y_0 : y_1))$  implica que  $\pi_{R_\pi}(w) = (x_0 : x_1), (\pm y_0 : y_1)$ . Es decir  $\pi(w) = \pi_{R_\pi}(w)$  o  $\pi(w) = \varphi_{X_\lambda} \circ \pi_{R_\pi}(w)$ . Falta probar entonces que el signo es constante, para lo cual basta realizar una prueba similar a 2.3.5.

Definimos  $\Gamma' = \Gamma \setminus \pi^{-1}\{((0 : 1), (0 : 1)); ((1 : 1)(1 : 1)); ((\lambda : 1)(0 : 1)); \lambda\}$ . Como  $\#\pi^{-1}\{((0 : 1), (0 : 1)); ((1 : 1)(1 : 1)); ((\lambda : 1)(0 : 1)); \lambda\} < \infty$ , entonces  $\Gamma'$  es conexo.

Como  $\pi$  y  $\pi_{R_\pi}$  son continuas, para todo  $w \in \Gamma'$  existe un entorno abierto de  $w$ ,  $U \subset \Gamma'$ , tal que, o bien  $\pi|_U = \pi_{R_\pi}|_U$ , o bien  $\pi|_U = \tau_{X_\lambda} \circ \pi_{R_\pi}|_U$ .

El subconjunto  $\Gamma^+ = \{w \in \Gamma' \text{ con } \pi(w) \neq \tau_{X_\lambda} \circ \pi_{R_\pi}(w)\}$ ,  $\Gamma^+$  es un abierto por ser unión de abiertos. De manera análoga defino  $\Gamma^-$  con la condición  $\pi(w) \neq \pi_{R_\pi}(w)$ .

Tenemos así que  $\Gamma' = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  y  $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \emptyset$ , luego como  $\Gamma'$  es conexo,  $\Gamma^+ = \emptyset$  o  $\Gamma^+ = \Gamma'$ . Concluimos que, o bien  $\pi = \pi_{R_\pi}$ , o bien  $\pi = \tau_{X_\lambda} \circ \pi_{R_\pi}$ .  $\square$

Cualquier cubrimiento hiperelíptico de  $X_\lambda$  se puede obtener a partir de morfismos de  $\mathbb{P}^1$  que satisfacen las hipótesis de 3.1.6, módulo automorfismos de  $X_\lambda$ .

Fijados  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , por la proposición 3.1.9, podemos construir todos los cubrimientos hiperelípticos de grado  $n$  de  $X_\lambda$ . Sin embargo, si fijamos también el género de la curva hiperelíptica



que queremos obtener, aumentan las condiciones al morfismo  $R$ , y esas condiciones no son fáciles de describir.

Estudiaremos el caso de curvas de género 2 (para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  y  $n$  arbitrarios). Las ventajas de buscar para este género son:

- 1) Es el caso mas sencillo en traducir.
- 2) Toda superficie de Riemann de género 2 es isomorfa a una curva hiperelíptica, lo que no ocurre en otros géneros. Esto implica que vamos a obtener TODOS los morfismos de superficies de género 1 por superficies de género 2 [M].

### 3.2. Construcción de sistemas de ecuaciones polinomiales para describir cubrimientos hiperelípticos por curvas de género 2

Veamos entonces qué condición tiene que cumplir  $R$  para que la curva hiperelíptica  $\Gamma_R$  tenga género 2. Para lograr esto necesitamos que el polinomio  $\hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$  tenga exactamente 5 raíces con multiplicidad impar, esto es

$$H(t) = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q}) = \prod_{i=1}^5 (t - a_i)B(t)^2$$

Mostremos mas explícitamente las condiciones en función de las raíces.

A partir de ahora  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  es un cubrimiento hiperelíptico, con  $\Gamma$  curva hiperelíptica de género 2 y  $\pi$  satisfaciendo las hipótesis de 3.1.1.

**Proposición 3.2.1**  $Ram(\pi) = \begin{cases} 2p & \text{con } p \text{ de Weierstrass} \\ a + \tau_\Gamma(a) & \text{dos puntos intercambiados por la involución de } \Gamma \end{cases}$

Demostración: Por la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que  $\deg(Ram(\pi)) = 2$ , y como  $Ram_\pi(\Gamma) = \tau_\Gamma(Ram_\pi(\Gamma))$ , deducimos que las opciones para la ramificación son:

$$Ram(\pi) = \begin{cases} 2p & \text{con } p \text{ de Weierstrass} \\ a + \tau_\Gamma(a) & \text{dos puntos intercambiados por la involución } \tau_\Gamma \\ p + p' & \text{con } p, p' \text{ de Weierstrass} \end{cases}$$

El caso  $p + p'$  con  $p, p'$  de Weierstrass no se puede dar, ya que si  $p$  es de Weierstrass entonces  $\text{ind}_\pi(p)$  es impar.  $\square$

Veamos las condiciones de  $H$  para el caso  $Ram(\pi) = 2p$ . Recordando que podemos asumir  $\pi(p) = \infty$  y  $p = \infty$ , ya que existen isomorfismos  $i$  y  $j$  tales que  $i : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$  con  $i(\pi(\infty)) = \infty$  y  $j : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  con  $j(\infty) = p$ . Luego,  $\hat{\pi} : \Gamma' \rightarrow X_\lambda$  verifica  $Ram_{\hat{\pi}} = 2\infty$  y  $\hat{\pi}(\infty) = \infty$ .

**Proposición 3.2.2** Sean  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo de grado  $n$ ,  $X_\lambda$  una curva elíptica y  $\pi_R : \Gamma_R \rightarrow X_\lambda$  el cubrimiento hiperelíptico asociado a  $R$ . Si  $R(\infty) = \infty$ , el género de  $\Gamma_R$  es 2 y  $Ram(\pi) = 2\infty$ . Luego  $H$  tiene 5 raíces simples y  $2n - 4$  dobles.

Demostración: El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \infty \in \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \infty \in \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow R \\ \infty \in X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \infty \in \mathbb{P}^1 \end{array}$$

implica en particular que  $(\text{ind}_\pi(\infty))(\text{ind}_{\varphi_{X_\lambda}}) = (\text{ind}_{\varphi_\Gamma})(\text{ind}_R(\infty))$ . Por lo tanto  $\text{ind}_R(\infty) = 3 = \deg(\hat{P}) - \deg(\hat{Q})$ .

Por la fórmula Riemann-Hurwitz, tenemos que  $\deg(Ram(R)) = 2n - 2$ .

Sea  $H^{-1}(0) = \{t_i, i=1, \dots, h\}$  con  $t_i \neq t_j$ .

$$2n - 2 \geq \sum_j \text{Ram}(t_i : 1) + \text{Ram}(\infty) = \sum_j (n_j - 1) + 2 = 4n - 3 - h + 2 = 4n - h - 1.$$

Como  $H = \prod_{i=1}^5 (t - a_i)B^2(t)$ , la cantidad máxima posible de raíces de  $H$  es  $5 + \frac{4n-3-5}{2}$ , en cuyo caso

$$4n - h - 1 = 4n - \left(5 + \frac{4n-3-5}{2}\right) - 1 = 2n - 5 + 4 - 1 = 2n - 2.$$

Las dos desigualdades precedentes implican que  $h = 2n + 2$ , condición que solo se da si  $B$  y  $\prod(t - a_i)$  son coprimos y tienen todas sus raíces simples.  $\square$

En caso de que  $\text{Ram}(\pi) = a + \tau_\Gamma(a)$ , donde  $a$  no es de Weierstrass, hay dos posibilidades: o bien  $\tau_{X_\lambda}(\pi(a)) = \pi(a)$ , o bien  $\tau_{X_\lambda}(\pi(a)) \neq \pi(a)$ .

**Proposición 3.2.3** Sean  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo de grado  $n$ ,  $X_\lambda$  una curva elíptica y  $\pi_R : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  el cubrimiento hiperelíptico asociado a  $R$ . Si  $R(\infty) = \infty$ , el género de  $\Gamma_R$  es 2 y  $\text{Ram}(\pi) = a + \tau_\Gamma(a)$ , donde  $\tau_{X_\lambda}(a) \neq a$ . Luego  $H$  tiene 5 raíces simples y  $2n - 3$  dobles.

Demostración: El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} a \in \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \varphi_\Gamma(a) \in \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow R \\ \pi(a) \in X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \varphi_{X_\lambda}(\pi(a)) = R(\varphi_\Gamma(a)) \end{array}$$

implica en particular que  $\text{ind}_\varphi(\pi(a))\text{ind}_\pi(a) = \text{ind}_R(\varphi_\Gamma(a))\text{ind}_{\varphi_\Gamma}(a)$ . Por lo tanto  $\text{ind}_R(\varphi_\Gamma(a)) = 2$ . Además  $R(\varphi_\Gamma(a)) \notin \{(0 : 1), (1 : 1), (\lambda : 1), \infty\}$ .

El hecho que  $R(\infty) = \infty$  implica que  $\deg(R) = n = \deg(\hat{P})$ . Por otro lado  $\text{ind}_R(\infty) = 1$  implica que  $\deg(\hat{Q}) = n - 1$ . Sea  $H^{-1}(0) = \{t_i, i=1, \dots, h\}$ , donde  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$ .

Dado que  $\deg(\text{Ram}_R) = 2n - 2$  deducimos que:

$$2n - 2 \geq \sum_i \text{Ram}_R(t_i : 1) + \text{Ram}_R(\varphi(a)) = \sum_j (n_j - 1) + 1 = 4n - 1 - h + 1$$

De manera análoga a lo observado anteriormente, el polinomio  $H = \prod_{i=1}^5 (t - a_i)B^2(t)$  tiene a lo sumo  $5 + \frac{4n-1-5}{2}$  raíces. Luego

$$4n - h \geq 4n - (2n + 2) = 2n - 2.$$

Las dos desigualdades precedentes implican que  $h = 2n + 2$ , condición que se da si y sólo si  $H$  tiene 5 raíces simples y el resto dobles.  $\square$

**Proposición 3.2.4** Sean  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morfismo de grado  $n$  tal que  $R(\infty) = \infty$ ,  $X_\lambda$  una curva elíptica y  $\pi_R : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  el cubrimiento hiperelíptico asociado a  $R$ . Si el género de  $\Gamma_R$  es 2,  $\text{Ram}(\pi) = a + \tau_\Gamma(a)$  y  $\tau_{X_\lambda}(\pi(a)) = \pi(a)$ , entonces  $H$  tiene 5 raíces simples, una raíz de multiplicidad 4 y  $2n - 5$  dobles.

Demostración: Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} a \in \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \varphi_\Gamma(a) \in \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow R \\ \pi(a) \in X_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{X_\lambda}} & \varphi_{X_\lambda}(\pi(a)) = R(\varphi_\Gamma(a)) \end{array}$$

como  $\pi(a) = \tau_{X_\lambda}(\pi(a))$ , entonces  $\text{ind}_R(\varphi_\Gamma(a)) = 4$ . Luego, como  $\varphi_\Gamma(a) = (d : 1) \neq \infty$ , el complejo  $d$  es una raíz de multiplicidad 4 de  $H$ . De manera análoga al resultado precedente, obtenemos que  $\deg(H) = 4n - 1$  y  $H = \prod_{i=1}^5 (t - a_i)B^2(t)(t - d)^4$ .

Sea  $H^{-1}(0) = \{t_i, i=0, \dots, h\}$ , donde  $t_0 = d$  y  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$ . En particular,  $h + 1$  es la cantidad de raíces de  $H$ .

De la igualdad  $\deg(\text{Ram}(R)) = 2n - 2$  deducimos que:

$$2n - 2 \geq \sum_i \text{Ram}_R(t_i : 1) + \text{Ram}_R(d : 1) = \sum_j (n_j - 1) + 3 = 4n - 1 - 4 - (h - 1) + 3,$$

que equivale a decir que  $h \geq 5 + \frac{4n-1-5-4}{2} + 1 = 2n + 1$ . Por otro lado,  $\deg H = 4n - 1$  y  $H = \prod_{i=1}^5 (t - a_i) B^2(t) (t - d)^4$  tiene a lo sumo  $2n + 2$  raíces. Por lo tanto

$$2n + 2 \geq h + 1 \geq 2n + 2.$$

Esto quiere decir que tenemos igualdades, lo que se da si y sólo si  $H$  tiene 5 raíces simples 1 de multiplicidad 4 y  $\frac{4n-10}{2}$  raíces dobles.  $\square$

En resumidas cuentas, las posibilidades para  $H = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$  son las siguientes:

- a)  $\deg(\hat{P}) = n = \deg(\hat{Q}) + 3$ ,  $H$  cumple que  $\deg(H) = 4n - 3$ , tiene 5 raíces simples y el resto doble.
- b)  $\deg(\hat{P}) = n = \deg(\hat{Q}) + 1$ ,  $H$  cumple que  $\deg(H) = 4n - 1$ , tiene 5 raíces simples y el resto dobles. Recordemos que en este caso hay una condición extra sobre el discriminante, la que no afecta la configuración de las raíces de  $H$ .
- c)  $\deg(\hat{P}) = n = \deg(\hat{Q}) + 1$ ,  $H$  cumple que  $\deg(H) = 4n - 1$  tiene 5 raíces simples, una de multiplicidad 4 y el resto dobles.

Además, en todos los casos 0 y 1 son raíces de  $H$ .

Veamos entonces que podemos llevar estas condiciones a un sistema de ecuaciones polinomiales.

### Descripción de ecuaciones polinomiales para el caso (a):

Si  $\deg(\pi) = n$ , tenemos

$$\hat{P}(t) = A_1(t)(B_1(t))^2$$

$$\hat{Q}(t) = A_0(B_0(t))^2$$

$$\hat{P} - c\hat{Q} = A_2(t)(B_2(t))^2$$

$$\hat{P} - \lambda c\hat{Q} = A_3(t)(B_3(t))^2$$

Tenemos además que:  $\deg(\hat{P}) = n = \deg(\hat{Q}) + 3$ ,  $c \neq 0$ , y los polinomios  $\{A_i, B_j\}$  con raíces simples y coprimos entre sí. Por último, el polinomio  $A(t) = \prod_i A_i(t)$  cumple  $A(0) = A(1) = 0$  y  $\deg(A) = 5$ .

Notemos  $A(t) = \prod_{i=1}^5 (t - a_i)$ ,  $B(t) = \prod_{i=0}^3 (B_i) = \prod_{i=1}^{2n-4} (t - b_i)$

Podemos elegir  $\deg(A_i)$  bajo la condición  $\sum_{i=0}^3 \deg(A_i) = 5$ . Además de elegir  $i_0, i_1$  de forma que  $a_{i_0} = 0, a_{i_1} = 1$ . Existe un número finito de posibles elecciones.

Si escribimos las condiciones reflejadas en las raíces de  $H$  y  $c$  obtenemos,  $(5 - 2) + (4n - 3 - 5)/2 + 1 = 3 + 2n - 4 + 1 = 2n$  variables.

La ecuación

$$A_1(t)(B_1(t))^2 - cA_0(B_0(t))^2 = A_3(t)(B_3(t))^2$$

determina  $n$  ecuaciones polinomiales en las  $2n$  variables: una por cada término del polinomio, salvo el de grado  $n$  (por ser mónicos).

Para  $A_1(t)(B_1(t))^2 - \lambda c A_0(B_0)^2$  se obtienen  $n$  ecuaciones mas.

Según el teorema de Bézout [K] un sistema genérico de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, tiene una cantidad finita de soluciones. Nuestro sistema no cumple con esa propiedad, debido a que hay soluciones que no son soluciones al problema original.

Por ejemplo, en el caso precedente,  $\deg(A_0) = 3$ , tomando  $c = 0$  obtenemos  $\hat{P} = \hat{P} - c\hat{Q} = \hat{P} - c\lambda\hat{Q} = (t - a_i)^2 \prod_j (t - b_j)^2$  con  $b_j$  y  $a_i$  cualesquiera (dejando 2  $a_i$  para que sean 1 y 0) cumplen las ecuaciones. Pero no es una solución a nuestro problema, ya que  $\hat{R}(t) = \hat{P}(t)/c\hat{Q}(t) = \infty, \forall t$ .

Falta exigir la condición de que  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  sean coprimos, para lo cual basta pedir que  $c \neq 0$  y  $a_i, b_j$  todos distintos. Es decir las soluciones del sistema original pero fuera de una subvariedad algebraica. Para solucionarlo basta agregar una variable  $u$  y el polinomio

$$c \left( \prod_{i \neq j} a_i - a_j \right) \left( \prod_{i \neq j} b_i - b_j \right) \left( \prod_{i,j} a_i - b_j \right) u = 1$$

Los factores que multiplican a  $u$  se anulan si y sólo si los polinomios no son coprimos o además  $c = 0$ , que corresponden a las soluciones que no responden al problema original. Podemos tomar una ecuación mas simple, ya que si los  $a_i, b_j$  correspondientes a  $\hat{P}, \hat{Q}$  son distintos entonces  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{P} - c\hat{Q}, \hat{P} - \lambda c\hat{Q}$  son coprimos entre sí.

Hay distintas maneras equivalentes de presentar un sistema de ecuaciones.

En este caso por ejemplo, podemos notar que en realidad conocemos todas las raíces de  $G = \hat{P}'\hat{Q} - \hat{P}\hat{Q}'$  en función de  $H$ .

Sea  $\alpha$  raíz de  $\hat{P}$  con multiplicidad  $m > 1$ , entonces  $\alpha$  es raíz de  $G$  con multiplicidad  $m - 1$ . Basta notar que  $\hat{P}(t) = (t - \alpha)^m P_\alpha(t)$  donde  $P_\alpha$  no tiene a  $\alpha$  como raíz, por lo tanto

$$G(t) = (t - \alpha)^{m-1} \left[ m(\hat{P}_\alpha(t) - \hat{P}'_\alpha(t)(t - \alpha))\hat{Q}(t) - (\hat{P}_1(t)(t - \alpha)\hat{Q}(t)) \right]$$

Como  $\alpha$  no es raíz del segundo factor si  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son coprimos, concluimos que la multiplicidad de  $\alpha$  en  $G$  es  $m - 1$ . Análogo para  $\hat{Q}, \hat{P} - c\hat{Q}$  y  $\hat{P} - \lambda c\hat{Q}$ .

Concluimos así que las raíces dobles de  $H$  son raíces de  $G$ . Como en nuestras hipótesis hay  $(4n - 3 - 5)/2$  raíces dobles, imponemos así que  $G$  tiene  $2n - 4$  raíces simples. Luego,  $G^2 \prod_i (t - a_i) = H$  nos da otro sistema.

Sin embargo cuando se intenta encontrar las soluciones explícitas, puede ser mas útil alguno en particular, incluso usar varios al mismo tiempo.

### Descripción de ecuaciones polinomiales para el caso (b):

Las ecuaciones en este caso son:

$$\hat{P}(t) = A_1(t)(B_1(t))^2$$

$$\hat{Q}(t) = A_0(B_0(t))^2$$

$$\hat{P} - c\hat{Q} = A_2(t)(B_2(t))^2$$

$$\hat{P} - \lambda c\hat{Q} = A_3(t)(B_3(t))^2$$

Recordemos que  $\deg(\hat{P}) = n = \deg(\hat{Q}) + 1$ .

Podemos fijar  $\deg(A_i)$  de forma que sumen 5, así como cuáles de los  $a_i$ 's son 0 y 1.

Si escribimos las condiciones en las raíces de  $H$  y  $c$  como en la parte anterior tenemos,  $(5 - 2) + (4n - 1 - 5)/2 + 1 = 3 + 2n - 3 + 1 = 2n + 1$  variables, es decir 1 incógnita mas.

La otra ecuación la obtenemos al fijar  $a \notin \{0, 1, \lambda\}$  tal que  $(a : 1) \in \text{Sop}(\text{Disc}_R)$ . Esto podemos verlo como una raíz doble de  $\hat{P} - ac\hat{Q}$ . Agregando una nueva variable  $s$  tenemos que  $\hat{P}(s) - a\hat{Q}(s) = 0$  y  $\hat{P}'(s) - ac\hat{Q}'(s) = 0$ . Obtenemos así 2 nuevas ecuaciones polinomiales, completando  $2n + 2$  incógnitas, con  $2n + 2$  ecuaciones polinomiales.

Tenemos que exigir además  $s \notin \{0, 1, \infty\}$ .

Al igual que en el caso anterior, tendremos de nuevo que exigir que los polinomios  $\{A_i, B_j\}$  sean coprimos y  $c \neq 0$ , agregando así una nueva ecuación y otra variable.

**Descripción de ecuaciones polinomiales para el caso (c):**

En este caso tenemos una raíz de orden 4 en  $H$ . Como mencionamos antes, podemos fijar esta raíz en cualquiera de los factores y luego resolver el problema en cada posibilidad.

$$\hat{P}(t) = A_1(t)B_1(t)^2(t - b)^4$$

$$\hat{Q}(t) = A_0(t)B_0(t)^2$$

$$\hat{P}(t) - c\hat{Q}(t) = A_2(t)B_2(t)^2$$

$$\hat{P}(t) - \lambda c\hat{Q}(t) = A_3(t)B_3(t)^2$$

Fijando igual que en los otros casos los grados de los  $A_i$ 's y cuales de los coeficientes  $a_j$  son 0 y 1, tendremos  $(5-2)+(4n-5-1-4)/2+1+1 = 2n$  variables. Por otro lado ya obtuvimos  $2n$  ecuaciones polinomiales y agregamos una más, para exigir que no tengan raíces comunes, concluyendo así el sistema.

Tenemos así planteados todos las proyecciones hiperelípticas de curvas de género 2 hacia una curva elíptica  $X_\lambda$  fija, como el conjunto (finito) de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales.

### 3.3. Curvas elípticas isomorfas

Podemos deducir ahora cuándo dos curvas elípticas son isomorfas.

Sea  $f : X_\lambda \rightarrow X_{\lambda_1}$  un isomorfismo, con  $f(\infty) = q$ . Por 2.2.7 existe un isomorfismo de  $i : X_{\lambda_1} \rightarrow X_{\lambda_2}$  donde  $i(q) = \infty$ . Tenemos así que  $\pi = i \circ f$  esta en las hipótesis de 3.1.1. Como  $\deg(\pi) = \deg(R) = 1$  y  $R(\infty) = \infty$ , entonces  $\hat{R}$  es un polinomio de grado 1. Por último  $\hat{R}(\{0, 1, \lambda_1\}) = \{0, 1, \lambda_2\}$ .

La cantidad de  $\lambda_2$  posibles es a lo más 6.

## Capítulo 4

# Construcción explícita de cubrimientos hiperelípticos de género 2 y grados bajos

Si bien llegamos a ver qué estructura tienen los cubrimientos hiperelípticos sobre una curva elíptica prefijada, y qué condiciones adicionales debemos pedir para que la curva  $\Gamma$  sea de género 2, hasta ahora no hemos visto ningún caso concreto. Esto se debe, en parte, a que a priori nada asegura que podamos encontrar explícitamente estos morfismos, ya que estos vienen dados como soluciones a sistemas de ecuaciones polinomiales de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas. De hecho, si los grados de los polinomios correspondientes son elevados su resolución podría no poder ser efectiva. Tomemos como ejemplo el caso más básico, o sea, 1 ecuación y 1 incógnita: en otros términos, se trata de hallar las raíces de un polinomio. En este caso sabemos que si el polinomio tiene grado superior a 4, genéricamente no se pueden encontrar sus raíces. Por lo que no hay esperanzas de resolver este sistema al menos a nivel genérico. Una manera de saber si bajo estas condiciones, es decir los sistemas polinomiales de ecuaciones, tiene una cantidad finita de soluciones es obteniendo una Base de Gröbner reducida al anillo de polinomios generado por el sistema. En nuestro caso, todos los sistemas cuadrados que obtenemos tienen sus soluciones parametrizadas por cubrimientos de grado y discriminante fijo (de una curva prefijada), por lo que sabemos que sólo puede haber un número finito de soluciones.

### 4.1. Cubrimientos hiperelípticos para género $g > 2$

**Observación 4.1.1** *Sea  $X_\lambda$  una curva elíptica. Existen cubrimientos hiperelípticos de  $X_\lambda$  por curvas de género 3.*

Sea  $\hat{P} = t(t-1)$ ,  $\hat{Q} = (t-a_2)$  donde  $a_2 \notin \{0,1\}$ . Está claro que el polinomio  $\hat{P} - \alpha\hat{Q}$  tiene raíces simples salvo para  $\alpha = -1 + 2a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - a}$ . Podemos elegir  $c$  y  $\lambda$  para que  $H_\lambda = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$  tenga solo raíces simples. En tal caso, sea  $\hat{R}(t) = \hat{P}(t)/c\hat{Q}(t)$  y  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  el morfismo asociado por 3.1.6. La curva hiperelíptica  $\Gamma$  tiene entonces ecuación afín  $y^2 = x(x-1)(x-a_2)(x^2+a_2)(x^2+(1-\lambda)x+a_2\lambda)$  y  $\pi$  y la proyección  $\pi$  satisface, en ecuaciones afines, la fórmula  $\pi(x, y) = \left( \frac{\hat{P}(x)}{c\hat{Q}(x)}, \frac{y}{c^2\hat{Q}(x)^2} \right)$ . Tenemos así un morfismo de una curva hiperelíptica de género 3 a una curva elíptica.  $\square$

**Corolario 4.1.2** *Existen cubrimientos hiperelípticos de género  $g > 2$  arbitrario, de cualquier curva elíptica  $X_\lambda$ .*

Para  $g$  impar tomamos polinomios  $\hat{P}$  de grado  $n = \frac{2g+2}{4}$  y  $\hat{Q}$  de grado  $n-1$  coprimos mónicos con raíces simples. Existen una cantidad finita de  $a$  para los cuales  $\hat{P} - a\hat{Q}$  tiene raíces dobles. Sea

$c \neq 0$  tal que  $a = c$  y  $a = \lambda c$  tenga solo raíces simples. En tal caso  $\hat{R} = \frac{\hat{P}}{c\hat{Q}}$  determina un morfismo  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$ , donde la ecuación afín de  $\Gamma$  es  $y^2 = \hat{P}(x)\hat{Q}(x)(\hat{P}(x) - c\hat{Q}(x))(\hat{P}(x) - \lambda c\hat{Q}(x))$  y en ecuaciones afines  $\pi$  está dada por  $\pi(x, y) = \left( \frac{\hat{P}(x)}{c\hat{Q}(x)}, \frac{y}{c^2\hat{Q}(x)^2} \right)$ .

Para  $g$  par tomamos polinomios  $\hat{P}$  de grado  $n = \frac{2g+4}{4}$  y  $\hat{Q}$  de grado  $n-3$ , coprimos, mónicos y con raíces simples. Esta elección corresponde al caso en que el índice de ramificación en  $\infty$  vale 3. Tomando  $c$  de forma que  $\hat{P} - c\hat{Q}$  y  $\hat{P} - \lambda c\hat{Q}$  tengan solo raíces simples, la fracción racional  $\hat{R} = \frac{\hat{P}}{c\hat{Q}}$ , al igual que en el caso anterior, determina un morfismo  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$ , tal que la ecuación afín de  $\Gamma$  es  $y^2 = \hat{P}\hat{Q}(\hat{P} - c\hat{Q})(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})$ . Luego, su género vale  $g$ .

**Corolario 4.1.3** *Sea  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico de grado  $n$  y género  $g$ . Entonces  $g \leq 2n - 1$ .*

Estudiamos ahora el problema para género 2.

## 4.2. Construcción de todos los cubrimientos hiperelípticos de grado 2 por curvas de género 2

Sean  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico y  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  el morfismo asociado 3.1.1, ambos de grado 2. Según 3.2.1 el discriminante de  $\pi$  es de la forma  $\text{Disc}(\pi) = a + \tau_{X_\lambda}(a)$ , con  $a \neq \tau_{X_\lambda}(a)$ , ya que no puede haber un punto de índice 3.

Tenemos entonces que  $\pi$ , corresponde a un morfismo  $R$  cuya forma afín  $\hat{R}$  cumple que:

- $\hat{R} = \hat{P}/\hat{S}$ , donde  $\hat{P}, \hat{S}$  son polinomios coprimos de grados  $\deg(\hat{P}) = \deg(\hat{S}) + 1 = 2$ .
- $H = \hat{P}\hat{S}(\hat{P} - \hat{S})(\hat{P} - \lambda\hat{S})$  tiene 5 raíces simples (3 aparte de 0 y 1), y el resto son dobles.
- el soporte de  $\text{Disc}_R$  está contenido en  $\{\varphi_{X_\lambda}(a), (0 : 1), (1 : 1), (\lambda : 1), \infty\}$ .

Dado que  $\deg(H) = 7$ , solo uno de sus factores tiene una raíz doble. Estudiamos primero el caso en que  $\hat{P}$  tiene una raíz doble.

$$\begin{aligned}\hat{P} &= t^2 + p_1t + p_0 \\ \hat{S} &= q_1t + q_0\end{aligned}$$

Notar que en esta ocasión no usaremos los términos del polinomio mónico  $\hat{Q} = \hat{S}/q_1$  como variables. De hecho estudiando el sistema de ésta forma, tenemos 4 incógnitas, además de tener 2 ecuaciones lineales: las correspondientes a que 0 y 1 sean raíces de  $H$ .

Para 0 tenemos una de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}p_0 &= 0 \\ q_0 &= 0 \\ p_0 - q_0 &= 0 \\ p_0 - \lambda q_0 &= 0\end{aligned}$$

Recordemos que  $\hat{P}$  tiene una raíz doble. Luego  $p_0 \neq 0$ . Podemos escribir entonces la ecuación de la manera siguiente:

$$up_0 - q_0 = 0$$

para  $u \in \{1, 1/\lambda, 0\}$

podemos estudiar por casos eligiendo  $u$ .

Exigiendo que 1 sea raíz tenemos luego la ecuación lineal

$$v(1 + p_1 + p_0) - (q_1 + q_0) = 0$$

con  $v \in \{1, 1/\lambda, 0\}$ . Además, como  $\deg(\hat{Q}) = 1$ , no pueden ser  $u$  y  $v$  nulos simultáneamente. Como tenemos que  $\hat{P}$  tiene una raíz doble tenemos la ecuación

$$p_1^2 - 4p_0 = 0$$

La última ecuación proviene de que  $\hat{P} - a\hat{Q}$  tiene una raíz doble, por lo que

$$(p_1 - aq_1)^2 - 4(p_0 - aq_0) = 0$$

$$-2ap_1q_1 + a^2q_1^2 + 4aq_0 = 0$$

Habiendo completado el sistema de 4 ecuaciones, encontremos ahora sus soluciones. Primero despejemos  $q_0, q_1$ :

$$q_0 = p_0u$$

$$q_1 = (v)(1 + p_0 + p_1) - q_0 = v(1 + p_1) + (v - u)p_0.$$

Por otro lado  $p_0 = (1/4)p_1^2$ , así que notando todas las variables en función de  $p_1$  obtenemos:

$$p_0 = (1/4)p_1^2$$

$$q_0 = (1/4)p_1^2u$$

$$q_1 = v(1 + p_1) + (v - u)(1/4)p_1^2$$

Despejando en la última ecuación obtenemos

$$-2ap_1(v(1 + p_1) + (v - u)(1/4)p_1^2) + a^2(v(1 + p_1) + (v - u)(1/4)p_1^2)^2 - 4a(1/4)p_1^2u = 0$$

Deducimos entonces que  $p_1$  es raíz del polinomio

$$c_4t^4 + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0,$$

donde

$$c_4 = a^2((v - u)/4)^2$$

$$c_3 = (-a/2)(v - u) + (a^2/2)(v)(v * u)$$

$$c_2 = -2av + 2a^2v(v - u)/4 + a^2v^2 + au$$

$$c_1 = -2av + 2a^2v$$

$$c_0 = a^2v$$

Si  $u \neq v$ ,  $p_1$  es raíz de un polinomio de grado 4 que se puede resolver. Una vez que tenemos los posibles  $p_1$ , despejamos para cada uno de ellos el resto de las variables, resolviendo así el sistema.

Si  $u = v$  entonces  $c_4 = c_3 = 0$  y  $c_2 = -2av + a^2v^2 + av = v(-a + a^2v)$ . Como  $v = u$ ,  $v \neq 0$ , si tuviéramos  $-a + a^2v = 0$  entonces  $a = 1/v \in \{1, \lambda\}$ , lo cual llevará a un absurdo. Por lo tanto, mismo si  $u = v$  existe alguna raíz  $p_1$  y por tanto una solución al sistema.

Veamos ahora los otros casos. Si  $\hat{P} - \hat{Q}$  tiene una raíz doble se puede realizar exactamente el mismo estudio llamando,  $p_i$  a sus coeficientes. En éste caso en vez de la condición  $u \in \{0, 1, 1/\lambda\}$  tendremos  $u \in \{0, -1, 1/(-1 + \lambda)\}$ , debido a que, si por ejemplo 0 es raíz de  $\hat{P}$ , entonces  $p_0 + q_0 = 0$ . Trabajamos de manera análoga en las condiciones de  $v$ , consiguiendo así todas las soluciones para este caso. Lo mismo se puede aplicar al caso en que  $\hat{P} - \lambda\hat{Q}$  tenga una raíz doble.

### Ejemplo 4.2.1

Consideremos por último las condiciones,  $a = -3$ ,  $\hat{P}$  con una raíz doble y  $(\hat{P} - \hat{Q}) = (t - 1)t$ , así como  $u = v = 1$ .

Tenemos entonces que  $p_1$  es raíz de  $(-2a + a^2 + a)t^2 + (-2a + 2a^2)t + a^2 = -3(-4t^2 - 8t - 3)$ . Por lo que  $p_1 = (4 \pm (16 - 12)^{1/2})(1/2) = 3$  o  $1$ .

Si tomamos  $p_1 = 1$  tenemos



$$p_0 = 1/4$$

$$q_0 = 1/4$$

$$q_1 = 2$$

Entonces la ecuación afín de  $\Gamma$  debe ser  $y^2 = t(t-1)(t-1/8)(t^2+t+1/4-2\lambda)$  y el cubrimiento hiperlítico dado, en ecuaciones afines, por  $\pi(x, y) = \left( \frac{(x+1/2)^2}{2x+1/4}, \frac{y(x+1/2)}{(2x+1/2)^2} \right)$ .

### 4.3. Construcción de cubrimientos hiperlíticos de grado 3 por curvas de género 2

Para grado 3 se puede dar el caso  $\text{Ram}_\pi(\infty) = 2$ . Estudiaremos éste caso ya que es más sencillo.

La igualdad  $\text{ind}_\pi(\infty) = 3$  equivale a  $\text{deg}(\hat{Q}) = 0$ . Siendo  $Q$  mónico ello implica que  $\hat{Q} = 1$ . Fijemos ahora el caso  $\text{deg}(A_1) = \text{deg}(A_2) = 1$ , con 0 raíz de  $A_1$  y 1 raíz de  $A_2$ . La ventaja de elegir de esta forma es que en este caso  $\hat{R} = \hat{P}/c$  tiene grado 3,  $\text{deg}(\text{Ram}(R)) = 2$  y estamos exigiendo que  $\hat{P}$  y  $\hat{P} - c$  tengan una raíz doble. Por lo tanto, para ningún otro  $a$  el polinomio  $\hat{P} - a$  tiene raíz doble; en particular sabemos que  $\text{deg}(A_3) = 3$ .

Tomamos entonces:

$$\hat{P} = t(t - b_1)^2$$

$$\hat{P} - c = (t - 1)(t - b_2)^2$$

nos da una ecuación lineal

$$2b_1 = 1 + 2b_2$$

Esto se traduce en que  $b_1$  y  $b_2$  sean las raíces de la derivada. Por lo tanto  $\hat{P}' = 3(t - b_1)(t - b_2)$ , lo cual nos da una nueva ecuación lineal:

$$3(b_1 + b_2) = 2(2b_1).$$

Si bien las soluciones al sistema original iban a cumplir esta igualdad, imponer antes esta igualdad nos permite encontrar  $b_1, b_2$  como solución a un sistema lineal.

Tenemos así que

$$b_1 = 3/4$$

$$b_2 = 1/4$$

luego

$$c = b_2^2 = 1/16$$

y por tanto  $\hat{P} - c\lambda = t^3 - (3/2)t^2 + (9/16)t - \lambda/16$ , que no tiene raíces múltiples.

Concluimos así que la curva  $\Gamma$  resultante del teorema 3.1.6, tien ecuación afín  $y^2 = t(t - 1)(t^3 - (3/2)t^2 + (9/16)t - \lambda/16)$ , y el cubrimiento está dado, en ecuaciones afines, por  $\pi(x, y) = \left( \frac{x(x - 3/4)^2}{1/16}, \frac{y(x - 3/4)(x - 1/4)}{1/256} \right)$ .

Veamos que con este caso se pueden obtener todas las soluciones con  $\text{deg}(R) = 3$  y  $\text{Disc}(\pi) = 2\infty$ .

Sea  $R$  el morfismo obtenido como solución, cuando las raíces múltiples están en  $P$  y  $P - \lambda c$ . Existe entonces una transformación de Möbius  $T$  tal que:

$$T(\infty) = \infty, \quad T(0) = 0, \quad T(\lambda) = 1$$

Consideremos ahora  $R_1 = T \circ R$ , así como el cubrimiento hiperlítico  $\pi_1$  sobre  $X_{\lambda_1}$ , donde  $\lambda_1 = T(1) \notin \{1, 0, \infty\}$ . Como  $\text{Disc}(R_1) = 2 \times (\infty) + (0) + (1)$ , los polinomios  $\hat{P}_{11}$  y  $\hat{P}_1 - c_1$  tienen

una raíz doble. Luego  $\hat{P} - \lambda_1 c_1$  no tiene raíces múltiples. Por último, si  $\pi_1 : \Gamma_1 \rightarrow X_{\lambda_1}$ , se tiene que el género de  $\Gamma_1$  es 2. Solo falta demostrar que 1 sea raíz de  $\hat{P}_1$  y 0 sea raíz de  $\hat{P}_1 - c_1$ .

Sean  $\omega_0, \omega_1 \in \Omega_\Gamma$  tales que  $\pi_1(\omega_i) = ((i : 1)(0 : 1))$ . Estos existen por tener  $\hat{P}_1$  y  $\hat{P}_1 - c_1$  grado impar. Además  $\omega_i \neq \infty$  ( $i = 0, 1$ ). Podemos entonces construir un isomorfismo como en 1.2.5.b  $i_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma'$ , tal que

$$i_1(\infty) = \infty, \quad i_1((0 : 1)(0 : 1)) = w_0, \quad i_1((1 : 1)(0 : 1)) = w_1$$

El morfismo  $\pi_2 = \pi_1 \circ i_1 : \Gamma_2 \rightarrow X_{\lambda_1}$  puede también ser determinado ya que cumple las hipótesis del caso anterior.

Para las otras combinaciones, se llegará de forma análoga al primer caso. Por último, como las funciones  $i_2$  y  $T$  varían en un cantidad finita, tenemos determinado todos los cubrimientos de grado 3, con un punto de índice 3 (y género 2), de una curva elíptica fija.

#### 4.4. Construcción de cubrimientos hiperelípticos por curvas de género 2, con 2 puntos de ramificación y $\text{Disc}(\pi) = 2a$

Este es el único caso que nos falta estudiar. Recordemos que para que este caso se dé,  $R$  debe tener un punto con índice 4. En particular  $\deg(\pi)$  debe ser superior a 3. Construyamos entonces ejemplos con  $\deg(\pi) = 4 = \deg(\hat{P}) = \deg(\hat{Q}) + 1$ .

Fijemos

$$\begin{aligned} \hat{P} &= (t - \alpha)^4 \\ \hat{P} - c\hat{Q} &= (t - b_1)^2(t - b_2)^2 \\ \hat{Q} &= t(t - b_3)^2 \end{aligned}$$

Recordemos que con ésta elección  $\hat{P} - a\hat{Q}$  no tendrá raíces dobles si  $a$  no es 0, 1. Después tomamos  $\lambda$  para que 1 sea raíz.

Que 0 sea raíz de  $\hat{Q}$  nos da la ecuación

$$\alpha^4 = (b_1 b_2)^2$$

Salvo una elección de signo podemos fijar

$$\alpha^2 = b_1 b_2$$

$\hat{Q}$  se puede escribir como

$$\hat{Q}(t) = (-1/c)[(-4\alpha + 2b_1 + 2b_2)t^3 + (6\alpha^2 - b_1^2 - 4b_1 b_2 - b_2^2)t^2 + (-4\alpha^3 + 2b_1 b_2^2 + 2b_1^2 b_2)] = (-1/c)[At^3 + Bt^2 + Ct]$$

para exigir una raíz doble se debe exigir que  $B^2 = 4AC$

$$\begin{aligned} B^2 &= (6\alpha^2 - b_1^2 - 4b_1 b_2 - b_2^2)^2 = (2\alpha^2 - b_1^2 - b_2^2)^2 \\ 4AC &= 16(-2\alpha + b_1 + b_2)(-2\alpha^3 + b_1 b_2^2 + b_1^2 b_2) \\ &= 16\alpha^2(-2\alpha + b_1 + b_2)^2 \end{aligned}$$

Como ambos términos están escritos como cuadrados de sus variables, podemos fijar

$$(2\alpha^2 - b_1^2 - b_2^2) = 4\alpha(-2\alpha + b_1 + b_2)$$

Si fijamos  $b_1$  cualquiera, distinto de 0 y 1, y sustituimos  $b_2$  por  $\alpha^2/b_1$ , obtenemos que las posibilidades para  $\alpha$  son las raíces del polinomio

$$U(\alpha)(1/b_1)^2 \alpha^4 + (4/b_1) \alpha^3 - (10) \alpha^2 + (4b_1) \alpha + b_1^2.$$

Siendo éste un polinomio de grado 4, se pueden encontrar las raíces, una de las cuales es  $b_1$ , la que no sirve como solución al sistema, ya que necesitamos que  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  sean coprimos. Factorizando  $U$  tenemos que

$$U(x) = (1/b_1)^2(x - b_1)^2(x - b_1(-3 - 2\sqrt{2}))(x - b_1(-3 + 2\sqrt{2})).$$

Así, eligiendo  $\alpha = b_1(-3 + 2\sqrt{2})$ , el problema se resuelve de la misma manera que para la otra elección. Se tiene

$$\hat{P}(t) = (t - b_1(-3 + 2\sqrt{2}))^4$$

La igualdad  $\alpha^2 = b_1 b_2$  implica entonces que:

$$b_2 = b_1(-3 + 2\sqrt{2})^2$$

Luego,

$$\hat{P} - c\hat{Q} = (t - b_1)^2(t - b_1(-3 + 2\sqrt{2}))^2.$$

Siendo  $\hat{Q}$  mónico, deducimos que:

$$c = -2b_1 - 2b_1(-3 + 2\sqrt{2})^2 + 4b_1(-3 + 2\sqrt{2}) = -2b_1[(1 + (-3 + 2\sqrt{2})^2) - 2(-3 + 2\sqrt{2})]$$

y

$$= -2b_1[-4 + 2\sqrt{2}] = -2b_1[-2 + \sqrt{2}].$$

Por último, chequeando el termino de segundo grado en  $\hat{Q}$  obtenemos

$$2b_3 = -(1/c)[6\alpha - b_1^2 - 4b_1 b_2 - b_2^2].$$

Por lo tanto, despejando  $\alpha$  y  $b_2$  obtenemos

$$b_3 = b_1 \left( \frac{-1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)$$

y

$$\hat{Q} = t \left( t - b_1 \left( \frac{-1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) \right)^2$$

Como además queremos que  $(\hat{P} - \lambda c\hat{Q})(1) = 0$ , deducimos que

$$\lambda = - \frac{(1 - b_1(-3 + 2\sqrt{2}))^4}{(-2b_1(-2 + \sqrt{2})) \left( 1 - b_1 \left( \frac{-1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right) \right)^2}.$$

Concluimos así que fijado  $b_1$  y tras aplicar 3.1.6, obtenemos  $\Gamma$  curva hiperelíptica de ecuación afín

$$y^2 = t(t - 1) \left( (t - b_1(-3 + 2\sqrt{2}))^4 - \lambda ct \left( t - b_1 \left( \frac{-1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) \right)^2 \right)$$

y  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  determinada por la ecuación afín

$$\pi(x, y) = \left( \frac{\hat{P}}{c\hat{Q}}, \frac{(t - \alpha)^2(t - b_1)(t - b_2)(t - b_3)}{c^2\hat{Q}^2} \right)$$

Notar que para resolver este sistema no podemos elegir  $\lambda$ , dado que la relación entre  $\lambda$  y  $b_1$  es de grado 4. Si bien se puede empezar fijando  $\lambda$  y luego determinar  $b_1$ , se usó de esta manera por que era mas fácil de resolver.

**Corolario 4.4.1** *Se dan todas las posibilidades de ramificación y discriminante para morfismos entre curvas hiperelípticas de género 2 y curvas elípticas.*

**Ejemplo 4.4.2** *Cubrimientos hiperelípticos por curvas de género 2 con grado  $n$  múltiplo de 2 o 3.*

Sea  $\pi : \Gamma \rightarrow X_\lambda$  un cubrimiento hiperelíptico con  $\Gamma$  de género 2. Recordemos que existe un isomorfismo  $i : X_\lambda \rightarrow T_G$  entre la curva elíptica  $X_\lambda$  y el Toro 1.2.9. En particular, el homomorfismo multiplicación por un entero  $k > 1$  definido sobre el Toro define un morfismo de  $X_\lambda$  en sí misma, de grado  $k^2$ . Componiendo ésta última con  $\pi$  define un cubrimiento hiperelíptico de grado  $k^2 \times \deg(\pi)$ . Luego conocemos ejemplos con  $\deg(\pi) = 2 \times k^2$  y  $3 \times k^2$ .

# Bibliografía

- [L] S. Lang, Complex Analysis, *Board (1999)*
- [F-K] H. M. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces, *Board (1992)*
- [S] M. Spivak, Cálculo en variedades, *Reverte (1988)*
- [K] F. Kirwan, Complex Algebraic Curves, *Cambridge Universite Press*
- [M] R. Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces, *Board 1991*
- [G-H] P. Griffiths, J. Harris Principles of Algebraic Geomerty, *Wiley (1978)*