

TRABAJO MONOGRÁFICO

Procesos de Percolación: El número de clusters infinitos

Nicolás Fraiman

Orientador: Gustavo Guerberoff

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

14 de diciembre de 2005

Resumen

En un proceso de percolación independiente sobre un grafo localmente finito y conexo, $G = (V, E)$, a cada arista le es asignado un valor 0 (arista cerrada) o 1 (arista abierta) de acuerdo a la medida de probabilidad producto de Bernoulli en $\{0, 1\}^E$. Se estudian luego las propiedades de conectividad del subgrafo aleatorio de G que surge de quitar las aristas con valor 0. Las componentes conexas maximales de ese subgrafo se llaman *clusters*, y es de particular interés el estudio de condiciones para la existencia de clusters infinitos. El objetivo de esta monografía es estudiar el *número de clusters infinitos* en los procesos de percolación independiente sobre grafos transitivos. En particular se comparan los casos de $G = \mathbb{L}^d, \mathbb{T}_d$ y $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ que muestran los tres tipos de comportamiento posibles.

Palabras Claves: Percolación, Cluster infinito, Transporte de masa, Monotonía de la unicidad, Grafo promediable.

Abstract

In a independent percolation process on a locally finite graph $G = (V, E)$ to each edge is assigned a value 0 (closed bond) or 1 (opened bond) according to the Bernoulli product measure of probability in $\{0, 1\}^E$. The properties of connectivity of the random subgraph of G which arises from erasing the edges with value 0 are of interest. The maximal connected components of that subgraph are called *clusters*, and is of particular interest the study of conditions that guarantee the existence of infinite clusters. The objective of this monograph is to study the *number of infinite clusters* in independent percolation processes on transitive graphs. As motivation three individual cases are compared: $G = \mathbb{L}^d, \mathbb{T}_d$ and $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ that exhibit the three possible types of behavior.

Keywords: Percolation, Infinite cluster, Mass-transport, Uniqueness monotonicity, Ameneable graph.

Índice general

Índice general	1
1. Introducción	3
1.1. Reseña histórica	3
1.2. Definiciones básicas	5
1.3. El fenómeno crítico	7
1.4. Herramientas matemáticas	10
1.4.1. Eventos crecientes	10
1.4.2. La desigualdad FKG	11
1.4.3. La fórmula de Russo	13
1.5. El teorema de Newman-Schulman	18
2. Percolación en retículos (\mathbb{L}^d)	21
2.1. Valores críticos	21
2.2. Unicidad para grafos promediabiles	25
2.3. La probabilidad crítica en \mathbb{L}^2	29
2.3.1. Auto-dualidad	29
2.3.2. El teorema de Harris	32
2.3.3. El teorema de Kesten	35
3. Percolación en árboles (\mathbb{T}_d)	44
3.1. Procesos de ramificación	47
3.2. El principio de transporte de masa	50
3.3. Algunos resultados sobre clusters infinitos	52
4. Percolación en grafos exóticos ($\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$)	54
4.1. La situación cerca del valor crítico	55
4.2. Unicidad para p cerca de 1	56
4.2.1. Densidad de un cluster	57
4.2.2. Frecuencia de un cluster	58
4.2.3. El cluster infinito es único	61

Índice general

5. Monotonía de la unicidad	63
5.1. El teorema de Häggström y Peres	63
5.2. El teorema de Schonmann	65
5.3. El valor crítico de unicidad	67
A. Apéndice general	69
A.1. El principio de transporte de masa	69
A.2. Una prueba alternativa del teorema de Harris	71
A.3. Una prueba alternativa del teorema de Kesten	74
Bibliografía	76

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo veremos los conceptos básicos con los que nos interesa trabajar. Veremos un resultado muy general sobre el número de clusters infinitos para grafos transitivos.

1.1. Reseña histórica

La teoría de los procesos de percolación comenzó en 1957 cuando Broadbent y Hammersley [6] introdujeron el, ahora estándar, proceso de percolación independiente en \mathbb{L}^d . Lo plantearon como un modelo probabilístico para el flujo de un fluido o un gas a través de un medio aleatorio. Hicieron esto para modelar una piedra porosa a nivel microscópico con el objetivo de estudiar si el centro de la piedra se moja cuando se sumerge en un cubo de agua.

Desde entonces la teoría de los procesos de percolación ha atraído gran interés. Esto es en parte debido a su aplicabilidad: la independencia en el modelo lo hace manejable y a pesar de ello no es demasiado poco realista para modelar muchos medios aleatorios. Es uno de los modelos más sencillos que tiene una transición de fase, y por lo tanto es una herramienta importante para la mecánica estadística. También es importante para comparar con resultados de varios tipos de modelos dependientes y otros procesos sobre medios aleatorios.

Sin embargo, la razón principal del interés es la belleza matemática del asunto. La abundancia de conjeturas fácilmente formuladas que han demostrado ser realmente difíciles de probar y han inspirado el desarrollo de técnicas matemáticas de gran alcance. Son interesantes las relaciones que aparecen entre nociones probabilísticas y topológicas de los grafos subyacentes.

Escribimos \mathbb{L}^d para el grafo cuyo conjunto de vértices es \mathbb{Z}^d y el conjunto de aristas consiste de todos los pares de vértices que están a distancia euclidiana 1. A pesar de que la teoría de percolación comenzó con \mathbb{L}^d , el modelo tiene sentido en cualquier

grafo conexo $G = (V, E)$: Cada arista permanece en el grafo con probabilidad p (y es suprimida con probabilidad $1 - p$) independientemente del resto de las aristas.

En \mathbb{L}^d con dimensión $d \geq 2$, un hecho fundamental, que se remonta nuevamente a Broadbent y Hammersley, es que el suceso de que exista una componente conexa infinita (o un cluster infinito como también lo llamaremos) tiene probabilidad 0 ó 1 dependiendo de si p está por debajo o por encima de cierto umbral crítico $p_c \in (0, 1)$. Cuando hay clusters infinitos uno puede preguntarse cuántos hay, y éste es el asunto central de esta monografía.

Es interesante el hecho de que se conocen muy pocos valores exactos de p_c , en particular para \mathbb{L}^2 fue objeto de estudio por 20 años, desde que Harris [16] en 1960, probó que en este caso $p_c \geq 1/2$, hasta que Kesten [20] en 1980 probó que $p_c = 1/2$ en este caso. Muchas de las herramientas básicas de la teoría se desarrollaron en esos años.

El problema de estudiar los clusters infinitos se remonta a 1981 cuando Newman y Shulman [22] probaron un teorema bastante general que limita el comportamiento respecto al número de clusters infinitos. En 1987 Aizenmann, Kesten y Newman probaron que hay un único cluster infinito en \mathbb{L}^d . Luego 1989 Burton y Keane extendieron este resultado con una prueba mas general y más simple a una familia grande de grafos.

Grimmett y Newman [12] en 1990 estudian grafos que exhiben un comportamiento mas complejo donde aparecen infinitos clusters para algunos valores y un único para otros. Benjamini y Schramm [2] en 1996 plantean conjeturas sobre el comportamiento general sobre el umbral crítico, algunas de las cuales permanecen abiertas. Häggström y Peres [18] en 1999 prueban la monotonía de la unicidad con ciertas restricciones, luego Schonmann [27] logra probarlo para el caso general, este resultado prueba que en número de clusters infinitos es monótono decreciente cuando incrementamos el parámetro p .

Brevemente mencionaremos un ejemplo a partir de la vida real. Sea $G = (V, E)$ el grafo cuyo conjunto de vértices consiste en todos los matemáticos. Se conectan cualesquiera dos de ellos por una arista $e \in E$ si escribieron una publicación en colaboración. La distancia en este grafo entre un matemático dado v y Paul Erdős se conoce como número de Erdős de v .

Si se define un matemático como una persona que ha sido autor de al menos de un trabajo antes del 2002, que se encuentra en la base de datos de MathSciNet, y dos tales matemáticos se dicen co-autores si tienen una publicación común en que la base de datos, entonces el grafo consiste de aproximadamente 337.000 vértices.

Muchos otras estadísticas y características interesantes del grafo están disponibles, como ejemplo ver los trabajos de Grossman [13, 14]. Cerca de 84.000 de los vértices son aislados, correspondiendo a los matemáticos sin co-autores. La componente conexa más grande (la que contiene a Erdős) contiene cerca de 208.000 vértices, éstos son

todos los matemáticos que tienen número de Erdős finito.

La segunda componente conexa más grande contiene solamente 39 vértices. Este contraste llamativo entre el tamaño de la componente conexa más grande y la segunda más grande se puede expresar como la unicidad de la componente gigante. ¿Es esto una característica especial de redes sociales (en comparación con las estructuras de grafo que aparecen en otros usos) o aún de la estructura social de matemáticos, o es un caso de un fenómeno mucho más general?

Algo similar sucede en el conocido grafo aleatorio de Erdős-Renyi, que consiste de n vértices donde cada par es ligado por una arista con probabilidad p , independientemente del resto de los pares (equivalentemente, el grafo aleatorio de Erdős-Renyi se puede considerar como un proceso de percolación de parámetro p sobre el grafo completo con n vértices). Existe una enorme literatura sobre este modelo, ver por ejemplo Bollobas [4] o Janson et al. [19]. La manera natural de escalar p cuando $n \rightarrow \infty$ es fijar una constante c y dejar $p = \frac{c}{n}$. El resultado clásico de Erdős y Renyi [7] es que la proporción de vértices en la componente conexa más grande tiende en probabilidad a una constante, que es 0 cuando $c < 1$ y estrictamente positiva cuando $c > 1$. Por otra parte, es bastante directo demostrar que para todo $c > 1$, la proporción de vértices en la segunda componente más grande, tiende en probabilidad a 0. Por lo tanto, para $c > 1$ y n grande, obtenemos otro caso del fenómeno de la unicidad de la componente gigante.

En esta monografía, como en la mayoría de la teoría matemática de los procesos de percolación, nos ocuparemos solamente de grafos infinitos, donde la pregunta de la unicidad de la componente gigante se traduce naturalmente a la cuestión de si hay o no un único cluster infinito. Trabajar en un grafo infinito tiene la ventaja de proporcionar siempre una respuesta concreta, en contraste al caso finito donde no está en general totalmente claro qué debe significar realmente una componente gigante.

1.2. Definiciones básicas

Definiciones 1.1. Dados un conjunto de vértices V y uno de aristas $E \subset V \times V$, se dice que $G = (V, E)$ es un *grafo no dirigido* si $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E \forall x, y \in V$ (es decir E es una relación reflexiva). Si $(x, y) \in E$ se dice que x e y son adyacentes.

Se dice que $x \in V$ está conectado con $y \in V$, lo que se denota $x \leftrightarrow y$, si existe un camino e_1, \dots, e_n tal que $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in E$ con $x_0 = x$, $x_n = y$ (y esta en la clausura transitiva de x por E). La longitud del camino es n , el número de aristas que lo forman.

Se dice que un grafo es *conexo*, si $\forall x, y \in V$ existe un camino que los conecta. En

un grafo conexo se puede definir una *distancia* $\delta : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ dada por:

$$\delta(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists e_1, \dots, e_n \in E \text{ tal que } e_i = (x_{i-1}, x_i) \text{ con } x_0 = x, x_n = y\}$$

El grado de un vértice x es la cantidad de aristas que tienen como extremo a x .

Ejemplo. Se llama retículo cúbico d -dimensional al grafo $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ donde $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\}$. En este caso tenemos $\delta(x, y) = \|x - y\|_1$.

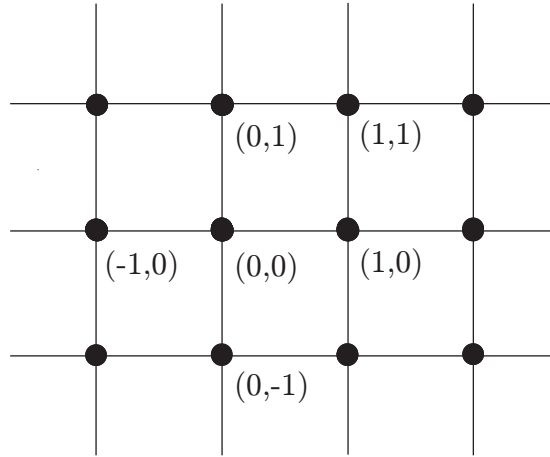


Figura 1.1: El retículo cúbico \mathbb{L}^2

Definición 1.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\emptyset \neq W \subset V$. El subgrafo de G inducido por W es el grafo $\langle W \rangle = (W, E_W)$ cuyo conjunto de vértices es W y cuyo conjunto de aristas es $E_W = \{(x, y) \in E : x, y \in W\}$.

Veamos ahora como definir los elementos aleatorios que nos interesan.

Tomemos como espacio muestral $\Omega = \{0, 1\}^E$. A los elementos $\omega \in \Omega$ los llamamos configuraciones, $\omega = (\omega(e) : e \in E)$ donde $\omega(e) = 0$ quiere decir que e está cerrada y $\omega(e) = 1$ que e está abierta.

Tomamos $\mathcal{F} = \prod_{e \in E} \mathcal{P}(\{0, 1\})$ la σ -álgebra producto (generada por los cilindros finito dimensionales).

La medida producto con densidad $0 \leq p \leq 1$ en (Ω, \mathcal{F}) es la medida $\mathbb{P}_p = \prod_{e \in E} \mu_e$ donde μ_e es una medida de Bernoulli en $\{0, 1\}$ dada por:

$$\mu_e(\omega(e) = 1) = p, \quad \mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p.$$

Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ es un espacio de probabilidad.

Definición 1.3. Se dice que X es un proceso de percolación independiente de parámetro p si es una variable aleatoria en $\Omega = \{0, 1\}^E$ cuya distribución es \mathbb{P}_p la medida producto con marginales $(p, 1 - p)$.

Observación. Hay un orden parcial natural en Ω dado por $\omega_1 \leq \omega_2$ si y solo si $\omega_1(e) \leq \omega_2(e) \forall e \in E$. Además existe una biyección $K : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(E)$ dada por $K(\omega) = \{e \in E : \omega(e) = 1\}$ es decir $K(\omega)$ es el conjunto de las aristas abiertas cuando la configuración es ω . Es trivial ver que $\omega_1 \leq \omega_2$ si y solo si $K(\omega_1) \subset K(\omega_2)$.

Definición 1.4. Consideremos el subgrafo aleatorio $G(\omega) = (V, K(\omega))$. Las componentes conexas de este grafo se llaman clusters. Denotaremos $C(x)$ al cluster que contiene al vértice x . $|C(x)|$ indica la cantidad de vértices en $C(x)$.

1.3. El fenómeno crítico

Dado un grafo G denotaremos $\Psi_G(p) = \mathbb{P}_p(A)$, donde A es el evento que exista un cluster infinito en $G(\omega) = (V, K(\omega))$. Entonces podemos escribir

$$A = \bigcup_{v \in V} \{|C(v)| = \infty\}.$$

Vamos a probar que existe un valor crítico del parámetro p que separa el comportamiento de $\Psi_G(p)$ en dos fases. Cuando quede claro de qué grafo hablamos omitiremos el subíndice G .

Definición 1.5. Sea $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La σ -álgebra de cola engendrada por \mathbf{X} es $\mathcal{T}(\mathbf{X}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(X_n, X_{n+1}, \dots)$, donde $\mathcal{F}(X_n, X_{n+1}, \dots)$ denota la menor σ -álgebra respecto de la cual son medibles las variables correspondientes. A los conjuntos $E \in \mathcal{T}$ los llamamos eventos de cola.

Teorema 1.6 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sea $\mathbf{X} = \{X_n\}$ una sucesión de variables independientes. Entonces si $E \in \mathcal{T}(\mathbf{X})$, $\mathbb{P}(E) = 0$ ó 1 .*

Demostración. E está en la σ -álgebra producto engendrada por la sucesión $\mathcal{F}(\mathbf{X})$, luego existen conjuntos $E_n \in \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$ tales que $\mathbb{P}(E_n \Delta E) \rightarrow 0$. Esto implica $\mathbb{P}(E_n \cap E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E_n) \rightarrow \mathbb{P}(E)$, pues

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \cap E_n) + \mathbb{P}(E \cap E_n^c) && \text{y } \mathbb{P}(E \cap E_n^c) \rightarrow 0, \\ \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}(E_n \cap E) + \mathbb{P}(E_n \cap E^c) && \text{y } \mathbb{P}(E_n \cap E^c) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pero $E \in \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$, entonces E y E_n son independientes, luego $\mathbb{P}(E_n \cap E) = \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}(E)$. Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos: $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E)^2$ de donde se desprende que $\mathbb{P}(E) = 0$ ó 1 . \square

Definición 1.7 (Acoplamiento de parámetro simultáneo). Sea $\{U_e : e \in E\}$ una familia de variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en $[0, 1]$. Consideramos la variable aleatoria X_p que toma valores en $\{0, 1\}^E$ dada por $X_p(e) = I_{[0,p]}(U_e)$, entonces X_p es un proceso de percolación independiente de parámetro p .

Lo interesante del acoplamiento simultáneo es que construimos todos los procesos de percolación independiente, para p variando en $[0, 1]$, de forma tal que se cumple que si $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$ tenemos que $X_{p_1}(e) \leq X_{p_2}(e) \forall e \in E$. Es decir que $X_{p_1} \leq X_{p_2}$ según el orden parcial que definimos anteriormente.

Teorema 1.8. *Si G es un grafo entonces Ψ_G toma valores en $\{0, 1\}$ y es creciente.*

Demostración. Que $\Psi_G(p) \in \{0, 1\}$ es consecuencia del teorema (1.6). Pensemos en X como una sucesión de variables aleatorias enumerando E de algún modo, es decir $X_n = X(e_n)$. El evento A de que exista algún cluster infinito no depende de ninguna cantidad finita de las X_n . Luego como las X_n son independientes entonces $\mathbb{P}_p(A) = 0$ o 1 .

Para ver ahora que es creciente usaremos el acoplamiento simultáneo. Es claro que agregar aristas no hace desaparecer al cluster infinito entonces si $p_1 < p_2$ sabemos que X_{p_1} es un subgrafo de X_{p_2} y por lo tanto $\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$. \square

Definición 1.9. El valor crítico de percolación para G es

$$p_c(G) = \inf\{p \in [0, 1] : \Psi_G(p) = 1\}.$$

A la región $(p_c, 1]$ se la llama fase supercrítica, mientras que a la región $[0, p_c)$ se la llama fase subcrítica.

Observación. De lo anterior sabemos que

$$\Psi_G(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Una pregunta no trivial es determinar si $\Psi_G(p_c) = 0$ o 1 resulta que esto depende del grafo G que estemos considerando. Por ejemplo veremos en el tercer capítulo que $\Psi_{\mathbb{L}}(p_c) = 1$ pues $p_c = 1$ en este caso. Benjamini y Schramm conjeturaron en [2] que si G es transitivo y $p_c(G) < 1$ entonces la percolación crítica en G no produce clusters infinitos c.s. Es un problema abierto probar (o no) que $\Psi_{\mathbb{L}^d}(p_c) = 0$, este resultado se sabe para $d = 2$ probado por Harris [16] (lo veremos en el segundo capítulo) y para $d \geq 19$ probado por Hara y Slade [15], pero no para el resto de los valores (incluyendo el caso $d = 3$, importante en física).

Observación. Se conocen muy pocos valores numéricos de $p_c(G)$. Incluso para grafos sencillos como \mathbb{L}^d solo se conoce el valor para $d = 1$ y $d = 2$, que son $p_c(\mathbb{L}) = 1$ y $p_c(\mathbb{L}^2) = 1/2$ respectivamente. El segundo valor está lejos de ser trivial de probar como veremos en el segundo capítulo. A pesar de esto es amplio el estudio cualitativo de propiedades que se puede hacer tanto en la fases subcrítica y supercrítica, como en el valor crítico mismo.

Observación. El hecho de que $\Psi_G(p) = 1$ no dice nada sobre el número de clusters infinitos que existen; esto, veremos a lo largo de la monografía, depende del grafo G y sus propiedades geométricas. Al final de este capítulo probamos un teorema que limita el comportamiento que podemos observar respecto a la cantidad de clusters infinitos.

Definición 1.10. Un isomorfismo entre los grafos $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ es una biyección $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y solo si $(f(x), f(y)) \in E_2$. Si $G_1 = G_2$ se dice que f es un automorfismo. $\text{Aut}(G)$ denotará el grupo de automorfismos de G .

Observación. $\text{Aut}(G) \leq S(V)$ donde $S(V)$ es el grupo de permutaciones de V .

Definición 1.11. Se dice que G es transitivo si $\forall x, y \in V \exists f \in \text{Aut}(G) : f(x) = y$ es decir cuando $\text{Aut}(G)$ actúa transitivamente en G .

Heurísticamente un grafo G es transitivo cuando “se ve igual” desde cualquier vértice. Los grafos que analizaremos en la monografía, \mathbb{L}^d , \mathbb{T}_d y $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ son todos transitivos (el grafo \mathbb{T}_d es el árbol regular de grado $d + 1$).

Una caracterización alternativa del valor crítico en un grafo transitivo está dada por la función $\theta_G(p, v) = \mathbb{P}_p(|C(v)| = \infty)$. Escribimos $\{v \leftrightarrow \infty\}$ para el evento $\{|C(v)| = \infty\}$ ya que el cluster de v es infinito si y solo si existe un camino infinito que sale de v .

Si G es transitivo todos los vértices se comportan de la misma manera ya que el proceso es independiente para cada arista y el grafo es igual desde cualquier vértice, por lo tanto $\theta_G(p, v) = \theta_G(p)$ no depende del vértice v .

Teorema 1.12. Si G es un grafo transitivo entonces θ_G es creciente, además

$$\begin{cases} \theta_G(p) = 0 & \text{si } p < p_c \\ \theta_G(p) > 0 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Demostración. Para ver ahora que es creciente usaremos el acoplamiento simultáneo. Es claro que agregar aristas no hace desaparecer al cluster infinito entonces si $p_1 < p_2$ sabemos que X_{p_1} es un subgrafo de X_{p_2} por lo tanto $\mathbb{P}_{p_1}(\{v \leftrightarrow \infty\}) \leq \mathbb{P}_{p_2}(\{v \leftrightarrow \infty\})$.

Si $\theta_G(p) = 0$, como el evento de que exista un cluster infinito es la unión en v de que alguna de las $C(v)$ sea infinita y estos son numerables entonces $\Psi_G(p) = 0$. Recíprocamente, es claro que si $\Psi_G(p) = 0$ entonces $\theta_G(p) = 0$ ya que si no hay ningún cluster infinito es imposible que la componente de un vértice sea infinita. De manera un poco mas formal se tiene, por un lado

$$\Psi_G(p) = \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{v \in V} \{|C(v)| = \infty\} \right) \leq \sum_{v \in V} \mathbb{P}_p(|C(v)| = \infty) = \infty \cdot \theta_G(p),$$

Pero también $\Psi_G(p) \geq \mathbb{P}_p(\{|C(v)| = \infty\}) = \theta_G(p)$. □

1.4. Herramientas matemáticas

1.4.1. Eventos crecientes

La probabilidad $\theta_G(p)$ de que un vértice v esté en un cluster infinito abierto es una función no decreciente con p . Esto es intuitivamente obvio dado que un aumento en el valor de p lleva generalmente a un aumento de la cantidad de aristas abiertas en el grafo, llevando a que haya más caminos y que éstos sean más largos desde cualquier vértice.

Otra manera de decir esto es decir que $\{|C(v)| = \infty\}$ es un evento creciente, en el sentido de que si $\omega \in \{|C(v)| = \infty\}$, entonces $\omega' \in \{|C(v)| = \infty\}$ siempre que $\omega \leq \omega'$.

Con este ejemplo en mente la siguiente definición es razonable.

Definición 1.13. El evento $A \in \mathcal{F}$ se dice creciente si $I_A(\omega) \leq I_A(\omega')$ siempre que $\omega \leq \omega'$. I_A denota la función indicatriz de A . Se dice que A es decreciente si A^c es creciente.

Más en general, una variable aleatoria N en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) se dice creciente si $N(\omega) \leq N(\omega')$ siempre que $\omega \leq \omega'$. N se dice decreciente si $-N$ es creciente.

Luego A es creciente si y solo si I_A es creciente.

Ejemplo. Como ejemplos simples de eventos crecientes consideremos $A(x, y)$, las configuraciones para las cuales existe un camino abierto que conecta x con y . $N(x, y)$ el número de estos caminos también es una variable aleatoria creciente.

Observación. Al considerar el acoplamiento simultáneo por parámetro, si un evento creciente A ocurre para la configuración de X_p entonces también lo hace para $X_{p'}$, para todo $p' \geq p$.

Teorema 1.14. Si N es una variable creciente en (Ω, \mathcal{F}) entonces

$$\mathbb{E}_{p_1}(N) \leq \mathbb{E}_{p_2}(N) \quad \text{si } p_1 \leq p_2,$$

siempre que estas esperanzas existan.

Si A es un evento creciente en \mathcal{F} entonces

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A) \quad \text{si } p_1 \leq p_2.$$

Demostración. Tomamos la construcción acoplada por parámetro. Sean las variables aleatorias $\{U(e) : e \in E\}$ independientes y uniformemente distribuidas en $[0, 1]$. Ponemos $X_p(e) = 1$ si $U(e) < p$ y $X_p(e) = 0$ en otro caso. Tenemos que si $p_1 \leq p_2$ entonces $X_{p_1} \leq X_{p_2}$ de lo que se desprende que $N(X_{p_1}) \leq N(X_{p_2})$ para cualquier variable aleatoria creciente en (Ω, \mathcal{F}) . Tomando esperanza en la desigualdad anterior se desprende lo que queríamos. La segunda parte del teorema se sigue inmediatamente aplicando la primera parte a la variable $N = I_A$. \square

1.4.2. La desigualdad FKG

Es altamente común que eventos crecientes A y B estén correlacionados positivamente, en el sentido que $\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$. Por ejemplo, si sabemos que existe un camino abierto que conecta u con v , entonces pasa a ser más probable que exista un camino abierto que una x con y (pues puedo usar las aristas abiertas que forman el otro camino). Tal desigualdad de correlación fue probada por primera vez por Harris [16], luego estas desigualdades han sido probadas en un contexto más general que el de una medida producto. El nombre de la desigualdad hace referencia a Fortuin, Kasteleyn y Ginibre [9].

Teorema 1.15 (Desigualdad FKG).

1. Si X e Y son variables aleatorias crecientes tales que tienen segundo momento finito ($\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ y $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$) entonces

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$$

2. Si A y B son eventos crecientes entonces

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$$

Demostración. Basta probar la primera parte pues la segunda se deduce de esta aplicándola a las funciones indicatrices de A y B . Vamos a probarlo primero para variables aleatorias X e Y que están definidas en término de los estados de solamente una cantidad finita de aristas, luego quitaremos esta restricción. Supongamos que X e Y son crecientes y dependen únicamente de los estados de las aristas e_1, e_2, \dots, e_n . Vamos a probar el resultado por inducción en n . Primero supongamos que $n = 1$, entonces X e Y son funciones del estado (la configuración) $\omega(e_1)$ de e_1 , que toma los valores 0 y 1 con probabilidades $1 - p$ y p respectivamente. Ahora,

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$$

para todos los pares ω_1, ω_2 de valores 0 o 1, esto es trivial si $\omega_1 = \omega_2$ y se deduce de la monotonía de X e Y en otro caso. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\omega_1, \omega_2} (X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))\mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_1)\mathbb{P}_p(\omega(e_1) = \omega_2) \\ &\leq 2(\mathbb{E}_p(XY) - \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)) \end{aligned}$$

como queríamos. Supongamos ahora que el resultado es valido para todo $n < k$ y que X e Y son funciones crecientes de los estados $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_k)$ de las aristas e_1, e_2, \dots, e_k . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) &= \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(XY | \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))) \\ &\geq \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(X | \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))\mathbb{E}_p(Y | \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))) \end{aligned}$$

pues dados $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})$ se tiene que X e Y son crecientes en la variable $\omega(e_k)$. Pero ahora $\mathbb{E}_p(X|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))$ es una función creciente de los estados de $k-1$ aristas, y lo mismo vale para la esperanza condicional de Y . Se deduce de la hipótesis de inducción que la esperanza del producto de estas dos funciones es mayor o igual que el producto de las esperanzas, de donde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) &\geq \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(X|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))) \\ &\quad \times \mathbb{E}_p(\mathbb{E}_p(Y|\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))) \\ &\geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y) \end{aligned}$$

Quitemos ahora la condición de que X e Y dependan de los estados de una cantidad finita de aristas. Supongamos que X e Y son variables aleatorias crecientes con segundos momentos finitos. Sea e_1, e_2, \dots una numeración de los vértices de G , definimos

$$X_n = \mathbb{E}_p(X|\omega(e_1), \dots, \omega(e_n)) \quad \text{e} \quad Y_n = \mathbb{E}_p(Y|\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$$

Ahora X_n e Y_n son funciones crecientes de los estados de e_1, \dots, e_n y por lo tanto

$$\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \geq \mathbb{E}_p(X_n)\mathbb{E}_p(Y_n) \tag{1.1}$$

por lo probado anteriormente. Como consecuencia del teorema de convergencia de martingalas (ver Feller [8]) se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$

$$X_n \rightarrow X \quad \text{y} \quad Y_n \rightarrow Y \quad \mathbb{P}_p \text{ c.s. y en } L^2(\mathbb{P}_p)$$

de donde se tiene que

$$\mathbb{E}_p(X_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(X) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_p(Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(Y)$$

Además por las desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p|X_n Y_n - XY| &\leq \mathbb{E}_p(|(X_n - X)Y_n| + |X(Y_n - Y)|) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p((X_n - X)^2)\mathbb{E}_p(Y_n^2)} + \sqrt{\mathbb{E}_p((X_n - X)^2)\mathbb{E}_p((Y_n - Y)^2)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

de donde sale que $\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(XY)$. Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (1.1) se obtiene el resultado. \square

Desigualdades análogas son válidas para variables aleatorias y eventos decrecientes. Por ejemplo, si X e Y son ambos decrecientes entonces $-X$ y $-Y$ son crecientes, de donde se desprende que

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$$

siempre que tengan segundos momentos finitos. De forma similar si X es creciente e Y es decreciente, entonces podemos aplicar la desigualdad a X y $-Y$ para obtener

$$\mathbb{E}_p(XY) \leq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y).$$

Veamos un ejemplo típico de aplicación de la desigualdad FKG. Sean Π_1, \dots, Π_k familias de caminos en G , y sean A_i los eventos de que exista algún camino abierto en Π_i . Los A_i son eventos crecientes, entonces:

$$\mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \geq \mathbb{P}_p(A_1) \mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=2}^k A_i \right)$$

Pues la intersección de eventos crecientes es creciente. Iterando lo anterior obtenemos

$$\mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \geq \prod_{i=1}^k \mathbb{P}_p(A_i)$$

Teorema 1.16. *Sea G un grafo infinito conexo con una cantidad numerable de aristas (no necesariamente transitivo). El valor crítico $p_c(x) = \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p, x) = 0\}$ es independiente del vértice x .*

Demostración. Para cada vértice x escribimos $\theta(p, x)$ a la probabilidad de que x este en un cluster infinito, entonces el valor crítico de percolación es:

$$p_c(x) = \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p, x) = 0\}$$

Por la desigualdad FKG (Teorema 1.15) tenemos que para cualquier vértice y

$$\theta(p, x) = \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \geq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)\theta(p, y)$$

De donde se desprende que $p_c(x) \leq p_c(y)$ ya que $\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) > 0$ sin importar x e y pues G es conexo. Como vale lo mismo cambiando el papel de x e y , queda probado el teorema. \square

1.4.3. La fórmula de Russo

Sabemos que si A es un evento creciente entonces $\mathbb{P}_p(A)$ es una función creciente de p . La fórmula de Russo nos permite estimar la variación de esta probabilidad en función de p .

Definición 1.17. Para cualquier arista $e \in E$ se define $S_e : \Omega \rightarrow \Omega$ de forma que $S_e(\omega)(e) = 1 - \omega(e)$ y $S_e(\omega)(e') = \omega(e')$ si $e' \neq e$. Se dice que e es una *arista esencial* para ω y para el evento A si $I_A(\omega) \neq I_A(S_e(\omega))$.

El evento e es *esencial para A* se define como el conjunto de configuraciones para las cuales se cumple lo anterior, es decir $\delta_e A = \{\omega \in \Omega \mid I_A(\omega) \neq I_A(S_e(\omega))\}$

Observación. Intuitivamente e es esencial para (A, ω) si el hecho de que ocurra A o no, depende crucialmente en el estado de e en la configuración ω .

Es interesante notar que el evento de que e sea esencial para A depende solamente del estado de aristas distintas a e , es decir es independiente del estado de e . Esto se desprende claramente de la definición.

Para un evento A creciente una arista e es esencial si y solo si A no ocurre cuando e está cerrada y A ocurre si e está abierta.

Ejemplo. En lo que sigue fijemos $G = \mathbb{L}^2$. Sea A el evento de que el origen esta en una componente conexa infinita abierta. La arista e es esencial para A si, cuando quitamos e del retículo, un vértice de e esta en una componente finita que contiene al origen y el otro vértice esta en una componente conexa abierta infinita. Sea A el

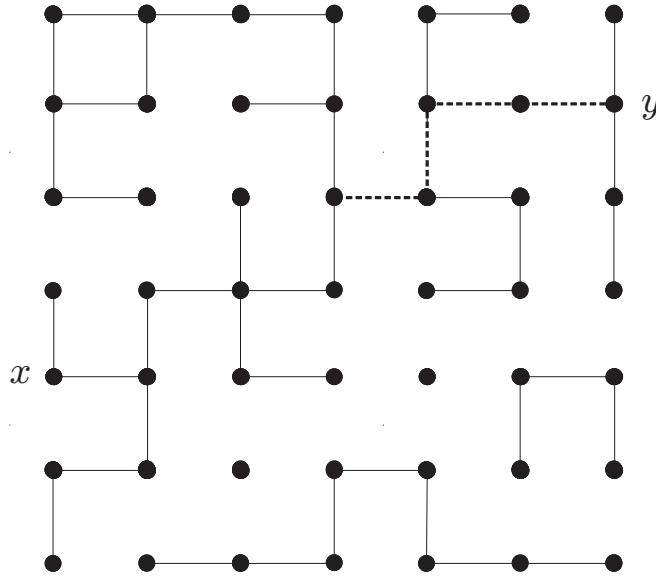


Figura 1.2: El cuadrado B_3 , con un camino abierto que conecta un vértice x en el lado izquierdo con un vértice y en el lado derecho. La configuración mostrada tiene 4 aristas esenciales para que exista un camino de lado a lado (que están abiertas, son las marcadas con línea punteada).

evento de que exista un camino abierto en el cuadrado $B_n = \{-n, \dots, n\}^2$ uniendo algún vértice en el lado izquierdo con algún vértice en el lado derecho (ver figura 1.2).

Una arista e del cuadrado es esencial para A si, cuando la quitamos del retículo, no existe camino que cruza el cuadrado: un vértice de e está unido por un camino abierto al lado derecho, y el otro vértice esta unido por un camino abierto al lado izquierdo de B_n .

Teorema 1.18 (Fórmula de Russo). *Sea A un evento creciente local, es decir definido por la configuración de una cantidad finita de aristas, entonces*

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}_p(N(A)),$$

donde $N(A)$ es la cantidad de aristas que son esenciales para A . Este resultado se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(e \text{ es esencial para } A).$$

Demostración. Sea A un evento creciente y $\mathbf{p} = (p(e) : e \in E)$ un vector de números que satisfacen $0 \leq p(e) \leq 1$ para toda arista e . Sean $(X(e) : e \in E)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en $[0, 1]$. Construimos la configuración $\eta_{\mathbf{p}}$ definida de la siguiente manera $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 1$ si $X(e) < p(e)$ y $\eta_{\mathbf{p}}(e) = 0$ en caso contrario. Escribimos $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ para la medida de probabilidad en Ω para la cual el estado de una arista es $\omega(e) = 1$ con probabilidad $p(e)$. Se tiene que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A) = \mathbb{P}(\eta_{\mathbf{p}} \in A)$$

Ahora elegimos una arista f y definimos $\mathbf{p}' = (p'(e) : e \in E)$

$$p'(e) = \begin{cases} p(e) & \text{si } e \neq f \\ p'(f) & \text{si } e = f \end{cases}$$

\mathbf{p} and \mathbf{p}' solo pueden diferir en la arista f . Ahora si $p(f) \leq p'(f)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{p}'}(A) - \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A) &= \mathbb{P}(\eta_{\mathbf{p}} \notin A, \eta_{\mathbf{p}'} \in A) \\ &= (p'(f) - p(f)) \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f \text{ es esencial para } A) \end{aligned}$$

Si dividimos entre $p'(f) - p(f)$ y tomamos límite cuando $p'(f) - p(f) \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial p(f)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f \text{ es esencial para } A)$$

Hasta ahora sólo hemos asumido que A es un evento creciente. Si además A depende solamente de una cantidad finita de aristas, entonces $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A)$ es una función de una cantidad finita de variables $(p(f_i)) : 1 \leq i \leq m$ y aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial p(f)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A) \Big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots,p)} \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}_p(f \text{ es esencial para } A) \\ &= \mathbb{E}_p(N(A)) \end{aligned}$$

Queda demostrado así el teorema. \square

Observación. El evento $\delta_e A = \{e \text{ es esencial para } A\}$ es independiente del estado de e , entonces

$$\mathbb{P}_p(e \text{ es esencial para } A) = \frac{1}{p} \mathbb{P}_p(e \text{ es abierta y esencial para } A)$$

Por lo tanto, si A es creciente y depende solamente de una cantidad finita de aristas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) &= \frac{1}{p} \sum_e \mathbb{P}_p(e \text{ es abierta y esencial para } A) \\ &= \frac{1}{p} \sum_e \mathbb{P}_p(A \cap \delta_e A) \\ &= \frac{1}{p} \sum_e \mathbb{P}_p(\delta_e A | A) \mathbb{P}_p(A) \\ &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_p(N(A) | A) \mathbb{P}_p(A) \end{aligned}$$

Podemos hacer uso de esta expresión de la siguiente forma. Dividiendo entre $\mathbb{P}_p(A)$ e integrando en el intervalo $[p_1, p_2]$ se obtiene

$$\mathbb{P}_{p_2}(A) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \exp \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \mathbb{E}_p(N(A) | A) dp \right) \quad \text{si } 0 \leq p_1 < p_2 \leq 1. \quad (1.2)$$

Las aplicaciones de esta expresión requieren estimaciones para $\mathbb{E}_p(N(A) | A)$. Estimaciones precisas para la probabilidad de que una arista e sea esencial suelen ser difíciles de obtener, y es común utilizar desigualdades del tipo FKG (teorema 1.15). Si usamos la cota trivial,

$$\mathbb{P}_p(\delta_e A | A) \leq 1,$$

entonces de (1.2) se obtiene lo siguiente

$$\mathbb{P}_{p_2}(A) \leq (p_2/p_1)^m \mathbb{P}_{p_1}(A) \quad \text{si } 0 \leq p_1 < p_2 \leq 1.$$

Donde m es el número (finito) de aristas de las cuales depende A . Esta desigualdad da sentido a la expresión que dice $\mathbb{P}_p(A)$ no puede crecer “demasiado rápido” cuando p crece. En [25] Russo probó el siguiente teorema que muestra como se relacionan estos conceptos.

Teorema 1.19 (Ley 0-1 Aproximada de Russo). *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si A es un evento creciente y local que cumple*

$$\forall e \in E \quad \mathbb{P}_p(\delta_e A) \leq \eta \quad \forall p \in [0, 1],$$

entonces existe un $p_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} \forall p \leq p_0 - \varepsilon & \quad \mathbb{P}_p(A) \leq \varepsilon, \\ \forall p \geq p_0 + \varepsilon & \quad \mathbb{P}_p(A) \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposición 1.20. *Un evento A es un evento de cola, si y solo si $\delta_e A = \emptyset$.*

Demostración. Recordemos que un evento esta en la σ -álgebra de cola si no depende de ninguna cantidad finita de las aristas. Entonces en particular no depende de ninguna arista $e \in E$ luego $I_A(\omega) = I_A(S_e(\omega))$ para todos $\omega \in \Omega$. Pero entonces $\delta_e A = \{\omega \in \Omega | I_A(\omega) \neq I_A(S_e(\omega))\} = \emptyset$. \square

Observación. Esto sugiere que el valor $\sup\{\mathbb{P}_p(\delta_e A) : p \in [0, 1], e \in E\}$ puede ser una medida de la “distancia” del evento A a la σ -álgebra de cola. El teorema de Russo afirma que un evento creciente que este “cerca” de la σ -álgebra de cola en este sentido, satisface una ley 0-1 aproximada.

Observación. La formula de Russo se puede extender fácilmente a variables aleatorias. Si Y es una variable aleatoria definimos el incremento de Y en e de la siguiente forma

$$\delta_e Y(\omega) = Y(\omega_e^+) - Y(\omega_e^-)$$

Donde $\omega_e^+(e) = 1$ y $\omega_e^-(e) = 0$ pero en el resto coinciden. Con esto en cuenta es fácil de extender al siguiente resultado, del cual omitimos su prueba.

Teorema 1.21. *Sea Y una variable aleatoria definida en termino de los estados de una cantidad finita de aristas, entonces*

$$\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(Y) = \sum_{e \in E} \mathbb{E}_p(\delta_e Y).$$

Observación. Se desprende de este teorema un resultado para la derivada segunda

$$\frac{d^2}{dp^2} \mathbb{E}_p(Y) = \sum_{e, f \in E} \mathbb{E}_p(\delta_e \delta_f Y).$$

Donde $\delta_e \delta_e Y = 0$ y si $e \neq f$

$$\delta_e \delta_f Y = Y(\omega_{ef}^{++}) - Y(\omega_{ef}^{+-}) - Y(\omega_{ef}^{-+}) + Y(\omega_{ef}^{--}).$$

1.5. El teorema de Newman-Schulman

Definición 1.22 (Acoplamiento de modificación local). Fijemos $p \in (0, 1)$ y un grafo infinito $G = (V, E)$. Como $\mathcal{P}_F(E)$ (los subconjuntos finitos de E) es numerable existe una medida de Q probabilidad positiva sobre todos los elementos.

Dos variables aleatorias X, X' en $\{0, 1\}^E$ con distribución \mathbb{P}_p pueden obtenerse de la siguiente forma:

1. Elijamos al azar $C \in \mathcal{P}_F(E)$ un subconjunto finito de aristas, con distribución Q .
2. Condicional en el paso anterior, para cada arista $e \in E \setminus F$ independientemente pongamos $X(e) = X'(e) = 0$ o 1 con probabilidades $1 - p$ y p .
3. Condicional en los pasos anteriores, para cada arista $e \in F$ y de forma independiente definamos $X(e) = 0$ o 1 e independientemente $X'(e) = 0$ o 1 ambos con probabilidad p de tomar el valor 1 .

La utilidad de este acoplamiento es que permite, dada la configuración fuera de un conjunto finito F , construir distintas configuraciones en F todas con probabilidad positiva por ser finito (por ejemplo que estén todas las aristas de F abiertas o todas cerradas).

Observación. Fijemos $p \in (0, 1)$ y un grafo infinito $G = (V, E)$. Sea $F \in \mathcal{P}_F(E)$ un subconjunto finito de aristas, entonces hay probabilidad positiva de elegirlo con Q . Lo que dice el acoplamiento es que podemos mirar la configuración en $E \setminus F$ y si ocurre allí algún evento A con probabilidad positiva, podemos hacer que ocurra B en F a la vez también con probabilidad positiva. Esto es porque cualquier configuración en F tiene probabilidad positiva por ser finito, y además como estos conjuntos de aristas son disjuntos, los eventos A y B son independientes, por lo tanto:

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) = \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B) > 0.$$

Teorema 1.23 (Newman-Schulman). *Fijados $p \in [0, 1]$ y un grafo conexo y transitivo $G = (V, E)$ el número de clusters infinitos que aparecen en una percolación independiente de parámetro p es constante c.s. y toma valores en $\{0, 1, \infty\}$.*

Demostración. Sea N la variable aleatoria que indica la cantidad de clusters infinitos, y para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sea D_n el suceso $N = n$. Probaremos primero que N es constante c.s. Esto es consecuencia de que X es ergódico para algún automorfismo pero veamos como probarlo a mano. Supongamos por absurdo que $\exists n$ tal que:

$$0 < \mathbb{P}_p(D_n) < 1 \tag{1.3}$$

Sea I_{D_n} la indicatriz del suceso, definimos $I_{n,v,k} = \mathbb{E}(I_{D_n} \mid X(B(v,k)))$ la esperanza condicional dada la configuración en la bola $B(v,k) = \{w \in V : \delta(v,w) \leq k\}$. Sabemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n,v,k} = I_{D_n} \quad \mathbb{P}_p \text{ c.s.} \quad (1.4)$$

porque $B(v,k_1) \subset B(v,k_2)$ si $k_1 < k_2$ y además $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(v,k) = V$ (esto es consecuencia del teorema de convergencia de martingalas [8] ver Feller). Sea $\{w_k\} \subset V$ tal que $\delta(v,w_k) \geq 2k$ (una sucesión tal existe pues G es transitivo e infinito). Es claro que $I_{n,w_k,k}$ tiene la misma distribución que $I_{n,v,k}$ porque G es transitivo y X es invariante por automorfismos (en particular hay un automorfismo que manda v en w_k) por tener como distribución una medida producto. Se deduce entonces de (1.4) que $I_{n,w_k,k}$ converge en probabilidad a I_{D_n} (la convergencia en probabilidad sólo depende de la distribución). Tenemos entonces que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(I_{n,w_k,k} = I_{n,v,k} = I_{D_n}) = 1. \quad (1.5)$$

Pero por construcción $I_{n,v,k}$ e $I_{n,w_k,k}$ son independientes pues dependen únicamente de la configuración en las bolas $B(v,k)$ y $B(w_k,k)$ que son disjuntas.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(I_{n,w_k,k} = 1, I_{n,v,k} = 0) = \mathbb{P}_p(D_n)(1 - \mathbb{P}_p(D_n)) > 0$$

Pero esto contradice (1.5), y por lo tanto el supuesto (1.3) debe ser falso, probando que N es constante c.s.

Falta probar que esta constante solo toma valores en $\{0, 1, \infty\}$, supongamos entonces que:

$$\mathbb{P}_p(N = n) = 1 \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2. \quad (1.6)$$

Fijemos un vértice $v \in V$. Como G es conexo, existe k tal que $B(v,k)$ interseca a los n clusters infinitos. Hagamos ahora un argumento de modificación local: consideremos $X' \in \{0,1\}^E$ donde modificamos la configuración en $B(v,k)$ poniendo $X'(e) = 1 \quad \forall e \in \langle B(v,k) \rangle$ pero entonces X' tiene un único cluster infinito (porque los conectamos todos). Entonces, $\mathbb{P}_p(N = 1) > 0$ lo que contradice (1.6), por lo tanto N debe ser 0, 1, o ∞ . \square

Observación. No podemos deshacernos del caso infinito con este argumento pues al tomar $B(v,k)$ nunca será posible intersecar a los infinitos clusters, a lo sumo podremos juntar una cantidad finita de ellos.

El teorema de Newman y Schulman es la piedra fundamental y el primer resultado sobre clusters infinitos en grafos generales. El resto de la monografía se centra en analizar las distintas posibilidades que deja abiertas el teorema, en particular ver si pueden existir o no infinitos clusters, y tratar de caracterizar de alguna forma el comportamiento de distintos grafos en la fase supercrítica.

La monografía consiste en una introducción actualizada al problema de la unicidad y la no-unicidad de las componentes conexas infinitas para los procesos de percolación en grafos transitivos.

Para el proceso independiente en \mathbb{L}^d la unicidad del cluster infinito es un resultado clásico, mientras que en otros grafos transitivos la unicidad puede fallar. Las características dominantes de los grafos en este contexto resultan ser la promediabilidad y la no-promediabilidad, como veremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Percolación en retículos (\mathbb{L}^d)

En este capítulo veremos algunos resultados básicos para los retículos cúbicos d -dimensionales. Los retículos fueron los primeros grafos donde se estudiaron los procesos de percolación, su interés proviene de que son modelos sencillos y útiles de medios aleatorios. Veremos algunos resultados clásicos y en particular vamos a probar que existe un único cluster infinito en la fase supercrítica, este resultado lo probaremos en el contexto más general de los grafos promediables.

2.1. Valores críticos

Proposición 2.1. *La fase supercrítica en \mathbb{L} es trivial, o sea $p_c(\mathbb{L}) = 1$*

Demostración. Veremos que $\theta(p) = 0$ si $p < 1$. El evento de que el origen esté en un cluster infinito en \mathbb{L} implica que o bien hacia los vértices negativos o bien hacia los vértices positivos hay un camino infinito de aristas abiertas. Definiendo los eventos $A_k = \{0 \leftrightarrow k\}$ y $B_k = \{0 \leftrightarrow -k\}$, se tiene que $A_{k+1} \subset A_k$, $B_{k+1} \subset B_k$ y $\mathbb{P}_p(A_k) = \mathbb{P}_p(B_k) = p^k$ pues hay un único camino que conecta esos vértices y tiene largo k . Se tiene que

$$\{|C(0)| = \infty\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \cup \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Entonces concluimos que

$$\begin{aligned} \theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) &\leq \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(A_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(B_k) \\ &\leq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} p^k = 0, \quad \text{si } p < 1. \end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema. □

Definición 2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano encajado en \mathbb{R}^2 , el grafo dual $G^* = (V^*, E^*)$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de caras de G y dados $x, y \in V^*, (x, y) \in E^*$ si y solo si las caras x e y comparten una arista de E .

Dado X un proceso de percolación en G de parámetro p . El proceso de percolación dual X^* en G^* se define de forma que e^* esta abierta si y solo si e está cerrada, es claro que X^* es un proceso de parámetro $1 - p$.

Ejemplo. \mathbb{L}^2 es isomorfo a su dual: Podemos ver a $(\mathbb{L}^2)^*$ encajado en \mathbb{R}^2 poniendo un vértice en el medio de cada cara de \mathbb{L}^2 , nos queda así que el dual no es mas que el grafo original trasladado por el vector $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en \mathbb{R}^2 . $(\mathbb{L}^2)^*$ consiste en un vértice v correspondiente a cada cara de \mathbb{L}^2 , es decir a cada cuadrado $[x, x + 1] \times [y, y + 1]$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, tomamos como $v = (x + 1/2, y + 1/2)$. Luego tiene aristas e^* que unen los vértices correspondientes a las caras que están separadas por la arista e .

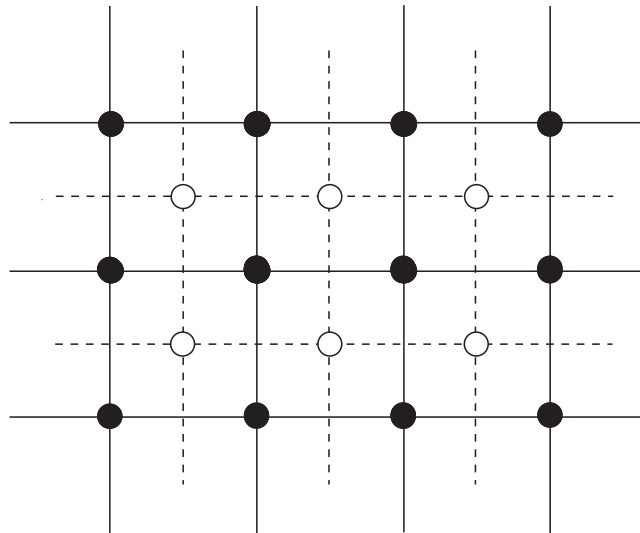


Figura 2.1: \mathbb{L}^2 y su grafo dual encajados en \mathbb{R}^2

Teorema 2.3. En $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ vale $0 < p_c(\mathbb{L}^d) < 1$ si $d > 1$

Demostración. Como \mathbb{L}^{d+1} es un subgrafo de \mathbb{L}^d se tiene que $p_c(\mathbb{L}^{d+1}) \leq p_c(\mathbb{L}^d)$, luego bastara probar que $p_c(\mathbb{L}^d) > 0$ si $d > 1$, y que $p_c(\mathbb{L}^2) < 1$. Probaremos que $\theta(p) = 0$ para p cercano a 0 y $\theta(p) > 0$ si p esta cerca de 1.

Lo primero es consecuencia de un argumento de conteo de caminos, en \mathbb{L}^d el número de caminos simples (que no repiten una misma arista) de largo n que parten del origen está acotado por: $2d(2d - 1)^{n-1}$ (basta observar que la primer arista se puede elegir entre $2d$ y después en cada paso no se puede elegir la arista por la que

llegue a ese vértice). La probabilidad de que al menos uno de esos caminos quede abierto está acotada por $2d(2d - 1)^{n-1}p^n$ (pues la probabilidad que un camino de largo n esté abierto es p^n). Pero $2d(2d - 1)^{n-1}p^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ si $p < \frac{1}{2d-1}$. Lo que implica que la probabilidad $\theta(p) = 0$ para $p < \frac{1}{2d-1}$ pues si hay un cluster infinito debe haber caminos de largo arbitrario.

De manera un poco mas formal, sea $\sigma(n)$ el número de caminos de \mathbb{L}^d que comienzan en el origen y tienen largo n . De lo anterior sabemos

$$\sigma(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1} \tag{2.1}$$

Sea $N(n)$ la cantidad de estos caminos que están abiertos. Cualquiera de ellos esta abierto con probabilidad p^n , por lo que tenemos $\mathbb{E}_p(N(n)) = p^n\sigma(n)$. Ahora si el origen esta en cluster infinito hay caminos de todos los largos que comienzan allí, luego

$$\theta(p) \leq \mathbb{P}_p(N(n) \geq 1) \leq \mathbb{E}_p(N(n)) = p^n\sigma(n) \rightarrow 0.$$

Lo segundo basta probarlo para el caso $d = 2$ porque podemos ver una copia de \mathbb{L}^2 tomando como vertices $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^d$ y con probabilidad positiva allí aparecerá un cluster infinito. En el caso $d = 2$ tenemos la ventaja de poder usar dualidad pues \mathbb{L}^2 es un grafo plano. Hay una correspondencia biyectiva entre las aristas de \mathbb{L}^2 y de su grafo dual, pues cada arista de \mathbb{L}^2 es cruzada por una única arista del dual. Se define que una arista en el dual esta abierta o cerrada dependiendo si cruza una arista cerrada o abierta de \mathbb{L}^2 respectivamente, está asignación define un proceso de percolación en el grafo dual con parámetro $1 - p$. Supongamos que la componente conexa abierta que contiene al origen es finita (ver figura 2.2 como ejemplo). Es claro que en este

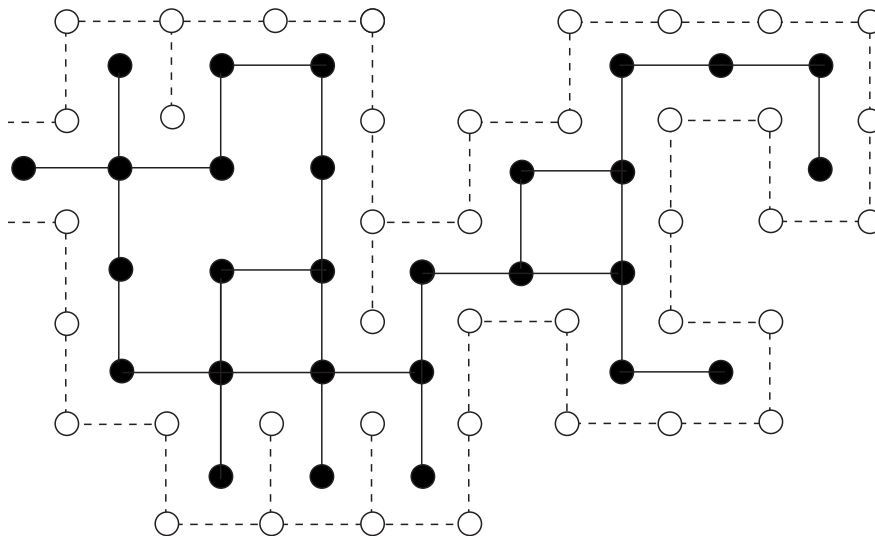


Figura 2.2: Una componente finita y el circuito dual que la encierra

caso el origen esta rodeado por un circuito de aristas abiertas en el dual que bloquean los posibles caminos infinitos. El recíproco es valido también, si el origen esta en interior de un circuito abierto del grafo dual entonces la componente que contiene al origen es finita. En resumen podemos afirmar que $|C(0)| < \infty$ si y solo si el origen esta dentro de un circuito abierto del dual (para una prueba mas rigurosa ver [21, 386]). Procedemos ahora como en la primer parte de la prueba contando la cantidad de circuitos cerrados en el dual. Sea $\rho(n)$ la cantidad de tales circuitos de largo n . Podemos estimar $\rho(n)$ de la siguiente manera.

Cada circuito debe necesariamente pasar por algún vértice de la forma $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para algún $0 \leq k < n$ (pues como rodea al origen pasa por $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para algún $k \geq 0$ pero no puede ser $k \geq n$ porque en ese caso tendría largo al menos $2n$). Pero un circuito tal contiene un camino simple de largo $n - 1$ comenzando en ese vértice. Por lo tanto se tiene que

$$\rho(n) \leq n\sigma(n - 1)$$

Llamemos $M(n)$ al número de de tales circuitos que están abiertos. Cada uno de ellos tiene largo n tiene probabilidad $(1 - p)^n$ de estar abierto.

Sea m un entero positivo. Definimos F_m el evento de que exista un circuito cerrado del dual que encierra al cuadrado $B(m) = \{-m, \dots, m\}^2$, y sea G_m el evento de que todas las aristas de $B(m)$ estén abiertas. Estos dos eventos son independientes pues están definidos en términos de conjuntos disjuntos de aristas. Se cumple:

$$\mathbb{P}_p(F_m) \leq \mathbb{P}_p\left(\sum_{n=4m}^{\infty} M(n) \geq 1\right) \leq \sum_{n=4m}^{\infty} (1 - p)^n n\sigma(n - 1) \quad (2.2)$$

La primera desigualdad sale del hecho que, para que ocurra F_m necesariamente tiene que haber un camino que encierra al origen de largo mayor que $4m$ (para que pueda contener a $B(m)$ en el interior).

De las desigualdades (2.2) y (2.1) se desprende, para el caso de \mathbb{L}^2 , que dado que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n n\sigma(n - 1) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n n 3^{n-1} < \infty \quad \text{si } p > \frac{2}{3}$$

se tiene entonces que si $p > \frac{2}{3} \exists m_0 > 0$ tal que $\sum_{n=4m_0}^{\infty} (1 - p)^n n\sigma(n - 1) \leq \frac{1}{2}$

Supongamos que ocurre G_m y no ocurre F_m . Esto implica que hay un vértice $v \in \partial B(m)$ que tiene un camino de largo infinito, o sea $v \leftrightarrow \infty$. Si no fuera así su componente conexa abierta debería estar rodeada por un circuito dual. Cuando además ocurre G_m se tiene que $B(m) \subset C(0)$, pues el cuadrado $B(m)$ tiene todas sus aristas abiertas y entonces está en la componente del origen (ver figura 2.3). Esto implica que la componente que contiene al origen es infinita. Por lo tanto tenemos para cualquier $m > 0$ que

$$\theta(p) \geq \mathbb{P}_p(G_m \cap F_m^c) = \mathbb{P}_p(G_m)\mathbb{P}_p(F_m),$$

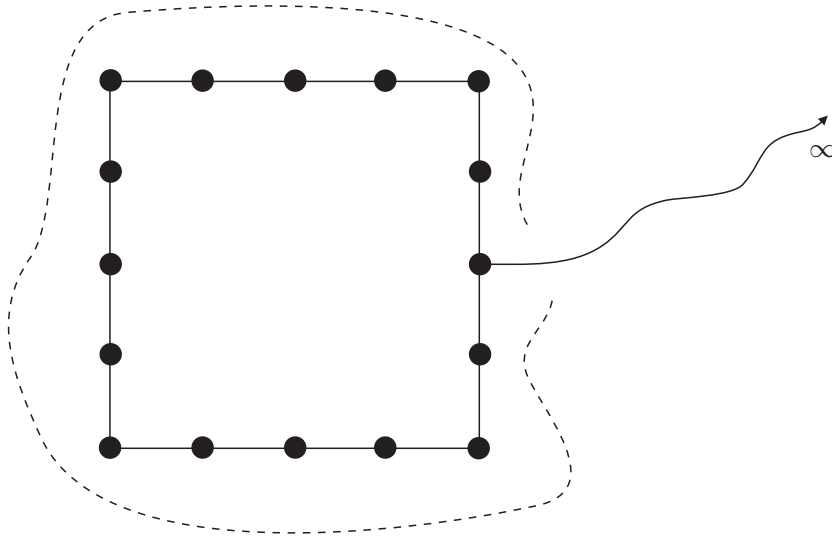


Figura 2.3: Un cuadrado no encerrado por un circuito dual

pues los eventos son independientes. Pero ahora si $m > m_0$ se tiene que

$$\theta(p) \geq \mathbb{P}_p(G_m \cap F_m^c) = \mathbb{P}_p(G_m)\mathbb{P}_p(F_m) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_p(G_m) > 0$$

Como esto vale para todo $p > \frac{2}{3}$ se desprende que $p_c(\mathbb{L}^2) \leq \frac{2}{3}$. □

2.2. Unicidad para grafos promediables

En esta sección probaremos que hay un único cluster infinito para los procesos de percolación en la fase supercrítica dentro de una familia grande de grafos.

Definición 2.4. Sea $G = (V, E)$ y $W \subset V$. Se definen $\partial_E W \subset E$ el conjunto de aristas con un vértice en W y otro en $V \setminus W$, y $\partial_V W \subset W$ el conjunto de vértices que son adyacentes a algún vértice en $V \setminus W$. Se dice que $e \in \partial_E W$ es una arista frontera de W y $v \in \partial_V W$ es un vértice frontera de W .

Definición 2.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo infinito, la constante isoperimétrica (de arista) de G es

$$\kappa_E(G) = \inf_{W \in \mathcal{P}_F(V)} \frac{|\partial_E(W)|}{|W|}.$$

Se dice que G es promediable si $\kappa_E(G) = 0$, si $\kappa_E(G) > 0$ se dice que G es no-promediable.

Observación. Es natural definir la constante isoperimétrica de vértice:

$$\kappa_V(G) = \inf_{W \in \mathcal{P}_F(V)} \frac{|\partial_V(W)|}{|W|}.$$

Si los vértices de G tienen grado acotado, en particular si G es transitivo, entonces $\kappa_V(G) = 0$ si y solo si $\kappa_V(G) = 0$. Entonces la promediabilidad es independiente de cual usemos para definirla.

Ejemplo. \mathbb{Z}^d es promediable, basta tomar $W_n = -n, \dots, n^d$ y ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_E W_n|}{|W_n|} = 0$$

Pues $|\partial_E W_n| = d(2n+1)^{d-1}$ y $|W_n| = (2n+1)^d$.

Teorema 2.6 (Burton-Keane). *Si G es un grafo transitivo y promediable, entonces los procesos de percolación independiente supercrítica en G producen un único cluster infinito.*

Demostración. Sea X un proceso de percolación en G con $p > p_c(G)$. Por el teorema de Newman-Schulman (1.23) basta descartar la posibilidad de que X produzca infinitos clusters infinitos. Podemos asumir que el grado de los vértices en G es al menos 3 pues de lo contrario G sería isomorfo a $\mathbb{L} = (\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ donde hay un único cluster infinito en la fase supercrítica pues $p_c(\mathbb{L}) = 1$.

Decimos que un vértice $v \in V$ es una trifurcación si

1. v esta en un cluster infinito
2. v es adyacente a otros 3 vértices exactamente
3. si quitamos v del cluster (ponemos sus aristas adyacentes en 0) dividimos el cluster infinito $C(v)$ en 3 clusters infinitos disjuntos (y por lo tanto en ninguno finito)

Supongamos que A es un conjunto finito de trifurcaciones pertenecientes al mismo cluster infinito K . Decimos que un elemento de A es exterior si al menos dos de los clusters que resultan de removerlo no contienen a ningún otro elemento de A .

Afirmamos que A debe tener algún elemento exterior. Para probar esto elegimos un elemento v_1 de A . Si v_1 no es exterior entonces por lo menos dos de los clusters que obtenemos al quitar v_1 contienen otros elementos de A . Sean v_2 y v_3 elementos en estos distintos clusters, y consideremos v_3 . O bien v_3 es exterior, o de lo contrario removerlo resulta en 3 clusters disjuntos de los cuales uno contiene a v_1, v_2 luego debe haber uno distinto que tenga otro elemento v_4 de A . De la misma forma para v_4 , o bien es exterior, o removerlo resulta en 3 clusters uno de los cuales contiene a v_1, v_2, v_3

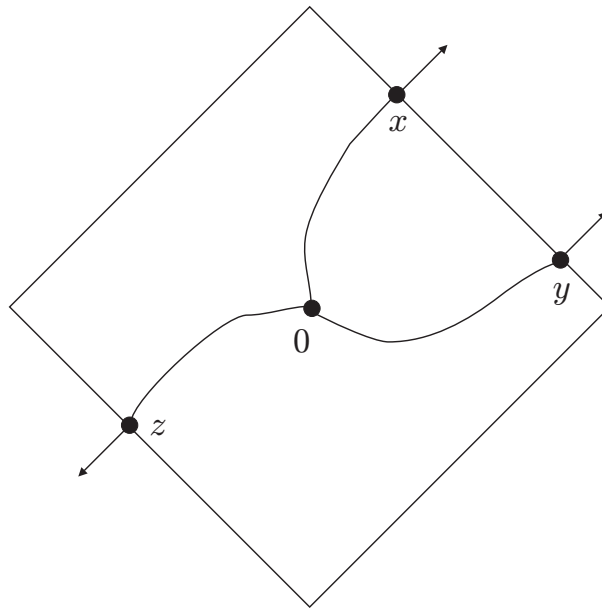


Figura 2.4: Una configuración adentro de $B(0, n)$ para $G = \mathbb{L}^2$ donde el origen es una trifurcación.

luego debe haber uno distinto que contenga a otro elemento de v_5 de A . Repetimos este procedimiento hasta encontrar un elemento exterior, esto ocurre eventualmente pues A es finito.

Afirmamos ahora que si A es un conjunto finito de trifurcaciones en un mismo cluster infinito K , entonces remover todas ellas divide al cluster en al menos $|A| + 2$ clusters infinitos disjuntos. Probamos esto por inducción en $|A|$. La afirmación es obvia cuando $|A| = 1$ por la definición de trifurcación. Asumamos que se cumple cuando $|A| = j$, y sea A un conjunto con $j + 1$ trifurcaciones en el mismo cluster. Sea v un elemento exterior de A . Quitemos todos los vértices de $A \setminus \{v\}$, por la hipótesis de inducción esto divide el cluster infinito en $j + 2$ componentes infinitas. Ahora quitamos v , como es exterior esto genera al menos una nueva componente infinita.

Entonces un cluster infinito con j trifurcaciones en un subconjunto finito $W \subset V$ debe intersectar ∂W en al menos $j + 2$ vértices. En consecuencia W no puede contener mas de $|\partial W| - 2$ trifurcaciones. Sea t la probabilidad de que un vértice $v \in W$ sea una trifurcación, y sea $T(W)$ el número de trifurcaciones en W . Como G es transitivo, t no depende del vértice particular y por lo tanto $\mathbb{E}(T(W)) = |W|t$. Por otro lado $T(W)$ está acotado superiormente por $|\partial W| - 2$ luego tenemos que

$$t \leq \frac{|\partial W| - 2}{|W|}.$$

Pero como G es promediable el cociente a la derecha se puede hacer tan chico como

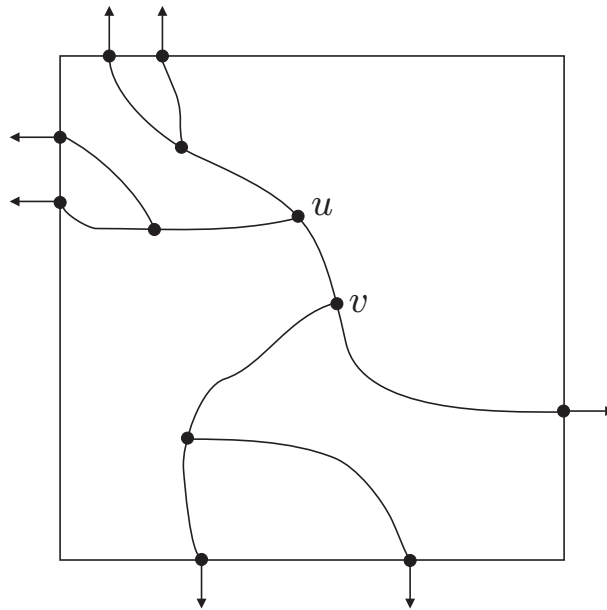


Figura 2.5: Las trifurcaciones marcadas son todas exteriores salvo u y v , se marcan los vértices donde cortan el borde.

queramos eligiendo correctamente W . De forma que $t = 0$, esto es, la probabilidad de que un vértice sea una trifurcación es nula.

Para terminar la prueba, usamos el acoplamiento de modificación local. Elegimos $X, X' \in \{0, 1\}^E$ y $C \in \mathcal{P}_F(E)$ como en la definición 1.22. Supongamos por absurdo que el número de clusters $N = \infty$ c.s. Podemos encontrar entonces un conjunto de vértices W tal que con probabilidad positiva, al menos 3 de los infinitos clusters en X intersecan W . Condicional a este evento, tenemos probabilidad positiva de elegir $C = E_W$ donde E_W son las aristas con vértices en W .

Condicional a estos eventos, cada configuración de $X'(E_W)$ tiene probabilidad positiva. Es fácil ver que alguna de ellas consiste en tres caminos simples disjuntos que salen de un mismo vértice $v \in W$ y cada uno se conecta con uno de los clusters infinitos. Si ocurre esta configuración en $X'(E_W)$, entonces el vértice v es una trifurcación para X' . Luego v tiene probabilidad positiva de ser una trifurcación, es decir $t > 0$, lo cual es una contradicción. Luego, no puede ser $N = \infty$. \square

2.3. La probabilidad crítica en \mathbb{L}^2

2.3.1. Auto-dualidad

A lo largo de esta sección y la siguiente vamos a trabajar con “cruces abiertos de rectángulos” un concepto estándar de los procesos de percolación en grafos planos. Vamos a identificar un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ donde $a < b$ y $c < d$ son enteros, con el subgrafo inducido de \mathbb{L}^2 . Este subgrafo contiene a todos los vértices y las aristas en el interior y el borde de R . Si $a - b = k$ y $d - c = l$ entonces decimos que R es un $k \times l$ rectángulo.

Denotaremos por $H(R)$ el evento de que ocurra un “cruce horizontal” en R , es decir un camino desde el lado izquierdo hasta el derecho que consiste únicamente en aristas abiertas de R , para evitar complicaciones con ciertos detalles no permitimos que los caminos utilicen las aristas del borde de R . De forma análoga denotamos $V(R)$ al evento de que exista un “cruce vertical” de R .

Observamos que si R y R' son rectángulos disjuntos entonces cada uno de los eventos $H(R)$, $V(R)$ es independiente de $H(R')$ y $V(R')$.

El dual horizontal, o simplemente el dual, de un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ es el rectángulo $R^h = [a + 1/2, b - 1/2] \times [c - 1/2, d + 1/2]$ en $(\mathbb{L}^2)^*$, (ver figura 2.6). Definiendo el proceso de percolación dual en $(\mathbb{L}^2)^*$ donde e^* esta abierta si y solo si e está cerrada, denotamos $V^*(R^h)$ al evento de que ocurra un cruce vertical de R^h por aristas abiertas de $(\mathbb{L}^2)^*$.

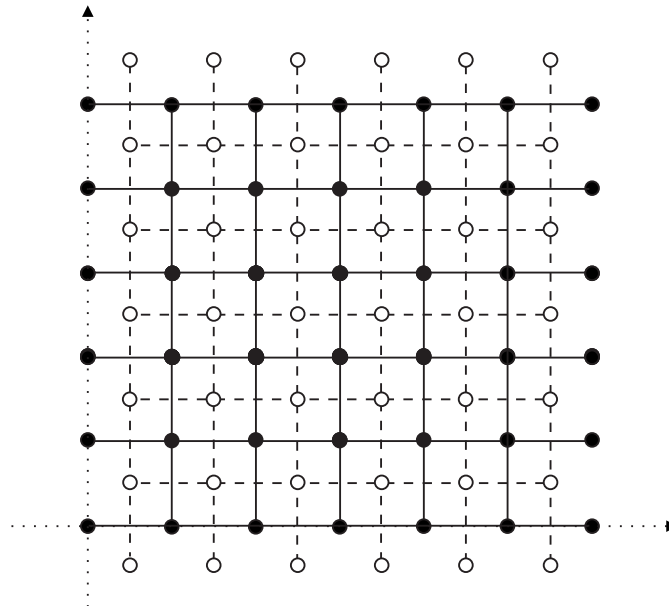


Figura 2.6: Un rectángulo 6 por 7 y su dual horizontal.

El siguiente lema es clave para estudiar los procesos de percolación en \mathbb{L}^2 . Muchas veces se considera “obvio” y no se da una prueba formal del mismo. A pesar de que el resultado es obvio no es trivial de probar, sin embargo se puede hacer una prueba relativamente corta y con uso de algunas consideraciones topológicas elementales. Para ver una prueba puramente topológica basada en el teorema de la curva de Jordan ver el trabajo de Kesten [20].

Lema 2.7. *Sea R un rectángulo en \mathbb{L}^2 . Entonces cualquiera sea el estado de las aristas de R , ocurre uno de los eventos $H(R)$ o $V^*(R^h)$.*

Demostración. Para evitar fracciones en esta prueba pensemos a \mathbb{L}^2 con sus vértices en $(0, 2) + 4\mathbb{Z}^2$ y $(\mathbb{L}^2)^*$ con vértices en $(2, 0) + 4\mathbb{Z}^2$. Sea R con vértices en $\{(4i, 4j + 2) : 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l - 1\}$ de forma tal que el conjunto de vértices de R^h es $\{(4i + 2, 4j) : 0 \leq i \leq k - 1, 0 \leq j \leq l\}$. Las aristas abiertas de R forman un grafo G y las de R^h otro que denotamos G^h . Queremos probar que o bien G tiene un cruce de izquierda a derecha, es decir un camino de un vértice $(0, 4j + 2)$ a un vértice $(4k, 4h + 2)$, o de lo contrario G^h contiene un cruce de arriba hacia abajo, pero no ocurren ambos.

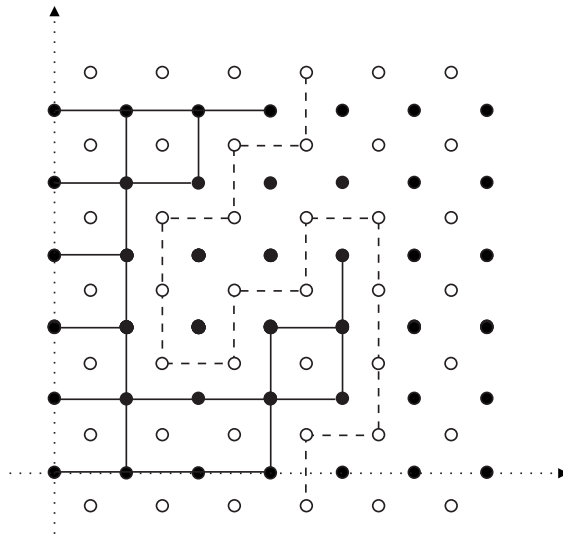


Figura 2.7: Un cruce vertical en el dual, no permite que haya un cruce horizontal en el rectángulo original.

Para probar esta afirmación, podemos asumir que G contiene todas las $2(l - 1)$ aristas en los lados izquierdo y derecho, y G^h contiene todas las $2(k - 1)$ aristas en el lado de arriba y de abajo, como en la figura 2.8. Notar que G y G^h son grafos planos y que cada arista es un segmento de largo 4.

Vamos a construir un tercer grafo, M , que va a estar en el “medio”, entre G y G^h . Sea R_M el $2k \times 2l$ rectángulo con vértices en $\{(2i + 1, 2j + 1) : 0 \leq i \leq 2k - 1, 0 \leq j \leq$

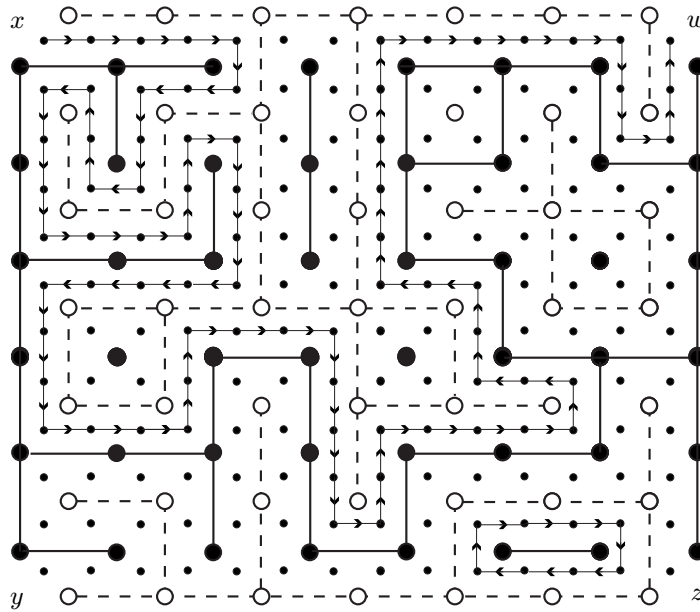


Figura 2.8: Los grafos G (círculos negros y líneas sólidas) y G^h (círculos blancos y líneas punteadas), y parte del grafo orientado M (pequeños círculos y flechas). La parte de M dibujada incluye el camino P y un ciclo.

$2l-1\}$, y sea M el subgrafo de R_M formado por las aristas que no cruzan ni una arista de G ni una de G^h . Orientamos cada arista de M de forma tal que G esta a la derecha y G^h a la izquierda. Entonces cada vértice de M tiene exactamente una arista que le llega y una que sale de él, a menos de cuatro vértices de grado uno x, y, z, w como en la figura 2.8. Entonces la componente conexa de x en M es un camino P que termina en y o en w . Si P termina en w entonces las aristas de G a la derecha de P forman un camino de izquierda a derecha (ver figura 2.8), y si P termina en y entonces las aristas de G^h a la izquierda de P forman un camino que cruza de arriba hacia abajo. Como cualquier subgrafo conexo que alcance ambos lados de un rectángulo incluye a un camino que hace lo mismo entonces probamos que al menos uno de los eventos $H(R)$ o $V^*(R^h)$ ocurre.

Que $H(R)$ y $V^*(R^h)$ no pueden ocurrir ambos es inmediato del teorema de la curva de Jordan, sin embargo, solo la parte fácil del teorema es necesaria. Si el camino P termina en w entonces P puede ser completado a una curva cerrada simple \bar{P} volviendo a x desde w por encima de R^h . Esta curva gira una vez alrededor de cualquier vértice del lado de arriba de R^h , y ninguna vez alrededor de los vértices de abajo. Como el número de giros de \bar{P} es constante fuera de \bar{P} , cualquier camino de arriba hacia abajo en G^h debe cruzar a \bar{P} , y por lo tanto cortar a una arista de M , contradiciendo la definición de M . De forma análoga, si P termina en y no hay ningún camino de izquierda a derecha en G completando la prueba. \square

Como las aristas de $(\mathbb{L}^2)^*$ están abiertas independientemente con probabilidad $1 - p$, el lema anterior tiene el siguiente corolario inmediato sobre rectángulos en el retículo original \mathbb{L}^2 .

Corolario 2.8. *Si R es un k por $l - 1$ rectángulo en \mathbb{L}^2 y R' es un $k - 1$ por l rectángulo, entonces*

$$\mathbb{P}_p(H(R)) + \mathbb{P}_{1-p}(V(R')) = 1.$$

Si $k = l = n + 1$, entonces R' is R rotado 90 grados. Entonces $\mathbb{P}_p(H(R)) = \mathbb{P}_p(V(R'))$, y este corolario implica el siguiente resultado que es una consecuencia fundamental de la auto-dualidad de \mathbb{L}^2 .

Corolario 2.9. *Si R es un $n + 1$ por n rectángulo entonces $\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) = 1/2$. Por lo tanto si S es un cuadrado $n \times n$, se tiene*

$$\mathbb{P}_{1/2}(V(S)) = \mathbb{P}_{1/2}(H(S)) \geq 1/2.$$

Es fácil pensar que el corolario anterior muestra que $p_c(\mathbb{L}^2) = 1/2$. Aunque la auto-dualidad es la “razón” por la cual esto ocurre, una deducción rigurosa esta lejos de ser fácil, y tomo 20 años en lograrse.

2.3.2. El teorema de Harris

En esta sección probamos el resultado de Harris de 1960 que $\theta(1/2) = 0$ para \mathbb{L}^2 , y por lo tanto $p_c(\mathbb{L}^2) \geq \frac{1}{2}$. Las técnicas son considerablemente mas fáciles que las originales de Harris. La estrategia de prueba es la de Russo, Seymour y Welsh. Sin embargo la prueba del resultado intermedio es considerablemente mas corta y se basa en un trabajo de Bollobás y Riordan [5].

Lema 2.10. *Sea $R = [0, m] \times [0, 2n]$ con $m \geq n$ un m por $2n$ rectángulo. Sea $X(R)$ el evento de que existan caminos abiertos P_1 y P_2 , tales que P_1 cruza $S = [0, n] \times [0, n]$ de arriba hacia abajo, y P_2 une (dentro de R) algún vértice de P_1 con algún vértice del lado derecho de R . Entonces $\mathbb{P}_p(X(R)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))\mathbb{P}_p(V(S))/2$.*

Demostración. Supongamos que ocurre $V(S)$, luego hay un camino P de aristas abiertas que cruza S de arriba hacia abajo. Notemos que cualquier camino de esas características separa S en dos regiones, una a la izquierda de P y otra a la derecha. La prueba del lema 2.7 muestra que cuando ocurre $V(S)$ se puede definir el camino P de mas a la izquierda, $lv(S)$, de forma tal que el evento $\{lv(S) = P_1\}$ no depende de las aristas a la derecha de P_1 . Es fácil ver que para cualquier camino posible P_1 de $lv(S)$ se tiene:

$$\mathbb{P}_p(X(R) | lv(S) = P_1) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$$

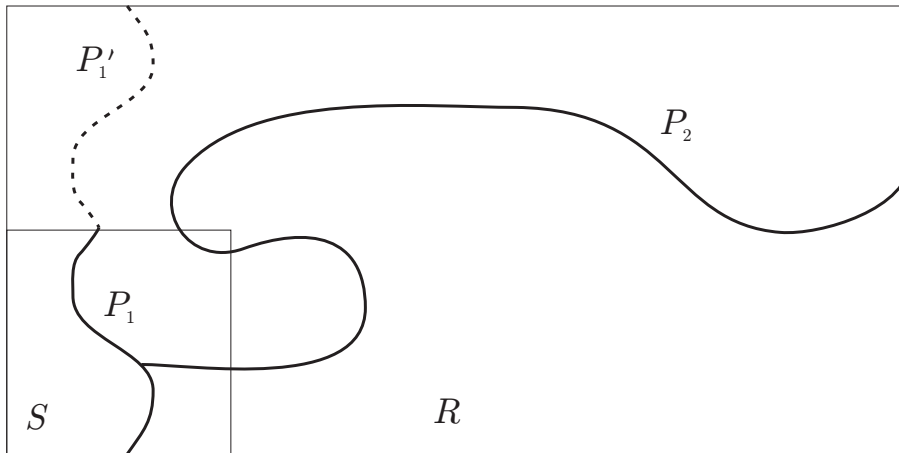


Figura 2.9: Un rectángulo R y un cuadrado S , dibujados con caminos cuya presencia como caminos abiertos implica $X(R)$.

Para esto sea P el camino (no necesariamente abierto) formado por la unión de P_1 y su simétrico P'_1 respecto al eje $y = n$ (ver figura 2.9). Este camino corta $[0, n] \times [0, 2n]$ de arriba hacia abajo. Con probabilidad (no-condicional) $\mathbb{P}_p(H(R))$ hay un camino P_3 de aristas abiertas que cruza R de izquierda a derecha, este camino debe cortar a P . Por simetría la probabilidad de que un camino así corte a P en un vértice de P_1 es al menos $\mathbb{P}_p(H(R))/2$. Entonces el evento $Y(P_1)$ de que exista un camino P_2 en R a la derecha de P que una algún punto de P_1 con el lado derecho de R tiene probabilidad al menos $\mathbb{P}_p(H(R))/2$. Pero $Y(P_1)$ depende solamente de las aristas a la derecha de P . Todas éstas están a la derecha de P_1 en S . Como los estados de las mismas son independientes de $\{lv(S) = P_1\}$, tenemos que:

$$\mathbb{P}_p(Y(P_1) | lv(S) = P_1) = \mathbb{P}_p(Y(P_1)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$$

Pero $lv(S) = P_1$ y $Y(P_1)$ implican $X(R)$, luego tenemos que $\mathbb{P}_p(X(R) | lv(S) = P_1) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$. Finalmente, como el evento $V(S)$ es una unión disjunta de eventos de la forma $\{lv(S) = P_1\}$ concluimos que $\mathbb{P}_p(X(R) | V(S)) \geq \mathbb{P}_p(H(R))/2$. \square

Corolario 2.11. *Sea $\rho > 1$ un entero. Entonces existe una constante $c(\rho) > 0$ que depende únicamente de ρ tal que para cualquier rectángulo R de tamaño $2\rho n$ por $2n$ se tiene $\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) \geq c(\rho)$.*

Demostración. Denotemos $h_{m,n}$ a $\mathbb{P}_{1/2}(H(R))$ donde R es un rectángulo de tamaño m por n , afirmamos que para $m \geq n$ se tiene $h_{2m-n, 2n} \geq h_{m, 2n}^2/2^5$. Si aplicamos la desigualdad reiteradas veces comenzando de $h_{2n, 2n} \geq 1/2$ (por el corolario 2.9) se obtiene el resultado. Para probar la afirmación consideremos los rectángulos $R = [0, m] \times [0, 2n]$ y $R' = [n-m, n] \times [0, 2n]$ y el cuadrado $S = [0, n] \times [0, n]$ en su intersección como se ve en la figura 2.10. Sean $E_1 = X(R)$, E_2 es el evento correspondiente

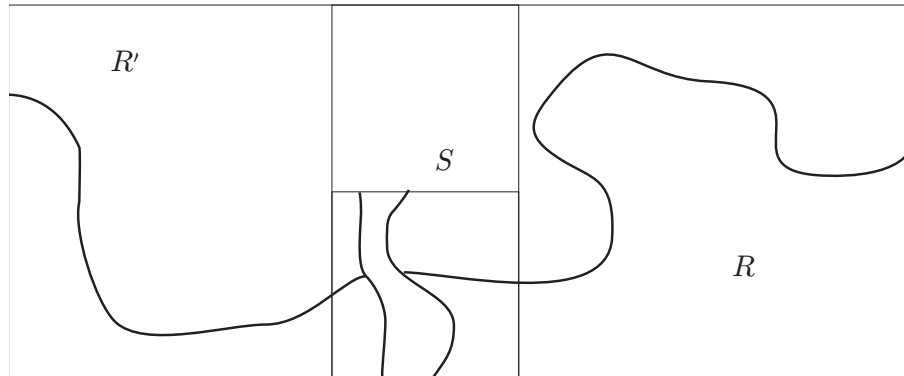


Figura 2.10: Los rectángulos R y R' con el cuadrado S en su intersección. Los caminos dibujados muestran que ocurre $X(R)$ así como su reflejo en R' . Si $H(S)$ ocurre entonces también ocurre $H(R \cup R')$.

para R' (es decir reflejado horizontalmente) y $E_3 = H(S)$. Si todos ellos ocurren entonces ocurre $H(R \cup R')$, basado en el hecho de que cualquier camino horizontal en S corta a cualquier camino vertical (ver figura 2.10). Pero los E_i son eventos crecientes por lo tanto por la desigualdad FKG (teorema 1.15) se tiene

$$\mathbb{P}_{1/2}(H(R \cup R')) \geq \mathbb{P}_{1/2}(E_1)\mathbb{P}_{1/2}(E_2)\mathbb{P}_{1/2}(E_3) = \mathbb{P}_{1/2}(X(R))^2\mathbb{P}_{1/2}(H(S)).$$

Por el corolario 2.9 tenemos $\mathbb{P}_{1/2}(V(S)) = \mathbb{P}_{1/2}(H(S)) \geq 1/2$. Aplicando el lema anterior (2.10) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(H(R \cup R')) &\geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R))^2\mathbb{P}_{1/2}(V(S))^2\mathbb{P}_{1/2}(H(S))/4 \\ &\geq \mathbb{P}_{1/2}(H(R))^2/2^5 \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación y por lo tanto el corolario. □

Teorema 2.12 (Harris). *Para los procesos de percolación independiente en \mathbb{L}^2 se tiene que $\theta(1/2) = 0$.*

Demostración. Sea $c = c(3)$ la constante dada en el corolario anterior (2.11) Por la desigualdad FKG (teorema 1.15), si colocamos cuatro rectángulos de dimensiones $6n$ por $2n$, de forma tal que formen un “anillo cuadrado” como en la figura 2.11, como los cruces son eventos crecientes entonces con probabilidad al menos c^4 todos los rectángulos contienen un camino que los cruza en el sentido largo. La unión de cualquiera de estos caminos contiene a un ciclo que rodea al centro del anillo (ver figura 2.11). Para $k \geq 1$ sea A_k el anillo cuadrado centrado en el origen con radio interior 4^k y exterior 3×4^k . Entonces los A_k (incluyendo sus fronteras) son disjuntos.

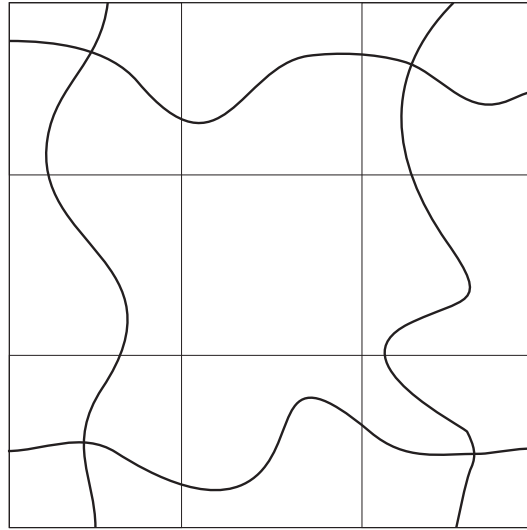


Figura 2.11: Cuatro rectángulos formando un “anillo cuadrado”.

Usando la independencia de regiones disjuntas, en $p = 1/2$ la probabilidad de que el punto $(1/2, 1/2)$ no este rodeado por un ciclo de aristas abiertas es por lo menos

$$\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{1/2}(A_k \text{ no tiene un ciclo abierto}) \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - c^4) = 0$$

Por lo tanto, si $p = 1/2$, la probabilidad de que $(1/2, 1/2)$ este en un cluster abierto infinito del grafo dual es cero. De forma equivalente, si $p = 1/2$ la probabilidad de que el origen pertenezca a un cluster abierto infinito es 0. Es decir $\theta(1/2) = 0$. \square

2.3.3. El teorema de Kesten

En la prueba del siguiente lema hacemos uso de una técnica llamada el “truco de la raíz cuadrada” por Cox y Durrett. La idea es la siguiente: Si A_1, A_2, \dots, A_m son eventos crecientes y equiprobables, entonces

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) &= \mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c \right) \\ &\geq \prod_{i=1}^m \mathbb{P}_p(A_i^c) \quad \text{por la desigualdad FKG} \\ &\geq (1 - \mathbb{P}_p(A_1))^m, \end{aligned}$$

De donde se desprende que

$$\mathbb{P}_p(A_1) \geq 1 - \left\{ 1 - \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right\}^{1/m} \tag{2.3}$$

Lema 2.13 (Russo-Seymour-Welsh). *Sea S un cuadrado de lado $2l$ si $\mathbb{P}_p(H(S)) = \tau$ entonces*

$$\mathbb{P}_p(H(R)) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3$$

donde R es un rectángulo de lados $3l$ y $2l$.

Demostración. El objetivo es construir un cruce de izquierda a derecha del rectángulo R usando cruces abiertos de cuadrados de lado $2l$. Consideramos $S = [0, 2l] \times [0, 2l]$ y $S' = [l, 3l] \times [0, 2l]$, de forma tal de que $R = S \cup S' = [0, 3l] \times [0, 2l]$. Sea $E_P = \{\text{lh}(S) = P\}$ el evento de que el camino P sea el cruce de mas abajo de izquierda a derecha en S . Llamamos P_m a la porción del camino P desde la última vez que alcanza $l \times [0, 2l]$ hasta que alcanza $2l \times [0, 2l]$. (la línea gruesa en la figura 2.12). Sea P_r el camino simétrico de P_m respecto al eje $2l \times [0, 2l]$ (la línea punteada en la figura 2.12). Sea $\mathcal{A}(P)$ la región de S' que esta estrictamente por encima de $P_m \cup P_r$. Sea $\mathcal{B}(P)$ la región de S estrictamente por debajo de P (la región rayada en la figura 2.12). Definimos el evento F_P de que haya un camino del lado de arriba de S' que conecte con P_m en $\mathcal{A}(P) \setminus \mathcal{B}(P)$, observemos que esta definición permite usar aristas de P . Sea G la unión de $E_P \cap F_P$ sobre todos los caminos P tales que P_m comienza por debajo de $[0, 2l] \times l$ (como el dibujado en la figura). Sea H el evento de que ocurra

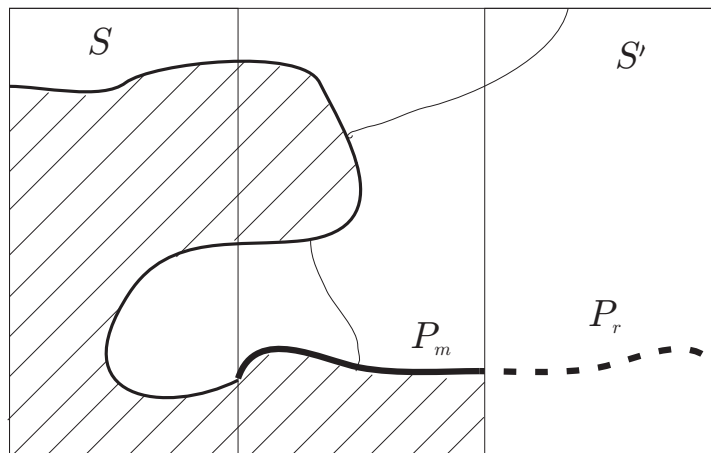


Figura 2.12: Los cuadrados S y S' formando un rectángulo, el camino P , P_m y P_r , y un camino que conecta el lado de arriba de S' con P_m en $\mathcal{A}(P)$.

un cruce de izquierda a derecha en S' que comience encima de $[l, 3l] \times l$. No hay un

camino de este tipo dibujado en la figura 2.12, pero es fácil observar dibujando un camino tal, que en $G \cap H$ hay un cruce de izquierda a derecha de R . Para probar el lema entonces es suficiente probar que

$$\mathbb{P}_p(G \cap H) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3.$$

Lo primero que hacemos es notar que por la desigualdad FKG (teorema 1.15) como G y H son crecientes tenemos que $\mathbb{P}_p(G \cap H) \geq \mathbb{P}_p(G)\mathbb{P}_p(H)$. Para acotar $\mathbb{P}_p(H)$ usamos el “truco de la raíz cuadrada” con H y H' que se define igual que H pero que comience por debajo del punto medio, estos eventos son equiprobables y su unión es $H(S)$ por lo tanto se desprende que

$$\mathbb{P}_p(H) \geq 1 - \sqrt{1 - \tau}.$$

Para acotar $\mathbb{P}_p(G)$ escribimos

$$\mathbb{P}_p(G) = \sum_P \mathbb{P}_p(E_P \cap F_P) = \sum_P \mathbb{P}_p(E_P)\mathbb{P}_p(F_P|E_P),$$

y denotamos por F'_P al evento de que haya un camino del lado de arriba de S' que conecte con P_m en $\mathcal{A}(P)$, entonces

$$\mathbb{P}_p(F_P|E_P) = \mathbb{P}_p(F_P) \geq \mathbb{P}_p(F'_P). \quad (2.4)$$

Aquí estamos usando dos cosas:

- E_P es medible con respecto a los sitios en $\bar{\mathcal{B}}(P) = \mathcal{B}(P) \cup P$ pues justamente el camino de mas abajo es independiente de lo que pase arriba, solo depende de las aristas que están por debajo.
- La presencia de P que es abierto hace mas probable que exista la conexión que estamos buscando pues es un evento creciente, y asegurar que existe P es asegurar aristas abiertas.

Con la ecuación (2.4) establecida lo que queda es sencillo, dos aplicaciones del “truco de la raíz cuadrada” alcanzan para terminar la prueba. Se puede definir un evento simétrico a F'_P que en lugar de conectar el lado de arriba de S' con P_m se conecte con P_r . Es claro que si ocurre $V(S')$ ocurre la unión de estos dos eventos, pues cualquier camino de arriba hacia abajo debe cortar $P_m \cup P_r$, como $\mathbb{P}(V(S')) = \tau$ se tiene

$$\mathbb{P}_p(F'_P) \geq 1 - \sqrt{1 - \tau}.$$

Por último para terminar la prueba veamos que

$$\sum_P \mathbb{P}_p(E_P) \geq 1 - \sqrt{1 - \tau}.$$

Esto es porque la suma es sobre los caminos P cuyo último cruce de la recta $lx[0, 2l]$ ocurre por debajo de la mitad, como los E_P son todos disjuntos $\sum_P \mathbb{P}_p(E_P) = \mathbb{P}_p(E^-)$ donde E^+ y E^- son los eventos de que el cruce horizontal más bajo de S corte a la recta $lx[0, 2l]$ por debajo o por encima de la mitad. Pero entonces aplicando el “truco de la raíz cuadrada” se tiene lo que queríamos. Juntando todas las desigualdades se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(H(R)) &\geq \mathbb{P}_p(G \cap H) \geq \mathbb{P}_p(G)\mathbb{P}_p(H) \\ &\geq (1 - \sqrt{1 - \tau}) \sum_P \mathbb{P}_p(E_P)\mathbb{P}_p(F_P|E_P) \\ &\geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^2 \sum_P \mathbb{P}_p(E_P) \\ &\geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3 \end{aligned}$$

Lo que termina de probar el teorema. □

El siguiente lema es la clave para probar el teorema de Kesten. El hecho de que este resultado no es trivial se puede observar de que a pesar de que se sabía que este lema implicaba la existencia de clusters infinitos, nadie pudo completar la prueba por varios años hasta que Kesten terminó el problema.

Lema 2.14. *Si $p > 1/2$, y S_n es un cuadrado de lado n , entonces $\mathbb{P}_p(H(S_n)) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. La herramienta clave para este lema es la fórmula de Russo (teorema 1.18). Vamos a aplicarla al evento $H(S_n)$ para n suficientemente grande y probaremos que si $p > 1/2$, no puede ser $\mathbb{P}_p(H(S_n)) < 1 - \varepsilon$ porque la derivada es grande con lo que llegaremos a una contradicción.

Recordemos la ecuación (1.2) de la observación posterior a la fórmula de Russo, para abreviar la notación sea

$$\mathbb{P}_p(H(S_n)) = \mathbb{P}_{1/2}(H(S_n)) \exp\left(\int_{1/2}^p \frac{1}{p} \mathbb{E}_p(N(H(S_n))|H(S_n)) dp\right) \quad \text{si } p > 1/2.$$

Luego el lema se reduce a probar que $\mathbb{E}_p(N(H(S_n))|H(S_n)) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para hacer esto tenemos que encontrar una cantidad grande de aristas esenciales, la idea de Kesten fue mirar al cruce horizontal más bajo. El evento $\{\text{lh}(S_n) = P\}$ depende únicamente de las aristas por debajo de P por lo tanto si condicionamos a este evento, la distribución de la configuración por encima de P no se ve afectada.

En la región por encima de P buscamos camino abierto en el dual que conecte el lado de arriba hasta alcanzar a P , sea Q un camino tal. La arista e en la que se alcanzan P con Q es esencial para $H(S_n)$ (ver figura 2.13). Es decir cualquier arista

que tenga una conexión abierta en el dual al lado de arriba de S_n es esencial, pues P es el cruce de más abajo y la presencia de Q implica que cualquier cruce horizontal debe pasar por la arista e .

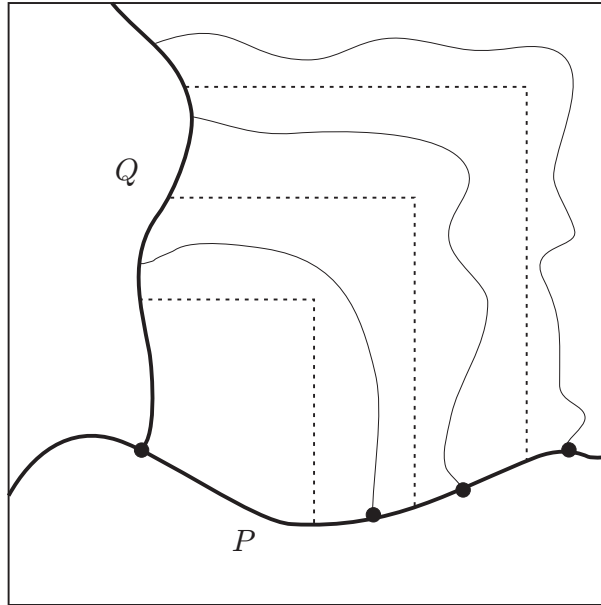


Figura 2.13: Las aristas que tienen un camino al lado de arriba en el cuadrado S son esenciales.

Luego el número de aristas esenciales $N(H(S_n))$ es mayor que el número de aristas tales que un extremo de e^* se conecta con el lado de arriba en el proceso de percolación dual, sea $D(e^*)$ el evento asociado. Si definimos $\hat{N}(P)$ a la variable aleatoria que cuanta el número de aristas en P en las condiciones descritas, se tiene que $N(H(S_n)) \geq \hat{N}(\text{lh}(S_n))$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(N(H(S_n))|H(S_n)) &\geq \mathbb{E}_p(\hat{N}(\text{lh}(S_n))|H(S_n)) \\ &\geq \sum_P \mathbb{P}_p(\text{lh}(S_n) = P|H(S_n))\mathbb{E}_p(\hat{N}(P)|\text{lh}(S_n) = P). \end{aligned}$$

Donde la suma es los caminos P que están en la mitad de abajo del cuadrado (a priori sería todos los caminos posibles, pero nos va a ser útil considerar solamente estos caminos para buscar arcos luego). Ahora como $\hat{N}(P) = \sum_{e \in P} I_{D(e^*)}$ tenemos que

$$\mathbb{E}_p(\hat{N}(P)|\text{lh}(S_n) = P) = \sum_{e \in P} \mathbb{P}_p(D(e^*)|\text{lh}(S_n) = P). \tag{2.5}$$

Pero el evento $\{\text{lh}(S_n) = P\}$ solo depende de las aristas por debajo de P mientras que $D(e^*)$ depende solo de la configuración arriba de P (la existencia de un camino

abierto en el dual desde el lado de arriba hasta P). Por lo tanto estos dos eventos son independientes. Esto nos permite librarnos de la condición $\{\text{lh}(S_n) = P\}$ en la ecuación (2.5), obteniendo entonces

$$\mathbb{E}_p(\hat{N}(P) | \text{lh}(S_n) = P) = \sum_{e \in P} \mathbb{P}_p(D(e^*)).$$

Es claro que $D(e^*)$ es un evento decreciente, por lo tanto $\mathbb{P}_p(D(e^*))$ es una función decreciente con p , de donde entonces

$$\mathbb{E}_p(\hat{N}(P) | \text{lh}(S_n) = P) \geq \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P)).$$

Sustituyendo esta desigualdad en (2.5) y usando que

$$\sum_P \mathbb{P}_p(\text{lh}(S_n) = P | H(S_n)) \geq \mathbb{P}_p(H(R_n)) = c(2) = \delta,$$

donde R_n es la mitad de abajo de S_n es un $n/2$ por n rectángulo, y la constante viene del corolario 2.11. Se obtiene entonces que

$$\mathbb{E}_p(N(H(S_n)) | H(S_n)) \geq \min_P \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P)),$$

donde el mínimo se toma sobre los posibles cruces más bajos que estén dentro de R_n .

Fijemos ahora el camino P , en la región por encima de P buscamos un camino abierto en el dual que conecte el lado de arriba hasta alcanzar a P en la mitad izquierda de S_n , sea A el evento de que exista un camino así, de estos caminos sea $\text{lv}(A)$ el de mas a la izquierda. $\mathbb{P}_{1/2}(A) > c(2) = \delta$ pues es un cruce vertical de un n por $n/2$ rectángulo (V_n la mitad de la izquierda de S_n en el grafo dual).

El próximo paso para estimar las aristas esenciales es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P)) &\geq \sum_Q \mathbb{P}_{1/2}(\text{lv}(A) = Q) \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P) | \text{lv}(A) = Q) \\ &\geq \delta \min_Q \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P) | \text{lv}(A) = Q) \end{aligned}$$

En lo que sigue fijemos Q . La configuración en la región por encima de P y a la derecha de Q es independiente de que estos sean los caminos de mas abajo y mas a la izquierda respectivamente. Ahora buscamos arcos duales entre P^* y Q como en la figura 2.13, pues las aristas de donde parten en P se conectan con el lado de arriba de S_n y por lo tanto son esenciales. Estos arcos se pueden completar a circuitos abiertos en el dual alrededor del origen, de la prueba del teorema de Harris se desprende que tales circuitos (que están dentro de un “anillo cuadrado”) ocurren con probabilidad positiva que denotamos β . Finalmente se tiene que $\mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P) | \text{lv}(A) = Q) \geq \beta C_n$,

donde C_n es la cantidad de anillos disjuntos que pasan por la mitad de la derecha y de arriba del cuadrado S_n , es claro que $C_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. luego concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(N(H(S_n))|H(S_n)) &\geq \delta \min_P \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P)) \\ &\geq \delta^2 \min_Q \mathbb{E}_{1/2}(\hat{N}(P)|lv(A) = Q) \\ &\geq \delta^2 \beta C_n \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lo que demuestra el lema, una prueba más detallada se puede encontrar en el trabajo de Kesten [20]. □

Lema 2.15. *Si $p > 1/2$, y R_n es un rectángulo de lados $3n$ por n , entonces se tiene $\mathbb{P}_p(H(R_n)) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Esto es una consecuencia sencilla de los lemas 2.13 y 2.14. Es inmediato ver que $\mathbb{P}_p(H(R_n^1)) \rightarrow 1$ donde R_n^1 es un $3n$ por $2n$ rectángulo.

Pero entonces si ponemos dos de estos R_n^1 rectángulos superpuestos en los dos tercios centrales como en la figura 2.14 forman un $4n$ por $2n$ rectángulo R_n^2 , se tiene que $\mathbb{P}_p(H(R_n^2)) \geq \mathbb{P}_p(H(R_n^1))^3 \rightarrow 1$.

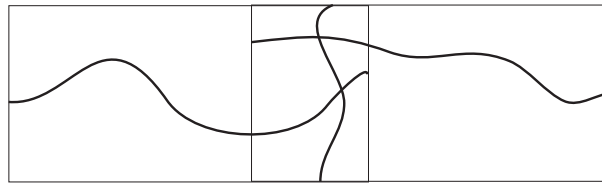


Figura 2.14: Dos rectángulos que se cortan en el centro para formar un rectángulo mas grande.

De forma análoga, si ponemos dos R_n^2 rectángulos pegados formando un $6n$ por $2n$ rectángulo R_n^3 se tiene $\mathbb{P}_p(H(R_n^3)) \geq \mathbb{P}_p(H(R_n^2))^3 \rightarrow 1$, lo que prueba el lema. □

Teorema 2.16 (Kesten). *Si $p > 1/2$ entonces $\Psi(p) > 0$. Por lo tanto $p_c(\mathbb{L}^2) = 1/2$.*

Demostración. Si fijamos $p > 1/2$, sea i_n la probabilidad de que un $2n$ por n rectángulo tenga un cruce interno abierto. Notemos que i_n es la probabilidad de que un $2n$ por $n - 2$ rectángulo tenga un cruce horizontal abierto. Si escribimos s_n para la probabilidad de que un cuadrado n por n tenga un cruce vertical. Como un cuadrado n por n esta contenido dentro de un n por $2n$ rectángulo, $s_n \geq i_n$. Si consideramos tres $2n$ por n rectángulos que se superpongan en dos n por n cuadrados como en la figura (2.15) por la desigualdad FKG se tiene que un $4n$ por n rectángulo tiene un cruce horizontal con probabilidad al menos $i_n^3 s_n^2$. Si ponemos dos de estos rectángulos lado

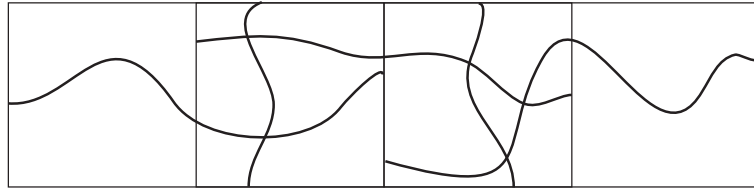


Figura 2.15: Tres $2n$ por n rectángulos y dos n cuadrados, dibujados con caminos que garantizan a un cruce horizontal de su unión.

a lado para formar un $4n$ por $2n$ rectángulo, los eventos de que cada uno tenga un cruce horizontal interno son independientes pues dependen de un conjunto disjunto de aristas. Por lo tanto

$$i_{2n} \geq 1 - (1 - i_n^3 s_n^2)^2 \geq 1 - (1 - i_n^5)^2 \tag{2.6}$$

pues si alguno de los dos tiene un cruce entonces el rectángulo grande también tiene un cruce.

Si escribimos i_n como $1 - \varepsilon$ de la ecuación 2.6 se obtiene que $i_{2n} \geq 1 - 25\varepsilon^2$ que vale al menos $1 - \varepsilon/2$ si $\varepsilon \leq 1/50$. Por el lema A.6 existe un n tal que $i_n \geq 0,98$ (Si $n \geq 6$ entonces un cruce de un $3(n - 2)$ por $n - 2$ rectángulo fijo incluye un cruce interno de un $2n$ por n rectángulo fijo). Se sigue que $i_{2^k n} \geq 1 - 2^k/50$ con esto podemos construir un cluster infinito de la siguiente manera, para $k \in \mathbb{N}$ sea R_k un rectángulo de vértice inferior izquierdo en el origen y de dimensiones $2^k n$ y $2^{k+1} n$, donde el lado mas largo es vertical si k es par, y es horizontal si k es impar (ver figura 2.16). Sea E_k el evento de que R_k tenga un cruce abierto en el sentido largo. Notar

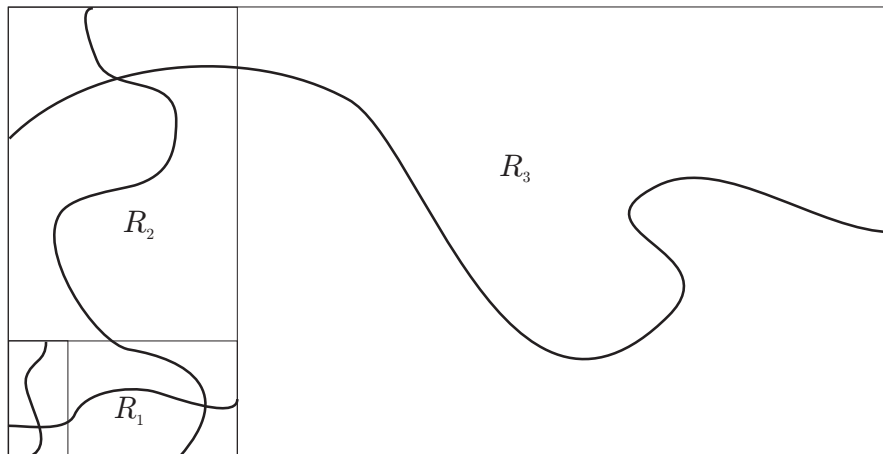


Figura 2.16: Los rectángulos R_0 a R_3 (R_0 sin etiquetar) dibujados con caminos abiertos correspondientes a los eventos E_k .

que dos cualesquiera de estos cruces de R_k y R_{k+1} se deben intersecar. Por lo tanto si todos los E_k ocurren entonces existe un cluster infinito abierto. Pero

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_p(E_k^c) \leq \sum_{k \geq 0} 2^{-k}/50 \leq 1,$$

pero entonces

$$\Psi(p) \geq \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{k \geq 0} E_k\right) > 0.$$

Juntando este resultado con el teorema de Harris queda probado que $p_c(\mathbb{L}^2) = 1/2$.
 \square

Capítulo 3

Percolación en árboles (\mathbb{T}_d)

En este capítulo estudiaremos los procesos de percolación sobre árboles. En el capítulo anterior, llegamos a establecer la unicidad del cluster infinito en \mathbb{L}^d y más en general en cualquier grafo transitivo y promediable. Es natural preguntarse hasta donde se puede extender este resultado. ¿Quizás a todos los grafos conexos? La respuesta es no, aun cuando nos restringimos a los grafos transitivos.

Para estudiar un caso que presenta un fenómeno bastante distinto a los retículos y, en particular, acercarnos a responder parcialmente la pregunta anterior, estudiaremos como se comportan los procesos de percolación en árboles.

Definición 3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo, Se dice que G es un árbol si es conexo y no contiene ciclos.

Definición 3.2. Llamamos árbol regular de orden $d \geq 2$ al único grafo, que denotamos \mathbb{T}_d , infinito y conexo, que no tiene ciclos y para el cual todos los vértices tienen grado exactamente igual a $d + 1$ (o sea hay $d + 1$ aristas que salen de cada vértice).

$\mathbb{T}_d = (V_d, E_d)$ los conjuntos de vértices y aristas son:

$$\begin{aligned} V_d &= \langle a_0, \dots, a_d \mid a_0^2 = \dots = a_d^2 = e \rangle, \\ E_d &= \{(x, y) \in V_d \times V_d : x^{-1}y = a_i \text{ para algún } i\}. \end{aligned}$$

Proposición 3.3. T_d no es promediable.

Demostración. Sea $W \subset V_d$ es un conjunto finito, consideremos W_1, \dots, W_k las componentes conexas de W en \mathbb{T}_d , entonces el siguiente lema implica que

$$|\partial_E W_i| > (d - 1)|W_i| \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k.$$

Como además es claro que

$$|W| = \sum_{i=1}^k |W_i| \quad \text{y} \quad |\partial_E W| = \sum_{i=1}^k |\partial_E W_i|,$$

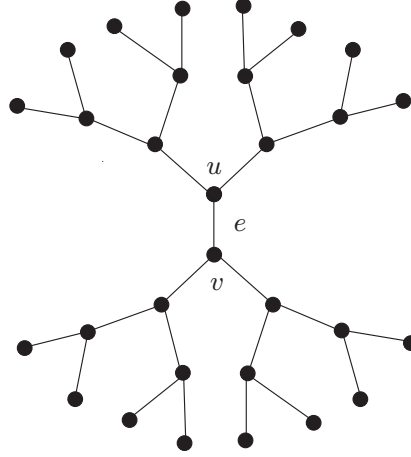


Figura 3.1: Una región del grafo \mathbb{T}_2 .

se tiene lo siguiente:

$$\frac{|\partial_E W|}{|W|} = \frac{\sum_{i=1}^k |\partial_E W_i|}{|W|} > \frac{\sum_{i=1}^k (d-1)|W_i|}{|W|} = \frac{(d-1)|W|}{|W|} = d-1 \geq 1$$

De donde se desprende que

$$\kappa_E(\mathbb{T}_d) = \inf_{W \in \mathcal{P}_F(V_d)} \frac{|\partial_E(W)|}{|W|} > d-1 > 0.$$

Luego \mathbb{T}_d no es promediable. □

Lema 3.4. Si $W \subset V_d$ es un conjunto finito y conexo en \mathbb{T}_d , entonces $|\partial_E W| > (d-1)|W|$

Demostración. Sea $|W| = n$. Como $\langle W \rangle$ está incluido en \mathbb{T}_d y es conexo entonces $\langle W \rangle$ es un árbol. Comencemos por probar lo siguiente: *Existe al menos un vértice de grado 1 en $\langle W \rangle$.*

Consideremos un procedimiento iterativo. Considero un vértice cualquiera v_1 en W y sea $V_1 = \{v_1\}$. Si v_1 tiene grado 1, encontré el vértice buscado, de lo contrario tiene grado al menos 2, por lo tanto se conecta con dos vértices de W . Sea $v_2 \in W \setminus V_1$ uno cualquiera de ellos, y sea $V_2 = V_1 \cup \{v_2\}$. Si v_2 tiene grado 1, encontré el vértice buscado, de lo contrario se conecta con al menos dos vértices de W , al menos uno de ellos no está en $V_2 = \{v_1\}$. Sea $v_3 \in W \setminus V_2$ un vértice tal, y sea $V_3 = V_2 \cup \{v_3\}$, observemos que $\langle V_3 \rangle$ es conexo. En general en el paso k -ésimo, si v_k tiene grado 1, encontré el vértice buscado, de lo contrario se conecta con al menos dos vértices de W , al menos uno de ellos no está en V_k pues sino $\langle W \rangle$ tendría un ciclo ya que $\langle V_k \rangle$ y v_k ya se conecta con $v_{k-1} \in V_k$. Sea $v_{k+1} \in W \setminus V_k$ un vértice tal, y sea $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$,

observemos que $\langle V_{k+1} \rangle$ es conexo. Este procedimiento debe terminar antes del paso n -ésimo, pues de lo contrario $V_n = W$ pero v_n se conecta con un vértice que no está en V_n , lo que es absurdo.

La prueba del lema es por inducción en n el tamaño de W . Si $W = \{w\}$ entonces $|\partial_E W| = d + 1 > (d - 1)|W|$. Si $|W| = n$ sea w un vértice de grado 1 en $\langle W \rangle$, se tiene que $|\partial_E W| = |\partial_E W \setminus \{w\}| + d - 1$ pues w tiene d aristas frontera, y $\partial_E W \setminus \{w\}$ incluye a la arista que conecta a w con algún otro vértice en W . Pero ahora por la hipótesis inductiva $|\partial_E W \setminus \{w\}| > (d - 1)|W \setminus \{w\}|$ ya que $W \setminus \{w\}$ es conexo. Entonces concluimos que

$$|\partial_E W| > (d - 1)|W \setminus \{w\}| + d - 1 = (d - 1)(|W| - 1) + d - 1 = (d - 1)|W|,$$

lo que demuestra el lema. \square

Observación. Si u, v son vértices distintos de un árbol, entonces hay un único camino que los conecta. Pues como G es conexo, existe al menos un camino en G que conecta a u y v . Si hubiera más caminos de este tipo, por medio de dos de ellos se forma un ciclo recorriendo un de u a v y el otro en sentido contrario (y eliminando las aristas consecutivas opuestas), pero G no tiene ciclos.

Esta observación da la idea intuitiva de que no puede haber un único cluster infinito, cualquier arista $e = (v, w)$ que removamos del cluster infinito, separa el cluster en dos componentes conexas. Para que solo una de estas componentes sea infinita se tiene que dar que $v \leftrightarrow \infty$ a través de w (o al revés).

Proposición 3.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo:*

1. G es un árbol.
2. G es conexo, pero si se elimina cualquiera de sus aristas G queda desconectado en dos subgrafos que son árboles.
3. G no contiene ciclos y si $u, v \in V$ con $(u, v) \notin E$ entonces el grafo que se obtiene de añadir la arista (u, v) a G tiene precisamente un ciclo.

Demostración.

(1 \Rightarrow 2): Si G es un árbol, es conexo. Sea $e = (u, v)$ cualquier arista de G . Entonces si $G - e$ es conexo, existen al menos dos caminos de u a v , pero esto no puede ocurrir. Por lo tanto $G - e$ es disconexo y podemos separarlo en la componente conexa de u y la de v que son árboles pues si tuvieran algún ciclo sería un ciclo de G .

(2 \Rightarrow 3): Si G contiene un ciclo sea e una arista de este ciclo, entonces $G - e$ es conexo lo que contradice (2). Añadir la arista (u, v) genera exactamente un ciclo pues como G es conexo ya existe un camino de u a v , el ciclo generado es este camino seguido de la nueva arista.

Como referencia, estas equivalencias fáciles se pueden leer con una demostración completa y otras propiedades elementales en [10]. \square

3.1. Procesos de ramificación

En 1873 Galton y Watson plantearon un modelo para explicar la desaparición de ciertos apellidos en Inglaterra. Su modelo es muy sencillo y como veremos guarda estrecha relación con los procesos de percolación en árboles.

Comenzamos con una raíz, la raíz tiene Z_1 hijos, donde Z_1 tiene una distribución fija que esta enteramente descrita por las probabilidades $p_i = \mathbb{P}(Z_1 = i)$, para $i \geq 0$. Cada hijo a su vez se reproduce independientemente con la misma distribución y así sigue el proceso. Esto lleva a varias generaciones: denotaremos Z_i el número de elementos en la i -ésima generación, y definimos $Z_0 = 1$, que se identifica con la raíz.

Solo una de dos posibilidades puede ocurrir: o bien la población sobrevive para siempre ($Z_i > 0$ para todo i), o bien se extingue luego de un tiempo finito.

Definimos la función generatriz del proceso por:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \mathbb{E}(s^{Z_1}), \quad s \in [0, 1].$$

Esta función de s contiene exactamente la misma información que el vector (p_0, p_1, \dots) .

La función f es creciente y convexa (pues s^k es creciente y convexa y f es una combinación convexa de estas funciones), y tiene derivada creciente.

La función generatriz contiene toda la información sobre la distribución. De hecho, basta conocerla en un intervalo (a, b) arbitrario no importa qué tan chico. Podemos recuperar las probabilidades extrayendo coeficientes por el desarrollo de Taylor en 0:

$$p_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

De mayor utilidad es notar que $f'(s) = \mathbb{E}(Z_1 s^{Z_1-1})$; luego tenemos que $f'(1) = \mathbb{E}(Z_1)$, y derivando más veces podemos obtener otros momentos de Z_1 .

Intuitivamente debería ser claro que la población explota si la cantidad esperada de hijos por elemento es mayor que 1, y que debería extinguirse si es menor.

Un parámetro importante (que se denomina el parámetro Malthusiano) es la cantidad esperada de hijos.

$$m = \mathbb{E}(Z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = f'(1).$$

Probaremos que esta intuición es correcta, el hecho de que una población se extinga o no está determinado únicamente por el valor de m y no por las probabilidades p_k .

Teorema 3.6. *Sea $m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$ la cantidad esperada de hijos de un elemento, con $p_k \neq 1$ para todo k .*

- Si $m \leq 1$, entonces con probabilidad tendiendo a 1 el proceso se extingue antes de la n -ésima generación (esto es $Z_n = 0$).
- Si $m > 1$ entonces existe un único valor $\xi < 1$ que verifica $f(\xi) = \xi$ que es el límite de la probabilidad de que el proceso termine luego de una cantidad finita de generaciones.

Demostración. Consideremos la función generatriz para la generación n -ésima:

$$f_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}), \quad s \in [0, 1]$$

Con esta notación es claro que $f_1(s) = f(s)$ y que $f_0(s) = s$. Vamos a relacionar f_n con f usando esperanza condicional. Para ellos sea Z_{n-1} el número de elementos en la generación $n - 1$. La cantidad de hijos está dada por $V(1) + \dots + V(Z_{n-1})$ y estas variables son independientes e idénticamente distribuidas como Z_1 . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{Z_n} | Z_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{V(1)+\dots+V(Z_{n-1})} | Z_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{Z_{n-1}} \mathbb{E}(s^{V(j)} | Z_{n-1})\right) \quad (\text{pues son independientes}) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{Z_{n-1}} \mathbb{E}(s^{Z_1})\right) \quad (\text{pues son idénticamente distribuidas}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{Z_1})^{Z_{n-1}}) \\ &= \mathbb{E}(f(s)^{Z_{n-1}}) = f_{n-1}(f(s)). \end{aligned}$$

Luego probamos por inducción que $f_n(s) = f^n(s)$, la composición n veces de f consigo misma. Veamos qué conclusiones nos permite sacar este hecho, estudiando la dinámica de $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Nos interesa la probabilidad x_n de que el proceso termine antes o en la n -ésima generación, esto es

$$x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = f_n(0) = f^n(0).$$

Probemos esto por inducción: $x_1 = p_0 = f(0)$ ahora si $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = f^n(0)$ veamos el caso para $n + 1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} | Z_1 = k) \mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_n^k = f(x_n) = f(f^n(0)) = f^{n+1}(0) \end{aligned}$$

donde $\mathbb{P}(Z_{n+1}|Z_1 = k) = x_n^k$, pues tenemos k procesos independientes a partir de la primera generación.

No se puede extinguir el proceso si $p_0 = 0$; asumimos por lo tanto que $0 < p_0 < 1$ (además en el caso de $p_0 = 0$ es claro que $m > 1$). Es claro que x_n es creciente, pues en $[0, 1]$ la función f es creciente y $x_1 = f(0) = p_0$, luego $x_2 = f(x_1) > f(0) = x_1$ y por inducción $x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n-1}) = x_n$. Se desprende que x_n crece a un número ξ y que satisface:

$$\xi = f(\xi) \tag{3.1}$$

Si $u > 0$ es una raíz de la ecuación $f(u) = u$, entonces $x_1 = f(0) < f(u) = u$ y también por inducción $x_{n+1} = f(x_n) < f(u) = u$, lo que muestra que $\xi < u$. Podemos decir entonces que x_n tiende a la menor raíz positiva de la ecuación (3.1). El gráfico

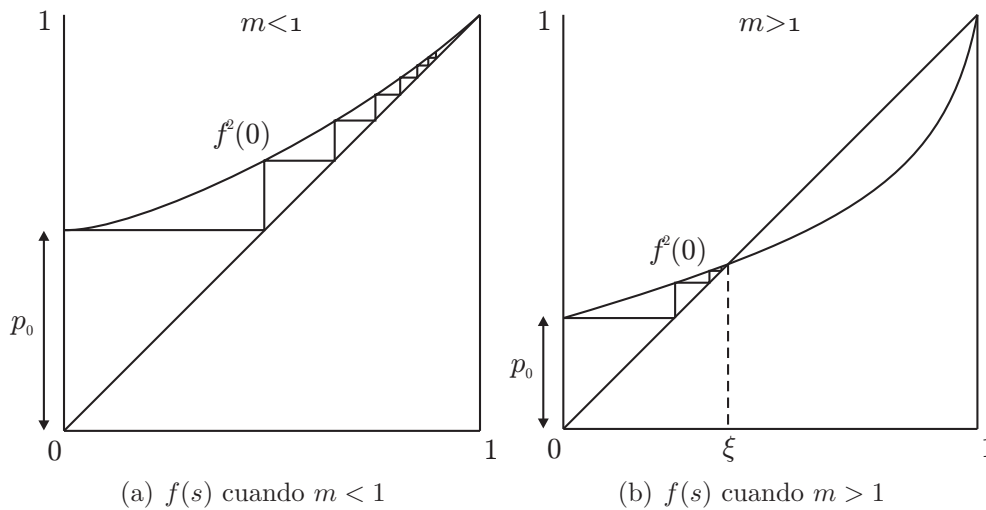


Figura 3.2: La función f y los dos posibles comportamientos cuando iteramos $f^n(s)$.

de $y = f(x)$ es convexo, luego a lo sumo corta a la diagonal $y = x$ en dos puntos. Sabemos que uno de ellos es $x = 1$, pues en ese caso $f(1) = 1$, por lo tanto la ecuación (3.1) puede tener a lo sumo una raíz $0 < \xi < 1$. Cuando existe tal raíz el cociente

$$\frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = 1.$$

Luego por el teorema de valor medio existe un punto $x \in [\xi, 1]$ tal que la derivada $f'(x) = 1$. Se sigue de esto que una raíz $\xi < 1$ de (3.1) puede existir solo si $m = f'(1) > 1$ pues f es convexa. Por otro lado si $m = f'(1) \leq 1$ entonces

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} < 1 \quad \text{para todo } x < 1$$

y esto implica $f(x) > x$, o sea el gráfico de f está por encima de la diagonal y por lo tanto (3.1) no tiene una raíz. Esto muestra que f tiene un punto fijo en $(0, 1)$ si y solo si $m = f'(1) > 1$ y este punto fijo es único. \square

Observación. Veamos ahora que ξ es la probabilidad de que el proceso se extinga, es decir $\mathbb{P}(\{\exists n : Z_n = 0\})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\exists n : Z_n = 0\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{Z_i = 0\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{Z_i = 0\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \xi \end{aligned}$$

El valor $1 - \xi$, se interpreta como la probabilidad de que el proceso que se prolongue a infinito.

Podemos calcular también el tamaño esperado de la n -ésima generación. $\mathbb{E}(Z_n) = f'_n(1)$: como $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$ tenemos que

$$f'_n(1) = f'(f_{n-1}(1))f'_{n-1}(1) = f'(1)f'_{n-1}(1) = m\mathbb{E}(Z_{n-1})$$

Luego por inducción $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$. Por lo tanto si $m > 1$ debemos esperar crecimiento exponencial.

3.2. El principio de transporte de masa

Definición 3.7 (Grafo de Cayley). Sea H un grupo numerable y S un conjunto finito y simétrico (contiene a sus inversos) de generadores. Se define un grafo $G = G(H, H_S)$ cuyo conjunto de vértices es H , y (u, v) es una arista si existe un elemento $s \in S$ tal que $u = vs$. El grafo G se llama grafo de Cayley (a derecha) de H .

Ejemplo. $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ es un grafo de Cayley. Basta tomar como $H = \mathbb{Z}^d$ y como $S = \{e_i, -e_i\}_{1 \leq i \leq d}$

Ejemplo. \mathbb{T}_d es un grafo de Cayley. En este caso tomamos como grupo

$$H = \langle a_0, \dots, a_d \mid a_0^2 = \dots = a_d^2 = e \rangle,$$

es decir el grupo con $d + 1$ generadores con la relación de que todos sean inversos de sí mismos. Como conjunto de generadores tomamos a $S = \{a_0, \dots, a_d\}$

Definición 3.8. Dado $G = (V, E)$, si $m : V \times V \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función invariante bajo la acción diagonal de $\text{Aut}(G)$, es decir $m(u, v, \omega) = m(fu, fv, f\omega)$. Se dice que m es una función de *transporte de masa*.

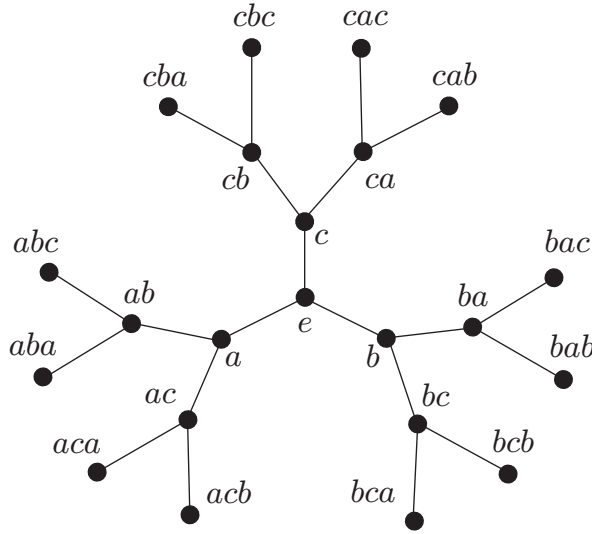


Figura 3.3: \mathbb{T}_2 es un grafo de Cayley

Intuitivamente pensamos en $m(u, v, \omega)$ como la masa que se transporta de u a v cuando la configuración es ω .

Teorema 3.9 (El principio de transporte de masa). *Si $G = (V, E)$ es un grafo de Cayley, y X un proceso de percolación sobre G , entonces la cantidad esperada de masa transportada fuera de un vértice es igual a la cantidad esperada de masa transportada dentro. Es decir que para todo vértice u :*

$$\mathbb{E}_p \sum_{v \in V} m(u, v, X) = \mathbb{E}_p \sum_{v \in V} m(v, u, X)$$

Demostración. La prueba en este caso es bastante sencilla. Si u y v son vértices, entonces también son elementos del grupo H además existe un único elemento $h = vu^{-1} \in H$ tal que $v = hu$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \mathbb{E}_p(m(u, v, X)) &= \sum_{h \in H} \mathbb{E}_p(m(u, hu, X)) \\ &= \sum_{h \in H} \mathbb{E}_p(m(h^{-1}u, u, h^{-1}X)) \\ &= \sum_{h \in H} \mathbb{E}_p(m(h^{-1}u, u, X)) \\ &= \sum_{v \in V} \mathbb{E}_p(m(v, u, X)) \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se deduce pues X es invariante por automorfismos de G . En realidad el teorema vale para cualquier proceso invariante por automorfismos (no necesariamente de percolación independiente). \square

3.3. Algunos resultados sobre clusters infinitos

Tenemos las herramientas prontas para estudiar la fase supercrítica en los procesos de percolación sobre \mathbb{T}_d .

Teorema 3.10. *El valor crítico vale $p_c(\mathbb{T}_d) = 1/d$, además si X es un proceso de percolación de parámetro $p = p_c$, entonces X no contiene clusters infinitos c.s.*

Demostración. Probaremos que si $p > 1/d$ entonces $\theta(p) > 0$, y que si $p \leq 1/d$ entonces $\theta(p) = 0$.

Si fijamos una arista $e \in E_d$ y consideramos sus dos extremos $u, v \in V_d$ podemos construir dos procesos de ramificación independientes con raíces u y v respectivamente, simplemente definiendo que un vértice es hijo de otro si están conectados por una arista. Llamamos A y B al evento de que cada proceso de ramificación sobreviva respectivamente. Que el proceso de ramificación que nace en el vértice u sobreviva

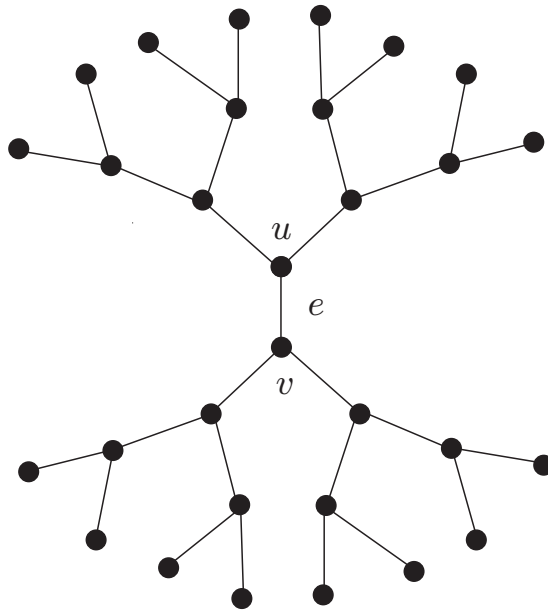


Figura 3.4: El grafo \mathbb{T}_2 , con una arista e marcada, y los vértices u y v raíces de los procesos de ramificación.

(no se extinga) implica que u está en un cluster infinito. La distribución Z del proceso es siempre una distribución binomial, $Z \sim \text{Bin}(d, p)$. Las probabilidades asociadas al proceso de ramificación valen

$$p_k = \begin{cases} \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} & \text{si } k \leq d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $m = \sum_{k=0}^d kp_k$ la cantidad esperada de hijos de un vértice, entonces $m = pd$ pues es la media de una variable binomial. Por el teorema 3.6 sabemos que si $m > 1$ se tiene que el proceso de ramificación sobrevive con probabilidad $1 - \xi > 0$. Luego se tiene que si $p > 1/d$ entonces $m = pd > 1$ y por lo tanto la probabilidad de que el cluster de u sea infinito entonces cumple que

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(C(u) = \infty) > \mathbb{P}_p(A) = 1 - \xi > 0, \quad \text{si } p > 1/d.$$

Para la segunda parte necesitamos ambos procesos de ramificación. Si el cluster de u es infinito entonces o el proceso de ramificación con raíz u sobrevive, o bien u se conecta con v (es decir e que esta abierta), y el proceso de ramificación con raíz v sobrevive. Luego si $p \leq 1/d$ entonces $m = pd \leq 1$ nuevamente por el teorema 3.6 se tiene que los procesos se extinguen con probabilidad 1. Entonces se tiene que

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(C(u) = \infty) < \mathbb{P}_p(A) + \mathbb{P}_p(B) = 0, \quad \text{si } p \leq 1/d.$$

□

Teorema 3.11. *Un proceso de percolación de parámetro $p < 1$ en \mathbb{T}_d , cumple que el número de clusters infinitos en la fase supercrítica es infinito.*

Demostración. Sea X un proceso de percolación en \mathbb{T}_d con parámetro p . Por el teorema de Newman-Schulman (1.23) basta probar que

$$\mathbb{P}_p(N(p) = 1) = 0 \quad \text{si } p > p_c. \tag{3.2}$$

Supongamos por absurdo que (3.2) es falso, entonces en ese caso tenemos un único cluster infinito, que denotamos C . Consideremos el siguiente transporte de masa: cada vértice u que no está en el cluster infinito manda una unidad de masa al único vértice de C que está más cercano a u (los árboles no tienen ciclos). Entonces la cantidad de masa media enviada desde un vértice esta acotada por 1, es decir

$$\mathbb{E}_p \left(\sum_{v \in V} m(u, v, X) \right) \leq 1$$

Pero por otro lado, cada vértice en el borde de C recibe una cantidad infinita de masa, por lo tanto la masa media recibida para estos vértices es infinita (pues como $p < 1$, hay infinitos vértices que no están en C), o sea

$$\mathbb{E}_p \left(\sum_{v \in V} m(v, u, X) \right) = \infty \quad \text{si } u \in \partial C$$

Esto contradice el principio de transporte de masa (3.9).

□

Capítulo 4

Percolación en grafos exóticos ($\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$)

En esta sección estudiamos los clusters infinitos fuera de los casos clásicos de los capítulos anteriores. Hasta ahora hemos establecido la existencia de dos tipos de grafos transitivos, aquellos (como \mathbb{L}^d con $d \geq 2$) para los cuales la percolación con $p \in (p_c, 1)$ produce siempre un único cluster infinito, y aquellos (como \mathbb{T}_d con $d \geq 2$) para los cuales produce infinitos clusters infinitos.

El teorema de Newman-Schulman (1.23) nos deja abierta una posibilidad más: que existan grafos para los cuales los procesos de percolación produzcan un único cluster infinito para algunos valores de $p \in (p_c, 1)$, e infinitos clusters para otros valores de $p \in (p_c, 1)$.

Resulta interesante estudiar la existencia de grafos con este comportamiento bastante más intrincado. El primer ejemplo fue encontrado por Grimmett y Newman [12], estos autores consideraron el grafo $G = \mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$.

Definición 4.1. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. El grafo producto $G_1 \times G_2$ tiene como conjunto de vértices $V_1 \times V_2$, y $\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$ es una arista de $G_1 \times G_2$ si $u_1 = v_1$ y $\{u_2, v_2\} \in E_2$ o si $u_2 = v_2$ y $\{u_1, v_1\} \in E_1$.

Entonces un grafo producto $G_1 \times G_2$ tiene una G_1 -dimensión y una G_2 -dimensión, y nos referimos a una arista $\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$ como una G_1 -arista si $u_2 = v_2$ o una G_2 -arista si $u_1 = v_1$.

Ejemplo. Un ejemplo básico de grafo producto es $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ que es idéntico a \mathbb{L}^2 .

Observación. $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ no es promediable, esto se sigue de una adaptación sencilla de la prueba de que \mathbb{T}_d no es promediable.

Observación. $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ es un grafo de Cayley. En general si $G = (H, H_S)$ y $G' = (H', H'_{S'})$ son grafos de Cayley entonces $G \times G'$ lo es, pues basta tomar como grupo $H \times H'$ y como generador $S \times \{e'\} \cup \{e\} \times S'$.

4.1. La situación cerca del valor crítico

Teorema 4.2. *Para p un poco por encima de p_c se tiene que $N(p) = \infty$*

Demostración. Grimmett y Newman probaron este resultado para $d \geq 6$. Schonmann luego indicó como probarlo para $d \geq 2$. Veremos aquí una prueba más simple que sirve para el caso $d \geq 17$.

Sea $p > p_c$ luego $\theta(p) > 0$ la probabilidad de que un vértice esté en un cluster abierto infinito es positiva. Si p es elegido de forma tal que $N(p) = 1$, entonces se tiene para dos vértices x e y cualesquiera que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty, y \leftrightarrow \infty) \\ &\geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty)\mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \infty) \\ &\geq \theta(p)^2 \end{aligned}$$

La primera desigualdad vale pues suponemos que hay una sola componente infinita, mientras que la segunda es la desigualdad FKG (1.15) pues son eventos crecientes. Por lo tanto si podemos encontrar vértices x e y_1, y_2, \dots tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y_k) = 0$$

Entonces sabemos que $N(p) \neq 1$. Fijamos un vértice ρ en \mathbb{T}_d y consideramos

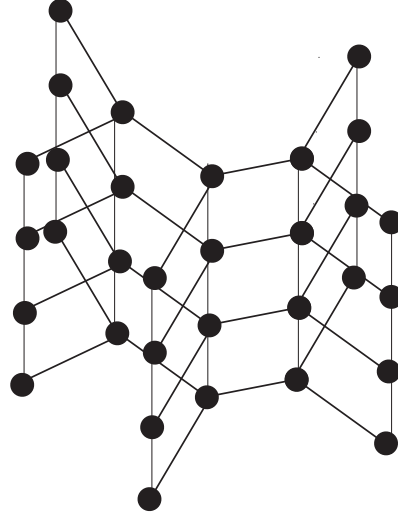
$$\mathbb{P}_p((\rho, 0) \leftrightarrow (\rho, k))$$

El número de caminos de largo n entre $(\rho, 0)$ y (ρ, k) es a lo sumo $4^n(d+1)^{n/2}$, pues todo camino lo podemos codificar de la siguiente manera:

- elegimos un camino Π de largo $n/2$ en \mathbb{T}_d pues como tengo que volver a un vértice con la misma “coordenada” en \mathbb{T}_d todo lo que se avance hay que volverlo atrás (pues \mathbb{T}_d no tiene ciclos), hay $(d+1)^{n/2}$ de estos caminos.
- En cada paso se elige entre 4 posibilidades, avanzar o retroceder en la dirección de \mathbb{L} , o avanzar o retroceder en la dirección del camino Π , luego hay 4^n posibilidades.

Como caminos distintos se codifican distinto, de lo anterior se desprende que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p((\rho, 0) \leftrightarrow (\rho, k)) &\leq \sum_{n=k}^{\infty} 4^n (d+1)^{n/2} p^n \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} (4\sqrt{d+1}p)^n \end{aligned}$$

Figura 4.1: Una región del grafo $\mathbb{T}_2 \times \mathbb{L}$.

Esto tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$ siempre que $p < \frac{1}{4\sqrt{d+1}}$, pues queda la cola de una serie geométrica convergente. Por lo tanto sabemos que si $p < \frac{1}{4\sqrt{d+1}}$ entonces $N(p) \neq 1$. Por otro lado, sabemos que si $p > \frac{1}{d}$ entonces $N(p) > 0$. Esto es porque $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ contiene como subgrafo a \mathbb{T}_d . Combinando estas observaciones con el teorema de Newman-Schulman (1.23) se tiene que para

$$p \in \left(\frac{1}{d}, \frac{1}{4\sqrt{d+1}} \right) \quad \text{entonces } N(p) = \infty$$

Veamos cuándo este intervalo es no vacío:

$$\frac{1}{d} < \frac{1}{4\sqrt{d+1}} \quad \text{siempre que } d \geq 8 + \sqrt{80}$$

y por lo tanto el argumento funciona para $d \geq 17$. □

4.2. Unicidad para p cerca de 1

Nos concentramos ahora en probar la unicidad del cluster infinito cuando p es cercano a 1. Para probar el resultado necesitamos del siguiente lema.

Lema 4.3. *Para percolación independiente en $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ con parámetro p , se tiene que dados dos vértices x e y entonces*

$$\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) \geq \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2.$$

Demostración. Escribamos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, donde la primer coordenada está en el árbol y la segunda en \mathbb{Z} . \mathbb{T}_d contiene un (único) camino que conecta x_1 con y_1 . Extendamos este camino a un camino bi-infinito que llamamos \mathbb{B} . Entonces $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ contiene a $\mathbb{B} \times \mathbb{L}$ como subgrafo, y $\mathbb{B} \times \mathbb{L}$ contiene a los vértices x e y y además es isomorfo a \mathbb{L}^2 . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y \text{ en } \mathbb{B} \times \mathbb{L}) \\ &\geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty \text{ en } \mathbb{B} \times \mathbb{L}, y \leftrightarrow \infty \text{ en } \mathbb{B} \times \mathbb{L}) \\ &\geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty \text{ en } \mathbb{B} \times \mathbb{L})\mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \infty \text{ en } \mathbb{B} \times \mathbb{L}) \\ &\geq \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2 \end{aligned}$$

Donde la segunda desigualdad es por la unicidad del cluster infinito en \mathbb{L}^2 y la tercera es porque son eventos crecientes. \square

4.2.1. Densidad de un cluster

Intuitivamente, el lema debería implicar el teorema anterior, porque significa que para $p > 1/2$ un vértice dado x tiene probabilidad positiva de conectarse a cualquier otro vértice, y por lo tanto parecería que es razonable tener un cluster infinito suficientemente “omnipresente” como para incluir a todos los otros. Para transformar esta intuición en un resultado riguroso, estudiamos los conceptos de densidad y frecuencia de un cluster.

Burton y Keane (1989) consideraron procesos de percolación en \mathbb{L}^d pero no solamente con medidas independientes, sino el caso más general de percolación con una medida invariante por traslaciones.

En este contexto mas general la unicidad del cluster infinito falla algunas veces.

Ejemplo. Consideremos la percolación en \mathbb{L}^2 donde todas las aristas horizontales están abiertas c.s. y todas las aristas verticales están cerradas c.s.

Definición 4.4. La densidad de un cluster C en \mathbb{L}^d es el siguiente límite (cuando existe)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n \cap C|}{|B_n|}$$

donde $B_n = \{-n, \dots, n\}^d$

Teorema 4.5 (Burton-Keane). *Para un proceso de percolación con medida invariante por traslaciones en \mathbb{L}^d , todos los clusters tienen c.s. una densidad bien definida.*

Demostración. Elijamos $X \in \{0, 1\}^E$ de una forma invariante por traslaciones. Definimos luego $Y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ de la siguiente manera: para cada cluster de X sorteamos independientemente y de forma equiprobable si todos los vértices del cluster toman en

valor 1 o el valor 0 en Y . Y es un proceso invariante por traslaciones. Por el teorema ergódico tenemos que existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in B_n} Y(x)}{|B_n|}$$

Fijamos un vértice $y \in \mathbb{Z}^d$, y definimos otro proceso $Y' \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ poniendo para cada vértice x

$$Y'(x) = \begin{cases} 1 - Y(x) & \text{si } x \in C(y) \\ Y(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $C(y)$ es el cluster que contiene a y . Es claro que Y e Y' tienen la misma distribución, por lo cual el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in B_n} Y'(x)}{|B_n|}$$

también existe. Ahora supongamos que Y toma el valor 1 en $C(y)$ (en otro caso intercambiamos los papeles de Y e Y'), entonces

$$\frac{\sum_{x \in B_n} Y(x)}{|B_n|} - \frac{\sum_{x \in B_n} Y'(x)}{|B_n|} = \frac{|C(y) \cap B_n|}{|B_n|}$$

Si ahora $n \rightarrow \infty$ el límite del lado izquierdo existe y es igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in B_n} Y(x)}{|B_n|} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in B_n} Y'(x)}{|B_n|}$$

Por lo tanto también existe y vale lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C(y) \cap B_n|}{|B_n|}$$

Es decir que $C(y)$ tiene una densidad bien definida, pero como $y \in \mathbb{Z}^d$ es arbitrario luego queda probado el resultado. \square

4.2.2. Frecuencia de un cluster

Cuando cambiamos \mathbb{Z}^d por el conjunto de vértices de un grafo transitivo pero no promediable, el teorema ergódico falla. Por lo tanto la noción de densidad de un cluster trae problemas. Lyons and Schramm (1999) encontraron el siguiente reemplazo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo transitivo, y sea $Z(0), Z(1), \dots$ un camino al azar en G que comienza en un vértice fijo $\rho \in V$. Si $Y \in \{0, 1\}^V$ se elige de una manera invariante

por automorfismos, entonces $Y(Z(0)), Y(Z(1)), \dots$ es un proceso estacionario. El teorema ergódico de Birkhoff implica entonces que existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y(Z(i))$$

Además, la ley 0-1 de Levy se puede aplicar para mostrar que el límite depende solamente de Y c.s. (y no del camino al azar). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.6. Dada una configuración de un proceso de percolación en G y un vértice $y \in V$, la frecuencia del cluster $C(y)$ esta definida como el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(y)\}}$$

En el caso que este exista c.s. y sea independiente del camino al azar Z .

Teorema 4.7 (Lyons-Schramm). *Para un proceso de percolación invariante por automorfismos en un grafo transitivo G , tenemos que con probabilidad 1 todo cluster tiene una frecuencia bien definida.*

Demostración. Se sigue de una adaptación directa de la prueba de Burton y Keane para la densidad de un cluster.

Elijamos $X \in \{0, 1\}^E$ de una forma invariante por automorfismos. Definimos luego $Y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ de la siguiente manera: para cada cluster de X sorteamos independientemente y de forma equiprobable si todos los vértices de cluster toman en valor 1 o el valor 0 en Y . Y es un proceso invariante por automorfismos. Si consideramos un paseo al azar $\{Z(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ en G , el proceso $\{Y(Z(i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ es estacionario. Luego por el teorema ergódico tenemos que existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y(Z(i))$$

Fijamos un vértice $y \in V$, y definimos otro proceso $Y' \in \{0, 1\}^V$ poniendo para cada vértice x

$$Y'(x) = \begin{cases} 1 - Y(x) & \text{si } x \in C(y) \\ Y(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $C(y)$ es el cluster que contiene a y . Es claro que Y e Y' tienen la misma distribución, por lo cual el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y'(Z(i))$$

también existe. Ahora supongamos que Y toma el valor 1 en $C(y)$ (en otro caso intercambiamos los papeles de Y e Y' en lo que sigue). Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y(Z(i)) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y'(Z(i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(y)\}}$$

Si ahora $n \rightarrow \infty$ el límite del lado izquierdo existe y es igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y(Z(i)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y'(Z(i))$$

Por lo tanto también existe y vale lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(y)\}}$$

Es decir que $C(y)$ tiene una frecuencia bien definida, pero como $y \in V$ es arbitrario queda probado el resultado. \square

Observación. Para el caso particular que $G = \mathbb{L}^d$, se puede probar que la frecuencia de un cluster es igual a la densidad del mismo.

El siguiente lema es la clave para demostrar el resultado sobre la unicidad del cluster infinito.

Lema 4.8. *Para un proceso de percolación en $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ con parámetro $p > 1/2$, y un vértice cualquiera v , tenemos con probabilidad positiva que $\text{frec}(C(v)) > 0$ Donde frec denota la frecuencia de un cluster.*

Demostración. El lema anterior (4.7) implica que para todo i se tiene que

$$\mathbb{P}_p(Z(i) \in C(v)) \geq \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2$$

Por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(v)\}} \right) \geq \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2$$

Se desprende que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(v)\}} \geq \frac{1}{2} \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2$$

con probabilidad al menos $\frac{1}{2}\theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2$. Tomando límite obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{frec}(C(v)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{Z(i) \in C(y)\}} \\ &\geq \frac{1}{2} \theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2 \end{aligned}$$

Recordando que $p > 1/2$ implica $\theta_{\mathbb{L}^2}(p)^2 > 0$, queda completada la demostración. \square

4.2.3. El cluster infinito es único

Ahora sí tenemos todas las herramientas prontas para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *La percolación independiente en $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ con $p > 1/2$ produce un único cluster infinito c.s.*

Demostración. Como $p > 1/2$ podemos elegir un $p' \in (1/2, p)$. Consideramos dos procesos de percolación en $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ acoplados por parámetro como en la definición 1.7. Por el lema anterior (4.8) existen con probabilidad positiva p' -clusters abiertos infinitos con frecuencia positiva, llamemos A a este evento. Cuando ocurre A , entonces existen una cantidad finita de p' -clusters con frecuencia máxima (porque la suma de las frecuencias debe ser menor o igual que 1). Llamemos a estos p' -clusters de frecuencia máxima “fuertes”.

Cuando ocurre A queremos probar que todos los p -clusters infinitos se conectan (en realidad contienen) a algún p' -cluster fuerte. Asumamos por absurdo la existencia de algún p -cluster infinito C tal que no se conecta a ningún p' -cluster fuerte, y sea $K(C)$ la cantidad de vértices en C adyacentes a algún p' -cluster fuerte. Tenemos que considerar cuatro casos:

1. $K(C) = 1$
2. $2 \leq K(C) < \infty$
3. $K(C) = 0$
4. $K(C) = \infty$

- **Caso 1:** Consideremos el siguiente transporte de masa en el cual cada vértice en C le manda una unidad de masa al único vértice que es adyacente a un p' -cluster fuerte. Entonces

$$\mathbb{E}_p(\text{masa enviada}) \leq 1$$

$$\mathbb{E}_p(\text{masa recibida}) = \infty$$

Contradiciendo el principio de transporte de masa.

- **Caso 2:** Se descarta de forma análoga al anterior, pero repartiendo una masa de $1/K(C)$ entre los $K(C)$ vértices adyacentes a un p' -cluster fuerte.
- **Caso 3:** Se reduce al primer caso mediante una modificación local de la configuración para p .
- **Caso 4:** Procedemos mirando la configuración en tres pasos:
 1. Miramos la configuración para p' .
 2. Miramos la configuración para p en todas las aristas excepto aquellas adyacentes a p' -clusters fuertes.
 3. Miramos el resto de la configuración para p' .

Después de los dos primeros pasos, cada arista que une un vértice de C con uno de un p' -cluster fuerte tiene probabilidad

$$\frac{1-p}{1-p'}$$

de no estar abierta. Por lo tanto la probabilidad de que C no se conecte a un p' -cluster fuerte es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-p}{1-p'} \right)^n = 0$$

pues hay una cantidad infinita de estas aristas.

Para concluir, tenemos entonces que c.s. en A todo p -cluster infinito contiene (al menos) uno de los p' -clusters fuertes. Como estos son una cantidad finita distinta de cero se tiene que

$$\mathbb{P}_p(0 < N(p) < \infty) \geq \mathbb{P}(A) > 0$$

Pero entonces tenemos probabilidad positiva de tener una cantidad finita de clusters, y el teorema de Newman-Schulman (1.23) nos dice que entonces necesariamente debe haber un único cluster infinito para p c.s.

$$\mathbb{P}_p(N(p) = 1) = 1.$$

Lo que termina de probar el teorema. □

Capítulo 5

Monotonía de la unicidad

En el capítulo anterior vimos que existen grafos para los cuales los procesos de percolación producen un único cluster infinito para algunos valores de $p \in (p_c, 1)$ e infinitos clusters para otros valores de $p \in (p_c, 1)$.

Es natural preguntarse si esto puede pasar de cualquier forma, por ejemplo si es posible que exista un único cluster para un valor p_1 e infinitos clusters para un valor $p_2 > p_1$, o que se intercalen distintas situaciones.

Es razonablemente intuitivo que si para p hay un único cluster infinito esto pase para valores más grandes de p . Ya que parece más “difícil” lograr un único cluster “omnipresente” a que existan infinitos. En este capítulo probamos dos versiones de este resultado conocido como *monotonía de la unicidad*.

5.1. El teorema de Häggström y Peres

En la hipótesis del siguiente teorema se pide que G sea *unimodular*. Este concepto está definido en el apéndice, el único uso que haremos es que en tales grafos vale el principio de transporte de masa.

Teorema 5.1 (Monotonía de la Unicidad). *Sea G un grafo transitivo y unimodular. Consideremos un proceso de percolación independiente en G y sea N el número de clusters infinitos. Si $p_1 < p_2$ y $\mathbb{P}_{p_1}(N = 1) = 1$ entonces $\mathbb{P}_{p_2}(N = 1) = 1$.*

Demostración. Sean $p_2 > p_1 > p_c(G)$ y $X_{p_1}, X_{p_2} \in \{0, 1\}^E$ acoplados por parámetro como en la definición 1.7, tales que tengan distribución \mathbb{P}_{p_1} y \mathbb{P}_{p_2} respectivamente. El teorema se desprende si podemos probar que cada cluster infinito de X_{p_2} contiene a un cluster infinito de X_{p_1} casi seguramente.

Como $X_{p_2}(e) \geq X_{p_1}(e)$ para todo e , basta probar que cada X_{p_2} -cluster infinito interseca a un X_{p_1} -cluster infinito (pues si lo corta lo contiene). Para cada vértice u

definimos:

$$D_1(u) = \inf\{\delta(u, v) : v \text{ está en un cluster infinito de } X_{p_1}\},$$

donde $\delta(u, v)$ es la distancia en el grafo (el largo del camino mas corto) entre u y v . Denotemos $C(u, X_i)$ a la componente conexa en el subgrafo abierto de X_i que contiene a u . Definimos el evento

$$A(u) = \{D_1(u) = \min\{D_1(v) : v \in C(u, X_{p_2})\}, \text{ y } D_1(u) > 0\}$$

es decir $A(u)$ ocurre cuando u no está en un X_{p_1} -cluster infinito, pero ningún vértice en la componente de u en X_{p_2} está más cerca de un X_{p_1} -cluster infinito que el propio u . Ahora si X_{p_2} contiene un cluster infinito que no interseca a ningún cluster infinito de X_{p_1} , entonces ese cluster debe tener algún vértice u más cercano a una componente infinita de X_{p_1} . Luego para ese vértice ocurre el evento:

$$B(u) = A(u) \cap \{|C(u, X_{p_2})| = \infty\}.$$

Basta probar entonces que:

$$\mathbb{P}(B(u)) = 0. \tag{5.1}$$

Donde \mathbb{P} es la medida acoplada en de X_{p_1} y X_{p_2} . Partimos $B(u) = B^\infty(u) \cup B^f(u)$, donde $B^\infty(u)$ es $B(u)$ cuando además hay infinitos vértices en el X_{p_2} -cluster infinito de u que están a distancia mínima de un X_{p_1} -cluster, y $B^f(u)$ cuando esa cantidad de vértices es finita. Para probar (5.1) basta ver que $\mathbb{P}(B^\infty(u)) = 0$ y $\mathbb{P}(B^f(u)) = 0$.

- Para $B^f(u)$ usamos el principio de transporte de masa (teorema 3.9): Definimos $m(x, y, X) = 1$ si $y \in C(x, X_{p_2})$ y además y es uno de los vértices más cercanos a un cluster infinito de X_{p_1} y $m(x, y, X) = 0$ en otro caso. Como la masa que sale de un vértice está acotada por la cantidad de vértices a distancia mínima que es finita, entonces la masa esperada que entra a un vértice también está acotada por el principio de transporte de masa. Pero si ocurre $B^f(u)$, la masa que llega al vértice u es infinita, luego debemos tener que $\mathbb{P}(B^f(u)) = 0$.
- Escribimos $B^\infty(u) = \cup_{k=1}^\infty B_k^\infty(u)$ donde $B_k^\infty(u) = B^\infty(u) \cap \{D_1(u) = k\}$. Basta ver que $\mathbb{P}(B_k^\infty(u)) = 0$, pues son numerables. Para probar esto miramos la configuración en varios pasos: primero condicionamos a X_{p_1} , luego a $X_{p_2}(e)$ para toda arista e que no sea incidente a un vértice que este a distancia $k - 1$ de algún X_{p_1} -cluster infinito. La distribución condicional de las aristas que quedan es Bernoulli de parámetro $(p_2 - p_1)/(1 - p_1)$ independientes, para que sean abiertas en X_{p_2} . Pero si ocurre $B_k^\infty(u)$ entonces hay infinitos caminos disjuntos de largo k con estas aristas, que pueden conectar a $C(u, X_{p_2})$ (el cluster infinito

de u en X_{p_2}) con algún cluster infinito de X_{p_1} . Como estos caminos todos están abiertos con probabilidad:

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}\right)^k,$$

la probabilidad de que todos sean cerrados es nula, luego probamos que: $\mathbb{P}(B_k^\infty(u)) = 0$ para todo k .

□

5.2. El teorema de Schonmann

Lema 5.2. *Sea M un número natural arbitrario. Si el proceso de percolación independiente X en el grafo G c.s. contiene un cluster infinito, entonces todo cluster infinito de X contiene una bola de radio M c.s.*

Demostración. Fijemos un vértice u y sea $A = A(u)$ el evento de que u esté en un cluster infinito que no contiene una bola de radio M . Queremos probar que $\mathbb{P}_p(A) = 0$ si $p > p_c$.

Definimos para todo k el evento A_k que ocurre cuando u está conectado a un vértice a distancia $2kM$, y la restricción de X a la bola centrada en u de radio $2kM$ no contiene una bola de radio M en el subgrafo abierto. Es claro que $A_k \downarrow A$ luego tenemos que $\mathbb{P}_p(A_k) \downarrow \mathbb{P}_p(A)$.

Si podemos mostrar que existe una constante $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_p(A_{k+1}|A_k) < 1 - \varepsilon$$

entonces se desprende que $\mathbb{P}_p(A_k) \downarrow 0$ como queremos, pues

$$\mathbb{P}_p(A_{k+1}|A_k) = \frac{\mathbb{P}_p(A_{k+1} \cap A_k)}{\mathbb{P}_p(A_k)} = \frac{\mathbb{P}_p(A_{k+1})}{\mathbb{P}_p(A_k)} < 1 - \varepsilon$$

luego $\mathbb{P}_p(A_k) = (1 - \varepsilon)^k \mathbb{P}_p(A_1) \rightarrow 0$.

Sea ω una configuración en A_{k+1} . Entonces existe un vértice v a distancia $2kM + M$ de u que está conectado con u . Fijamos v en esas condiciones y transformamos ω en ω' , que es igual a ω fuera de la bola de radio M centrada en v y tal que todas las aristas de esa bola están abiertas.

Es claro que $\omega' \in A_k \setminus A_{k+1}$ pues la bola $B(u, 2kM)$ no contiene a la bola $B(v, M)$ que es la única abierta, pero si está dentro de $B(u, 2(k+1)M)$.

Como G es localmente finito hay una cantidad finita de configuraciones que se transforman en la misma ω' . Por lo tanto $\mathbb{P}_p(A_{k+1}^c|A_k) > \varepsilon$ para algún ε como queríamos.

□

Teorema 5.3 (Monotonía de la Unicidad). *Sea G un grafo transitivo. Consideremos percolación independiente en G y sea N el número de clusters infinitos. Si $p_1 < p_2$ y $\mathbb{P}_{p_1}(N = 1) = 1$ entonces $\mathbb{P}_{p_2}(N = 1) = 1$.*

Demostración. Usamos la misma notación que en teorema anterior (5.1) pero en este caso no asumimos que G es unimodular, y por lo tanto no podemos usar el principio de transporte de masa. Sin embargo como no lo usamos para probar que $\mathbb{P}(B^\infty(u)) = 0$ solo basta probar que vale $\mathbb{P}(B^f(u)) = 0$. Sean $B^f(u) = E(u) \cup E'(u)$ donde $E(u) = B^f(u) \cap \{D_1(u) \geq 2\}$ y $E'(u) = B^f(u) \cap \{D_1(u) = 1\}$. Afirmamos que si $\mathbb{P}(E(u)) > 0$ entonces $\mathbb{P}(E'(u)) > 0$ luego basta probar que $\mathbb{P}(E'(u)) = 0$. Para probar esta afirmación supongamos que $\mathbb{P}(E(u)) > 0$ y sea $E^M(u)$ el evento que ocurre cuando vale $E(u)$ y todos los vértices del X_{p_2} -cluster infinito de u que son incidentes a un X_{p_1} -cluster infinito están a distancia menor o igual que M de u . Como $E^M(u) \uparrow E(u)$ tenemos que para M suficientemente grande debe ocurrir que $\mathbb{P}(E^M(u)) > 0$. Ahora podemos cambiar la configuración de todos los vértices a distancia menor o igual que M de u , siendo esto una modificación local solo cambia la probabilidad por un factor constante acotado. Pero si quitamos todas las aristas de la bola $B(u, M)$ obtenemos una configuración donde ocurre $E'(v)$ para algún vértice v (que esta en alguno de los clusters infinitos que formaban el X_{p_2} -cluster de u). Luego $\mathbb{P}(E'(v)) > 0$ y como este valor no depende del vértice v queda probado.

Para probar que $\mathbb{P}(E'(u)) = 0$ fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y mostramos que $\mathbb{P}(E'(u)) < \varepsilon$. Elegimos un entero M suficientemente grande para asegurar que una bola fija de radio M intersecta un cluster infinito de X_{p_1} con probabilidad mayor que $1 - \varepsilon$. Vamos a usar una técnica que Schonmann denomina un "truco por duplicación": Sean $Z' = (Z'_{p_1}, Z'_{p_2})$ y $Z'' = (Z''_{p_1}, Z''_{p_2})$ dos variables aleatorias independientes en el espacio $(\{0, 1\}^E)^2$ con la misma distribución que $X = (X_{p_1}, X_{p_2})$. Comenzamos haciendo crecer el cluster de u en Z'_{p_2} como definimos anteriormente, pero con el ajuste de que terminamos el proceso si nos encontramos con una situación donde $C_n(u)$ contiene una bola de radio M . Por el lema anterior esto ocurre c.s. si el cluster de u es infinito. Llamemos I al tiempo de parada aleatorio cuando el proceso termina. En otras palabras I es el primer instante en que encontramos o bien que el Z'_{p_2} -cluster de u es finito y no contiene ninguna bola de radio M o cuando encontramos que contiene una bola así. Si ocurre lo segundo decimos que ocurre el evento F_1 . Sabemos por el lema que el evento $E'(u)$ esta contenido en F_1 a menos de un conjunto de probabilidad nula. En F_1 llamemos Y al centro de la bola de radio M (si hay mas de uno posible, elegimos uno cualquiera). Definimos $Z = (Z_{p_1}, Z_{p_2})$ otra variable aleatoria en $(\{0, 1\}^E)^2$ poniendo $Z = Z'$ en todas las aristas de $C_I(u)$ y las de $\partial C_I(u)$ y $Z = Z''$ en todas las demás aristas. Es claro que Z tiene la misma distribución que X luego bastara probar que $E'(u)$ no puede ocurrir en Z . (Observar que la forma en que Z se obtiene de Z'' es similar al una modificación local como en 1.22) Sea $F_2 \subset F_1$ el sub-evento donde la bola centrada en Y interseca un Z''_{p_1} -cluster infinito. Notemos

que en F_2 tenemos por la construcción de Z que el Z_{p_2} -cluster de u esta a distancia 1 de un Z_{p_1} -cluster infinito, en particular $E'(u)$ no ocurre. Luego probamos que

$$\mathbb{P}(E'(u)) \leq \mathbb{P}(F_1 \cap F_2^c).$$

Como F_1 es medible respecto de Z' , y Z'' es independiente de Z' tenemos por la elección del M que

$$\mathbb{P}(F_2|F_1) \geq 1 - \varepsilon.$$

Como $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)$. Se deduce que

$$\mathbb{P}(E'(u)) \leq \mathbb{P}(F_1 \cap F_2^c) \leq \mathbb{P}(F_2^c|F_1) \leq \varepsilon$$

como queríamos. □

5.3. El valor crítico de unicidad

Definición 5.4. El valor crítico de unicidad para G es

$$p_u(G) = \inf\{p \in [0, 1] : N(p) = 1\}.$$

Donde $N(p)$ es el número de cluster infinitos que es c.s. constante para cada p .

Observación. El valor $p_u(G)$ esta bien definido por la monotonía de la unicidad, ya que si $N(p_1) = 1$ entonces $N(p_2) = 1$ para todo $p_2 \geq p_1$. Es claro que $p_u(G) \geq p_c(G)$ pues que haya un único cluster infinito implica que existen clusters infinitos.

Ejemplo. En los grafos en los que trabajamos se tiene lo siguiente:

- $0 < p_c(\mathbb{L}^d) = p_u(\mathbb{L}^d) < 1$
En realidad sabemos que son iguales para cualquier grafo promediable por el teorema de Burton y Keane (2.6).
- $0 < p_c(\mathbb{T}_d) < p_u(\mathbb{T}_d) = 1$
En los árboles siempre hay infinitos clusters a menos que $p = 1$ en cuyo caso el grafo aleatorio es todo \mathbb{T}_d que es conexo e infinito.
- $0 < p_c(\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}) < p_u(\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}) < 1$
Este es el ejemplo mas interesante donde tenemos dos regiones con comportamiento distinto en la fase supercrítica, cerca del valor crítico de percolación hay infinitos clusters, pero cerca de 1 hay un único cluster.

Observación. Caracterizar los grafos para los cuales $p_c(G) = p_u(G)$ es un problema abierto en la teoría. Se sabe que los grafos promediables lo cumplen, y la conjetura de Benjamini y Schramm [2] es que todo grafo no promediable tiene $p_c(G) < p_u(G)$, es decir tiene una fase con infinitos clusters (también llamada fase de no-unicidad). Esto se ha podido probar en algunos casos como por ejemplo para grafos planos (no promediables) con un final [3], y para grafos de Cayley (no promediables) con ciertas restricciones sobre los generadores [23].

Observación. De la misma forma que resultaba un problema interesante caracterizar que pasaba en $p_c(G)$ es decir si había o no un cluster infinito, la misma pregunta puede formularse para $p_u(G)$ en esta caso las opciones son que existan infinitos o un único cluster (obviamente es interesante cuando $p_c(G) \neq p_u(G)$ pues sino es el mismo problema). Como no es de extrañar la respuesta depende del grafo a considerar, en particular sabemos que para \mathbb{T}_d como $p_u(\mathbb{T}_d) = 1$ vale que existe un único cluster. Fue probado que para $\mathbb{T}_d \times \mathbb{L}$ la percolación en p_u no produce un único cluster [26]. Mas en general se probó que para grafos planos con un final se produce un único cluster en p_u [3], y para grafos producto con una componente no promediable se producen infinitos clusters [24] este resultado generaliza el de [26] pues \mathbb{T}_d es no promediable.

Apéndice A

Apéndice general

A.1. El principio de transporte de masa

Nos basamos en el trabajo de Benjamini et al [1]. Comencemos por recordar algunos conceptos preliminares:

Un grupo compacto tiene una única medida de probabilidad de Radon invariante, llamada la medida de Haar. Un grupo localmente compacto H tiene una medida σ -finita y de Radon $|\cdot|$, esta es única a menos de una constante multiplicativa.

Para todo $h \in H$, la medida $A \mapsto |Ah|$ es invariante, por lo tanto existe una constante positiva $m(h)$ tal que $|Ah| = m(h)|A|$ para todo A medible.

El mapa $h \mapsto m(h)$ es un homomorfismo de H en \mathbb{R} como grupo multiplicativo, y se llama la *función modular* de H .

Si $m(h) = 1$ para todo $h \in H$ entonces H se dice *unimodular*. En particular esto ocurre cuando H es numerable, donde la medida de Haar es la medida de conteo.

Definición A.1 (Grafo unimodular). Si $G = (V, E)$ un grafo transitivo y sea $H \leq \text{Aut}(G)$. Para cada $v \in V$ se define el *estabilizador* de v con respecto a H como el subgrupo $\text{Stab}_H(v) = \{h \in H : hv = v\}$.

Se dice que H es unimodular si para cada $u, v \in V$ se cumple

$$|\text{Stab}_H(u)v| = |\text{Stab}_H(v)u|.$$

El grafo G se dice unimodular si existe un subgrupo cerrado unimodular H que actúa transitivamente en V .

Observación. Al grupo $\text{Aut}(G)$ se le asigna la topología de la convergencia puntual. Si H es un subgrupo cerrado de $\text{Aut}(G)$, entonces H es localmente compacto, y el estabilizador $\text{Stab}_H(v)$ de cualquier vértice es compacto.

Ahora si $hu = v$, entonces $\text{Stab}_H(v) = h \text{Stab}_H(u) h^{-1}$ y por lo tanto se tiene

$$|\text{Stab}_H(v)| = |\text{Stab}_H(u)h^{-1}| = m(h)^{-1} |\text{Stab}_H(u)|.$$

Entonces H es unimodular si y solo si para todo u, v en la misma órbita $|\text{Stab}_H(u)| = |\text{Stab}_H(v)|$.

Se prueba que $|\text{Stab}_H(u)| = |\text{Stab}_H(u)v| \cdot |\text{Stab}_H(u) \cap \text{Stab}_H(v)|$, observando que el número de clases en $\text{Stab}_H(u)/\text{Stab}_H(u) \cap \text{Stab}_H(v)$ es $|\text{Stab}_H(u)v|$ (ver [28] por detalles). Pero entonces se tiene que

$$\frac{|\text{Stab}_H(u)v|}{|\text{Stab}_H(v)u|} = \frac{|\text{Stab}_H(u)|}{|\text{Stab}_H(v)|} = 1,$$

de donde se desprende la definición que vimos de unimodularidad:

$$|\text{Stab}_H(u)v| = |\text{Stab}_H(v)u|.$$

Proposición A.2. *Si G es un grafo de Cayley, entonces G es unimodular.*

Demostración. Es trivial pues si $G = (H, H_S)$ entonces H mismo es un subgrupo cerrado unimodular de $\text{Aut}(G)$, pues $|\text{Stab}_H(u)v| = 1$ para todo $u, v \in H$. \square

Sea X un proceso invariante por automorfismos que asigna valores en un conjunto finito F a las aristas de $G = (V, E)$. (por ejemplo X puede ser un proceso de percolación independiente). Sea $m : V \times V \times F^E \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función invariante bajo la acción diagonal de $\text{Aut}(G)$: es decir que para cada automorfismo f , cada par $u, v \in V$ y cada configuración $\omega \in F^E$, se tiene que $m(u, v, \omega) = m(fu, fv, f\omega)$.

Intuitivamente pensamos en $m(u, v, \omega)$ como la *masa* que se transporta de u a v cuando $X = \omega$. Lo pensamos de la siguiente manera: le asignamos a cada vértice $v \in V$ cierta masa inicial, posiblemente dependiente de ω , luego esta se distribuye de forma tal que u le envía a v la masa $m(u, v, \omega)$.

En estas condiciones es razonable esperar cierta “conservación de masa” al menos en valor esperado. Es claro que el total de masa es infinito usualmente. Sin embargo en cierto sentido

Teorema A.3 (El principio de transporte de masa). *Si $G = (V, E)$ es un grafo transitivo y unimodular, entonces la cantidad esperada de masa transportada fuera de un vértice es igual a la cantidad esperada de masa transportada dentro. Es decir que para todo vértice u :*

$$\mathbb{E} \sum_{v \in V} m(u, v, X) = \mathbb{E} \sum_{v \in V} m(v, u, X)$$

Demostración. Si definimos $f(u, v) = \mathbb{E}(m(u, v, X))$ se tiene que f es una función invariante por la acción de $H = \text{Aut}(G)$, por el siguiente lema entonces sabemos que

$$\sum_{x \in Hu} f(u, x) |\text{Stab}_H(u)| = \sum_{y \in Hu} f(y, u) |\text{Stab}_H(y)|$$

Pero como G es unimodular se tiene que $|\text{Stab}_H(y)| = |\text{Stab}_H(u)|$ para todo $y \in V$, además como G es transitivo $Hu = V$ (pues dado $v \in V$ hay un automorfismo que lleva u en v). Entonces dividiendo entre $|\text{Stab}_H(u)|$ obtenemos la igualdad

$$\sum_{x \in V} f(u, x) = \sum_{y \in V} f(y, u),$$

sustituyendo la definición de f se obtiene el resultado

$$\sum_{x \in V} \mathbb{E}m(u, x, X) = \sum_{y \in V} \mathbb{E}m(y, u, X)$$

□

Lema A.4. Si $G = (V, E)$ es un grafo cualquiera, $H \leq \text{Aut}(G)$, y $f : V \times V \rightarrow [0, \infty]$ es invariante bajo la acción diagonal de H , entonces para todo $u, v \in V$ se cumple

$$\sum_{x \in Hv} f(u, x) |\text{Stab}_H(v)| = \sum_{y \in Hu} f(y, v) |\text{Stab}_H(y)|.$$

Demostración. Si dh denota la medida de Haar de H , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{x \in Hv} f(u, x) |\text{Stab}_H(v)| &= \sum_{x \in Hv} f(u, x) |\{h \in H, hv = x\}| = \int_H f(u, hv) dh \\ &= \int_H f(h^{-1}u, v) dh = \sum_{x \in Hu} f(y, v) |\{h \in H, h^{-1}u = y\}| \\ &= \sum_{x \in Hu} f(y, v) |\{h \in H, hy = u\}| = \sum_{y \in Hu} f(y, v) |\text{Stab}_H(y)| \end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. □

A.2. Una prueba alternativa del teorema de Harris

Exponemos aquí una prueba alternativa mas corta del teorema de Harris utilizando la unicidad del cluster infinito, la prueba se basa en el libro de Grimmett [11, 287-291] en la exposición incluimos una prueba mas convencional pues los lemas previos son necesarios para la prueba del teorema de Kesten.

Recordemos el “truco de la raíz cuadrada”: La idea es así: si A_1, A_2, \dots, A_m son eventos crecientes y equiprobables, entonces

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) &= \mathbb{P}_p \left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c \right) \\ &\geq \prod_{i=1}^m \mathbb{P}_p(A_i^c) \quad \text{por la desigualdad FKG} \\ &\geq (1 - \mathbb{P}_p(A_1))^m, \end{aligned}$$

De donde se desprende que

$$\mathbb{P}_p(A_1) \geq 1 - \left\{ 1 - \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right\}^{1/m} \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.5. *Se tiene que $\theta(1/2) = 0$ y por lo tanto $p_c \geq \frac{1}{2}$*

Demostración. Consideremos la percolación en \mathbb{L}^2 con $p = 1/2$ y supongamos que $\theta(1/2) > 0$. Para cada entero positivo n , sea $A_i(n)$ (respectivamente $A_d(n), A_a(n), A_b(n)$) el evento de que algún vértice en el lado a la izquierda (respectivamente derecha, arriba, abajo) del cuadrado $T(n) = \{0, \dots, n\}^2$ está en un camino abierto infinito de \mathbb{L}^2 que no pasa por ningún otro vértice de $T(n)$.

Es claro que $A_i(n), A_d(n), A_a(n), A_b(n)$ son eventos crecientes y equiprobables, y además su unión es el evento de que algún vértice de $T(n)$ esté en un cluster abierto infinito. Por la suposición que hicimos existe un cluster infinito con probabilidad 1, de donde

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_i(n) \cup A_d(n) \cup A_a(n) \cup A_b(n)) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Se sigue del truco de la raíz cuadrada, ecuación (A.1) que

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_u(n)) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \text{ para } u = i, d, a, b.$$

Elegimos un N suficientemente grande tal que

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_u(N)) > \frac{7}{8} \quad \text{para } u = i, d, a, b.$$

Ahora en el grafo dual definimos el cuadrado

$$T(n)^* = \left\{ x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) : 0 \leq x_1, x_2 \leq n \right\}$$

Sea de forma análoga $A_i^*(n)$ (respectivamente $A_d^*(n), A_a^*(n), A_b^*(n)$) el evento de que algún vértice en el lado a la izquierda (respectivamente derecha, arriba, abajo) del cuadrado $T(n)^*$ está en un camino cerrado infinito de $(\mathbb{L}^2)^*$ que no usa ningún otro vértice de $T(n)^*$. Pero cada arista de $(\mathbb{L}^2)^*$ esta cerrada con probabilidad $\frac{1}{2}$ de donde

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_u^*(N)) = \mathbb{P}_{1/2}(A_u(N)) > \frac{7}{8} \quad \text{para } u = i, d, a, b.$$

Consideremos ahora el evento $A = A_i(N) \cap A_d(N) \cap A_a^*(N) \cap A_b^*(N)$, es decir que existan caminos abiertos infinitos de $\mathbb{L}^2 \setminus T(N)$ que tocan las caras izquierda y derecha de $T(N)$, y además existan caminos cerrados infinitos de $(\mathbb{L}^2)^* \setminus T(N)^*$ que tocan

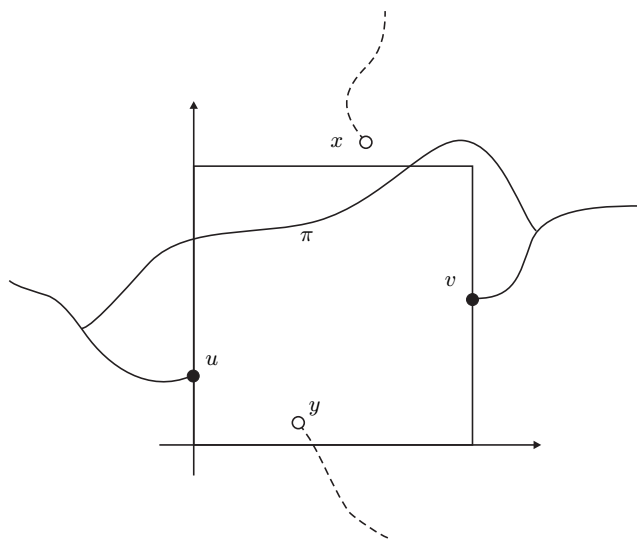


Figura A.1: Los vértices u, v están en clusters abiertos infinitos de $\mathbb{L}^2 \setminus T(N)$. Los vértices x, y están en clusters cerrados infinitos de $(\mathbb{L}^2)^* \setminus T(N)^*$. Si existe un único cluster infinito, entonces hay un camino abierto π que une u con v , luego los clusters de x e y son disjuntos.

las caras de arriba y abajo de $T(N)^*$, (ver la figura A.1). La probabilidad de que no ocurra A satisface

$$\mathbb{P}_{1/2}(A^c) \leq \mathbb{P}_{1/2}(A_i(N)^c) + \mathbb{P}_{1/2}(A_d(N)^c) + \mathbb{P}_{1/2}(A_a^*(N)^c) + \mathbb{P}_{1/2}(A_b^*(N)^c) \leq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Pues todos los eventos tienen probabilidad menor o igual a $\frac{1}{8}$. De aquí se desprende que $\mathbb{P}_{1/2}(A) > \frac{1}{2}$. Pero si A ocurre, entonces $\mathbb{L}^2 \setminus T(N)$ contiene dos clusters abiertos infinitos disjuntos, pues están separados por caminos infinitos cerrados del dual, y cualquier camino que una estos dos clusters (sin pasar por $T(N)$) contendría una arista que corta a una arista cerrada en el dual luego no puede existir. Análogamente si ocurre A , entonces $(\mathbb{L}^2)^* \setminus T(N)^*$ contiene dos clusters cerrados infinitos, separados por caminos infinitos abiertos de $\mathbb{L}^2 \setminus T(N)$. Ahora como sabemos que \mathbb{L}^2 contiene c.s. un único cluster infinito (por el teorema 2.6) se deduce que (c.s. en A) existe un camino abierto que une los clusters infinitos de u y v . Por la geometría de la situación (ver figura A.1) esta conexión forma una barrera a los posibles caminos cerrados del dual que conectan las componentes de x e y . Entonces, casi seguramente en A , el grafo dual contiene dos o más clusters cerrados infinitos. Como este evento tiene probabilidad nula, se deduce que $\mathbb{P}_{1/2}(A) = 0$ pero esto contradice que $\mathbb{P}_{1/2}(A) > \frac{1}{2}$. Luego la hipótesis inicial de que $\theta(1/2) > 0$ es falsa, y la prueba queda completa. \square

A.3. Una prueba alternativa del teorema de Kesten

Recientemente Bollobás y Riordan [5] encontraron una prueba alternativa del siguiente lema, usando la ley 0-1 aproximada de Russo (teorema 1.19). Esto evita la necesidad de los lemas 2.13 y 2.14 para la prueba del resultado.

Lema A.6. *Si $p > 1/2$, y R_n es un rectángulo de lados $3n$ por n , entonces*

$$\mathbb{P}_p(H(R_n)) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Sea D una constante que elegiremos luego, y sea R un $3n$ por n rectángulo con $n \geq 2D + 1$. Supongamos que $\omega \in \delta_e H(R)$, y sean ω^e y ω_e las configuraciones que coinciden con ω en todas las aristas a excepción tal vez de e tales que $\omega^e(e) = 1$ y $\omega_e(e) = 0$. Es claro que e debe ser una arista de R pues $H(R)$ solo depende de tales aristas. Por lo tanto en ω^e hay un camino abierto en R de izquierda a derecha que usa la arista e . Entonces, en ω , los vértices de e están unidos por caminos abiertos a los lados izquierdo y derecho de R . Uno de estos caminos debe tener largo al menos $(3n - 1)/2 \geq D$. Entonces, para cualquier p , se tiene

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R)) \leq 2\mathbb{P}_p(0 \rightarrow D), \quad (\text{A.2})$$

donde $\{0 \rightarrow D\}$ es el evento de que exista un camino abierto de largo D comenzando en el origen. La hipótesis de que e es esencial implica también que $H(R)$ no ocurre en ω_e . Por el lema 2.7, en ω_e hay un camino abierto en el dual que cruza R de arriba hacia abajo usando la arista e^* . Entonces en el grafo dual, uno de los vértices de e^* esta en un camino de largo al menos $(n - 1)/2 > D$. Como las aristas del dual están abiertas con probabilidad $1 - p$, se sigue que

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R)) \leq 2\mathbb{P}_{1-p}(0 \rightarrow D). \quad (\text{A.3})$$

Sea $0 < \varepsilon < \min(p' - 1/2)/2$, c arbitrario donde $c > 0$ es una constante tal que $\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) > c$ (existe por el lema 2.7). Sea $\eta = \eta(\varepsilon)$ el valor del teorema 1.19. Para cualquier p se tiene que $\mathbb{P}_p(0 \rightarrow D) \searrow \theta(p)$ cuando $D \rightarrow \infty$. Entonces por el teorema de Harris (2.12), $\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightarrow D) \rightarrow 0$, por lo que podemos elegir D tal que $\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightarrow D) \leq \eta/3$. Como el evento $\{0 \rightarrow D\}$ es creciente, para $p \leq 1/2$ se tiene

$$\mathbb{P}_p(0 \rightarrow D) \leq \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightarrow D) \leq \eta/3.$$

Usando (A.2) para $p \leq 1/2$ y (A.3) para $p \geq 1/2$, se sigue que para cualquier $p \in [0, 1]$ y cualquier arista e en R tenemos

$$\mathbb{P}_p(\delta_e H(R)) \leq 2\eta/3 \leq \eta.$$

Como $H(R)$ es un evento creciente y local, y $\delta_e H(R)$ es vacío para aristas fuera de R , las condiciones del teorema 1.19 se satisfacen. Entonces $\mathbb{P}_p(H(R))$ crece de $\varepsilon < c$

hasta al menos $1 - \varepsilon$ en un intervalo de ancho a lo sumo $2\varepsilon < p' - 1/2$. Como $\mathbb{P}_{1/2}(H(R)) \geq c$, se sigue que $\mathbb{P}_{p'}(H(R)) \geq 1 - \varepsilon$. En otras palabras probamos que si $p' > 1/2$ y $\varepsilon > 0$ fijos, y R_n un $3n$ por n rectángulo, se tiene que $\mathbb{P}_{p'}(H(R_n)) \geq 1 - \varepsilon$ si n es suficientemente grande. Como ε es arbitrario esto completa la prueba. \square

Bibliografía

- [1] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, and O. Schramm. Group-invariant percolation on graphs. *Geom. Func. Analysis*, 9:29–66, 1999.
- [2] I. Benjamini and O. Schramm. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electron. Comm. Probab.*, 8:71–82, 1996.
- [3] I. Benjamini and O. Schramm. Percolation in the hyperbolic plane. *J. Amer. Math. Soc.*, 14:487–507, 2001.
- [4] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, New York, 1998.
- [5] B. Bollobás and O. Riordan. A short proof of the harris-kesten theorem. A publicarse en *Bull. of the London Math. Soc.* Preprint disponible en <http://arXiv.org/math/0410359>.
- [6] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley. Percolation processes i: Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [7] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [8] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2, pages 234–238. Wiley, New York, 1966.
- [9] C.M. Fortuin, P.W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. in Mathematical Physics*, 22:89–103, 1971.
- [10] R.P. Grimaldi. *Discrete and combinatorial mathematics*, pages 547–552. Addison Wesley, Boston, 1998.
- [11] G.R. Grimmett. *Percolation*. Springer, Berlin, 1999.
- [12] G.R. Grimmett and C.M. Newman. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. In G.R. Grimmett and D.J. Welsh, editors, *Disorder in Physical Systems*, pages 167–190. Oxford University Press, New York, 1990.

Bibliografia

- [13] J.W. Grossman. The evolution of the mathematical research collaboration graph. *Congressus Numerantium*, 158:201–212, 2002.
- [14] J.W. Grossman. The erdős number project, 2003.
<http://www.oakland.edu/~grossman/erdoshp.html>.
- [15] T. Hara and G. Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. In G.R. Grimmett, editor, *Probability and Phase Transition*, pages 87–122. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [16] T.E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 56:13–20, 1960.
- [17] O. Häggström and J. Jonasson. *Percolation Theory: The number of infinite clusters*. 8th Brazilian School of Probability, Ubatuba, 2004.
- [18] O. Häggström and Y. Peres. Monotonicity of uniqueness for percolation on transitive graphs: all infinite clusters are born simultaneously. *Probab. Th. Rel. Fields*, 113:273–285, 1999.
- [19] S. Janson, T. Luczak, and A. Rucinski. *Random Graphs*. Wiley, New York, 2000.
- [20] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Comm. Math. Phys.*, 74:41–59, 1980.
- [21] H. Kesten. *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [22] C.M. Newman and L.S. Schulman. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 26:613–628, 1981.
- [23] I. Pak and T. Smirnova. Uniqueness of percolation on nonamenable cayley graphs. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, 330:495–500, 2000.
- [24] Y. Peres. Percolation on nonamenable products at the uniqueness threshold. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat.*, 36:395–406, 2000.
- [25] L. Russo. An approximate zero-one law. *Z. Wahr. Verw. Geb.*, 61:129–139, 1982.
- [26] R.H. Schonmann. Percolation in $\infty + 1$ dimensions at the uniqueness threshold. In M. Bramson and R. Durrett, editors, *Perplexing Probability Problems: Papers in Honor of Harry Kesten*, pages 53–67. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [27] R.H. Schonmann. Stability of infinite clusters in supercritical percolation. *Probab. Th. Rel. Fields*, 113:287–300, 1999.
- [28] V.I. Trofimov. Automorphism groups of graphs as topological groups. *Math. Notes*, 38:717–720, 1985.