# Parada óptima en procesos de Markov de tiempo discreto y aplicaciones

Facundo Oliú

16 de noviembre de 2017

# Índice general

# Presentación:

El siguiente trabajo estudia el problema de parada óptima bajo los supuestos de ganancia no negativa y tiempo discreto. Esto es, dado un espacio de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_n, P)$, (véase 1.1.1) una función $g$ no negativa e integrable y una sucesión adaptada $\{X_n\}$ hallar:

$$\sup_{\tau} E(g(X_\tau)), \text{ (siendo } \tau \text{ un tiempo de parada (Markov)),}$$

y de ser posible encontrar el tiempo de parada (Markov) que lo realiza.
Este trabajo monográfico consta de cuatro capítulos donde progresivamente disminuyen las hipótesis del problema (exceptuando el primero que es introductorio).
En el primer capítulo se darán los resultados indispensables de análisis que se usarán en la monografía y se introducirá el concepto de "mercado".
En el segundo capítulo se tratará el caso de tiempo acotado con aplicaciones en la teoría de mercado y ejemplos numéricos. Para esto se estudiará el método de inducción inversa y la Envolvente de Snell. Para resolver el problema se usará teoría de Martingalas, sin embargo en los siguientes capítulos será con Cadenas de Markov.
En el tercer capítulo se trabajará con Cadenas de Markov en espacio de estados discretos. Aquí no se darán muchas técnicas de resolución del problema (se verán en el capítulo 4). Se estudiará la teoría de funciones excesivas y potenciales.
En el cuarto capítulo se volverá a trabajar con Cadenas de Markov, pero en este caso con espacio de estados continuo, se verán varios ejemplos y por último se expondrán resultados que permiten aproximar el caso de tiempo no acotado por tiempo acotado con ejemplos numéricos incluidos.

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Herramientas de medida:

### 1.1.1. Definiciones básicas:

**Definición 1.1.1** (Filtración). *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Llamamos filtración a una sucesión creciente de $\sigma$-álgebras contenidas en $\mathscr{F}, \mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}$ denotándose $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ al espacio de probabilidad con filtración $\mathscr{F}_n$.*

**Definición 1.1.2** (Sucesión adaptada). *Dada una filtración $(\Omega, \mathscr{A}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ diremos que la sucesión $\{X_n\}$ es una sucesión adaptada a la filtración si $X_n$ es $\mathscr{F}_n$-medible $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

**Definición 1.1.3** (Esperanza condicional). *Sea $X$ una variable aleatoria en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con $E|X| < \infty$ y $\mathscr{D}$ una $\sigma$-álgebra contenida en $\mathscr{F}$. Definimos $E(X \mid \mathscr{D})$ como una variable aleatoria que cumpla:*

*1) $E(X \mid \mathscr{D})$ es $\mathscr{D}$ medible.*

*2) $\int_D E(X \mid \mathscr{D})\ dP = \int_D X\ dP\ \forall\ D \in \mathscr{D}$.*

*Denotaremos $E(X \mid Y)$ a $E(X \mid \sigma(Y))$.*
*Ver [1].*

**Definición 1.1.4** (Martingalas). *Dado un espcaio de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathscr{A}, A, P)$, y una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ diremos que $X$ es una martingala si:*

- *$E|X_n| < \infty\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*
- *$X_n$ es $\mathscr{A}_n$-medible $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*
- *$E(X_{n+1} \mid \mathscr{A}_n) = X_n P - ctp.\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

*Diremos que $\{X_n\}$ es una submartingala (supermartingala) si en el tercer item en vez de valer la igualdad vale $\geq$ $(\leq)$.*

### 1.1.2. Herramientas de medida:

**Lema de Fatou**:
Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas integrables que cumplen:

$$\liminf_n \int_\Omega f_n \; dP < \infty$$

$\Rightarrow$ $\exists \liminf_n f_n$ para casi todo punto, es integrable como función y

$$\int_\Omega \liminf_n f_n \; dP \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \; dP.$$

**Teorema 1.1.1** (Teorema de convergencia monótona). *Bajo las mismas hipótesis y si además la sucesión es creciente:*

$$\exists \lim_n f_n, \textit{ es integrable y } \int_\Omega \lim_n f_n \; dP = \lim_n \int_\Omega f_n \; dP.$$

**Teorema 1.1.2** (Teorema de convergencia dominada). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que convergen puntualmente a una función medible $f$. Si $\exists$ $g$ integrable tal que $|f_n| \leq g$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.Entonces:*

$$f \textit{ es integrable y } \int_\Omega f \; dP = \lim_n \int_\Omega f_n \; dP.$$

**Teorema 1.1.3** (Teorema de Radon Nykodin). *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ con una medida $\sigma$-finita $P$ y $\gamma$ una medida absolutamente continua con respecto a $P$, entonces existe a menos de conjunto de medida nula una única función integrable $h$ que cumple para todo conjunto $A \in \mathscr{F}$: $\gamma(A) = \int_A h \; dP$.*

**Existencia y unicidad de esperanza condicional**:
Se deduce del teorema de Radon Nykodin tomando como $\gamma(A) := \int_A f \; dP$ y $E(f \mid \mathscr{F}) := h$.

### 1.1.3. Lemas de convergencia para esperanza condicional:

Las notaciones son las mismas que cuando definimos esperanza condicional. Supondremos que está definida de forma única.

**Teorema 1.1.4** (Teorema de convergencia monótona). *Sea $\{X_n\} \subset L^1$ tal que $X_n \to X \in L^1$, entonces:*

$$E(X_n \mid \mathscr{D}) \to E(X \mid \mathscr{D}) \textit{ ctp.}$$

*Demostración.*

Como la sucesión $\{E(X_n \mid \mathscr{D})\}$ es mónotona creciente, converge a una función medible $Y$.

Luego,por teorema de convergencia monótona; para todo $A \in \mathscr{D}$ :

$$E(Y\mathbf{1}_A) = \lim_n E(\mathbf{1}_A E(X_n \mid \mathscr{D})) = E(\mathbf{1}_A X).$$

Por unicidad de la esperanza condicional se concluye que $Y = E(X \mid \mathscr{D})$. $\square$

**Lema de Fatou**:
Sea la sucesión $\{Y_n\}$ tal que $Y_n = \inf_{k \geq n} X_k$.
Notemos que $Y_n \to Y := \liminf X_n$.

$$\text{Como } Y_n \leq X_k \ \forall\ k \geq n \ \Rightarrow\ E(Y_n \mid \mathscr{D}) \leq \inf_{k \geq n} E(X_k \mid \mathscr{D}).$$

Usando el Teorema de convergencia monótona para esperanza condicional:

$$E(Y \mid \mathscr{D}) = \lim_n E(Y_n \mid \mathscr{D}) \leq \liminf_n E(X_n \mid \mathscr{D}).$$

### 1.1.4. Tiempos de parada y Teorema del Muestreo opcional:

Siempre que se hable de tiempos de parada estaremos en un espacio con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$.
**Tiempo de parada**:
Decimos que la función medible $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ es un tiempo de parada si $\forall\ n \in\ \mathbb{N},\ \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$.
**Teorema del Muestreo Opcional**:
Sea $\{X_n\}$ una martingala, $\tau, \sigma$ dos tiempos de parada tal que $0 \leq \sigma \leq \tau \leq \infty$ y además se cumple:

$$E|X_\sigma| < \infty,\ E|X_\tau| < \infty,$$

$$\liminf_n E(|X_n| \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}) = 0,$$

entonces:

*i)* $E(X_\tau \mid \mathscr{A}_\sigma) = X_\sigma$.

*ii)* $E(X_0) = E(X_\tau) = E(X_\sigma)$.

**Caso de supermartingalas y submartingalas**:
Si $\{X_n\}$ es supermartingala(submartingala), se sustituye el signo de igual por $\leq$ $(\geq)$.

### 1.1.5. Integrabilidad uniforme:

Decimos que la sucesión de funciones $\{X_n\}$ es uniformemente integrable si:

$$\lim_{H \to \infty} \sup_n \int_{|X_n| > H} |X_n|\ dP = 0.$$

Notar que si una sucesión de funciones integrables esta acotada por otra positiva e integralbe, entonces es uniformemente integrable.

**Teorema 1.1.5** (Teorema de Lévy)**.** *Sea $Z$ definida en un espacio con filtración $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_n\}, P)$ tal que $E(|Z|) < \infty$. Si $\{X_n\} = E(Z \mid \mathscr{F}_n)\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$ con$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathscr{A}_n)$, entonces:*

$$E(Z \mid \mathscr{A}_\infty) = \lim_n X_n \ \textit{ctp.}$$

**Teorema 1.1.6** (Teorema de separación de Hanh-Banach). *Sea $X$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, $A, B \subseteq X$ convexos, disjuntos , no vacios, con $A$ compacto y $B$ cerrado. Entonces $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\varphi$ lineal tal que:*

$$Re(\varphi(a)) < \alpha < \beta < Re(\varphi(b)) \ \forall \ a \in A, b \in B$$

Notar que si $B$ es un espacio vectorial, entonces $\varphi(B) = 0$ y multiplicando por escalares negativos a $\varphi$ podemos cambiar la desigualdad.

**Ejemplo 1.1.1** (Barrera en paseo al azar:). *Sea $S_0 = k$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ con $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de Bernoulli simétrica con probabilidad $p$. Sea $A$ un natural positivo y,*

$$\tau_A = \text{ínf}\{n \geq 0 : S_n = A\}$$

*, dntonces:*

- *Si $p > \frac{1}{2}$, entonces $P(\tau_A < \infty) = 1$.*
- *Si $p \leq \frac{1}{2}$, entonces $P(\tau_A < \infty) = (\frac{p}{1-p})^A$*

**Teorema 1.1.7** (Teorema de extensión de Carathéodory). *Supongamos que $\mathscr{A}$ es una álgebra $\sigma$ finita en el conjunto $X$, $\mu_0$ una pre-medida definida en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{M}$ es la $\sigma$-álgebra generada por $\mathscr{A}$. Entonces existe una única medida $\mu$ en $\mathscr{M}$ que extiende a $\mu_0$.*

## 1.2. Mercados discretos y finitos:

### 1.2.1. Preliminares

En este modelo trabajamos con un espacio de probabilidad finito equipado con una filtración en la cual $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_N = \{\mathscr{P}(\Omega)\}$ $(N \in \mathbb{N})$ y
$\forall\ \omega \in \Omega$: $P(\{\omega\}) > 0$.
A la sucesión de vectores aleatorios $\{S_n\}$ de dimensión para la cual $\{S_n^i\}$ es una sucesión adaptada a la filtración $\forall\ i\ \in \{0, ..., d\}$ le llamamos vector de precios a lo largo del tiempo (este depende de $n$).
Además pediremos que $\exists\ r > 0$ tal que $S_n^0 = (1+r)^n\ \forall\ n\ \in \{0, ..., N\}$. Es por esto que a la sucesión de variables aleatorias formadas por los precios del primer activo le llamamos activo sin riesgo.
Por último llamamos factor de descuento a $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$.

### 1.2.2. Estrategía y valor de portfolio

**Definición 1.2.1** (Estrategía)**.**

*Decimos que* $\phi = \{(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{o \leq n \leq N}$ *es una estrategía si:*

$$\forall\ i\ \in\ \{0, ..., d\} = \begin{cases} \phi_0^i & \text{es } \mathscr{F}_0\text{-medible} \\ \\ \phi_n^i & \text{es } \mathscr{F}_{n-1} \text{ medible para } n \geq 1 \end{cases}$$

**Definición 1.2.2** (Valor del portfolio)**.** *El valor del portfolio en el tiempo $n$ es:*

$$V_n(\phi) = \phi_n.S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i.S_n^i \text{ ; y su valor descontado es } \widetilde{V}_n = \beta_n V_n(\phi)$$

**Definición 1.2.3** (Estrategía autofinanciada)**.** *Decimos que una estrategía es autofinanciada si* $\forall\ n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ *:*

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n.$$

*Observemos que está definición es equivalente a cualquiera de las dos siguientes ecuaciones:*

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n.$$

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n).$$

**Proposición 1.2.1.** *Son equivalentes:*

*i) La estrategía $\phi$ es autofinanciada.*

*ii)* $\forall\ n \in \{1, ..., N\}$ :

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta S_j, \text{ donde } \Delta S_j = S_j - S_{j-1}.$$

*iii)* $\forall\ n \in \{1, ..., N\}$ :

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\widetilde{S}_j,\ donde\ \Delta\widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}.$$

*Demostración.* La equivalencia entre i) y ii) se desprende de la segunda equivalencia a la definición de estrategía autofinanciada y la equivalencia entre i) y iii) es consecuencia de despejar $\beta_j$.

□

**Proposición 1.2.2.** *Para todo proceso predecible* $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$ *y* $V_0$ $\mathscr{F}_0$-*medible (osea constante) existe un único proceso predecible* $\{(\phi_n^0, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$ *tal que la estrategía que este define es autofinanciada y su valor inicial es* $V_0$.

*Demostración.* Usando la proposición, anterior ser autofinanciado implica:

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1\widetilde{S}_n^1 + ... + \phi_n^d\widetilde{S}_n^d = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\widetilde{S}_j$$

De esta manera queda unequivocamente definido $\phi_n^0$. Basta ver que es predecible lo cual se chequea si despejamos su valor con la ecuación obtenida. □

**Definición 1.2.4** (Estrategía admisible)**.** *Una estrategía* $\phi$ *es admisible si es autofinanciada y* $V_n(\phi) \geq 0\ \forall n \in \{0, 1, ..., N\}$
*Decimos que la estrategía es de arbitrage si es admisible con valor inicial cero y valor final distinto a cero (en un conjunto de probilidad no nula).*

**Proposición 1.2.3.** *Sea* $\{M_n\}_{0\leq n\leq N}$ *una martingala y* $\{H_n\}_{0\leq n\leq N}$ *una sucesión predecible con respecto a la filtración* $\{\mathscr{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$*.Denotamos* $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$*.La sucesión* $\{X_n\}_{0\leq n\leq N}$ *definida como:*

$$X_0 = H_0 M_0$$

$$X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + ... + H_n \Delta M_n\ si\ n \geq 1$$

*es una martingala con respecto a la filtración.*

*Demostración.* Obviamente esta adaptada a la filtración. Por otro lado:

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - X_n = E(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n) =$$

$$E(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathscr{F}_n) = H_{n+1}E(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n) = 0$$

Entonces:

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$$

□

**Proposición 1.2.4.** *Una sucesión adaptada* $\{M_n\}_{0\leq n\leq N}$ *es martingala si y solo si para toda secuencia predecible* $\{H_n\}_{1\leq n\leq N}$ *se cumple:*

$$E(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n) = 0$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Por teorema del muestreo opcional notemos que $E(M_n - M_{n-1}) = 0$.
($\Leftrightarrow$) Fijemos $j$ y $A \in \mathscr{F}_i$ ; tomemos $H_i = 0$ si $i \neq j$ y $H_i = \mathbf{1}_A$ si $i = j$ . Luego $E(\mathbf{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0$.
$\Rightarrow \; E(M_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) = M_j$. $\square$

**Definición 1.2.5** (Mercado viable)**.** *Decimos que el mercado es viable si no existen estrategias de arbitraje.*

**Lema 1.2.1.** *Supongamos que el mercado es viable.*
*Sean* $\Gamma$ *el conjunto de variables aleatorias estrictamente positivas y* $\phi = \{\phi^1, ..., \phi^d\}$ *un procesos predecible.*
*Definimos* $\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + ... + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d)$.
*Entonces:*

$$\widetilde{G}_n(\phi) \;\notin\; \Gamma$$

*Demostración.* Supongamos que $\widetilde{G}_n(\phi) \;\in\; \Gamma$
Notemos primero que:

$$\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \phi_j^i \widetilde{S}_j^i - \phi_j^i \widetilde{S}_{j-1}^i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{V}_j(\phi) - \widetilde{V}_{j-1}(\phi) = \widetilde{V}_n(\phi) - \widetilde{V}_0(\phi).$$

De esta manera si $\widetilde{G}_n \geq 0 \; \forall \; n \in \; \{0, ..., N\}$ el mercado es no viable llegando a un absurdo y concluyendo la prueba.
Si no es así, tomemos $n := \sup\{k \mid P(\widetilde{G}_k(\phi) < 0) > 0)\}$.
Sea $A := \{\widetilde{G}_n(\phi) < 0\}$. Notemos que A es $\mathscr{F}_n$-medible. Consideramos el proceso $\varphi$ definido como:

$$\varphi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \\ \mathbf{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & sij > n \end{cases}$$

Como $\phi$ es predecible, $\varphi$ también lo es. De esta manera:

$$\widetilde{G}_j(\varphi) = \begin{cases} 0 & si \quad j \leq n \\ \\ \mathbf{1}_A(\widetilde{G}_j(\phi) - \widetilde{G}_n(\phi)) & sij > n \end{cases}$$

Es asi que $\widetilde{G}_j(\varphi) \geq 0$ para todo $j \;\in\; \{0, ..., N\}$ y $\widetilde{G}_N(\varphi) > 0$ en $A$. Esto contradice la hipotesis de que el mercado es viable. $\square$

**Teorema 1.2.1.** *El mercado es viable si y solo si existe una medida de probabilidad $P^*$ equivalente a $P$ tal que los precios descontados son $P^*$ martingalas.*

*Demostración.* $(\Leftarrow)$ :
Por la proposicón 1,2,3:

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\widetilde{S}_j \text{ es una } P^* \text{ martingala.}$$

Entonces, por el teorema del muestreo opcional:

$$E^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = E^*(\widetilde{V}_0(\phi)).$$

Por ende si la estrategía es admisible con valor inicial cero: $E^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$.Con $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$. Luego $\widetilde{V}_N(\phi) = 0$ $P^*$-ctp.
$\Rightarrow \widetilde{V}_N(\phi) = 0$ $P$-ctp.

$(\Rightarrow)$ :
Para cualquier proceso admisible $\{\phi_j^1, ..., \phi_n^d\}$ definimos $\widetilde{G}_n(\phi)$ como en el lema anterior. Por la proposición 1.2.2 existe un único proceso $\{\phi_n^0\}$ tal que la estrategía $\{(\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}$ es autofinanciada con valor inicial 0.
Luego, usando el lema 1.2.1 deducimos que $\widetilde{G}_N(\phi) = 0$.
Por otro lado, podemos considerar al conjunto de variables aleatorias del mercado como $\mathbb{R}^\Omega$ ya que $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ (recordemos también que $\Omega$ es finito). De esta manera se puede ver que el conjunto de variables aleatorias de forma $\widetilde{G}_N(\phi)$ , con $\phi$ un proceso predecible en $\mathbb{R}^d$ es subespacio de $\mathbb{R}^\Omega$ (y por ende cerrado). Por el lema 1.2.1 este subespacio no intersecta a $\Gamma$ (definido como en dicho lema). De esta manera no intersecta al conjunto compacto y convexo $K = \{X \in \Gamma;\ \sum_\omega X(\omega) = 1\}$.
Luego por el teorema de separación de Hanh-Banach $\exists\ \lambda \in (\mathbb{R}^\Omega)^*$ ; $\lambda = (\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ tal que:.

- $\forall X \in K,\ \sum_\omega \lambda(\omega)X(\omega) > 0$.
- $\forall \phi$ proceso predecible en $\mathbb{R}^d$ $\sum_\omega \lambda(\omega)\widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$.

De esta manera podemos definir $P^*$ como:

$$P^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}.$$

La cual es equivalente a $P$. Finalmente, por como está definido $\lambda$ y la proposición 1.2.3 deducimos que los precios descontados son $P^*$ martingalas. $\square$

**Definición 1.2.6.** *Dada una variable aleatoria no negativa $h$ que llamaremos plan de contingencia, diremos que es alcanzable si existe una estrategía admisible que valga $h$ en el tiempo $N$ (tiempo final).*
*Decimos que el mercado es completo si cada plan de contingencia es alcanzable.*

**Teorema 1.2.2.** *Un mercado viable es completo si y solo si existe una única medida de probabilidad $P^*$ equivalente a $P$ donde los precios descontados son martingalas.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$)
Sean $P^1$ y $P^2$ dos medidas de probabilidad equivalentes a $P$ donde los precios descontados son martingalas. Dada $h \geq 0$ $\mathscr{F}_N$-medible. $\Rightarrow$ $\exists\{\widetilde{V}_N(\phi)\}_{0\leq n\leq N}$ tal que $V_N(\phi) = \frac{h}{S_N^0}$. Por la proposición 1.2.4 dicha sucesión es una $P^1$ y $P^2$ martingala. Luego por el teorema del muestreo opcional:

$$E_1(\frac{h}{S_0^N}) = E_1(V_0(\phi)) = V_0(\phi) = E_2(V_0(\phi)) = E_2(\frac{h}{S_0^N}).$$

$$\Rightarrow E_1(h) = E_2(h).$$

Como $h$ es una variable aleatoria no negativa arbitraria concluimos que $P_1 = P_2$.
($\Leftarrow$)
Supongamos que el mercado es viable pero no completo. Entonces existe una variable aleatoria no negativa $h$ que no es alcanzable. Consideremos el conjunto de variables aleatorias de la forma:

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n.$$

Donde $U_0$ es $\mathscr{F}_0$-medible y $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)_{0\leq n\leq N}\}$ es un proceso predecible. Por la proposición 1.2.2 este subespacio está contenido estrictamente en las variables aleatorias de $(\Omega, \mathscr{F})$. Podemos definir el producto interno $(Y,Z) \to E^*(Y,Z)$.
Tomemos $X$ no nula perteneciente al complemento ortogonal del subespacio. De esta manera si $P^*$ es una medida de probabilidad equivalente a $P$ donde los precios descontados son una martingala; definimos $P^{**}$:

$$P^{**}(\{\omega\}) = (1 + \frac{X(\omega)}{||X||_\infty})P^*(\{\omega\}).\frac{1}{\sum_\omega 1 + \frac{X(\omega)}{||X||_\infty}},$$

notemos primero que la variable aleatoria constante 1 es perpendicular a $X$. Por ende $E^*(X) = 0$.
Además $E^{**}(\sum_{n=1}^N \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n) = 0$ para cualquier proceso predecible $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)\}_{0\leq n\leq N}$. De esta manera por la proposición 1.2.3 concluimos que los precios descontados son $P^{**}$ martingalas.

$\square$

## 1.3. Cadenas de Markov

**Definición 1.3.1** (Cadena de Markov)**.** *Sea $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ un espacio de probabilidad. Consideremos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso estocástico cuya imagen es un subconjunto de los naturales $E$ al cual llamaremos espacio de estados.*
*Decimos que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov si $\forall n, j \in \mathbb{N}$:*

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0, ..., X_n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n)$$

**Definición 1.3.2** (Cadena homogenea)**.** *Supondremos aquí que $E$ está dotado de una sigma algebra $\mathscr{B}$ la cual es átomica ,$\Omega = E^{\mathbb{N}}$ con la sigma algebra generada por productos finitos de conjuntos $\mathscr{B}$ medibles . Por el Teorema de extensión de Caratheodory, la medida de probabilidad queda unequivocamente definida si la definimos para los conjuntos de la forma $A = \{\omega_0\} \times \{\omega_1\} \times ... \times \{\omega_n\} \times E^{\mathbb{N}}$*
*$\omega_i \in E \ \forall \ i \in \{1, ..., n\}$.*
*Para esto definimos :*
***La matriz de estados (con coordenadas nonegativas)** $\mathbb{P}$:*

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & ... \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & ... \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j \in E} P(i,j) = 1$$

***La sucesión no negativa** $\{\Phi_n\}_{n \in E}$ **que cumple:***

$$\sum_{n \in E} \phi(n) = 1$$

*De esta forma definimos*

$$P(A) = \Phi(\omega_0)P(\omega_0, \omega_1). \ ... \ P(\omega_{n-1}, \omega_n)$$

*Por último a la sucesión $\{X_n\}$ dada por la proyección Cadena de Markov. De aquí en adelante en toda la tesis cada vez que mencionemos una Cadena de Markov haremos referencia a una Cadena homogenea de Markov.*

**Observación 1.3.1.**

- *Toda cadena homogenea de Markov es una cadena de Markov.*
- *Tomamos esta definición de cadenas porque se podra relacionar con el caso de estados no numerables y porque nos permite usar herramientas de medida.*

**Proposición 1.3.1.** $P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^m(i,j) \ \forall \ i, j \in E, \ n, m \in \mathbb{N}$

*Demostración.* Lo probaremos por inducción fijando $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(i,j) \ \forall \ i,j \ \in \ E$$
$$H) \ P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^m(i,j) \ \forall \ i,j \ \in \ E$$
$$T) \ P(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}^{m+1}(i,j) \ \forall \ i,j \ \in \ E$$

Dem.:

$$P(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) = \sum_R \mathbb{P}(r,j)\mathbb{P}^m(i,r) = P^{m+1}(i,j)$$

□

**Observación 1.3.2.** $\forall \ m,n \ \in \ \mathbb{N}, \ i_n, ..., i_{n+m} \ \in \ E:$

$$P(X_{m+n} = i_{m+n}, X_{m+n-1} = i_{m+n-1}, ..., X_{1+n} = i_{1+n} \mid X_n = i_n) =$$
$$= P(i_n, i_{n+1})P(i_{n+1}, i_{n+2})...P(i_{m+n-1}, i_{m+n})$$

*( Se desprende de la definición de esperanza condicional).*

**Proposición 1.3.2.** *Dado* $n, m \ \in \ \mathbb{N}, \ f \ \mathscr{F}$*-medible y acotada, la cual solo depende de* $m+$ 1 *variables,* $i \ \in \ E$*.Entonces:*

$$E(f(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}) \mid X_n = i) = E(f(X_0, X_1, ..., X_m) \mid X_0 = i)$$

*Demostración.*

$$E(f(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}) \mid X_n = i) =$$
$$\sum_{i_1 \ \in \ E} ... \sum_{i_m \ \in \ E} f(i, i_1, ..., i_m)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i)...P(X_m = i_m \mid X_{m-1} = i_{m-1})$$

Por otro lado:

$$E(f(X_0, X_1, ..., X_m) \mid X_0 = i) =$$
$$\sum_{i_1 \ \in \ E} ... \sum_{i_m \ \in \ E} f(i, i_1, ..., i_m)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i)...P(X_m = i_m \mid X_{m-1} = i_{m-1})$$

□

**Corolario 1.3.1.** *Dado* $m \ \in \ \mathbb{N}$*.Sea* $f \ \mathscr{F}$*-medible y acotada, tal que solo depende de* $m$ *variables,* $\omega = (\omega_0, \omega_1, ...)$*, entonces:*

$$E(f(X_1, ..., X_{1+m}) \mid \sigma(X_0, X_1))(\omega) = E(f(X_0, ..., X_m) \mid X_0 = \omega_1)$$

*Demostración.* Por la proposición 1.3.2 y la unicidad de la esperanza condicional basta probar quedados $a_0, a_1$:

$$\int_{\{a_0\} \times \{a_1\} \times E^{\mathbb{N}}} f(X_1, ..., X_m) \, dP(\omega) = \int_{\{a_0\} \times \{a_1\} \times E^{\mathbb{N}}} E(f(X_1, ..., X_m) \mid X_1 = \omega_1) \, dP(\omega)$$

Por un lado:

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} f(X_1,...,X_m)\,dP(\omega) = \sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times\{i_2\}...\times\{i_m\}\times E^{\mathbb{N}}} f(a_1,i_2,...,i_m)(\omega)\,dP(\omega)$$

Usando la observación 1.3.2

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \Pi(a_0)P(a_0,a_1)P(a_1,i_2)...P(i_{m-1},i_m)f(a_1,i_2,...,i_m)$$

Por otro lado:

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} E(f(X_1,...,X_m)\mid X_1=\omega_1)\ dP(\omega) =$$

$$\int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} \sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} f(\omega_1,i_2,...,i_m)P(X_2=i_2,...,X_m=i_m\mid X_1=\omega_1)\,dP(\omega) =$$

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \int_{\{a_0\}\times\{a_1\}\times E^{\mathbb{N}}} f(a_1,i_2,...,i_m)P(a_1,i_2)P(i_2,i_3)...P_(i_{m-1},i_m)\,dP(\omega) =$$

$$\sum_{i_2\ \in\ E} ... \sum_{i_m\ \in\ E} \Pi(a_0)P(a_0,a_1)P(a_1,i_2)P(i_2,i_3)...P(i_{m-1},i_m)f(a_1,i_2,...,i_m)$$

Cumpliéndose la igualdad. Notar que usamos que la función era acotada cuando intercambiamos la sumatoria con la integral.

□

**Corolario 1.3.2.** *Sea $\{f_n\}$ una filtración adaptada a $\{\mathscr{F}_n\}$ ($\mathscr{F}_n = \sigma(X_0,...,X_n)$), creciente, no negativa de funciones integrables. Supongamos además que $\exists\ g$ $\mathscr{F}$-medible y acotada: $\Rightarrow$ $E(g\mid\sigma(X_0,X_1))(\omega) = E(g\mid X_0=\omega_1)\ \forall\ \omega = (\omega_0,\omega_1,...)\ \in \Omega$*

*Demostración.* Usando el teorema de convergencia monotona para esperanza condicional y el teorema de convergencia dominada:

$$E(g\mid\sigma(X_0,X_1))(\omega) = E(\lim_n f_n\mid\sigma(X_0,X_1))(\omega) = \lim_n E(f_n\mid X_0=\omega_1) = E(g\mid X_0=\omega_1)$$

□

**Definición 1.3.3** (Clasificación de estados)**.** *Un estado $j$ es **recurrente** si $P_j(\inf\{n>0 : X_n=j\}<\infty)=1$*
*Un conjunto de estados es **cerrado** si no se puede alcanzar desde uno del complemento*
*Un conjunto de estados es **irreducible** si no tiene subconjuntos propios cerrados*

**Definición 1.3.4** (Cadenas de Markov no discretas)**.** *En este caso la diferencia es que cambiamos la medida de probabilidad $P$ y agregamos un conjunto de medidas indexados por $E:\ \{P_x\}_{x\in E}$ que cumplen:*
*.$\forall\ A\in\mathscr{F}, x\in E,$ la función que asocia $x$ a $P_x(A)$ es $\mathscr{B}$-medible.*
*.$\forall x\in E, B\in\mathscr{B},\ n,m\in\mathbb{N},\ \omega\in\Omega:$*
$E_x(\mathbf{1}_{X_{n+m}\in B}\mid\mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\mathbf{1}_{X_m\ \in\ \Omega})$ *.*$P_x(X_0=x)=1$

# Capítulo 2

# Problema de parada óptima con horizonte finito

En esta sección abordaremos el problema de parada óptima en el caso de tiempo finito. Para resolver el problema veremos el metodo recursivo ,introduciremos las opciones americanas y veremos algunos ejemplos.

## 2.1. Introducción

A menos que se diga lo contrario en todo el capítulo, el espacio muestral es finito , trabajaremos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ equipado con la filtración $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1} \subseteq ... \subseteq \mathscr{F}_N = \mathscr{P}(\Omega)$. $(n \leq k \leq N$ y $\mathbf{P}(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega)$ .

**Definición 2.1.1.** *Definimos el conjunto de tiempos de parada entre $n$ y $N$ como:*

$$\mathscr{R}_n^N = \{\tau \in \mathscr{R} : n \leq \tau \leq N\}$$

De esta manera dada $G = \{G_k\}_{n \leq k \leq N}$ una secuencia adaptada ,para resolver el problema hay que hallar:

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(G_\tau)$$

De aquí en adelante en esta sección $\{G_k\}_{N \geq \ k \geq n}$ estará en las hipotesís recién mencionadas.

**Observación 2.1.1.** *Como el espacio muestral es finito notemos que* $\exists \ \ E(G_\tau)$ $\forall \tau \in \mathscr{R}_n^N$ *ya que*

$$E(\sup_{n \leq k \leq N} \mid G_k \mid) < \infty$$

## 2.2. Método de inducción inversa

**Definición 2.2.1** (Envolvente de Snell). *Definimos la Envolvente de Snell de* $\{G_k\}_{N\geq k\geq n}$ *como la secuencia adaptada* $\{U_k\}_{N\geq k\geq n}$ *dada por:*

$$\begin{cases} G_N & si \quad k = N \\ \\ \max(G_k, E(G_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)) & si \quad n \leq k < N \end{cases}$$

**Observación 2.2.1.** *En las mismas hipótesis* $\{U_k\}_{N\geq k\geq n}$ *es una supermartingala:*

*Demostración.* Simplemente notar que: $\max(G_k, E(G_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)) \geq E(G_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$. □

**Definición 2.2.2.** *Definimos el tiempo de parada* $\tau_n^N$ *(entre n y N ) como:*

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : U_k = G_k\}$$

**Observación 2.2.2.** $\tau_n^N$ *es tiempo de parada.*

*Demostración.* Dado $k \in \{n, n+1, ..., N\}$

$$\{\tau_n^N = k\} = \{U_k = G_k\} \bigcap_{h<k} \{U_h > G_h\}.$$

Como son todos conjuntos $\mathscr{F}_k$-medibles $\{\tau_n^N = k\}$ es $\mathscr{F}_k$-medible.

□

**Teorema 2.2.1** (Horizonte finito). *1.* a) $U_n \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n) \;\; \forall \;\; \tau \in \mathscr{R}_n^N$

b) $U_n = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)$

*2. Fijado* $n \in \{0, ..., N\}$

a) $\tau_n^N$ *resuelve el problema de parada óptima.*

b) *si* $\tau_*$ *es otro tiempo de parada óptima* $\Rightarrow$ $\tau_n^N \leq \tau_*$

c) $\{U_k\}_{n\leq k\leq N}$ *es la supermartingala más chica que domina a* $\{G_k\}_{n\leq k\leq N}$

d) *La secuencia* $\{U_{k\wedge\tau_n^N}\}_{n\leq k\leq N}$ *es una martingala.*

*Dem.* :

1. *a*) *Demostración.* Lo probaremos por inducción en $n$:

$$\text{Si } n = N \Rightarrow \; U_n = G_n$$

$$H) U_k \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_k) \forall\tau \in \mathscr{R}_k^N \forall k \in \{n, n+1, ..., N\}$$

$$T) U_k \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_k) \forall\tau \in \mathscr{R}_k^N \forall k \in \{n-1, , ..., N\}$$

*Dem.* :
Dado $\tau \ \in \mathscr{R}_{n-1}^N$. Sea $\overline{\tau} := \tau \vee n$.
Observar que
$\overline{\tau} \in \ \mathscr{R}_n^N$ y $\{\tau \ \geq \ k\} \in \mathscr{F}_{n-1}$.
Luego:
$E(G_\tau \mid \mathscr{F}_{n-1}) = E(I_{\{\tau = n-1\}}.G_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) + E(I_{\tau \geq n}.G_\tau \mid \mathscr{F}_{n-1}) = I_{\{\tau=n-1\}}.G_{n-1} + I_{\{\tau \geq n\}}.E(E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{F}_{n-1)} \leq I_{\{\tau=n-1\}}.U_{n-1} + I_{\{\tau \geq k\}}.U_{n-1} = U_{n-1}$ .
Quedando probada la tesis. □

b) *Demostración.* Queremos probar que $U_n = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)$.
Repetimos la prueba anterior solo que cambiamos las desigualdades por igualdades. □

2. a) *Demostración.* $E(U_n) \geq E(E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n)) = E(G_\tau) \ \ \forall \ \ \tau \ \in \mathscr{R}_n^N \ \Rightarrow E(U_n) \geq V_n^N$
Por otro lado:

$$E(U_n) = E(E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)) = E(G_{\tau_n^N}) \Rightarrow V_n^N = E(G_{\tau_n^N}).$$

□

b) *Demostración.* Probaremos que $U_{\tau_*} = G_{\tau_*}$. De esta manera al ser $\tau_n^N$ la primera vez que se alcanza dicha igualdad,debe ser $\tau_* \geq \tau_n^N$.
Supongamos por absurdo que $U_{\tau_*} > G_{\tau_*}$ en un conjunto de prob. positiva (notar que la otra desigualdad no se puede dar por como definimos ambas variables aleatorias.
$\Rightarrow E(G_{\tau_*}) < E(U_{\tau_*} \leq E(U_n) \leq E(G_\tau) = E(G_{\tau_*})$ llegando a una contradicción.
La última igualdad es porque ambos son tiempos de parada óptimos.
La segunda desigualdad es debido a que:

$$E(U_{\tau_*}) = \sum_{k=n}^{N} \int\limits_{\{\tau_*=k\}} U_k dP \leq \sum_{k=n}^{N} \int\limits_{\{\tau_*=k\}} U_n dP = E(U_n)$$

Donde la desigualdad se da porque $\{U_k\}$ es supermartingala. □

c) *Demostración.* Es supermatingala:
$E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k) \leq \text{máx}(E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k), G_k) = U_k$.
Es la más chica que domina a $\{G_k\}$:
Sea $\{A_k\}_{n \leq k \leq N}$ otra supermartingala que domina a $\{G_k\}$.

$A_N \geq G_N = U_N$.
$H) A_k \geq U_k \ \forall \ \ k \in \{h, h+1, ..., N\}$.
$T) A_k \geq U_k \ \forall \ \ k \in \{h-1, h, ..., N\}$.
Dem:
$A_{h-1} \geq \text{máx}(G_{h-1}, E(A_h \mid \mathscr{F}_{h-1})) \geq \text{máx}(G_{h-1}, E(U_h \mid \mathscr{F}_{h-1})) =$

$U_{h-1}$.

$\square$

*d*) *Demostración.* Dado $k \in \{n, n+1, ..., N-1\}$.
$E(U_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) =$
$E(I_{\{\tau_n^N \leq k\}} U_{k\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) + E(I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} U_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k)$.
Como el primer termino y $I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}}$ son $\mathscr{F}_k$- medibles:
$E(U_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) =$
$I_{\{\tau_n^N \leq k\}} U_{k\wedge\tau_n^N} + I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$.
Observamos que en $\{\tau_n^N \geq k+1\}$, $U_k = E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$.
$\rightarrow \; E(U_{k+1\wedge\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_k) = I_{\{\tau_n^N \leq k\}} U_{k\wedge\tau_n^N} + I_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} U_k = U_{k\wedge\tau_n^N}$ $\square$

**Observación 2.2.3.** *Consideremos el problema de encontrar el supremo de las ganancias medias, esto es:*

$$\sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n)$$

Razonemos como la proposición $2a$ de el teorema de horizonte finito pero cambiando esperanza por esperanza condicional:

$$E(U_n \mid \mathscr{F}_n) \geq E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n) \forall \tau \in \mathscr{R}_n^N$$

$$\Rightarrow E(U_n) \geq \underset{\tau \in \mathscr{R}_n^N}{sup} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n)$$

Por otro lado:

$$E(U_n \mid \mathscr{F}_n) = E(G_{\tau_n^N} \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\Rightarrow E(U_n) = \underset{\tau \in \mathscr{R}_n^N}{sup} E(G_\tau \mid \mathscr{F}_n)$$

**Observación 2.2.4.**

- *Si* $\{G_k\}_{n \leq k \leq N}$ *es supermartingala estricta* $\Rightarrow \tau_n^N \equiv 1$.

  *Demostración.* $U_N = Z_N$.
  $U_{N-1} = \text{máx}(E(U_N \mid \mathscr{F}_{N-1}), G_{N-1}) = E(U_N \mid \mathscr{F}_{N-1}) > G_{N-1}$.
  Inductivamente obtenemos que $U_k > Z_k \;\; \forall \;\; k \in \{n, ..., N-1\}$.

  $\square$

- *Demostración.* Si $\{G_k\}_{n \leq k \leq N}$ es subrmartingala $\Rightarrow \tau_n^N \equiv N$.
  La demostración es análoga (notar que no es necesario pedir que sea estricta). $\square$

## 2.3. Opciones americanas

Este es un modelo el cual se trabaja con un activo fijo cuyo precio varia a lo largo del tiempo $(S_k^1)$ .Asociamos a cada unidad de tiempo en la cual cambia el precio con los naturales $\{n, .., N\}$ (siendo n el primero y N el último) Fijado un real positivo K, un ente tiene el derecho de vender (comprar) en cualquier momento entre n y N a precio K el activo. Por ende el problema es averiguar en que momento debe ejercer la opción para maxmizar su ganacia $(K - \widetilde{S}_k^1)_+$ $((\widetilde{S}_k^1 - K)_+)$.

### 2.3.1. Hipótesis adicionales

- El mercado es viable y completo.
- Las notaciones son las mismas que en la introducción
- El modelo es discreto financiero con solamente dos activos (el sin riesgo y el cual varía en el tiempo).
- $S_k^0 = (1 + r)^{-k} \ \ \forall \ \ k \in \{n, ..., N\}$.

**Definición 2.3.1.**

- *Un call en el activo es la secuencia* $\{Z_k\}_{n \leq k \leq N}$ *con* $Z_k := (S_k^1 - K)_+ \ \ \forall \ \ k \in \{n, ..., N\}$.

- *Un put en el activo es la secuencia* $\{Z_k\}_{n \leq k \leq N}$ *con* $Z_k := (S_k^1 - K)_+ \ \ \forall$ $k \in \{n, ..., N\}$.

*Tomando el activo sin riesgo que se interpeta como la devaluación de la moneda definimos para ambos casos:*

$$\widetilde{Z}_k = S_k^0 Z_k$$

**Definición 2.3.2.**

- *Un tiempo de parada* $\tau_*$ *es óptimo para la secuencia* $\{\widetilde{Z}_k\}_{n \leq k \leq N}$ *si:*

$$E(\widetilde{Z}_{\tau_*} \mid \mathscr{F}_n) = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(\widetilde{Z}_\tau \mid \mathscr{F}_n).$$

- *Un tiempo de parada* $\tau_*$ *es óptimo para la secuencia* $\{Z_k\}_{n \leq k \leq N}$ *si:*

$$E(Z_{\tau_*} \mid \mathscr{F}_n) = \sup_{\tau \in \mathscr{R}_n^N} E(Z_\tau \mid \mathscr{F}_n).$$

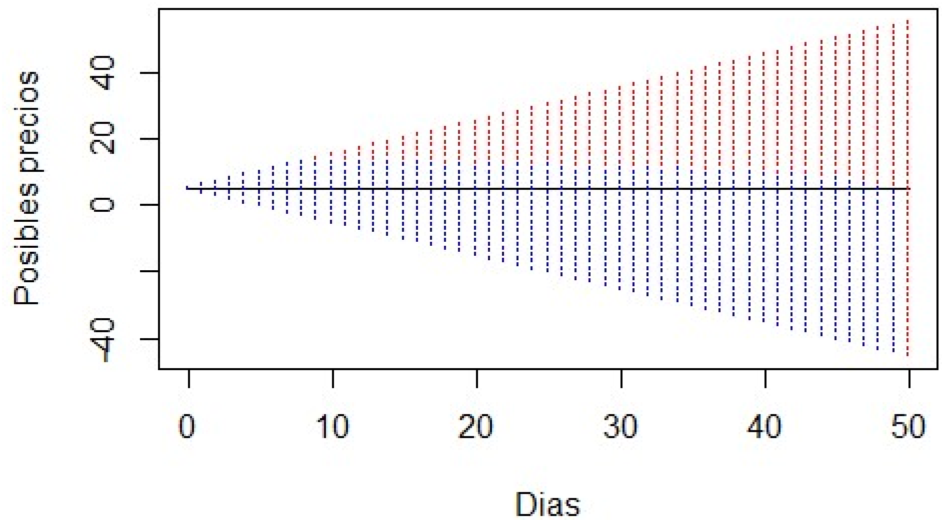
Notar que con el metodo de inducción inversa podemos hayar dicho óptimo.

## 2.4. Ejemplos númericos para ejercer la opción americana

En todos esta sección:

- $n = 0$ y $\exists$ $\{Y_k\}$ i.i.d tq toman solo dos valores y $\mathscr{F}_k = \sigma\{Y_1, ..., Y_k\}$ $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$.
- Diremos que estamos en el caso multiplicativo si: $S^1_k = K.Y_1.Y_2.....Y_k$.
- Diremos que estamos en el caso aditivo si: $S^1_k = K + Y_1 + Y_2 + ....Y_k$.
- En el caso aditivo(multiplicativo) los valores posibles son opuestos (inversos).
- Se representa con un punto azul cuando se debe seguir y rojo cuando hay que ejercer la opción.
- D representa del descuento, $K$ el capitital inicial y $N$ el máximo índice de la filtración (por ende en el eje horizontal estarán puestos los períodos desde 0 hasta $N$ los cuales llamaremos días).

### 2.4.1. Caso aditivo sin descuento ,put :

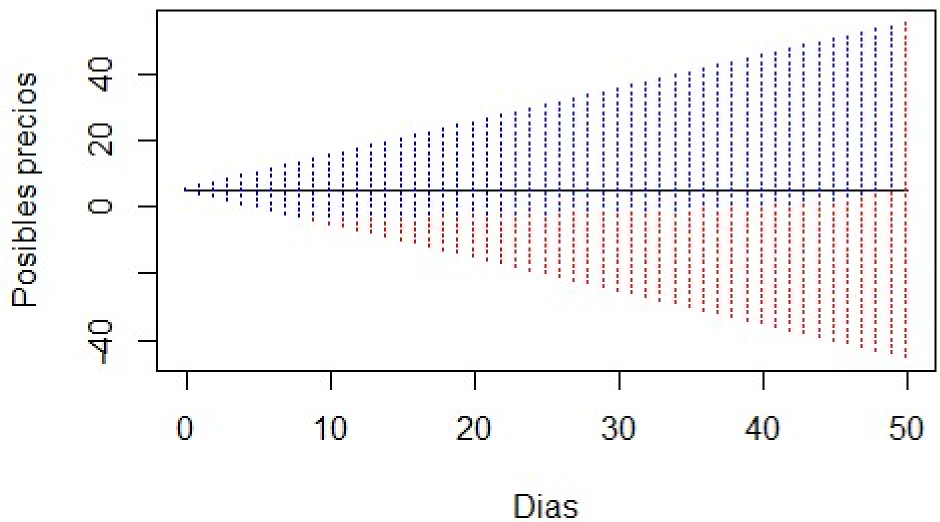



[H]

Figura 2.1: Parada óptima en el caso $K = 5, N = 50, P(Y_k = 1) = 0{,}49$

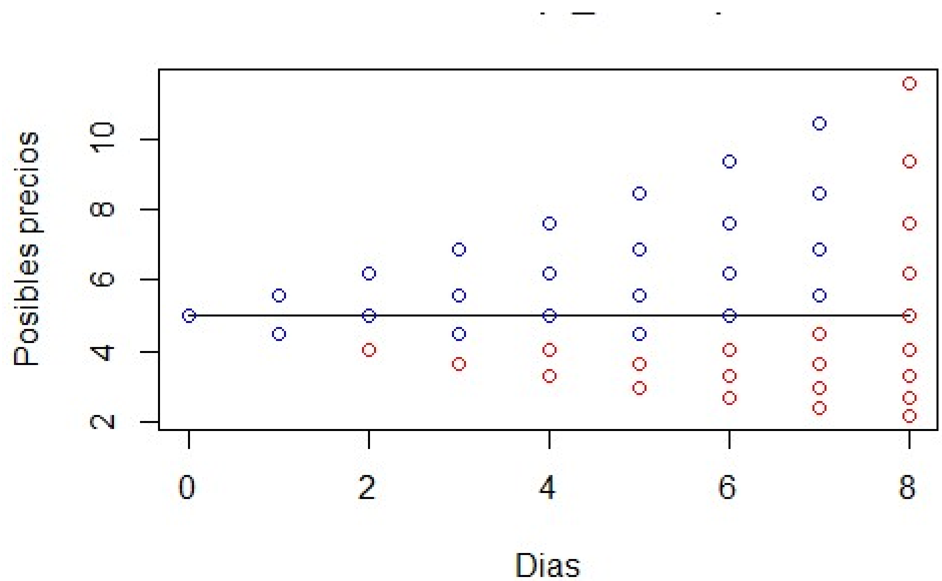
### 2.4.2. Caso aditivo sin descuento ,call :

$K = 5, N = 50, P(Y_k = 1) = 0{,}51$

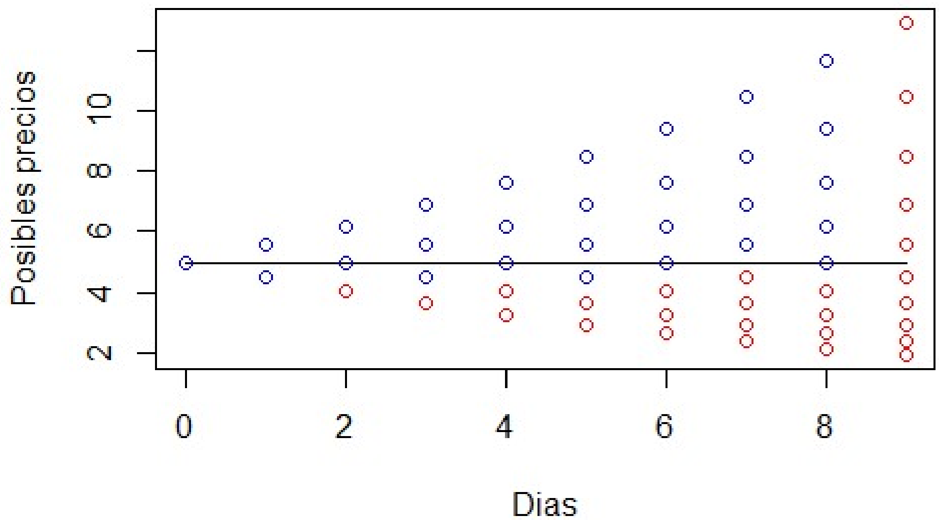

Posibles precios
40
20
0
-40
0
10
20
30
40
50
Dias

### 2.4.3. Caso multiplicativo sin descuento,put:

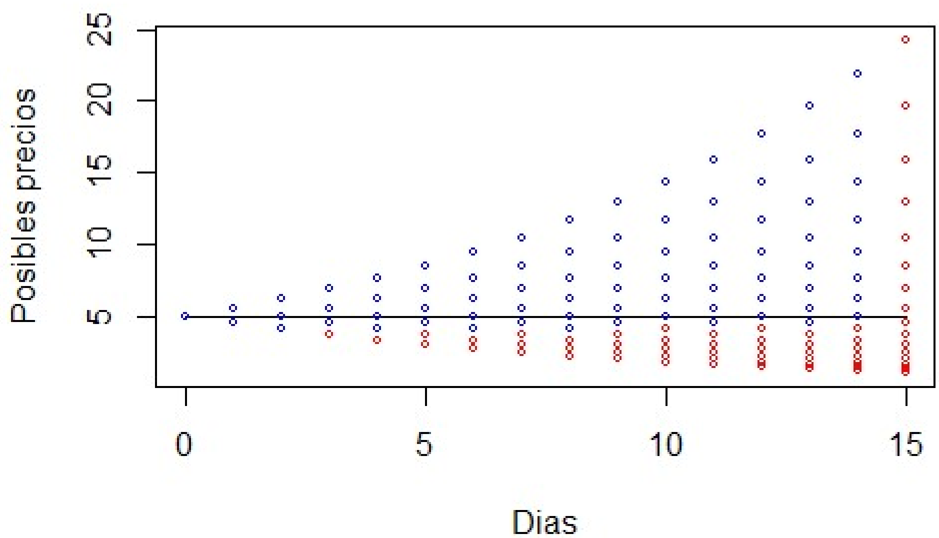
$K = 5, N = 8, P(Y_k = 10/9) = 0{,}55$




$K = 5, N = 9, P(Y_k = 10/9) = 0{,}6$

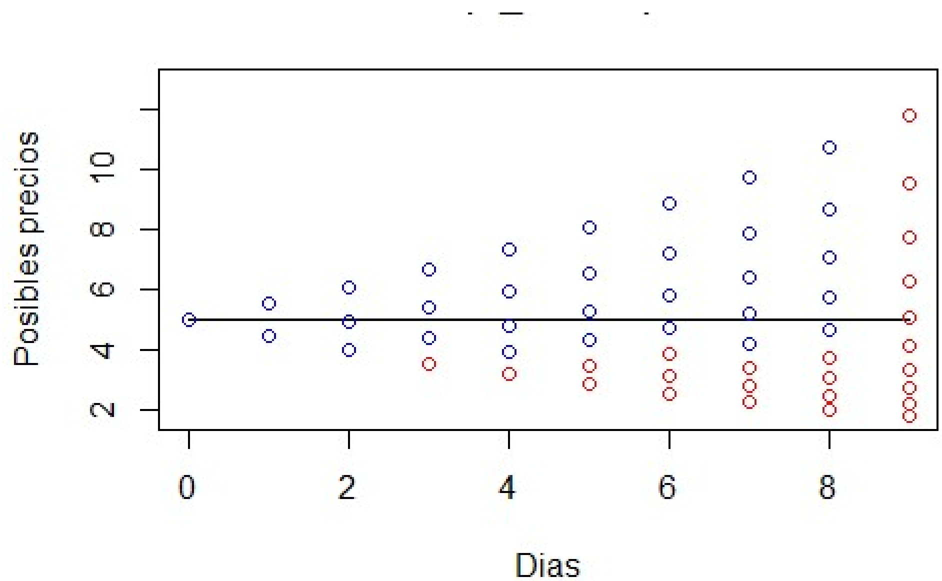



$K = 5, N = 15, P(Y_k = 10/9) = 0{,}6$

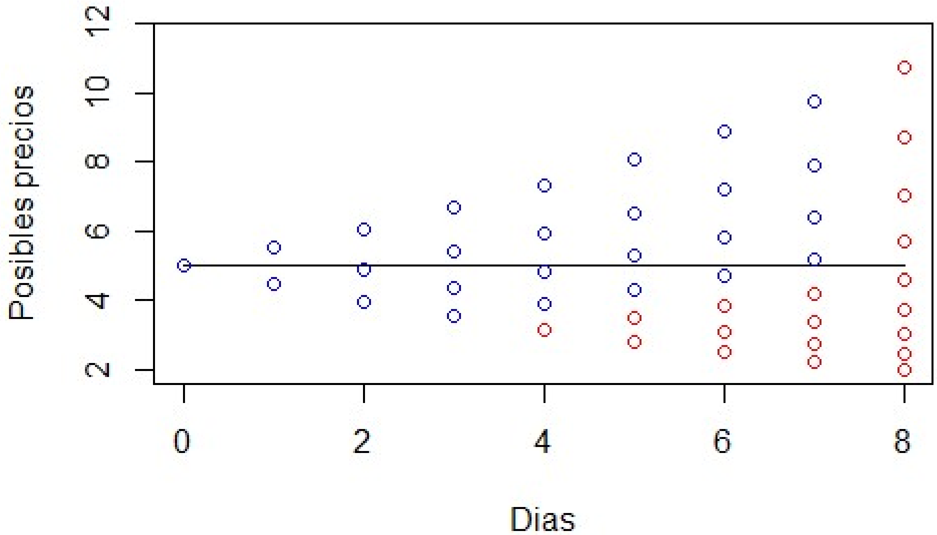


### 2.4.4. Caso multiplicativo con descuento,put:

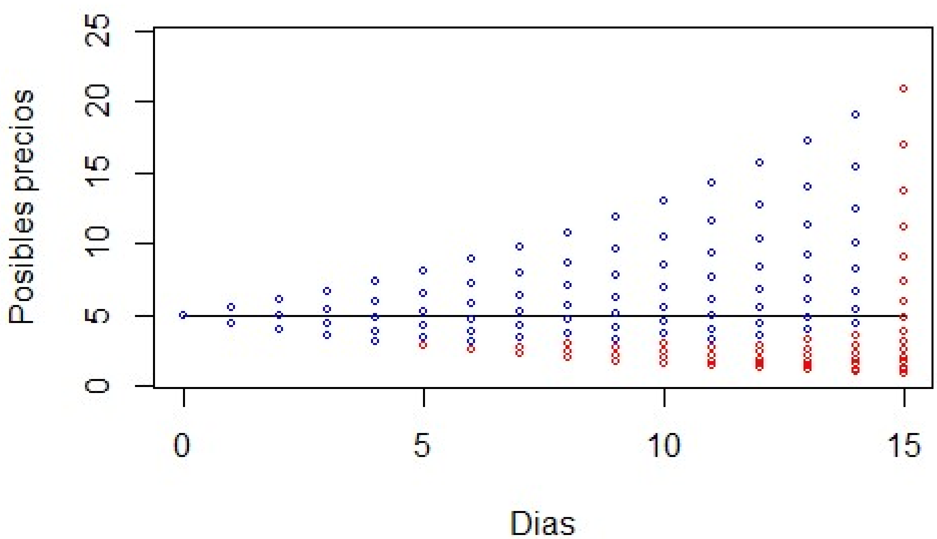
$K = 5, N = 9, P(Y_k = 10/9) = 0{,}6, D = 0{,}01$




$K = 5, N = 8, P(Y_k = 10/9) = 0{,}55$




$K = 5, N = 15, P(Y_k = 10/9) = 0{,}55, D = 0{,}01$



## 2.5. Precio de la opción americana

### 2.5.1. Introducción

- Al ser un mercado viable y completo $\exists! P^*$ donde los precios descontados son una martingala.
- Sea $h$ una funcion $\mathscr{F}_N$ medible no negativa y $\phi$ una estrategía admisible que replique el plan de contingencia definido por $V_N(\phi) = h$.
- Notar que $\{\widetilde{V}_k\}$ es una $P^*$ martingala y por ende

$$V_k(\phi) = S_k^0 E^*(\tfrac{h}{S_N^0} \mid \mathscr{F}_k), \forall k \in \{n, ..., N\}.$$

- En cualquier tiempo la estrategía admisible que replica a h esta completamente determinada por este. Por ende $V_k(\phi)$ es el dinero necesario para replicar la opción h en el tiempo k. De esta manera es natural tomarlo como el valor de la opción en el día k.
- Notar que en la práctica no tiene por qué haber conocimiento de la ley de $P^*$.

### 2.5.2. Opción americana

En este caso $h = (K - S_k^1)_+$. El dueño de la opción puede ejercerla en cualquier momento , es por esto que el precio de la opción no debe solamente poder replicar $(K - S_N^1)_+$ el último día sino que también debe ser mayor o igual a $Z_k$ en el día k. Por esto es natural ponerle precio:

$$U_N = Z_N.$$
$$U_{N-1} = \text{máx}(Z_{N-1}, S_{N-1}^0 E^*(\widetilde{Z}_N \mid \mathscr{F}_{N-1})).$$
$$U_k = \text{máx}(Z_k, S_k^0 E^*(\tfrac{U_{k+1}}{S_{k+1}^0} \mid \mathscr{F}_k)) \quad \forall k \in \{n, ..., N\}.$$

**Observación 2.5.1.** *Notemos que la secuencia determinada por $\widetilde{U}_k := \frac{U_k}{S_k^0}$ es la $P^*-$envolvente de Snell de la secuencia dada por $\widetilde{Z}_k$.*

Las siguientes proposiciones tienen el objetivo de demostrar que con el precio puesto a la opción el vendedor tener ganancia no negativa sin importar el tiempo en que se ejerza la opción.

**Proposición 2.5.1.** *Con la notación usada hasta ahora un tiempo de parada $\tau$ es óptimo sii:*

$$\begin{cases} Z_\tau = U_\tau \\ \\ U^\tau := (U_{\tau \bigwedge n}) \text{ es martingala.} \end{cases}$$

*Demostración.* Solo probaremos el reciproco:
$U_0 = E(U_\tau \mid \mathscr{F}_0) = E(U_{\tau_0^N}) = E(Z_{\tau_0^N})$ el cual es un tiempo de parada óptimo (Teorema de horizonte finito).
Notemos que sustituyendo 0 por $n$, $\tau$ cumple en todo punto:

$$E(Z_{\tau^*} \mid \mathscr{F}_n) \leq E(Z_\tau \mid \mathscr{F}_n) \; \forall \tau^* \in \mathscr{R}_n^N$$

□

**Proposición 2.5.2** (Descomposición de supermartingalas)**.** *Toda supermartingala $\{U_k\}_{n \leq k \leq N}$ se descomopone de forma única como:*

$$U_k = M_k - A_k$$

*Donde $\{M_k\}$ es martingala y $\{A_k\}$ es un proceso no decreciente,predecible y nulo en 0.*

*Demostración.* Si $n = 0$ tomamos $M_0 = U_0$ y $A_0 = 0$.
Luego $M_{k+1}$ y $A_{k+1}$ deben cumplir:

$$U_{k+1} - U_k = M_{k+1} - M_k - (A_{k+1} - A_k)$$

Tomando esperanzas condicionales en $\mathscr{F}_k$:

$$-(A_{k+1} - A_k) = E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k) - U_k$$

De esta manera, usando las dos ecuaciones anteriores:

$$M_{k+1} - M_k = U_{n+1} - E(U_{k+1} \mid \mathscr{F}_k)$$

Concluimos que $\{M_k\}$ y $\{A_k\}$ quedan determinados y son una martingala y un proceso predecible respectivamente.

□

**Proposición 2.5.3.** *El tiempo de parada máximo $\tau_{max}$ para $\{Z_k\}$ estádado por:*

$$\begin{cases} N & si \quad A_N = 0 \\ \\ \text{ínf}(k, A_{k+1} \neq 0)) & si \quad A_N \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* $\tau_{\text{máx}}$ es tiempo de parada ya que $\{A_k\}$ es predecible.
Para probar que es óptimo probaremos que estamos en las hipótesis del teorema 2.5.1 Por como definimos $\tau_{\text{máx}}$ si tomo $n \leq N : U_{\tau_{\text{máx}} \wedge n} = M_{\tau_{\text{máx}} \wedge n} \Rightarrow U_{\tau_{\text{máx}} \wedge n}$ es martingala. Para ver optimalidad queda probar que $U_{\tau_{\text{máx}}} = Z_{\tau_{max}}$:

$$U_{\tau_{\text{máx}}} = \sum_{j=0}^{N-1} I_{\tau_{\text{máx}}=j} U_j + I_{\tau_{\text{máx}}} U_N = U_{\tau_{\text{máx}}} = \sum_{j=0}^{N-1} I_{\tau_{\text{máx}}=j} \max(Z_j, E(U_{j+1} \mid \mathscr{F}_j)) + I_{\tau_{\text{máx}}} U_N$$

En el conjunto $I_{\tau_{\text{máx}}=j}$,$A_j = 0$ y $A_{j+1} > 0$. Luego $U_j = M_j$ y $E(U_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) = M_j - A_{j+1} \Rightarrow U_j > E(U_{j+1} \mid \mathscr{F}_j) \Rightarrow U_j = Z_j$. Sustituyendo en la sumatoria anterior obtenemos:

$$U_{\text{máx}} = Z_{\text{máx}}$$

Si $\tau \geq \tau_{\text{máx}}$, este no puede ser óptimo ya que:

$$E(U_\tau) = E(M_\tau) - E(A_\tau) = E(U_0) - E(A_\tau) < E(U_0)$$

□

### 2.5.3. Conclusión

Tomemos el precio de la opción definido al principio de la sección. Con la notación la prop. 2.5.2 podemos definir las secuencias $\{\widetilde{M}_k\}$, $\{\widetilde{A}_k\}$ de manera que:

$$\widetilde{U}_k = \widetilde{M}_k - \widetilde{A}_k$$

Como el mercado es completo, hay una estrategía autofinanciada $\phi$ tal que:

$$V_N(\phi) = S_N^0 \widetilde{M}_N$$

Definimos $\widetilde{V}_k := \widetilde{M}_k$ y $A_k := S_k^0 \widetilde{A}_k$.Luego:

$$U_n = V_n(\phi) - A_n$$

Como el mercado es completo una vez que el vendedor reciba $U_0 = V_0(\phi)$ podra generar una ganancia en el día $n$ mayor o igual a $U_n$ y por ende a $Z_n$.
El que ejerza la opción deberá hacerlo cuando $U_k = Z_k$. Entonces los tiempos de parada óptimos $\tau$ deberán cumplir: $Z_\tau = U_\tau$.
Por otro lado el dueño de la opción no le conviene ejerzerla luego de:

$$\tau_{\text{máx}} = \inf\{j, A_{j+1} \neq 0\} = \inf\{j, \widetilde{A}_{j+1} \neq 0\}$$

Ya que el poseedor de la opción también puede venderla y no debe hacerlo después de $\tau_{\text{máx}}$.
$\Rightarrow$ los tiempos óptimos cumplen $\tau \leq \tau_{\text{máx}}$, de esta manera $\forall n \in \{0, ..., N\}$ la secuencia $\widetilde{U_{\tau\wedge n}}$ es $P^*$ martingala. Así, los tiempos de parada óptima para ejercer la opción (tomando en cuenta que también puede venderla) son tiempos de parada $P^*$óptimos para la secuencia $\{\widetilde{Z}_k\}$.
De esta manera podemos concluir que si el vendedor de la opción sigue la estrategía $\phi$ y el comprador ejerce en un tiempo no óptimo $\Rightarrow U_\tau > Z_\tau$ o $A_\tau > 0$.
En ambos casos el vendedor obtiene ganancia $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau > 0$.

# Capítulo 3

# Cadenas con espacio de estados numerable

Ahora los tiempos de parada estarán definidos para todos los naturales y en vez de trabajar con martingalas trabajaremos con cadenas de Markov.

## 3.1. Introducción

En este capítulo , trabajaremos con cadenas de Markov homogeneas en espacio de estados numerables .Al igual que el capítulo anterior $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ Modelaremos el espacio con la misma notación que en la introducción:

Para introducirnos a la teoría tendremos que estudiar potenciales y funciones excesivas.

## 3.2. Potenciales:

**Definición 3.2.1.** *Dada $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ; $\alpha \in [0, 1]$ definimos la esperanza del valor retornado descontado en $i$ como:*

$$R^\alpha g(i) = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n)), i \in \mathsf{E}$$

**Definición 3.2.2** (Potencial).

- *Bajo las mismas hipotesis y si $g \geq 0$ la función $R^\alpha g$ se le llama $\alpha-$ potencial de $g$ (cuando $\alpha = 1$ escribirmos $Rg$ y decimos que es potencial de $g$).*

- *Decimos que $f$ es $\alpha$-potencial (potencial) si $\exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f = R^\alpha g$ ($f = Rg$).*

**Ejemplo 3.2.1.** *Tomemos g definida como:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad si \qquad x = j \\ \\ 0 \qquad en\ otro\ caso. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n)) \text{ es el número de visitas a } j.$$

**Proposición 3.2.1.** $\forall \alpha \in [0,1]$ *y* $g \geq 0$*:*

$$R^\alpha g(i) = \sum_{j \in \mathsf{E}} R^\alpha(i,j) g(j) \ , \ i \in \mathsf{E}. \text{ Con } R^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n$$

*Demostración.*

$$E_i(g(X_n)) = \sum_{j \in \mathsf{E}} g(j) \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{j \in \mathsf{E}} g(j) \mathbb{P}^n(i,j)$$

$$\text{Luego: } R^\alpha g(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathsf{E}} \alpha^n \mathbb{P}^n g(j)$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{E}} (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n(i,j)) g(j) = \sum_{j \in \mathbb{E}} R^\alpha(i,j) g(j)$$

□

**Proposición 3.2.2.** *Dada* $\alpha \in [0,1)$ *y* $g \geq 0$ *acotada,definida en* $E$*.*
$f = R^\alpha g$ *es la única solución al sistema (mirando g como vector):*

$$(I - \alpha \mathbb{P}) = g$$

*Demostración.*

- Es solución:

  Notemos primero que $R^\alpha g \leq (\max g) \frac{1}{1-\alpha}$

  $$\text{Como } R^\alpha g = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbb{P}^n g$$

  $\Rightarrow f - \alpha \mathbb{P} f = g$

- Unicidad:
  Tomemos $h = f - R^\alpha$. Notemos en primer lugar que esta acotada. Por otro lado:

  $$f = g + \alpha \mathbb{P} f \textbf{ y } R^\alpha g = g + \alpha \mathbb{P} R^\alpha g$$

  $$\Rightarrow \alpha \mathbb{P} h = \alpha \mathbb{P} f - \alpha \mathbb{P} R^\alpha g = f - g + g - R^\alpha g = h$$

  Inductivamente $0 \leq h \leq \alpha^n \mathbb{P}^n \max(h)$.
  Como $\alpha < 1$ tomando $n \to \infty$ obtenemos que $h = 0$ probando la unicidad.

□

**Corolario 3.2.1.** $\forall \alpha \in [0,1):$ $(I - \alpha P)R^{\alpha} = I$ *. Esto nos sirve para computar* $R^{\alpha}$

**Observación 3.2.1.** *Con* $\alpha < 1$*:*

$$E_i(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n)) + \alpha^m \mathbb{P}^m R^{\alpha} g(i) = R^{\alpha} g(i)$$

.

Se deduce de que $R^{\alpha} g = g + \alpha \mathbb{P} g + ... + \alpha^{m-1}\mathbb{P}^{m-1} g + \alpha^m \mathbb{P}^m (g + \alpha \mathbb{P} g + ...)$.

**Teorema 3.2.1.** $\forall$ *tiempo de parada* $T$*,* $g \geq 0$ *(*$\alpha < 1$ *y definiendo* $g(X_{-n}) = 0$ *):*

$$E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)) + \alpha^T E_i(\mathbb{P}^T R^{\alpha} g(X_T)) = R^{\alpha} g(i)$$

*Demostración.* Se deduce de la observación anterior tomando indicatrices $\mathbf{1}_{\{T=n\}}$. □

**Teorema 3.2.2.** *Dado* $A \subseteq E, g \geq 0$ *acotada y* $\alpha \in [0,1]$ *y sean:*

$$T = \text{ínf}\,\{(n \in \mathbb{N} : X_n \in A)\} \text{ (el cual es un tiempo de parada)}$$

$$h(i) = E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)),\ i \in E$$

*Entonces:*

$$h(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \in A \\ \\ g(i) + \alpha \mathbb{P} h(i) & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Demostración.* El caso $\alpha = 0$ es trivial (con $0^0 = 1$) por ende $\alpha \in (0,1]$ y definimos $\sum_{n=0}^{-1} g(X_n) = 0$.

Usando dichas hipótesis es facíl ver que si $i \in A \Rightarrow h(i) = 0$

Sea $W = \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)$ (notar que es $\mathscr{F}$-medible).

Definimos $T^{'} := \text{ínf}\,\{n \in \mathbb{N} : X_{n+1} \in A\}$

Sea $\omega \notin \{T = 0\}$. Observemos que $T(\omega) = 1 + T^{'}(\omega)$

$$\Rightarrow\ W(\omega) = g(X_0(\omega)) + \sum_{n=1}^{T^{'}(\omega)} \alpha^n g(X_n)(\omega) =$$

$$g(X_0(\omega)) + \alpha \sum_{n=0}^{T^{'}(\omega)-1} \alpha^n g(X_{n+1}).$$

Definimos $W^{'}(\omega) := \sum_{n=0}^{T^{'}(\omega)-1} \alpha^n g(X_{n+1})$ y $W^{'}_m(\omega) := \sum_{n=0}^{(T^{'}(\omega)\wedge m)-1} \alpha^n g(X_{n+1})$.

Notemos que $W_m \to W$; luego a partir del corolario 1.3.2 deducimos:

$$E_i[W^{'} \mid X_0, X_1] = h(X_1)$$

Finalmente, si $i \in A^c$:

$$h(i) = E_i[W] = E_i[g(X_0) + \alpha W^{'}] = g(i) + \alpha E_i[h(X_1)] = g(i) + \alpha \sum_{j \in E} \mathbb{P}(i,j) h(j).$$

$\square$

## 3.3. Funciones excesivas:

**Definición 3.3.1** (excesiva)**.** *Decimos que la función $f$ es $\alpha$-excesiva si $f \geq 0$ y $f \geq \alpha \mathbb{P} f$.*

**Observación 3.3.1.** *: se enumeran aquí una serie de propiedades de las funciones excesivas:*

- *Inductivamente podemos ver que $\forall i \in E$:*

$$f(i) \geq \alpha^n \mathbb{P}^n f(i) = E_i(\alpha^n f(X_n))$$

- *Multiplicar por un escalar positivo y sumar funciones excesivas dan como resultado funciones excesivas.*

- *Si $\beta < \alpha \Rightarrow f \geq \alpha \mathbb{P} f \geq \beta \mathbb{P} f$ y por ende $f$ es $\beta$-excesiva.*

- *Si $f$ y $g$ son $\alpha$-excesivas, entonces $\text{mín}\,(f, g)$ también (notar que $\text{mín}(\alpha \mathbb{P} f, \alpha \mathbb{P} g) = \alpha \mathbb{P}\, \text{mín}\,(f, g)$).*

**Proposición 3.3.1.** *Si $f$ es el $\alpha$-potencial de una función no negativa y es finita $\Rightarrow f$ es $\alpha$-excesiva.*

*Demostración.*

$$f = R^\alpha g$$

$$f = g + \alpha \mathbb{P} g + ... \geq \alpha \mathbb{P} g + ... \geq \alpha \mathbb{P}(g + \alpha \mathbb{P} g) = \alpha \mathbb{P} f$$

□

**Teorema 3.3.1.** *Dada una función excesiva $f$ $\exists g \geq 0, h \geq 0$ tal que:*

$$f = Rg + h$$

$$h = \mathbb{P} h$$

*Demostración.* Recordemos primero que estamos viendo a $f$ como un vector de $E$ dimensiones.

Tomemos $f = g + \mathbb{P} f$

iterando y usando que f es excesiva obtenemos que $f = (g + \mathbb{P} g + ... + \mathbb{P}^n g) + \mathbb{P}^{n+1} f$

En el limite $n \to \infty$ el primer término converge por definicón a Rg y el segundo:

$$f \geq \mathbb{P} f \geq \mathbb{P}^{\nvDash} f \geq .... \Rightarrow \exists h := \lim_n \mathbb{P}^n f$$

Observemos que la convergencia es puntual en cada coordenada y por ende obtenemos dos funciones medibles en nuestro espacio de probabilidad.

□

**Proposición 3.3.2.** *Toda función excesiva $f$ es $\alpha$-potencial para todo $\alpha < 1$.*

*Demostración.*

Tomemos $g = f - \alpha\mathbb{P}f$ luego sustituyendo en el término de la derecha a f e iterando obtenemos que:

$$f = (g + \alpha\mathbb{P}g + ... + \alpha^n\mathbb{P}^n g) + \alpha^{n+1}\mathbb{P}^{n+1}f$$

Tomando límite obtenemos que $f = R^\alpha g$

□

**Teorema 3.3.2.** *Si $f$ es $\alpha$-excesiva entonces:*

$$f(i) \geq E_i(\alpha^T f(X_T)) \ \forall i \in E \text{ y todo tiempo de parada } T$$

*Demostración.* Caso $\alpha < 1$:

Por proposición anterior podemos tomar $f = R^\alpha g$ con $g \geq 0$

$$\text{Luego } f(i) = E_i(\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) + \alpha^T f(X_T)) \geq E_i(\alpha^T f(X_T))$$

En el caso $\alpha = 1$ tomamos $\beta < 1$ repetimos prueba y tomamos límite $\beta \to 1$ (con la observación 3.3.1 vemos que $f$ es $\beta$-excesiva) □

**Teorema 3.3.3.** *Si $f$ es $\alpha$-excesiva entonces $\forall i$:*

$$E_i(\alpha^T f(X_T)) \geq E_i(\alpha^S f(X_S))$$

*Con $T \leq S$ tiempos de parada.*
*Notemos primero que el resultado es intuitivo ya que una función excesiva en promedio "vale "menos en el futuro.*

*Demostración.* Solo probaremos el caso $\alpha < 1$ ya que si $\alpha = 1$ usando la observación 3.3.1 parte 3 y tomando límite este caso se desprende del primero.

$$E_i[\alpha^T f(X_T)] = f(i) - E_i[\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)] \geq f(i) - E_i[\sum_{n=0}^{S-1} \alpha^n g(X_n)] = E_i[\alpha^S f(X_S)]$$

. □

**Proposición 3.3.3.** *Supongamos que $X \subseteq E$ es irreducible recurrente.Entonces cualquier función excesiva $f$ es constante.*

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.2, $f(i) \geq E_i[F(X_T)]$ para cualquier tiempo de parada $T$. Tomemos $S$ la primera vez que $X_n = j$. Como es recurrente $P(T = \infty) = 0 \Rightarrow E_i(f(X_T)) = f(j)$

$$\Rightarrow f(i) > f(j) \forall j \in E.$$

Como $j$ es génerico concluímos que $f$ es constante. □

## 3.4. Tiempo de parada óptima

En esta sección se tratara resolver dos problemas:

- Computar la función:

$$v := \sup_T E_i[f(X_T)] \ , \ i \in E \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de parada.}$$

- Encontrar un tiempo de parada que realice el supremo.

**Observación 3.4.1.** *Si $X$ es irreducible recurrente, entonces $v$ es igual a la constante $c = sup_j f(j)$. Notemos que es simplemente ver que $v$ debe mayorar a $f$.*

**Ejemplo 3.4.1.** *Sea $X$ una cadena recurrente e irreducible de Markov y supongamos que $f \geq 0$. Sea $c = \sup_i f(i)$ , $j \in E$ tal que $f(j) = c$ y $T_0$ la primera llegada a $j$. Observemos que:*

$$v(i) \leq E_i[c] = c$$

$$P(T_0 < \infty) = 1$$

$$\Rightarrow v(i) \geq E_i[X_{T_0}] = c$$

**Observación 3.4.2.** *Dado $T$ tiempo de parada y $\sigma$ el shift en nuestro espacio muestral.*

- $P(X_n = r, T \circ \sigma = n \mid X_1 = i) = P(X_{n-1} = r, T = n \mid X_0 = i) \ \forall \ n > 0, \ i, r \in E$.

  *Demostración.* Por como definimos las cadenas de Markov homogeneas en la introducción notemos que:

  $$\{\omega = (\omega_0, i, \omega_2, \dots) \text{ tal que } X_n = r\} = \Omega \times \{\omega = (i, \omega_1, \dots) \text{ tal que } X_{n-1} = r\}$$

  Por otro lado $(To\sigma = n \mid X_1 = i) = \Omega \ \times \ (T = n \mid X_0 = i)$

  $\Rightarrow$ Definiendo $A = (T = n \mid X_0 = i)$ (el cual es $\mathscr{F}_n$ medible). La igualdad que basta probar es: $P(\Omega \times A) = P(A)$ la cual se cumple si es $\mathscr{F}_n$ medible ya que se cumple para el algreba generada por $(X_0, ..., X_n)$. ☐

- $$P(X_n = r, To\sigma = n \mid X_0 = i, X_1 = j) = P(X_n = r, T = n \mid X_1 = j) \ \forall \ n > 0, \ i, j \in E \ , r \in \mathbb{R} \ .$$

*Demostración.* La medida obtenida condicionando a los sucesos $X_1 = j, X_0 = i$ tiene que algebra generadora formada por los conjuntos:

$$\cup_{k=1}^{l} \cap_{j_k=1}^{m_k} X_{j_k} = e_{j_k} \text{ .Con } j_k > 1$$

Este útlimo conjunto mide lo mismo según la medida definida por condicionar $X_1 = j$ Por teorema de extesión de Caratheodory concluimos que:

$$P(T = n \mid X_0 = i, X_1 = j) = P(T = n \mid X_1 = j)$$

□

**Teorema 3.4.1.** *La función $v$ es la minima función excesiva mayor o igual a $f$.*
*Demostraremos una versión más general que este teorema en 3.5.1*

**Corolario 3.4.1.** *Si $C$ es un subconjunto de $E$ irreducible, entonces $\forall i \in C$, $v(i) = \sup_{j \in C} f(j)$.*

(Notemos que para maximizar $f$ lo mejor es esperar hasta pasar por el supremo).

**Lema 3.4.1.** *Si $g$ es una función excesiva; la función $h$ definida como:*
*$h(i) = E_i(g(X_T))$ , $i \in E$ también es excesiva*

En la subsección 3.5.1 demostraremos una versión más general.

**Teorema 3.4.2.** *Si $E$ es finito entces $T_0(\omega) = \inf\{n \geq 0 : f(X_n(\omega)) = v(X_n(\omega))\}$. Es tiempo de parada óptimo.*
*Probaremos una versión más general en 3.5.2.*

**Ejemplo 3.4.2.** *Resolvamos el siguiente problema de parada óptima: Sea $X$ una cadena de Markov cuyo conjunto de estados es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , función de ganancia $f = (2, 0, 1, 3, 2, 4, 2{,}5)$ y matriz de estados:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 & \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

*Observemos que los estados 1 y 2 forman un conjunto irreducible cerrado , al igual que los estados 3,4 y 5, luego por 3.4.1:*

$$v(1) = v(2) = 2,\ v(3) = v(4) = v(5) = 3.$$

*Por otro lado* $v(6) = f(6)$ *ya que ahi se alcanza el máximo de* $f$.
*Usando el teorema 3.4.1:*

$$v(7) \geq (0{,}1 + 0{,}1)2 + (0{,}1 + 0 + 0{,}1)3 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}4v(7)\ ,\ v(7) \geq 2{,}5$$

$$\Rightarrow v(7) \geq 3$$

$$\Rightarrow v = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 3),\ \{f = v\} = \{1, 4, 6\}\ y\ T_0 = \text{ínf}\{n : f(X_n) = v(X_n)\}$$

## 3.5. Tiempo de parada óptima con descuento

Los dos problemas a resolver en esta subsección son los mismos que la anterior a diferencia que ahora hay un $\alpha \in (0,1]$ tal que:

$$v := \sup_T E_i(\alpha^T f(X_T)) \ , \ i \in E \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de parada.}$$

**Teorema 3.5.1.** *La función $v$ es la minima función $\alpha$ excesiva mayor o igual a $f$.*

*Demostración.*

- Excesividad: Dado $\epsilon > 0$:

$$\forall j \in E \ \exists \ T_j \text{ tiempo de parada tal que}$$

$$E_j(\alpha^T f(X_T)) > v(j) - \epsilon$$

$$\text{Definimos } T = 1 + \sum_{j \in E} I_{\{X_1 = j\}}(T_j o \sigma)$$

Primero observemos que $T$ es un tiempo de parada:

$$(T = n) \ = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, ...); T_j(\omega_1, \omega_2) = n - 1\} =$$
$$\cup_{j \in E} \Omega \times T_j = n - 1 \ \in \mathscr{F}_n$$

Por otro lado:

$$E_i(\alpha^T f(X_T)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T = n \mid X_0 = i, X_1 = j) P(i,j) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j o \sigma = n - 1 \mid X_0 = i, X_1 = j) P(i,j) = (*)$$

Usando la segunda obs. de 3.4.2:

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j o \sigma = n - 1 \mid X_1 = j) P(i,j) = (**)$$

Usando la primera obs. de 3.4.2

$$(**) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_{n-1} = r, T_j = n - 1 \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in E} \sum_{r \in E} \alpha^n f(r) P(X_n = r, T_j = n \mid X_0 = j) P(i,j)$$

$$= \alpha \sum_{j \in E} E_j(\alpha^{T_j} f(X_{T_j})) P(i,j)$$

$$\geq \alpha(Pv(i) - \epsilon)$$

Como $v$ es el supremo en los tiempos de parada y $\epsilon$ es génerico:

$$v(i) \geq \alpha P v(i)$$

- Mayora a $f$: Tomando el tiempo de parada $T = 0$ se concluye este item.
- Es la menor función $\alpha$- excesiva que mayora a $f$:

Sea $g$ otra función excesiva mayorante, usando el teorema 3.3.3

$$g(i) \geq E_i(\alpha^T g(X_T)) \ \Rightarrow g(i) \geq E_i(\alpha^T f(X_T)) \forall\ T \text{ tiempo de parada}$$

$$\Rightarrow g \geq v$$

□

**Lema 3.5.1.** *Si $g$ es una función $\alpha$- excesiva; la función $h$ definida como: $h(i) = E_i(\alpha^T g(X_T))$ , $i \in E$ también es $\alpha$-excesiva*

*Demostración.* Notemos primero que $h \geq 0$

Sea $\sigma$ el shift hacia la izquierda, definimos $S = To\sigma$

Notemos que $T \leq S$ .Usando 3.3.3 deducimos que $h(i) = E_i(\alpha^T g(X_T)) \geq E_i(\alpha^S g(X_S))$

Por la primera observación de 3.4.2: $E_i(\alpha^S g(X_S) \mid X_1 = j) = \alpha E_j(\alpha^S g(X_S)) = \alpha h(j)$.

$$\Rightarrow \ E_i(\alpha^S g(X_S)) = \alpha \sum_{j \in E} P(i,j) h(j) \leq \alpha(i)$$

□

□

**Teorema 3.5.2.** *Si $E$ es finito entces $T_0(\omega) = \text{ínf}\{n \geq 0 : f(X_n(\omega)) = v(X_n(\omega))\}$. Es tiempo de parada óptimo.*

*Demostración.*

Observemos que si probamos que $h(i) = E_i(\alpha^{T_0} f(X_{T_0})) = v(i)$ habremos probado que $T_0$ es óptimo.

- Por definición de $v$, $h \leq v$

- $h$ es $\alpha$ excesiva:

$$\text{En } \{T_0 < \infty\}\ f(\alpha^{T_0} X_{T_0}) = v(X_{T_0})$$

En $\{T_0 = \infty\}$ $\alpha^T f(X_T)\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = 0 = v(\alpha^{'\infty'} X_\infty)$ por definición de tiempo de parada

$$\text{Luego } h(i) = E_i(f(\alpha^{T_0} X_{T_0})) = E_i(v(X_{T_0}))$$

Por el lema 3.4.1 conlcuímos que $h$ es $\alpha$ excesiva.

- $h \geq f$:

$$\text{Si } i \in A \ \Rightarrow P_i(T_0 = 0) = 1 \Rightarrow h(i) = E_i(\alpha^{T_0} f(X_{T_0})) = f(i)$$

$$\text{Supongamos que } c := \max_{i\in e}(f(i) - h(i)) \text{ es positivo y se realiza en } j$$

$$\text{Observemos que } h + c \text{ es } \alpha - \text{ excesiva y mayora a } f$$

Como $v$ es la mínima función $\alpha$ -excesiva que mayora a $f$ ( teorema 3.5.1) $\Rightarrow v \leq h{+}c$

$\Rightarrow f(j) \leq v(j) \leq h(j){+}c = h(j){+}f(j){-}h(j) = f(j)\ \Rightarrow v(j) = f(j)$ pero $j \notin A$ lo cual es absurdo.

De esta manera $h$ es $\alpha$-excesiva, mayora a $f$ y es menor o igual a $v$. Por teorema 3.5.1 concluímos que $h = v$

□

**Ejemplo 3.5.1.** *Resolvamos el siguiente problema de parada óptima: Sea $X$ una cadena de Markov cuyo conjunto de estados es $E = \{a, b, c\}$ , función de ganancia $f = (6, 5, 3)$ y $\alpha = 0{,}75$ y matriz de estados:*

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

*Por el teorema 3.5.1:*

$$v(a) \geq 0{,}15v(a) + 0{,}60v(b)\ ,v(a) \geq 6,$$

$$v(b) \geq 0{,}45v(a) + 0{,}30v(b)\ ,v(b) \geq 5,$$

$$v(c) \geq 0{,}30v(a) + 0{,}15v(b) + 0{,}30v(c)\ ,v(c) \geq 3,$$

*Observemos que la función $h := (6, 6, 6)$ es $0{,}75-$ excesiva $\Rightarrow v(a) = 6$. Tomando $v(b) = 5$ y teniendo en cuenta que $v(a) = 6$ (son los mínimos valores que pueden tomar) ,$v(c)$ está obligado a valer $3{,}643$.*

$\Rightarrow v = (6, 5, 3{,}643)$ *y el tiempo de parada óptima es la primer llegada a* $\{a, b\}$

# Capítulo 4

# Procesos de Markov con espacio de estados continuo

## 4.1. Introducción

### 4.1.1. Preliminares:

De ahora en más el espacio de estados $(E, \mathscr{B})$ no tiene que ser numerable y trabajamos con la definicón de (poner def de a introducción) de Cadenas de Markov para dicho caso.

Los objetivos ahora son:

- Dada $g$ una función medible no negativa que cumple $\lim_n X_n = 0$ $P_x$-ctp. $\forall x \in E$ Computar la función:

  $$\overline{v} := \sup_T E_i[g(X_T)] \text{ , } i \in E \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de parada.}$$

  $$v := \sup_T E_i[g(X_T)] \text{ , } i \in E \text{ Siendo } T \text{ un tiempo de Markov.}$$

  Cuando mencionemos a $g$ nos referiremos a está función.

- Encontrar un tiempo de Markov (de parada ) que realice los supremos.

**Definición 4.1.1.** 
- *Diremos que una función* $f : \{F\} \to E$ $\mathscr{B}$ *medible, pertenece a* $B(A^+)$ *si:*

  $$E_x(\sup_n f^+(X_n)) < \infty \ \forall x \in E$$

- *Una función* $f$ $\mathscr{B}$ *medible es excesiva si:*

  $$E_x(f(X_1)) \leq f(x) \ \forall x \in E$$

**Observación 4.1.1.** *.1) Si $E$ es numerable las definiciones de excesividad son equivalentes.*

*.2) Sea $f$ medible tal que $\exists E_x(f(X_n))\ \forall\ x \in E, n \in \mathbb{N}$:*
*$E_x(f(X_m) \mid \mathscr{F}_n))(\omega) = E_{X_n(\omega)}(f(X_{m-n}))\ ,\forall \omega \in \Omega\ ,\ m \geq n$*

*.3) Si $f$ es excesiva,no negativa ,entonces $(f(X_n), \mathscr{F}_n, P_x)$ forman una supermartingala.*

*.4) Si $f \geq 0$ y $f \in B(A^+)$ entonces:*

$$E_x(\sup_{j\geq n} f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j\geq 0} f(X_0))$$

*.5) Si $f, g$ son funciones excesivas no negativas ,$c, b$ son escalares no negativos entonces $cf + bg$ es excesiva*

*Demostración.* **.1** Simplemente notar que:
$E_x(f(X_1)) = \sum_{j\in E} P(x,j)f(j)$

**.2** Dado $B\ \in\ \mathscr{F}_n$ y $A\ \in \mathscr{B}$. Por unicidad de la esperanza condicional basta ver que:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} f(X_{m-n})\ dP_x(\omega) = \int_B f(X_m)(\omega) dP_x(\omega)$$

Por definición sabemos que:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} \mathbf{1}_{(X_{n-m}\in A)}\ dP_x(\omega) = \int_B \mathbf{1}_{(X_m\in A)(\omega)} dP_x(\omega)$$

$\Rightarrow\ \forall\ \varphi\ \in\ (E, \mathscr{B})$ simple:

$$\int_B E_{X_n(\omega)} \varphi(X_{m-n})\ dP_x(\omega) = \int_B \varphi(X_m)(\omega) dP_x(\omega)$$

Como aproximan a $f$ se concluye la tesis.

**.3** Usando observación anterior $E_x(f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n))(\omega) = E_{X_n(\omega)}(X_1) \leq f(X_n(\omega))$

**.4** Usando la observación 2:

$$\lim_j E_x(\max\{f(X_n), ..., f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = \lim_j E_{X_n(\omega)}(max\{f(X_0), ..., f(X_j)\})$$

Estudiemos la igualdad de la izquierda:
Dado $B\ \in \mathscr{F}_n$:

$$\int_B \lim_j E_x(\max\{f(X_n), ..., f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega)\ dP_x(\omega) =$$

$$\int_B \lim_j \max\{f(X_n), ..., f(X_j)\} dP_x(\omega) = \int_B \sup_{j \geq n}\{f(X_j)\}$$

Como $f \ \in B(A^+)$ y $B$ es génerico podemos usarla unicidad de la esperanza condicional para deducir que:
$\lim_j E_x(\max\{f(X_n), ..., f(X_j)\} \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_x(\sup_{j \geq n}\{f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega)$.
En la igualdad de la derecha podemos usar el teorema de convergencia dominada para deducir que:

$$\lim_j E_{X_n(\omega)}(max\{f(X_0), ..., f(X_j)\}) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j \geq 0} f(X_j))$$

Finalmente concluímos que:

$$E_x(\sup_{j \geq n}\{f(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j \geq 0} f(X_j))$$

.5 Es análogo al caso numerable

□

**Lema 4.1.1.** *Sea $f$ no negativa,finita y excesiva. $\tau \geq \sigma$ tiempos de Markov* $\Rightarrow \ E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq f(X_\sigma)$

*Demostración.* Primero probaremos el caso donde $f$ este acotada:

Dado $c > 0$ ,observemos que $\sigma \wedge \tau$ es un tiempo de parada.

$$\begin{aligned} \text{Luego } E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) &= E_x(f(X_{\tau \wedge c})\mathbf{1}_{\sigma \leq c} \mid \mathscr{F}_\sigma) + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{\sigma > c} \mid \mathscr{F}_\sigma) \\ &\leq f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma \leq c} + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{(\sigma > c)} \mid \mathscr{F}_\sigma) \\ \Rightarrow E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) &\leq \lim_{c \to \infty} f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma \leq c} + E_x(f(X_\tau)\mathbf{1}_{(\sigma > c)} \mid \mathscr{F}_\sigma) \\ &= f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\sigma < \infty} + E_x(f(X_\infty)\mathbf{1}_{\sigma = \infty} \mid \mathscr{F}_\sigma) = * \end{aligned}$$

Observemos que $f(X_\infty)\mathbf{1}_{\sigma = \infty}$ es $\mathscr{F}_\sigma$ medible

$$\Rightarrow * = f(X_\sigma)_{(\sigma < \infty)} + f(X_\infty)_{(\sigma = \infty)} = f(X_\sigma)$$

Si $f$ no está acotada:
Dado $m \in \mathbb{N}$ definimos $f^m(x) := f(x) \wedge m$.
Por convergencia monótona para esperanza condicional (poner en introducción)"

$$\exists \ \lim_m E_x(f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma)$$

Luego por lema de Fatou para esperanza condicional y el teorema del muestreo opcional (recordemos que $\{f(X_n)\}$ es una supermartingala):

$$E_x(\lim_m f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq \liminf_m E_x(f^m(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \leq \lim_m f^m(X_\sigma)$$

Estudiemos estos limites (solo el de la derecha ya que el razonamiento es el mismo):

$$\lim_m f^m(X_\sigma) = \lim_m f^m(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_m f^m(X_\infty)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} =$$

$$f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_m \lim_n f^m(X_n)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} = *$$

Por lema de introducion que permite iterar limite (prolijear y hacer bien referencia)

$$* = f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + \lim_n \lim_m f^m(X_n)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} =$$

$$f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}} + f(X_\sigma)\mathbf{1}_{\{\sigma=\infty\}} = f(X_\sigma)$$

De esta manera concluimos que:

$$E_x(f(X_\tau) \mid \mathscr{F}_\sigma) \le f(X_\sigma)$$

□

**Corolario 4.1.1.** *Bajo las mismas hipótesis:*

$$E_x(f(X_\tau)) \le E_x(f(X_\sigma)) \le f(x)\ \forall\ x \in E$$

**Corolario 4.1.2.** *Si $g$ es excesiva $\Rightarrow \overline{v}(x) = v(x) = g(x)$ (un tiempo de parada (Markov) óptimo sera $\tau = 0$)*

**Lema 4.1.2.** *Sea $f$ no negativa y excesiva, $A$ $\mathscr{F}$-medible y $\sigma_A := \inf\{n \ge 0 : X_n \in A\}$. Entonces la función:*

$$f_A(x) = E_x(f(X_{\sigma_A})).$$

*Es excesiva.*

*Demostración.*

$$E_x(E_{X_1(\omega)}(f(X_{\sigma_A}))) =$$

$$\int_{\sigma_A=0} E_{X_1(\omega)}(f(X_0))dP_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} E_{X_1(\omega)}(f(X_n))dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} E_{X_1(\omega)}(f(X_\infty)dP_x(\omega) =$$

$$= \int_{\sigma_A=0} f(X_1)dP_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} E_x(f(X_n) \mid \mathscr{F}_n)(\omega)dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} E_{X_1(\omega)}(\lim_n f(X_n))dP_x(\omega) \le **$$

Por lema de Fatou :

$$** \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} \liminf_n E_{X_1(\omega)}(f(X_n))dP_x(\omega) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega) + \int_{\sigma_A=\infty} \liminf_n E_x(f(X_n) \mid \mathscr{F}_1)(\omega)dP_x(\omega) \le$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma_A=n} f(X_n)(\omega)dP_x(\omega)+\int_{\sigma_A=\infty}\lim_n f(X_n)(\omega)dP_x(\omega)=$$

$$E_x f(X_{\sigma_A})=f(x)$$

$\square$

**Lema 4.1.3.** *Sea $v$ la miníma función excesiva mayorante de $g$. Entonces:*

$$v(x)=\max\{g(x),E_x(v(X_1))\}$$

*Demostración.* $v$ es mayor a $g$ (por definición) y a $E_x(v(X_1))$ (por excesividad).De esta manera $v(x)\geq \max\{g(x),E_x(v(X_1))$
Por otro lado la función $v_1:=\max\{g(x),E_x(v(X_1))\}$ al ser menor a $v$ cumple :

$$0\leq E_x(v_1(X_1))\leq E_x(v(X_1))\leq v_1(x)$$

$\Rightarrow$ es excesiva. $\Rightarrow$ $v=v_1$. $\square$

**Observación 4.1.2.** *No toda función $f$ que cumpla la ecuación :*
$f(x)=\max\{g(x),E_x(f(X_1))\}$ *es la mínima excesiva mayorante a $g$.*

Por ejemplo: Tomemos $g$ acotada por $c$.
$f(x):=k\geq c$ es sol de la ecuación.

**Lema 4.1.4.** *Dada $f$ integrable, positiva;definimos $Q(f(x)):=\max\{f(x),E_x(f(X_1))\}$*
$\Rightarrow$ $v(x)=\lim_n Q^n(g(x))$ *(tomamos elevar como la composición).*

*Demostración.*

- Existe el límite:
  Observamos que $Q^{n+1}(g(x))=\max\{Q^n(g(x)),E_x(Q^n(g(X_1)))\}\ \Rightarrow Q^{n+1}(g(x))\geq Q^n(g(x))$
  $\Rightarrow$ existe el límite (puede ser infinito).

- Obviamente mayora a $g$.

- Excesividad:

$$\lim_n Q^n(g(x))=\lim_n \max\{Q^{n-1}(g(x)),E_x(Q^{n-1}(g(X_n)))\}\geq$$

$$\lim_n E_x(Q^{n-1}(g(X_1)))=\lim_n\int_\Omega Q^{n-1}(g(X_1))(\omega)\ dP_x(\omega)=*$$

Por teorema de convergencia mónotona de integrales Lebesgue:

$$*=\int_\Omega \lim_n Q^{n-1}(g(X_1)(\omega))\ dP_x(\omega)=$$

$$E_x(\lim_n Q^{n-1}(g(X_1)))\ \text{ quedando probada la excesividad.}$$

- Mínima:
  Si $f$ es otra función excesiva mayorante de $g$ entonces:

$$Q(f(x)) = \text{máx}\{f(x), E_x(f(X_1))\} = f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = Q^n(f(x)) \geq Q^n(g(x)) \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N} \ \Rightarrow f \geq \lim_n Q^n(g(x))$$

$\square$

**Lema 4.1.5.** *Sea $f$ excesiva que satisface la ecuación $f(x) = \text{máx}\{g(x), E_x f(X_1)\}$, $\epsilon \geq 0$ y $\tau_\epsilon = \text{ínf}\{n \geq 0 \ : \ f(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\}$*

$$\Rightarrow E_x(f(X_{\tau_{\epsilon \wedge n}})) = f(x).$$

*Demostración.* Supongamos que vale está firmación:

$$\forall \ m \leq n f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}).$$

Luego tomando $m = n$ queda probado el lema.
Demostraremos la afirmación por inducción:

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow \ P_x(X_0 = x) = 1.$$

Luego $f(x) = E_x(f(X_0)) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq 0\}}) + E_x(f(X_0)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > 0\}})$

H) $f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}})$

T) $f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m+1\}}) + E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m+1\}})$

Dem.:

$$f(x) = E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) =$$

$$E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq m\}}) + E_x(f(X_{\tau_\epsilon})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) - E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}})$$

$\Rightarrow$ Basta ver que: $-E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon = m+1\}}) + E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) = E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m+1\}})$

Esto sucede si y sólo si: $E_x(f(X_m)\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}}) = E_x(f(X_{m+1})\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > m\}})$

$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_m)(\omega) \ dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1})(\omega) \ dP_x(\omega)$$
$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} E_{X_m(\omega)}(f(X_1) \ dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1}) \ dP_x(\omega)$$
$$\Leftrightarrow \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} E_x(f(X_{m+1}) \mid \mathscr{F}_m)(\omega)) \ dP_x(\omega) = \int_{\{\tau_\epsilon > m\}} f(X_{m+1}) \ dP_x(\omega)$$

Lo cual se cumple ya que $\{\tau_\epsilon > m\}$ es $\mathscr{F}_m$-medible $\square$

**Lema 4.1.6.** *Supongamos que* $g \in B(A^+)$ :

*.1)*

$$\overline{\lim_n} v(X_n) = \overline{\lim_n} g(X_n)$$

*.2)*

$$Si\ \tau_\epsilon = \inf\{n \geq 0 : v(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\}$$

*Entonces:*

$$P_x(\overline{\tau}_\epsilon < \infty) = 1$$

*Demostración.* **.**1

$$\overline{\lim}_n v(X_n) \geq \overline{\lim}_n g(X_n) \text{ obviamente ya que } v \text{ mayora a } g$$

Probaremos la otra desigualdad; para ello fijemos $x \in E$ y definamos:

$$\Psi_n := \sup_{j \geq n} g(X_j)\ ,\ \varphi_n = E_x(\Psi_n \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\varphi(X_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\Psi_0)$$

Notemos que las esperanzas y las esperanzas condicionales de estas funciones están bien definidas ya que $g \in B(A^+)$

$$E_x(\sup_{j \geq n} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = E_{X_n(\omega)}(\sup_{j \geq 0} g(X_0))$$

Obviamente $\varphi(x) \geq g(x)$

Además: $E_x(\varphi(X_1)) = E_x(E_{X_1(\omega)}(\Psi_0)) = E_x(\Psi_1) = E_x(E_x(\Psi_1 \mid \mathscr{F}_1)) =$

$$E_x(\Psi_1) \leq E_x(\Psi_0) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow \varphi \geq g$ y $\varphi$ excesiva $\Rightarrow v \leq \varphi$ Fijemos ahora $m$ y tomemos $n \geq m$.Luego:

$$E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) \geq E_x(\Psi_n \mid \mathscr{F}_n) = \varphi_n \geq v(X_n)$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_n E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) \geq \overline{\lim}_n v(X_n)$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ la secuencia $(E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, P_x)$, $n \geq m$ forma una martingala.

Luego por teorema de Lévi:

$$\lim_n E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_n) E_x(\Psi_m \mid \mathscr{F}_\infty) = \Psi_m$$

$$\Rightarrow \Psi_m \geq \overline{\lim}_n v(X_n) \leq \Psi_m$$

Finalmente:

$$\overline{\lim}_n v(X_n) \leq \inf_m \Psi_m = \inf_m sup_{j \geq m} g(X_j) = \overline{\lim}_n g(X_n)$$

.2 Sea $A = \{\omega : \tau_\epsilon(\omega) = \infty\}$; entonces para $\omega \ \in A$ :

$$v(X_n) > g(X_n) + \epsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\text{lím}}_n v(X_n) > \overline{\text{lím}}_n g(X_n)$$

Por la parte anterior sabemos que este conjunto tiene medida nula , por ende $A$ también concluyendo este enunciado.

□

**Definición 4.1.2.** *Dada $f$ medible tal que $\exists\ E_x(f(X_1))\ \forall\ x\ \in\ E$;definimos:*

$$Gf(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(f(X_1))\}$$

**Lema 4.1.7.** *Supongamos que $g \in\ B(A^+)$ y sea $\varphi(x) := E_x(\sup_n g(X_n))$. Entonces:*

*.1)*

$$G^{n+1}(\varphi(x)) \leq G^n(\varphi(x))\ n \in \mathbb{N}$$

*.2)*

$$\overline{v}(x) := \lim_n G^n(\varphi)\ \textit{satisface}\ \overline{v}(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(\overline{v}(X_1))\}$$

*Demostración.* .1 La demostración es por inducción; lo único que se demostrará es el paso base:

$$\begin{aligned}
G(\varphi(x)) &= \text{máx}\{g(x), E_x(E_{X_1(\omega)}(\sup_{j\geq 0} g(X_j)) \\
&= \text{máx}\{g(x), E_x(E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j) \mid \mathscr{F}_1)) \\
&= \text{máx}\{g(x), E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j))\} = \text{máx}\{E_x(g(x)), E_x(\sup_{j\geq 1} g(X_j)) \\
&\leq E_x(\text{máx}\{g(x), \sup_{j\geq 1}(g(X_j))\}) = E_x(\sup_{j\geq 0} g(X_j)) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se basa en la cuarta observación de 4.1.1.

.2

$$G^n(\varphi)(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(G^{n-1}(\varphi(X_1)))\}$$

Tomando límites y usando el teorema de convergencia monótona (notemos que si en un momento se iguala a $g$; a partir de ese siemrpe sera igual) obtenemos la igualdad.

□

De aquí en adelante cuando mencionemos a $\overline{v}(x)$ nos referiremos a este límite y a $\varphi$ como esta función.

**Lema 4.1.8.** *Nuevamente supondremos que $g \in B(A^+)$.*

$$\Rightarrow \overline{\lim_n} \overline{v}(X_n) = \overline{\lim_n} g(X_n) \ P_x\text{-}ctp. \ \forall x \in E$$

*Demostración.*

$$\overline{\lim_n} \overline{v}(X_n) \geq \overline{\lim_n} g(X_n) \text{ ya que v es mayor a g}$$

Por otro lado tomando $m \leq n$:

$$\overline{v}(X_n) \leq G^n(\varphi(X_n)) \leq \varphi(x) = E_{X_n}(\sup_{j\geq 0} g(X_j)) = E_x(\sup_{j\geq n} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n) \leq$$

$E_x(\sup_{j\geq m} g(X_j) \mid \mathscr{F}_n)$. Continuamos exactamente (sustituyendo $v$ por $\overline{v}$) como el primer item del lema 4.1.6 y concluimos la otra desigualdad.

□

**Corolario 4.1.3.** *Si $g \in B(A^+)$ ,sea $\epsilon > 0$ y*

$$\overline{\tau}_\epsilon = \inf\{n \geq 0 : \overline{v}(X_n) \leq g(X_n) + \epsilon\}$$

*Entonces:*

$$P_x(\overline{\tau}_\epsilon < \infty) = 1$$

*(Se deduce como el segundo item del lema 4.1.6)*

De ahora en adelante cuando mencionemos a $\overline{\tau}_\epsilon$ estará definido como en este corolario .

**Lema 4.1.9.** *Supondremos que $g \in B(A^+)$*
*$\forall \ \epsilon > 0$:*

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) \ y \ \overline{v}(x) = v(x)$$

*Demostración.* Por lema 4.1.5

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) + E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon > n})$$

Tomando límite en $n$:

$$\overline{v}(x) = \lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})) = \lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) + E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon > n})$$

Estudiemos el primer término de la derecha:
Por el corolario anterior $\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}$ converge puntualmente cuando $n \to \infty$
Luego por el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_n E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})\mathbf{1}_{\overline{\tau}_\epsilon \leq n}) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon}))$$

Ahora probaremos que el segundo término converge a 0 concluyendo el lema:
Para esto basta ver que $\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})$ es uniformemente integrable.Notemos que

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \sup_j g(X_j) \geq \overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon \wedge n})$ y esta variable tiene esperanza acotada concluyendola integrabilidad uniforme.
Queda probar que $\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon}))$:
Obviamente $\overline{v} \geq v$.
Por otro lado:

$$\overline{v}(x) = E_x(\overline{v}(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) \leq$$

$$E_x(g(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) + \epsilon \leq E_x(v(X_{\overline{\tau}_\epsilon})) + \epsilon \leq v(x) + \epsilon$$

Como $\epsilon$ es arbitrario se concluye la desigualdad.

□

**Corolario 4.1.4.** *Bajo las mismas hipótesis:*

$$v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon}))$$

### 4.1.2. Conclusiones:

Con la batería de lemas de esta sección podemos sacar algunas ideas para ayudarnos en el problema de parada óptima:

- El lema 4.1.1 es un resultado intuitivo de las supermartingalas y tiene como corolario interesante que el problema de parada óptima es trivial en el caso de que $g$ sea excesiva (lo cual es razonable ya que excesividad implica menor valor en promedio a futuro).
- El lema 4.1.3 nos da una ecuación necesaria que debe cumplir $v$.
- El lema 4.1.5 nos habla de una zona donde no hay pérdida de ganancia (valor de $g$; hablando en promedios).
- De los demás lemas obtenemos información del comportamiento límite de la función de ganancia.

## 4.2. Caracterización del pago y los tiempos de parada

En está subsección $g$ estará en las mismas hipótesis ,$Q$ es el operador definido anteriormente y los objetivos son los mismos mencionados en los preliminares.

**Teorema 4.2.1.** *Bajo estas condiciones se podemos dar las siguientes propiedades de s:*

*1) $s(x)$ es la mínima función excesiva mayorante a $g(x)$.*

*2) $s(x) = \overline{s}(x)$*

*3) $s(x) = \text{máx}\{g(x), E_x(s(X_1))\}$*

*4) Dado $b \geq 0$; definimos $g^b(x) := g(x) \wedge b$. Entonces:*

$$s(x) = \lim_n Q^n(g)(x) = \lim_b \lim_n Q^n(g^b(x))$$

*Demostración.*

1) Por corolario 4.1.1 $\forall$ $\tau$ tiempo de Markov:

$$v(x) \geq E_x(v(X_\tau)) \geq E_x(g(X_\tau))$$

$$\Rightarrow v(x) \geq \overline{s}(x) \geq s(x)$$

Para probar la otra desigualdad asumiremos primero que $g \in B(A^+)$.
Por corolario 4.1.9 $v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon}))$.Luego:

$$v(x) = E_x(v(X_{\tau_\epsilon})) \leq E_x(g(X_{\tau_\epsilon})) + \epsilon \leq s(x) + \epsilon$$

Como $\epsilon$ es génerico se concluye la desigualdad (y por ende la igualdad).
Caso general:
Definimos $s^b(x) := \sup_{\tau \in \mathscr{R}}(E_x(g^b(X_\tau))) = v^b(x)$
$v^b(x)$ crece cuando $b$ crece; podemos definir $v^*(x) := \lim_b v^b(x)$. Probaremos que $v^* = v$: Obviamente mayora a $g$ (comparo con $g^b$ y tomo límite).
Excesividad (usaremos el Teorema de Convergencia Mónotona):

$$E_x(v^*(X_1)) = \lim_b E_x(v^b(X_1)) \leq \lim_b v^b(x) = v^*(x)$$

Es minimal:
Sea $f$ excesiva mayorante a $g$.Entonces $f \geq g^b \ \Rightarrow f \geq v^b$.

$$\Rightarrow f \geq v^* \ \Rightarrow v = v_* \leq s$$

2) Notemos que en el item anterior probamos que $s = v \geq \overline{s} \geq s$.

3) Se desprende del corolario 4.1.3

4) Se desprende del lema 4.1.4 y de la demostración del primer item de este teorema.

□

**Observación 4.2.1.**

*Dado* $\overline{\tau} \in \overline{\mathscr{R}}$ *tal que* $f(x) := E_x(g(X_\tau))$ *es una función excesiva que mayora a* $g$.

$\Rightarrow f = \overline{s}$ *por como está definida* $f$ *y por ser* $s$ *la mínima excesiva mayorante a* $g$.

$\Rightarrow \overline{\tau}$ *es un tiempo de Markov óptimo.*

**Observación 4.2.2.** *Notemos que de la demostración del teorema 4.2.1 se puede concluir que los tiempos de Markov de la forma* $\tau_\epsilon$ *permiten aproximar por lo menos con error* $\epsilon$ *a* $v$. *Por ende definiendo* $\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}})$ *como los tiempos de parada (Markov) de llegada a un boreliano concluimos que:*

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathscr{C}} E_x(g(X_\tau)) = \sup_{\tau \in \overline{\mathscr{C}}} (E_x(g(X_\tau)))$$

**Teorema 4.2.2.** *Supongamos que* $g \in B(A^+)$*.Entonces:*

*1)*

$$\tau_0 := \text{ínf}\{n \geq 0 : v(X_n) = g(X_n)\} \text{ es un tiempo óptimo de Markov.}$$

*(Comparar con los resultados de los capitulos anteriores).*

*2) Si* $\tau_0$ *es un tiempo de parada* $\Rightarrow$ *es óptimo.*

*Demostración.* 1) Aplicando el lema 4.1.5:

$$v(x) = E_x(v(X_{\tau_0 \wedge n})) =$$

$$E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(v(X_n)\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(v(X_n)\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq *$$

Como $E_{X_n}(\sup_j g(X_j)) \geq E_{X_n}(g(X_\tau)) \ \forall \ \tau \in \overline{\mathscr{R}}$

$$* \, E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(E_{X_n}(\sup_j(g(X_j)))\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(E_{X_n}(\sup_j(g(X_j)))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq$$

$$E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < n\}}) + E_x(\sup_j(g(X_j))\mathbf{1}_{\{n \leq \tau_0 < \infty\}}) + E_x(\sup_{j \geq n}(g(X_j))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) \leq **$$

Como $g \in B(A^+)$ podemos usar el lema de Fatou cuando $n \to \infty$:

$$v(x) \leq E_x(v(X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}}) + E_x(\overline{\text{lím}}_n(g(X_j))\mathbf{1}_{\{\tau_0 = \infty\}}) = E_x(g(X_{\tau_0}))$$

Por ende $\tau_0$ es óptimo (ya que por teorema 4.2.1 $\overline{s}(x) = v(x)$.

2) De la prueba anterior obtuvimos que:

$$s(x) = v(x) \leq = E_x(g(X_{\tau_0}))$$

Por 4.2.1 $s(x) = v(x) \Rightarrow \ \tau_0$ es óptimo.

□

## 4.3. Ejemplos:

### 4.3.1. $g \notin B(A^+)$ con cadena no homogenea :

El siguiente ejemplo es de $g \geq 0$,con esperanzas definidas en la cadena y $g(X_\infty) = 0$ (como no es homogenea decimos que el proceso comienza en cero y $s$ es constante):

- Consieraremos que $\{X_n\}$ es una cadena independiente. Estudiamos el caso en que la cadena parte desde 0 (los demás son análogos) y la cadena empieza en $X_0 = 0$
- $P(X_n = n) = 1 - e^{\frac{-1}{i^2}}$, $P(X_n = 0) = e^{\frac{-1}{i^2}}$
- $g = id$

Analicemos el problema en este caso:

- Esperanza:

$$\sup_n(E(X_n)) = \sup_{n>0}(1 - e^{\frac{-1}{n^2}}) = 1 - e^{-1}$$

.Límite:

$$\text{Observemos que } \lim_n(g(X_n)) = 0, \;\; P_x\text{-ctp}$$

.$g \notin B(A^+)$ :

$$\text{Sea } Y := \sup_n(X_n) \;\Rightarrow\; F_Y(x \leq c) = P(X_i \leq c \;\forall\; i) = \Pi_{i=[c]+1}^{\infty}(e^{\frac{-1}{i^2}})$$

$$\Rightarrow\; F_Y(x \leq c) = e^{\sum_{i=[c]+1}^{\infty}(\frac{-1}{i^2})}$$

$$\text{Luego } \int_1^\infty 1 - e^{\sum_{i=[c]+1}^{\infty}(\frac{-1}{i^2})}\; dc \geq \int_1^\infty 1 - e^{\frac{-1}{c}}\; dc = \infty$$

.$s = \infty$

$$\text{Sea } \tau := \text{ínf}\{m;\; X_m > 0\}$$

$$\Rightarrow E(X_\tau) = \sum_{i=1}^{\infty}(\Pi_{j=0}^{i-1} e^{\frac{-1}{j^2}})(1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i \geq \sum_{i=1}^{\infty}(\Pi_{j=0}^{\infty} e^{\frac{-1}{j^2}})(1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i$$

$$\text{Notemos que } (1 - e^{\frac{-1}{i^2}})i \;\sim\; \frac{1}{i} \;\Rightarrow\; \text{La serie diverge.}$$

$$\Rightarrow E(X_\tau) = \infty$$

### 4.3.2. $g$ no positiva:

$$\{Y_n\} \text{ i.i.d}$$

$$g(x) = x;\ X_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n;\ P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n);\ \mathscr{F}_\infty = \sigma(X_0, ...)$$

Notemos que $g(x) = E_x(g(X_1))$. Entonces:

- $Q(g)(x) = x$
- La mínima función mayorante excesiva a $g$ es $g$

Por otro lado $s(x) = \infty$. Dem.: Sea $\tau_k = \text{ínf}\{n \geq 0 : g(x) \geq k\}$.
Por 1.1.1 $P_x(\{\omega;\ \exists\ n \geq 0\ ; X_n \geq k\}) = 1$
$\Rightarrow\ P_x(\overline{\text{lím}}_n X_n = \infty) = 1\ \Rightarrow\ P(\tau_k < \infty) = 1$
$\Rightarrow s(x) \geq k$

### 4.3.3. Paseo al azar:

Sea $\{Y_n\}$ i.i.d tal que $P(Y_n = 1) = p;\ P(Y_n = -1) = 1 - p = q$

$$g(x) = x\text{: } X_n = Y_0 + Y_1 + ... + Y_n$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n);\ \mathscr{F}_\infty = \sigma(X_0, ...)$$

Notemos primero que en el caso $p > q$ $\tau^* = \infty$ es óptimo por lo visto en 1.1.1.Por ende estudiaremos el otro caso:
Dado $c \in \mathscr{R}$ :

$$P_x(\sup_n g(X_n) < c) = P_x(\text{nunca llegar a } c) = 1 - (\frac{p}{1-p})^{c-x}$$

$$\Rightarrow E_x(\sup_n(g(X_n))) = \int_0^\infty 1 - (1 - (\frac{p}{1-p})^{c-x})\ dP_x(c) < \infty$$

$\Rightarrow\ g\ \in B(A^+)$ Encontraremos una función como en la observación 4.2.1.
Definimos $\tau_\gamma = \text{ínf}\{n \geq 0; X_n \geq \gamma\}$(notemos que es un tiempo de llegada a un boreliano).
Luego definimos $p_\gamma(x) := P_x(\tau_\gamma < \infty)$. Entonces:

$$P_x(\tau_\gamma < \infty) = \begin{cases} (\frac{p}{q})^{\gamma - x} & si \quad x \leq \gamma \\ 1 & si \quad x > \gamma \end{cases}$$

Notemos primero que por el lema de Borel-Cantelli $g(X_\infty) = 0$ $P_x$-ctp.
Estudiemos $E_x(g(X_{\tau_\gamma}))$ :

$.x < \gamma > 0$

$$E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \sum_0^\infty \int_{\tau_\gamma} g(X_n)(\omega)\ dP_x(\omega) = \sum_0^\infty \int_{\tau_\epsilon} \gamma\ dP_x(\omega) = \gamma(\frac{p}{q})^{\gamma - x}$$

$.x \geq \gamma > 0$

$$\tau_\epsilon = 0\ P_x\text{-ctp} \ \Rightarrow\ E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \int_\Omega g(X_0)\ dP_x(\omega) = x$$

$0 \geq \gamma$

Como $g(X_n(\omega)) = 0$ si $\omega\ \in \{\tau_\gamma = n\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ g(X_{\tau_\gamma}) = 0\ P_x - \text{ctp}$.

Entonces:

$$f_\gamma(x) := E_x(g(X_{\tau_\gamma})) = \begin{cases} \gamma(\frac{p}{q})^{\gamma - x} & si \quad x \leq \gamma \\ \\ x & si \quad x > \gamma \end{cases}$$

Sea $f^*_\gamma(x) := \text{máx}_\gamma\, f_\gamma(x)$

$$\Rightarrow\ f^*_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma^*(\frac{p}{q})^{\gamma^* - x} & si \quad x \leq \gamma^* \\ \\ x & si \quad x > \gamma^* \end{cases}$$

Probaremos que $f^*$ está en las hipótesis de la observación 4.2.1:

$.f^* \geq g$:

Tomando $\gamma = x$: $E_x(g(X_{\tau_x})) = g(x)$

.Es excesiva:

Notemos primero que $E_x(f^*(X_1)) = \int_{X_1 \leq \gamma^*} \gamma^*(\dfrac{p}{q})^{\gamma^* - X_1(\omega)}\ dP_x(\omega) + \int_{X_1 > \gamma^*} X_1(\omega)\, dP_x(\omega)$

$.\ \gamma^* \leq x - 1$

$$P^x(X_1 \geq \gamma^*) = 1\ \Rightarrow\ E_x(f^*(X_1)) = \int_\Omega X_1(\omega) dP_x(\omega) =$$

$$(x+1)p + (x-1)(1-p) = xp + p + x - px - 1 + p = x + 2p - 1 \leq x = f^*(x)$$

$.\gamma^* \geq x + 1$

$$P^x(X_1 \geq \gamma^*) = 0\ \Rightarrow\ E_x(f^*(X_1)) = \int_\Omega \gamma^*(\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - X_1(\omega)}(\omega) dP_x(\omega) =$$

$$\gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - x - 1}\ p + \gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - x + 1}\ (1-p) = \gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - x}\ ((\frac{1-p}{p})p + \frac{p}{1-p}(1-p)) =$$

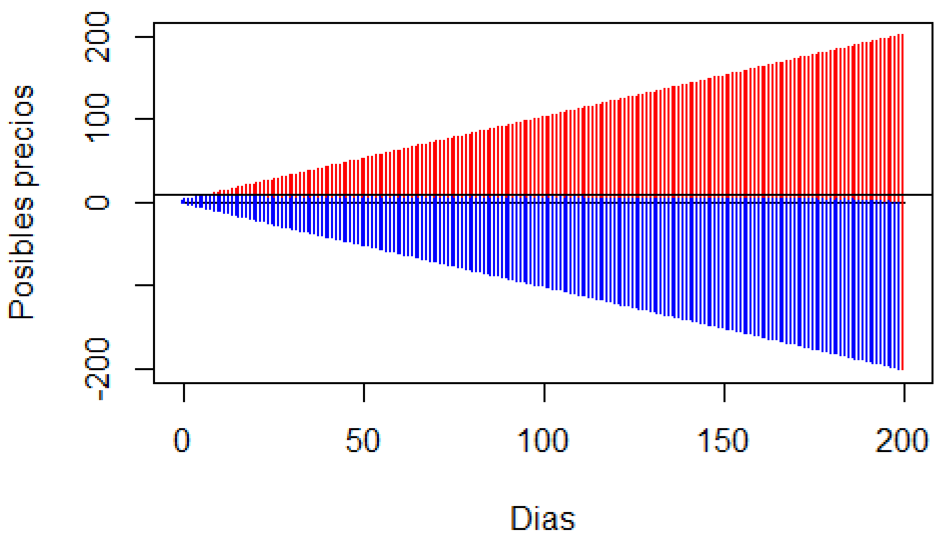
$$\gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - x}\ (1 - p + p) = \gamma^*\ (\frac{p}{1-p})^{\gamma^* - x} = f^*(x)$$

$.\gamma^* = x$

$$E_x(f^*(X_1)) = \gamma^* \, (\frac{p}{1-p})^{\gamma^*-x+1} \, (1-p)+xp = x(\frac{p}{1-p})p+xp = 2xp < x = f^*(x)$$

$.f^*(x) = E_x(g(X_{\tau_{\gamma^*}}))$: Ya visto.

De esta manera $f^* = \overline{s} = s$. Observemos que $P_x(\gamma^* = \infty) > 0 \Rightarrow$ no es tiempo de parada. En el caso $p = \frac{e^{\frac{-1}{3}}}{1+e^{\frac{-1}{3}}}$ y $x = 0$ comparemos el caso de horizonte finito . Para ello notemos primero que en este caso $f^*_{\gamma}(0) = 3$ . Luego observemos como queda la solución del problema de parada óptima para el caso de $N = 200$ y pongamos en el mismo gráfico (en negro) la recta horizontal de altura 3:




Se podría intuir de este ejemplo que la solución al problema se puede aproximar desde el caso finito. Esto se verá más a fondo el la sección **4.4**

las frases empiezan preferentemente con palabras

### 4.3.4. $g \notin B(A^+)$ con cadena homogenea :

Sea $\{Y_n$ tal que: $P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1) = (e+1)^{-1}$

Nuestra cadena de Markov será $\{X_n\}$ con $X_n := e^{Y_0+\ldots+Y_n}$.
Con $g(x) = x$

$.\tau_0 = 0$ es óptimo:

Por corolario 4.1.2 basta ver que $g$es excesiva:

$$g \text{ es excesiva } \Leftrightarrow E_x(g(X_1)) \leq x \Leftrightarrow ((e+1)^{-1})e+(1-((e+1)^{-1}))e^{-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (\frac{e}{e+1}) + (\frac{e+1-1}{e+1})\frac{1}{e} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e+1}{e+1} \leq 1$$

$.g \notin B(A^+)$

$$\text{Sean } Z := \sup_n X_n,\ c > 0 \Rightarrow P_x(Y \leq c) = P_x(\cap_{n=0}^{\infty} e^{\sum_{i=0}^{n} Y_i} \leq c) =$$

$$P_x(\cap_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} Y_i \leq \log(c)) = \text{Poner como nota al pie} = (\frac{(e+1)^{-1}}{1-(e+1)^{-1}})^{\log(c)-\log(x)} =$$

$$(\frac{1}{e})^{\log(c)-\log(x)} = \frac{x}{c} \Rightarrow E_x(g(X_1)) = \int_0^{\infty} 1 - (1 - \frac{x}{c}) = \infty$$

## 4.4. Aproximación de horizonte finito a infinito:

Usaremos la misma definición de este capítulo para $\overline{s}, s$ y $G$ y $g$ estará en las mismas hipotesis.

**Definición 4.4.1.**

- $$\tau_n^* := \text{mín}\{0 \leq m : s_{n-m}(X_m) = g(X_m)\} \wedge n.$$

- $$s_n(x) = G^n(g(x))$$

**Teorema 4.4.1.** *Si $g \in B(A^+)$:*

*i) Las ganancias óptimas de los tres problemas coinciden:*

$$\overline{s}(x) = s(x) = s^*(x),$$

*ii)*

$$\tau^* = \lim_n \tau_n^*$$

*es óptimo.*

*iii)*

*Si $\tau^*$ es tiempo de parada; entonces es óptimo.*

*iv)*

$$\tau^* = \text{ínf}\{n \geq 0 : \ s^*(X_n) = g(X_n)\}$$

*Demostración.* i) se desprende del teorema 4.1.2

ii)

En primer lugar observemos que si $\omega$ es tal que $\tau^*(\omega) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(X_{\tau_n^*(\omega)}) = g(X_{\tau^*(\omega)})$

Luego usando el lema de Fatou: $s(x) = \lim_n s_n(x) = \lim_n E_x(g(X_{\tau_n^*})) \leq E_x(\overline{\text{lím}}_n g(X_{\tau_n^*}))$

$= E_x(\overline{\text{lím}}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*<\infty}) + E_x(\overline{\text{lím}}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*=\infty}) = E_x(\overline{\text{lím}}_n g(X_{\tau_n^*})\mathbf{1}_{\tau^*<\infty}) + E_x(\overline{\text{lím}}_n g(X_n)\mathbf{1}_{\tau^*=\infty})$

$= E_x(g(X_{\tau^*}))$

iii) Es corolario del teorema 4.2.2

iv)

Definamos $\tau = \text{ínf}\{n \geq 0 : s^*(X_n) = g(X_n)\}$ y $\omega$ tal que $\tau(\omega) = n$

$$\Rightarrow g(X_i(\omega)) < s^*(X_i(\omega)) \ \forall i \in \{0, ..., n-1\}$$

$\Rightarrow$ Para $N$ suficientemente grande: $g(X_i)(\omega) < s_{N-i}(X_i)(\omega)$

$$\Rightarrow \tau_N^*(\omega) \geq n \;\Rightarrow\; \lim_N \tau_N^*(\omega) \geq n \;\Rightarrow\; \tau^*(\omega) \geq \tau(\omega)$$

Por otro lado si $\tau(\omega) = \infty \;\Rightarrow g(X_i) < s^*(X_i)\ \forall i \geq 0$

$\Rightarrow\; \tau_N^*(\omega) > n$ para $N$ suficientemente grande.

$$\Rightarrow \tau^*(\omega) = \lim_N \tau_N^*(\omega) > n \;\Rightarrow \tau^*(\omega) = \infty \Rightarrow \tau \leq \tau^*$$

La otra desiguladad es trivil ya $s^* \geq s_n$

□

**Observación 4.4.1.** *$G^N(g)$ es la envolvente de Snell para el caso de horizonte finito $N$.*

**Ejemplo 4.4.1** (Necesidad que $g \in B(A^+)$)**.** *Tomemos $g(x) = -x$ , $E = \{0, 2, 2^2, 2^3, ...\}$ $\{Y_n\}$ Bernoulli independientes de probabilidad $\frac{1}{2}$ y $X_{n+1} = 2Y_{n+1}X_n$.*
*Por un lado notemos que $g$ es excesiva; por ende si truncamos la cadena $\tau = 0$ es óptimo.*
*Por otro lado considerando que $\tau := \{\inf n \geq 0 : Y_n = 0\}$ tiene probabilidad $1$ de ser finito $\Rightarrow E_x(g(X_\tau)) > g(x)\ \forall x > 0$.*

# Bibliografía

[1] Jacod. Stable convergence

[2] BDT