

TRABAJO MONOGRÁFICO

Puntos fijos de acciones por grupos abelianos en la esfera.

Un teorema sobre flujos, de Lima

Un teorema sobre difeomorfismos, de Bonatti

Por: Andrés Bonilla

Orientador: Matilde Martínez

**Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias**

Agosto de 2018



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

TRABAJO MONOGRÁFICO

Puntos fijos de acciones por grupos
abelianos en la esfera.

Un teorema sobre flujos, de Lima

Un teorema sobre difeomorfismos, de Bonatti

Por: Andrés Bonilla

Orientador: Matilde Martínez

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Agosto de 2018

Agradecimientos

Paul Erdős decía que la matemática es una actividad social. Tan cargadas de verdad están estas palabras que este trabajo monográfico estaría incompleto si no mencionase a quienes me han acompañado a hacerlo.

Este documento es el producto tangible de mi trabajo con Matilde, mi tutora, que por mucho que me guste palidece en comparación al trabajo personal que he hecho con su ayuda. Por trabajo personal me refiero a lo que he crecido como estudiante y como persona.

La licenciatura ha sido una experiencia muy rica. Mas que eso, semestre a semestre, ha sido un prueba constante. Una prueba de mi resiliencia, una prueba a mi amor por la matemática y una prueba a mi capacidad de trabajar con mis compañeros. Por eso quiero agradecer a mis profesores, a aquellos que compartieron conmigo su pasión por la matemática sin olvidarse que yo estaba dando mis primeros pasos en esta disciplina.

Mariella Nassi fue mi profesora de taller de ciencias experimentales cuando entré al liceo, desde ahí ella se tomo tiempo para estudiar conmigo y prepararme para las olimpiadas de química. No hay muchos profesores en el liceo que crean en sus alumnos. Mariella adaptó su forma de enseñar a mi manera de aprender. Y por eso estoy agradecido. Mi pasión por la matemática empezó en el 2011, en un salón del IAVA, mi profesora era Adriana Machense, quien continua ayudándome a estudiar matemática hasta el día de hoy. Concepción Rey, mi profesora de filosofía en el 2012, me ayudo a entender lo artificial de la separación entre la ciencia y la filosofía. Es una de las personas que dejó la mayor impresión en mi forma de pensar.

No puedo dejar de agradecer a mis amigos, cómplices de mis logros, que me han animado y me han acompañado a encontrarme a mi mismo. Muy especialmente a Lucia, Nozomi, Fefnir, Rose, Gonzalo, Ana, Jorge, Favio y Mauro.

Quiero terminar estos agradecimientos reconociendo el sacrificio que mi madre ha hecho por mi todos estos años, ella ha hecho por mi mas de lo que es razonable pedir. Fue ella quien cultivó mi curiosidad y fue ella que estuvo ahí cada vez que algo salía mal.

Gracias.

Resumen

En este trabajo se estudian las demostraciones de los dos siguientes teoremas de punto fijo para ciertas acciones de grupos, y los temas de topología y sistemas dinámicos necesarios para abordarlos;

Teorema (Elon L. Lima). *Sean X e Y campos de vectores de clase C^k , $k \geq 1$, en la esfera S^2 conmutativos. Entonces existe un punto $p \in S^2$ tal que $X(p) = Y(p) = 0$*

Teorema (Christian Bonatti). *Sean f y g dos difeomorfismos conmutativos de clase C^1 en la esfera S^2 , suficientemente cercanos al mapa identidad. Entonces f y g tienen un punto fijo en común.*

Abstract

In this work we present the background material and proof of the following theorems:

Theorem (Elon L. Lima). *Let X, Y be commuting vector fields of class $C^k, k \geq 1$, on the sphere S^2 . Then, there exists a point $p \in S^2$ such that $X(p) = Y(p) = 0$.*

Theorem (Christian Bonatti). *Let f and g be commuting diffeomorphisms of the sphere S^2 , C^1 -close to the identity; then they have a common fixed point.*

Índice general

1. Nociones básicas	6
1.1. Notación y definiciones previas	6
1.2. Puntos fijos por acciones de \mathbb{R} en la esfera.	9
2. Acciones continuas de \mathbb{R}^2 en la esfera y otras variedades de dimensión 2.	12
2.1. Definición de conmutatividad y ejemplos	12
2.2. Puntos fijos por acciones de \mathbb{R}^2 en la esfera.	14
2.3. ¿Por qué la esfera?	17
3. Difeomorfismos conmutativos en la esfera	19
3.1. Ejemplos, definición y problema	20
3.2. Propiedades locales de los difeomorfismos cercanos a la identidad	21
3.3. Teorema y demostración	27
A. Integración de campos vectoriales en variedades	29
B. Teorema de Poincaré-Bendixson continuo	31

Prefacio

La esfera es un lugar particularmente cómodo para hacer dinámica, es compacta y simplemente conexa. Si bien es verdad que en este trabajo monográfico se hace mucho énfasis en trabajar sobre la esfera, los argumentos que daremos nos llevan a una perspectiva interesante para el estudio de sistemas dinámicos en superficies. Lo cual está respaldado por el hecho de que estos argumentos fueron germinales para el estudio de preguntas similares en otras superficies.

Los puntos fijos son las órbitas más simples, por lo cual es natural empezar por ahí nuestro estudio de las órbitas de un sistema. El teorema de Poincaré–Hopf nos da una relación entre la característica de Euler de una superficie y la existencia de ceros en los campos vectoriales definidos sobre ella. De acá se deriva que toda acción de \mathbb{R} en la esfera tiene un punto fijo. Esto también puede ser probado usando el teorema de Poincaré–Bendixson pero lo interesante del argumento anterior es que solo depende de la característica de Euler, lo cual lo hace igualmente válido para todas las superficies compactas orientables de género distinto de 1. Luego veremos un ejemplo en donde el resultado no es válido para género 1.

Asimismo es falso que la acción de los enteros sobre la esfera necesariamente tenga un punto fijo, basta observar el mapa antípoda. Sin embargo si tomamos un homeomorfismo que diste menos de 2 del mapa identidad éste ha de tener un punto fijo [Ver Proposición 1.21].

En este trabajo monográfico estudiamos los puntos fijos de acciones de \mathbb{R}^2 continuas y de \mathbb{Z}^2 diferenciables. Para el caso continuo utilizamos el teorema de Poincaré–Bendixson en su versión continua. No obstante esa forma geométrica de ver los flujos se traduce al caso discreto, cuando estudiamos acciones de \mathbb{Z}^2

diferenciables. Christian Bonatti en 1989 publica *Un Point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de S^2* donde se encuentra el teorema central que estudia esta monografía;

Teorema (Christian Bonatti). *Sean f y g dos difeomorfismos conmutativos de clase C^1 en la esfera S^2 , tal que $\|f - \mathbb{1}\|_1 < 1/60$ y $\|g - \mathbb{1}\|_1 < 1/60$. Entonces f y g tienen un punto fijo en común.*

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1. Notación y definiciones previas

Las siguientes definiciones tienen el objetivo de fijar notación y evitar confusiones con respecto a los espacios topológicos sobre los cuales trabajaremos.

Definición 1.1. El círculo S^1 es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ con la topología relativa.

La esfera $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ con la topología relativa.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico. Llamamos disco abierto a un abierto $D \subset X$ si existe un homeomorfismo entre D y \mathbb{R}^2 . Llamamos disco compacto a $D' \subset X$ homeomorfo a la bola cerrada $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 1.3. Denotamos por $C^0(S^2, \mathbb{R}^3)$ al conjunto de las funciones continuas de la esfera en \mathbb{R}^3 y $C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ al conjunto de las funciones de clase C^1 de la esfera en \mathbb{R}^3 . Donde $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 si para todo $x \in S^2$ existe un abierto U de \mathbb{R}^3 con $x \in U$ y una función de clase C^1 $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que coincide con f en $U \cap S^2$.

Nuestro objetivo es poder medir la norma de funciones en la esfera y calcular distancias entre difeomorfismos en la esfera, pero si nos restringimos a funciones de la esfera en sí misma nuestra norma C^0 sería siempre 1, lo cual no es muy útil. Pero más importante aún, la suma de dos funciones de la esfera en la esfera no es una función de la esfera en la esfera.

Definición 1.4. Si $\varphi \in C^0(S^2, \mathbb{R}^3)$ (i.e. φ es continua de la esfera en \mathbb{R}^3) definimos la norma C^0 de φ como

$$\|\varphi\|_0 = \max_{x \in S^2} \|\varphi(x)\|$$

y análogamente si $\varphi \in C^1(S^2, \mathbb{R}^3)$ (i.e. φ es de clase C^1 de la esfera en \mathbb{R}^3) definimos la norma C^1 de φ como

$$\|\varphi\|_1 = \max_{x \in S^2} (\|\varphi(x)\| + \max_{v \in T_x(S^2), \|v\|=1} \|d_x \varphi(v)\|).$$

Definición 1.5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , $X : M \rightarrow TM$ es un campo diferenciable de clase C^k si es diferenciable como función de M en TM , considerando a TM con la estructura diferenciable del fibrado tangente de una variedad, y $X(p) \in T_p M \forall p \in M$.

Definición 1.6. Un flujo es un mapa continuo $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ tal que:

1. $\varphi(0, \cdot) = \mathbb{1}_X$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x), \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

Una forma útil para pensar en flujos es definir para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $\varphi_t : X \rightarrow X$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, de donde se sigue $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t, \forall s, t \in \mathbb{R}$. Como $\varphi_0 = \varphi_{t-t} = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$ tenemos que φ_t admite una inversa continua para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo cual φ_t es siempre un homeomorfismo.

Definición 1.7. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo; definimos la *órbita* de $x \in X$ como $\mathcal{O}(x, \varphi) := \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$.

Decimos que $p \in X$ es un *punto fijo* de φ si $\varphi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo $\mathcal{O}(p, \varphi) = \{p\}$. Llamamos $Fix(\varphi)$ al conjunto de puntos fijos por φ .

Si existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$ entonces decimos que la órbita de p por φ es *periódica* y llamamos *periodo* de p a $\inf\{t > 0 : \varphi_t(p) = p\}$.

Definición 1.8. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ un flujo y $x \in X$, definimos el ω -límite de x como

$$\omega(x, \varphi) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y\}$$

Análogamente, definimos el α -límite de x como

$$\alpha(x, \varphi) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y\}$$

Notemos que si x tiene órbita periódica entonces $\alpha(x, \varphi) = \omega(x, \varphi) = \mathcal{O}(x, \varphi)$.

En general podemos definir la acción de un grupo aditivo sobre un conjunto X de la siguiente manera.

Definición 1.9. Sea G un grupo aditivo y X un conjunto. Una *acción* de G en X es un mapa $\psi : G \times X \rightarrow X$ tal que

1. $\psi(0, \cdot) = \mathbb{1}_X$, donde 0 es el elemento neutro de G .
2. $\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(s + t, x)$, $\forall s, t \in G, \forall x \in X$

Si X es un espacio topológico y G es un grupo topológico, podemos pedir que la acción ψ sea continua. En cuyo caso ψ_g , definida como $\psi(g, \cdot)$, es un homeomorfismo para cada $g \in G$. Mas aún si G es un grupo de Lie y X es una variedad diferenciable entonces podemos pedir que ψ sea diferenciable lo cual, análogo al caso anterior, nos da que ψ_g es un difeomorfismo para cada $g \in G$.

Las nociones de órbita, ω -límite y α -límite también nos interesan en el caso de la dinámica discreta. Es decir cuando estudiamos la acción de los enteros sobre un espacio topológico.

Definición 1.10. Sea $h : X \rightarrow X$ un homeomorfismo y $x \in X$, definimos el ω -límite de x como

$$\omega(x, h) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } h^{t_k}(x) \rightarrow y\}$$

Análogamente, definimos el α -límite de x como

$$\alpha(x, h) = \{y \in X : \exists t_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } h^{t_k}(x) \rightarrow y\}$$

Definición 1.11. Dado un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ decimos que x es recurrente para el futuro (resp. para el pasado) si $x \in \omega(x, h)$ (resp. $x \in \alpha(x, h)$).

Definición 1.12. Sea $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo y un conjunto cerrado invariante $C \subset M$, decimos que C es *minimal* si no contiene cerrados invariantes propios.

Proposición 1.13. $C \subset M$ es minimal para $f : M \rightarrow M$ si y solo si $\overline{\mathcal{O}(f, x)} = C, \forall x \in C$

Demostración. Sea $x \in G$ observamos que $\overline{\mathcal{O}(f, x)}$ es cerrado invariante luego por ser G minimal tenemos $G = \overline{\mathcal{O}(f, x)}$.

Ahora queremos probar que G es minimal, sea $C \subset G$ cerrado invariante no vacío. Sea $x \in C$, se cumple que $G = \overline{\mathcal{O}(f, x)} \subset C \subset G$. Lo cual muestra que G es cerrado invariante que no contiene ningún cerrado invariante propio.

Quod erat demonstrandum

1.2. Puntos fijos por acciones de \mathbb{R} en la esfera.

Ahora nos centraremos en una de las herramientas más importantes para la demostración del teorema de [Lima], más aún la demostración de éste teorema presenta ideas que estarán presentes en ambos papers. Su versión mas común, con hipótesis de que el flujo sea inducido por un campo de clase C^1 , no requiere introducción. Y puede encontrarse en cualquier curso de sistemas dinámicos, aún así damos una referencia [KAT].

Pero el resultado que nosotros vamos a probar sólo asume hipótesis de continuidad para el flujo y es el enunciado a continuación. La demostración de la siguiente observación se encuentra en el apéndice B.

Teorema 1.14 (Poincaré-Bendixson). *Sea $\varphi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow S^2$ un flujo en la esfera S^2 y $x \in S^2$ un punto. Entonces se tiene una sola de las siguientes propiedades:*

1. $\omega(x, \varphi)$ es un solo punto fijo.
2. $\omega(x, \varphi)$ es una única órbita periódica.
3. Si $\omega(x, \varphi)$ tiene puntos regulares y fijos entonces para todo $q \in \omega(x, \varphi)$ regular se tiene que $\alpha(q)$ y $\omega(q)$ son fijos. Si x_0 es un punto fijo en $\omega(p)$ entonces existen $q_1, q_2 \in \omega(p)$ regulares tales que $\omega(q_1) = x_0 = \alpha(q_2)$.

Observación 1.15. *En las hipótesis anteriores podemos ver que el teorema dice que $\omega(x, \varphi) \cap \text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ si y solo si $\omega(x, \varphi)$ es una órbita periódica sin puntos fijos.*

Esto es interesante porque en el caso $\omega(x, \varphi) \cap \text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ obtenemos dos hemisferios invariantes en la esfera. Pasamos a tener un flujo en cada uno de esos hemisferios, que no son otra cosa que discos compactos, lo cual simplifica

la dinámica. Una formalización de lo anterior se encuentra más adelante en esta sección.

Teorema 1.16 (Punto fijo de Brouwer). *Toda función continua f de un disco compacto en sí mismo admite al menos un punto fijo.*

Corolario 1.17. *Todo flujo continuo φ en un disco compacto admite al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times D \rightarrow D$ un flujo continuo en el disco, entonces para cada t tenemos que φ_t es una función continua del disco en sí mismo, por el teorema del punto fijo de Brouwer tenemos que $Fix(\varphi_t) \neq \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consideramos $\varphi_{2^{-n}}$, observemos que $Fix(\varphi_{2^{-n}}) \supset Fix(\varphi_{2^{-(n+1)}})$, ya que si $\varphi_{2^{-(n+1)}}(x) = x$ entonces

$$\varphi_{2^{-n}}(x) = \varphi_{2^{-(n+1)}}(\varphi_{2^{-(n+1)}}(x)) = \varphi_{2^{-(n+1)}}(x) = x;$$

por otro lado estos conjuntos son compactos por ser cerrados dentro del disco compacto. Por el teorema de encaje de compactos sabemos que $\bigcap_n Fix(\varphi_{2^{-n}}) \neq \emptyset$ luego podemos tomar $x \in \bigcap_n Fix(\varphi_{2^{-n}})$.

Veamos que este punto es un punto fijo del flujo, tomemos $t > 0$ definimos $t_n := \min\{s/2^n \geq t : s \in \mathbb{Z}\}$, por la forma en como construimos esta sucesión $t_n \rightarrow t$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Para cada t_n tenemos que $\varphi_{t_n}(x) = \varphi_{2^{-n}}^{s_n}(x) = x$, luego por continuidad $\varphi_t(x) = x$. Como se cumple para todos los t positivos se cumple para los negativos también ya que es tomar la inversa de φ_t , por lo tanto x es punto fijo del flujo φ .

Quod erat demonstrandum

Teorema 1.18 (curva de Jordan-Schönflies). *Sea C una curva simple cerrada en el plano (i.e. imagen de una función continua e inyectiva de S^1 en \mathbb{R}^2), entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene dos componentes conexas D homeomorfo al interior de un disco de dimensión 2 y A homeomorfo a un anillo abierto.*

Teorema 1.19. *Todo flujo en la esfera admite al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow S^2$ flujo continuo en la esfera, tomamos $x \in S^2$, por la observación 1.15 si $\omega(x, \varphi)$ no contiene un punto fijo entonces es una órbita periódica. Tomamos un punto y de esta órbita para poder referirnos a ella.

Por el teorema de la curva de Jordan (1.18) tenemos que $\mathcal{O}(y, \varphi)$ divide la esfera en dos discos de frontera la órbita de y , tomamos uno de esos discos D . Observemos que D es invariante por φ_t para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego podemos restringir el flujo a ese disco y por el corolario anterior tenemos un punto fijo. Quod erat demonstrandum

Corolario 1.20. *Sea v un campo diferenciable en S^2 . Entonces existe $x \in S^2$ tal que $v(x) = 0$.*

Proposición 1.21. *Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un difeomorfismo con $\|f - \mathbf{1}\|_1 < 2$ entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Veamos que si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un difeomorfismo con $\|f - \mathbf{1}\|_1 < 2$ sin puntos fijos podemos definir un campo en la esfera sin ceros.

Consideramos la función $g = (f - \mathbf{1}) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ observemos que $g(x)$ nos señala la dirección en la cual f mueve a x . Ahora vamos a proyectar $g(x)$ a $T_x S^2$, observemos que $T_x S^2 = x^\perp$. Entonces tenemos $p : S^2 \rightarrow T_x S^2$ donde p proyecta g a $T_x S^2$, tenemos $p(x) =$

$$g(x) - \frac{\langle g(x), x \rangle x}{\|x\|^2} = f(x) - x - \frac{\langle f(x) - x, x \rangle x}{\|x\|^2} = f(x) - x - \langle f(x), x \rangle \frac{x}{\|x\|^2}$$

$p(x) = f(x) - \langle f(x), x \rangle \frac{x}{\|x\|^2}$, este campo nunca es cero, ya que para que la resta de dos vectores no nulos ($f(x), x \in S^2$) sea cero uno debe ser múltiplo del otro. En la esfera eso significa que o son el mismo (lo cual no puede ser porque f no tiene fijos) o son opuestos (lo cual no puede ser porque $\|f - \mathbf{1}\|_1 < 2$).

p es un campo diferenciable ya que es composición de funciones diferenciables. Lo cual es absurdo porque contradice el corolario anterior. Quod erat demonstrandum

Capítulo 2

Acciones continuas de \mathbb{R}^2 en la esfera y otras variedades de dimensión 2.

2.1. Definición de conmutatividad y ejemplos

Ejemplo 2.1. Sean x e y dos flujos en \mathbb{R}^2 , donde x es el flujo resultante de integrar $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/X(p) = (1, 0)$ e y es el flujo resultante de integrar $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/Y(p) = (0, 1)$.

Observamos que $x_t(p) = p + (t, 0)$ y análogamente $y_t(p) = p + (0, t)$, en otros términos x es una traslación horizontal e y es una traslación vertical. De esta forma

$$x_t(y_s(p)) = x_t(p + (0, s)) = p + (0, s) + (t, 0) = x_t(p) + (0, s) = y_s(x_t(p)).$$

De este ejemplo en particular queremos tomar dos cosas, el resultado anterior, que es $x_t \circ y_s = y_s \circ x_t$ y el hecho de que ninguno de los dos flujos tiene puntos fijos.

Ejemplo 2.2. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ la proyección canónica de tomar cociente \mathbb{R}^2 por \mathbb{Z}^2 . Nos consideramos a y b flujos en \mathbb{T} tal que $a_t : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/a_t(\bar{p}) = \overline{x_t(p)}$ y análogamente $b_t : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/b_t(\bar{p}) = \overline{y_t(p)}$, con x e y los flujos del ejemplo anterior. Queda a cargo del lector verificar que a y b están bien definidos.

En este ejemplo también tenemos $a_t \circ b_s = b_s \circ a_t$ y ninguno de los dos flujos tiene puntos fijos. Este ejemplo es un poco más interesante que el anterior ya

que el toro es una 2-variedad compacta sin borde. En el ejemplo anterior los flujos siempre movían los puntos a lugares nuevos, pero en este ejemplo todos los puntos tienen órbitas periódicas.

Esta propiedad de que es indiferente el orden en el que aplicamos los flujos motiva la siguiente definición.

Definición 2.3. Sean φ y ψ dos flujos en un conjunto X , decimos que φ conmuta con ψ cuando $\varphi_s \circ \psi_t \equiv \psi_t \circ \varphi_s$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Análogamente decimos que X e Y dos campos, de clase C^k con $k \geq 1$, en una variedad diferenciable M conmutan si los flujos obtenidos de integrar X e Y en M conmutan.

Ejemplo 2.4. Sea $N = (0, 0, 1)$ el punto norte de la esfera S^2 , consideramos $h : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica. De esta forma definimos $\varphi_t : S^2 \rightarrow S^2$ como $h \circ x_t \circ h^{-1}$ para todos los puntos de S^2 menos el norte y para el norte como el flujo constante (esta última no es una elección arbitraria, la única forma en la que podemos definir un flujo en toda la esfera es dejando fijo el norte, de cualquier otra forma no nos quedaría un flujo). Análogamente $\psi_t : S^2 \rightarrow S^2$ es $h \circ y_t \circ h^{-1}$ para todos los puntos menos el norte y deja fijo el norte para todo tiempo. Observemos que para $p \neq N$

$$\varphi_t \circ \psi_s(p) = h \circ x_t \circ h^{-1} \circ h \circ y_s \circ h^{-1}(p) = h \circ x_t \circ y_s \circ h^{-1}(p) = h \circ y_s \circ x_t \circ h^{-1}(p) = \psi_s \circ \varphi_t(p)$$

Y para $p = N$

$$\varphi_t \circ \psi_s(N) = N = \psi_s \circ \varphi_t(N)$$

Es decir los flujos φ y ψ conmutan, además observamos que estos tienen un punto fijo en común, el norte.

Ejemplo 2.5. Sea $\pi : [0, \tau] \times [0, \tau/2] \rightarrow S^2 / (\theta, \rho) \rightarrow (\cos\theta \operatorname{sen}\rho, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\rho, \cos\rho)$, esta función nos permite parametrizar todos los puntos de la esfera en sus coordenadas esféricas, es decir la variable ρ nos fija un paralelo y la variable θ nos da la posición del punto dentro de ese paralelo parametrizándolo como una circunferencia paralela al plano xy de radio $\operatorname{sen}\rho$ y que empezando en $(\operatorname{sen}\rho, 0)$ recorre en sentido antihorario ese paralelo.

$$\varphi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow S^2 / (r, \pi(\theta, \rho)) \rightarrow \pi(\theta + r \operatorname{mod} \tau, \rho)$$

El flujo φ manda meridianos en meridianos, moviendo un punto a lo largo de su paralelo. Sin embargo si $\rho = 0$ o $\rho = \tau/2$ entonces $\pi(\theta, \rho)$ es el norte o el sur respectivamente, independiente de la primera variable y como el flujo φ solo afecta a la primera variable observamos que el norte y el sur son puntos fijos.

Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \tau/2)$ un homeomorfismo, definimos ψ de la siguiente manera si $\rho \neq 0, \tau/2$ entonces

$$\psi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow S^2 / (r, \pi(\theta, \rho)) \rightarrow \pi(\theta, (h(h^{-1}(\rho) + r)))$$

si $\rho = 0$ o $\rho = \tau/2$ entonces ψ deja fijos esos puntos. Este flujo manda paralelos en paralelos y la órbita de un punto es su meridiano y observemos que $\pi(\theta, 0) = (0, 0, 1)$ y $\pi(\theta, \tau/2) = (0, 0, -1)$, en otras palabras los puntos fijos de ψ son el norte y el sur.

Ambos dejan fijo el norte y el sur, por lo cual la pregunta de si conmutan o no ha de ser respondida para puntos con $z^2 \neq 1$. Es fácil hacer las cuentas y notar que φ solo afecta a la primer variable de π y que ψ solo afecta a la segunda, de ahí que conmuten. Pero un argumento mas visual es que mientras φ solo cambia al punto de meridiano manteniéndolo en el mismo paralelo, Mas aún la altura del punto no afecta el meridiano al que φ manda un punto, ψ afecta su altura sin tomar en cuenta la posición del punto dentro de su paralelo.

Nuevamente hemos encontrado puntos fijos en común en dos flujos que conmutan en la esfera, el lector podría advertir que ambos flujos tenían puntos fijos en común y luego se probó la conmutatividad de los flujos. De donde surge la pregunta natural ¿existen dos flujos conmutativos en la esfera sin puntos fijos en común?

2.2. Puntos fijos por acciones de \mathbb{R}^2 en la esfera.

La siguiente observación además del hecho interesante sobre flujos que conmutan, será de vital importancia en la demostración del teorema 2.7 del cual luego se desprende el teorema sobre campos que conmutan.

Observación 2.6. *Si φ y ψ son dos flujos en un espacio topológico E que conmutan, entonces $Fix(\varphi)$ es ψ -invariante y $Fix(\psi)$ es φ -invariante. Esto se desprende de que si $p \in E$ es un punto fijo de φ , como ψ e φ conmutan tenemos $\varphi_s(\psi_t(p)) = \psi_t(\varphi_s(p)) = \psi_t(p)$. Es decir $\mathcal{O}(p, \psi) \subset Fix(\varphi)$, $\forall p \in$*

$Fix(\varphi)$. Más aún, por continuidad tenemos, ya que $Fix(\phi)$ es cerrado,

$$\overline{\mathcal{O}(p, \psi)} \subset Fix(\varphi), \forall p \in Fix(\varphi).$$

Teorema 2.7. *Toda acción continua de \mathbb{R}^2 en la esfera S^2 admite un punto fijo.*

Demostración. Sea $\Lambda : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ una acción continua, definimos los flujos $x := \Lambda|_{\mathbb{R} \times \{0\} \times S^2}$ y análogamente $y := \Lambda|_{\{0\} \times \mathbb{R} \times S^2}$ que no son otra cosa que la acción restringida al subespacio generado por e_1 y e_2 respectivamente. Observemos que x e y conmutan, ya que \mathbb{R}^2 es un grupo conmutativo con respecto a la suma. Supondremos por absurdo que x e y no tienen puntos fijos en común, lo cual es equivalente a que Λ no tenga puntos fijos.

Por el teorema 1.19 sabemos que y admite un punto fijo, tomamos $p_1 \in Fix(y)$ la observación 2.6 nos dice que $\omega(p_1, x) \subset \overline{\mathcal{O}(p_1, x)} \subset Fix(y)$. La observación 1.15 nos dice que si $\omega(p_1, x)$ no es una órbita periódica entonces tiene que contener un punto fijo de x , lo cual contradice nuestra suposición de que x e y no tienen puntos fijos en común. De donde se sigue que $\omega(p_1, x) = \mathcal{O}(q_1, x)$ es una órbita periódica del flujo x para algún punto q_1 . Esta órbita periódica es una curva simple cerrada en la esfera de donde se sigue, por el teorema de la curva de Jordan 1.18, que el complemento de esta curva son dos discos abiertos. Sea D_1 uno de esos discos junto con su frontera (la órbita de q_1 por x), observemos que x deja invariante a D_1 , por lo cual podemos considerarnos el flujo restringido a D_1 . Por el corolario 1.17 tenemos que $Fix(x) \cap D_1 \neq \emptyset$. Así mismo como toda la frontera de D_1 esta formada por puntos fijos de y , el disco en sí es un conjunto invariante bajo el flujo y . Nuestro argumento a partir de ahora se centrará en encontrar discos compactos invariantes por ambos flujos.

Tomamos p_2 fijo de x en el interior de D_1 , ya que la frontera del disco son puntos periódicos por x . Luego consideramos la órbita de este punto por el flujo y , obtenemos $\omega(p_2, y) \subset \overline{\mathcal{O}(p_2, y)} \subset Fix(x)$. Por 1.19 obtenemos que $\omega(p_2, y) = \mathcal{O}(q_2, y)$ órbita periódica para algún punto q_2 por el flujo y , ya que estamos suponiendo que no hay puntos fijos en común. Esta nueva órbita es una curva simple cerrada en el interior de D_1 , ya que si acumulase en el borde del disco contendría algún fijo de y lo cual viola nuestro supuesto. Aplicando nuevamente el teorema de Jordan esta curva cerrada divide al disco D_1 en un anillo que contiene la frontera del disco original pero no a la órbita de q_2 y un disco abierto estrictamente mas chico \mathring{D}_2 . Llamamos D_2 a la clausura de \mathring{D}_2 .

Análogamente a D_1 tenemos que D_2 es un disco invariante por ambos flujos pero su borde, la órbita de q_2 por y , esta formada por puntos fijos de x . Es importante notar que la diferencia $D_1 - D_2 \neq \emptyset$.

Para construir D_{2k+1} partimos de D_{2k} cuyo borde es una órbita periódica de y contenida en los puntos fijos de x y es invariante por ambos flujos. En el interior de D_{2k} conseguimos una órbita periódica $\mathcal{O}(q_{2k+1}, x)$ que es el borde de D_{2k+1} , luego D_{2k+1} es invariante por ambos flujos y $\mathcal{O}(q_{2k+1}, x)$ esta formada por puntos fijos de y . Respectivamente construimos D_{2k+2} . Recordemos que la diferencia entre estos discos es no trivial.

Consideramos $D = \cap_n D_n$, D es el conjunto formado por un punto o un disco compacto. Veamos que $a \in \partial D$ es un punto fijo de ambos flujos. Como a pertenece a la frontera de D es acumulado por la frontera de los discos D_n , tanto pares como impares, por lo cual es acumulado por una sucesión de puntos fijos de x y otra sucesión de puntos fijos de y . De donde se sigue que tienen un punto fijo en común, por lo cual $Fix(\Lambda) \neq \emptyset$.

Quod erat demonstrandum

Es natural preguntarse cuáles de los argumentos de esta demostración no funcionan en los ejemplos que vimos en la sección anterior. Primero el teorema de Poincaré-Bendixson habla sobre puntos cuyas órbitas son acotadas, en el ejemplo 2.1 la órbita de todo punto es no acotada y su ω -límite es vacío.

Por otro lado en el caso del ejemplo 2.2 tenemos que el teorema de la curva de Jordan no se sostiene. Ya que al mirar el complemento de una órbita de a lo que nos queda tiene una sola componente conexa, lo mismo con las órbitas de b , el resultado de tomar ambos complementos es un cilindro infinito. Lejos de lo que nosotros usamos en el teorema donde quedan dos componentes conexas y al menos una de ellas es un disco.

Teorema 2.8. Sean X e Y campos de vectores de clase C^k , $k \geq 1$, en la esfera S^2 conmutativos. Entonces existe un punto $p \in S^2$ tal que $X(p) = Y(p) = 0$

Demostración. Sean φ y ψ los flujos que integran X e Y respectivamente. Por definición estos flujos conmutan, lo cual nos permite definir una acción continua de \mathbb{R}^2 en S^2 de la siguiente forma $\Lambda : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow S^2$

$$\Lambda(t, s, x) = \varphi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(\varphi_t(x))$$

Por teorema 2.7 Λ admite un punto fijo $p \in S^2$, veamos que $X(p) = Y(p) = 0$. Primero observemos que $\varphi_t(p) = \Lambda(t, 0, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que p es fijo de φ y análogamente podemos ver que p es fijo de ψ .

Por lo tanto,

$$X(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = 0, Y(p) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, p) = 0$$

Quod erat demonstrandum

2.3. ¿Por qué la esfera?

La esfera tiene dos propiedades fundamentales: la compacidad, ser simplemente conexa y el teorema de la curva de Jordan-Schönflies.

En el ejemplo de las traslaciones del plano ningún punto tiene órbita acotada, lo que se consigue ya que el plano no es compacto, por mas de que el teorema de Poincaré-Bendixson es cierto en el plano nunca entramos en la hipótesis de tener un punto con órbita acotada. Esto en la esfera es obligatorio, pues esta es compacta.

El toro comparte con la esfera la propiedad de ser compacto, sin embargo las órbitas de la translación por paralelos en el toro son homeomorfas a S^1 pero no dividen al toro en dos componentes conexas. Tomar complemento por una de estas órbitas nos deja un espacio homeomorfo a un cilindro infinito, en otras palabras, no es válido que el complemento de una curva cerrada sean dos componentes conexas donde al menos una de ella sea un disco.

Curiosamente el teorema de la curva de Jordan-Schönflies sí es cierto en el plano, de donde vemos que ninguna de estas dos condiciones son suficientes por sí solas. La esfera nos permite pasar del problema global a ver el problema en discos invariantes encajados el uno en el otro, dándonos la posibilidad de ignorar el resto del sistema. En el plano con la translación nunca podemos restringirnos a un compacto, pues los únicos conjuntos invariantes por translación son no compactos y en el toro no tenemos un disco invariante cuya frontera sea una órbita periódica.

En el plano los flujos que elegimos no solo no tenían puntos fijos en común, no tenían puntos fijos. ¿Si dos flujos del plano conmutan y ambos tienen puntos fijos, admiten un punto fijo en común?

Ejemplo 2.9. Sea $\Lambda : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / ((t, s), (x, y)) \rightarrow (x + ty + s(y - 1), y)$, observamos que Λ es una acción de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Si tomamos los dos flujos conmutativos asociados a Λ definidos de la siguiente manera $\varphi := \Lambda|_{\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^2}$ y $\psi := \Lambda|_{\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2}$ podemos estudiar los puntos fijos de ambos resolviendo ecuaciones sencillas.

$$\varphi_t(x, y) = (x, y) \forall t \in \mathbb{R} \iff (x + ty, y) = (x, y) \forall t \in \mathbb{R} \iff y = 0$$

Análogamente $\psi_s(x, y) = (x, y) \forall s \in \mathbb{R}$ si y solo si $y = 1$. De esta forma encontramos dos flujos en el plano que conmutan, ambos tienen puntos fijos y no tienen puntos fijos en común.

Si tomamos un punto fijo del flujo ψ por ejemplo $(0, 1)$ notamos que $\varphi_t(0, 1) = (t, 1)$ de donde se sigue que $Fix(\psi) = \mathcal{O}(\varphi, (0, 1))$ esto nos dice que la órbita por φ de ningún punto fijo de ψ esta acotada, por lo cual no podemos usar el teorema de Poincaré-Bendixson.

Ahora que sabemos mejor cómo buscar ¿existe otra superficie, compacta y donde sea válido el teorema de Jordan-Schönflies donde el teorema 2.7 sea cierto?

Corolario 2.10. *Toda acción continua de \mathbb{R}^2 en el plano proyectivo $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ admite un punto fijo.*

Capítulo 3

Difeomorfismos conmutativos en la esfera

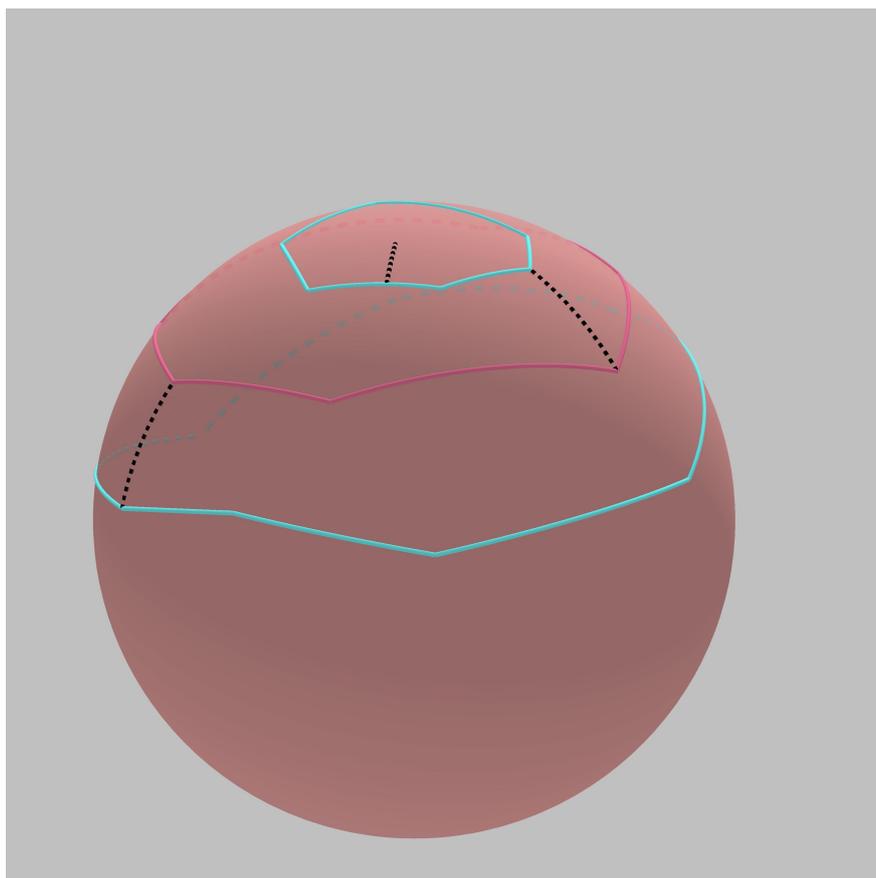


Figura 3.1: Tres curvas cerradas simples, geodésicas a trozos, alejadas uniformemente entre si.

3.1. Ejemplos, definición y problema

Notemos que el teorema de esta sección y el teorema de la sección pasada atacan problemas similares. El paper *Un Point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de S^2* de Christian Bonatti, trata con sistemas dinámicos discretos, en lugar del paper de Lima que estudia los flujos resultantes de integrar campos en la esfera. Es decir, este último estudia, sistemas dinámicos continuos, diferenciables de hecho.

El siguiente ejemplo responde la pregunta ¿siempre dos difeomorfismos conmutativos en la esfera admiten un punto fijo en común?

Definición 3.1. Sean f y g dos difeomorfismos en una variedad M , decimos que f conmuta con g cuando $f \circ g \equiv g \circ f$.

Ejemplo 3.2. Consideremos las siguientes matrices y las transformaciones lineales asociadas a ellas

$$F = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi & 0 \\ \operatorname{sen} \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi \\ 0 & \operatorname{sen} \pi & \cos \pi \end{bmatrix}.$$

El lector atento, reconocerá que estas matrices están asociadas a rotaciones en \mathbb{R}^3 , F rota ángulo π al rededor del eje z y G rota ángulo π al rededor del eje x . En particular ni G ni F modifican la norma de un vector, por lo cual dejan invariante a la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. La forma más sencilla de corroborar que estas transformaciones lineales conmutan es probar que $FG = GF$ con el producto de matrices. Cuando restringimos ambas transformaciones lineales a la esfera obtenemos dos difeomorfismos que como anteriormente mencionamos conmutan. F solo deja fijo el eje con respecto al cual rota, es decir el eje z , dentro de la esfera eso es el polo sur y el polo norte. G análogamente solo deja fijos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

Acabamos de construir dos difeomorfismos en la esfera que conmutan y no tienen puntos fijos en común.

Observación 3.3. Sea $x \in \operatorname{Fix}(g)$ con f y g difeomorfismos que conmutan, entonces $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ es decir $f(x)$ queda fijo por g . En otras palabras si f y g conmutan f deja invariante al conjunto de puntos fijos de g .

Luego de haber observado que existe un contraejemplo es natural preguntarse ¿qué sucede en los flujos que no está presente ahora? En el teorema de

Lima usamos el teorema de Poincaré-Bendixson. Para estudiar los posibles puntos fijos de dos difeomorfismos que conmutan vamos a tener que pensar en las órbitas periódicas como curvas cerradas y adaptar el teorema de Poincaré-Bendixson a un sistema dinámico discreto. Luego pensando de forma análoga obtendremos una demostración que nos recuerda a la demostración del teorema de Lima.

3.2. Propiedades locales de los difeomorfismos cercanos a la identidad

Las nociones de norma nos permiten tomar distancia con respecto a una función en particular, la identidad. La identidad es una función de la esfera en sí misma, en particular es una función de la esfera en \mathbb{R}^3 , luego si tomamos un difeomorfismo φ en la esfera tenemos que su resta es una función en $C^1(S^2)$ por lo cual tiene sentido evaluar $\|\varphi - \mathbf{1}\|_1$.

El siguiente lema nos permite interpretar localmente los difeomorfismos cercanos a la identidad. Más allá de la notación nos dice que si elegimos un punto $x \in S^2$ y miramos el vector $f(x) - x$, entonces cerca de x para cualquier punto y el vector $f(y) - y$ es igual a $f(x) - x + r(y)$ donde $r(y)$ representa una pequeña variación. El corolario que le sigue completa esta intuición diciendo que si tomamos un punto no fijo entonces localmente todo se parece a una traslación, en particular no tenemos puntos fijos.

Lema 3.4. *Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, sea f un difeomorfismo de S^2 tal que $\|f - \mathbf{1}\|_1 < \varepsilon/n$. Entonces $\forall x \in S^2, \forall y \in S^2$ tal que $d(x, y) \leq n \cdot d(x, f(x))$ se tiene*

$$\|(f(y) - y) - (f(x) - x)\| \leq \varepsilon \cdot \pi \|f(x) - x\|$$

Demostración.

$$\|(f(y) - y) - (f(x) - x)\| \leq \|f - \mathbf{1}\|_1 \cdot d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot n \cdot d(x, f(x)) \leq \varepsilon \cdot \pi \|f(x) - x\|$$

La primera desigualdad viene de la definición de la norma C^1 y la segunda es aplicar estrictamente las hipótesis. Quod erat demonstrandum

Corolario 3.5. *En particular si $\varepsilon \in (0, 1/\pi)$ y $f(x) \neq x$ entonces f no tiene puntos fijos en la bola $B(x, n \cdot d(x, f(x)))$.*

Demostración. Si existe $y \in B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ tal que $f(y) = y$ entonces $\|f(x) - x\| \leq \varepsilon \cdot \pi \|f(x) - x\|$ lo cual implica $x = f(x)$ ya que $0 < \varepsilon \cdot \pi < 1$.

Quod erat demonstrandum

Lema 3.6. Sean $\alpha \in (0, \pi)$ un ángulo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\beta \in (0, 1/\pi)$ tal que se cumple la siguiente propiedad:

Si f es un difeomorfismo en la esfera S^2 tal que $\|f - \mathbf{1}\|_1 < \beta/n$, si $x \in S^2$ es un punto no fijo por f , y si y_1, y_2 son dos puntos de la bola $B(x, n \cdot d(x, f(x)))$ entonces para toda pareja v_1, v_2 tal que v_i es un vector positivo tangente al segmento $[y_i, f(y_i)]$ tenemos:

$$\text{Ang}(v_1, v_2) < \alpha$$

Demostración.

$$\text{Ang}(v_1, v_2) \leq \sum_1^2 \text{Ang}(v_i, f(y_i) - y_i) + \sum_1^2 \text{Ang}(f(y_i) - y_i, f(x) - x).$$

Elegimos β lo suficientemente chico tal que para todos los y, z con $\|y - z\| \leq \beta$ y tal que para todo vector tangente positivo al segmento $[y, z]$ se tiene:

$$\text{Ang}(v, z - y) < \frac{\alpha}{4}$$

Luego, aplicando el lema 3.4 tenemos,

$$|\sin(\text{Ang}(f(y_i) - y_i, f(x) - x))| \leq \beta$$

por lo cual elegimos $\beta < (1/\pi)\sin(\alpha/4)$.

Quod erat demonstrandum

En esta sección estudiaremos la parte mas técnica del paper de Bonatti, deteniéndonos cuando sea necesario para estudiar por qué funciona la hipótesis de estar cerca de la identidad. Al principio de esta monografía estudiamos unas propiedades locales de los difeomorfismos cercanos a la identidad, *los lemas 3.4 y 3.6 nos permiten interpretar la dinámica localmente como una traslación.* Esto jugará el papel de las cajas de flujo, pero para empezar a pensar como en el caso de los flujos tenemos que poder asociar a cada órbita una curva.

Definición 3.7. Sea $x \notin \text{Fix}(f)$ entonces consideramos la curva $\gamma_f^x : [0, +\infty) \rightarrow S^2$ definida de la siguiente manera: $\gamma_f^x(n) = f^n(x)$ y $\gamma_f^x(n+t)$, $0 < t < 1$ recorre la traza de la geodésica entre $f^n(x)$ y $f^{n+1}(x)$.

La siguiente definición esta formulada ad hoc para probar la existencia de puntos fijos en nuestro caso particular, sin embargo la teoría del grado de Brouwer es muy rica y esta definición se puede generalizar.

Definición 3.8. Sea $X : U \rightarrow TU$ un campo diferenciable con U homeomorfo a \mathbb{R}^2 , consideramos la función $\bar{X}(x) = X(x)/\|X(x)\|$ y la restringimos a una curva cerrada simple (donde el campo no se anule) de U obteniendo un mapa del círculo en el círculo. Definimos el índice del campo X a lo largo de dicha curva como

$$\sum_{x \in X^{-1}(y)} \text{sign } df_x$$

donde y es un punto tal que para todo $x \in X^{-1}(y)$ el diferencial no se anula en x .

Proposición 3.9. Sea $X : U \rightarrow TU$ un campo con U homeomorfo a \mathbb{R}^2 tal que X tiene índice no nulo a lo largo de una curva cerrada simple γ con $\gamma = \partial D$ donde $D \subset U$ homeomorfo a un disco compacto, entonces el campo X tiene un cero dentro del disco D .

De lo contrario podríamos construir una homotopia entre una curva no trivial en S^1 y la curva constante. Las herramientas para formalizar este argumento, o precisar los términos que estamos usando exceden el alcance de este trabajo.

Para aligerar la notación siempre que hablemos de f y g serán dos difeomorfismos conmutativos de clase C^1 en la esfera S^2 , tales que $\|f - \mathbf{1}\|_1 < 1/60$ y $\|g - \mathbf{1}\|_1 < 1/60$.

¿Por qué $1/60$? Si elegimos $\alpha = \pi/3$ y $n = 4$, el lema 3.6 nos dice que existe un β tal que si $\|f - \mathbf{1}\|_1 < \beta/n$ entonces tenemos la tesis del lema, en la demostración de este lema observamos que es suficiente que β sea menor que $\sin(\pi/3)/\pi$, por lo cual tomamos $\beta = 1/15$.

En este momento la restricción angular de menos de $\pi/3$ puede parecer un poco críptica, recordemos que dos direcciones que forman un ángulo menor a $\pi/3$ no pueden ser ortogonales ni opuestas. En particular si tengo un S^1 en la esfera, parametrizado por una curva diferenciable γ , y un campo $X : S^1 \rightarrow TS^1$ con $\text{Ang}(X(\gamma(t)), \gamma'(t)) < \pi/3$ tengo que el índice del campo en el interior de los discos de los cuales $\text{Im}(\gamma)$ es borde es 1. En otras palabras dicho campo ha de tener un cero.

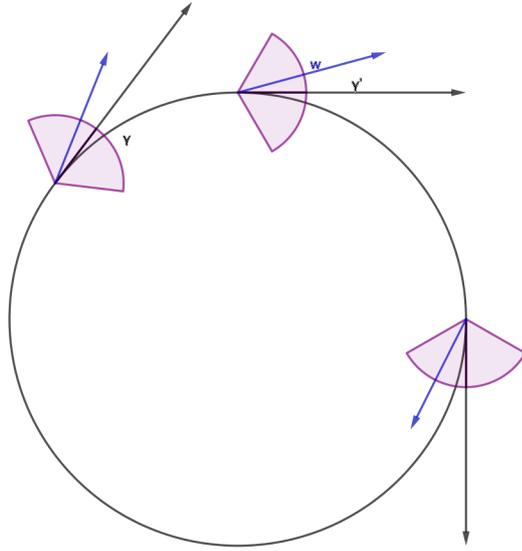


Figura 3.2: Un campo w no nulo tal que $Ang(w, \gamma') < \pi/3$ es homotopico al campo γ' por lo cual han de tener el mismo índice.

El siguiente lema nos da la existencia de una curva cerrada simple sin puntos fijos cuya derivada, cuando existe, esta a menos de $\pi/3$ de nuestro campo X .

Lema 3.10. *Sea x un punto no fijo por f pero ω -recurrente. Entonces existen $t_1 < t_2$ tal que $\gamma_f^x(t_1) = \gamma_f^x(t_2)$, Mas aún la curva γ_f^x no contiene puntos fijos.*

Demostración. Primero observamos que el caso en que x es un punto periódico es trivial. Tenemos $\gamma_f^x(0) = \gamma_f^x(p)$ donde p es el periodo de x .

Supongamos por absurdo que x no es periódico, es ω -recurrente y la curva γ_f^x es simple.

Consideramos σ una geodésica lo suficientemente corta tal que su longitud es menor que $d(x, f(x))$, el vector velocidad a lo largo de σ varía un ángulo menor a $\pi/10$ y por a , su punto medio, pasa $[x, f(x)]$ que corta ortogonalmente a la geodésica.

Como x es ω -recurrente la curva γ_f^x corta infinitas veces a la geodesica σ . Llamamos i al menor entero tal que $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$ vuelve a cortar σ en un punto al que llamaremos b . Esto nos permite obtener la curva cerrada simple γ que es la concatenación de $[a, f(x)], [f(x), f^2(x)], \dots, [f^{i-1}(x), f^i(x)], [f^i(x), b]$ (Ver Figura 3.3).

Como a es el punto medio de σ y b pertenece a σ sabemos que la longitud de $[a, b]$ es menor a $\frac{1}{2}d(x, f(x))$ de donde se sigue,

$$d(x, f^i(x)) \leq d(x, f(x)) + d(f^i(x), f^{i+1}(x)) \leq 2 \max\{d(x, f(x)), d(f^i(x), f^{i+1}(x))\}$$

entonces $x \in B(f^i(x), 4d(f^i(x), f^{i+1}(x)))$ o $f^i(x) \in B(x, 4d(x, f(x)))$.

El lema 3.6 nos dice que los vectores tangentes a γ_f^x en a y el b tienen una variación angular menor a $\pi/3$, ya que f dista menos de $1/60$ de la identidad y lo probado en el párrafo anterior. En particular dice que el segmento $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$ corta a σ con la misma orientación que el segmento $[x, f(x)]$ (i.e. que x y $f^{i+1}(x)$ pertenecen a componentes distintas de $S^2 \setminus \gamma_f^x$).

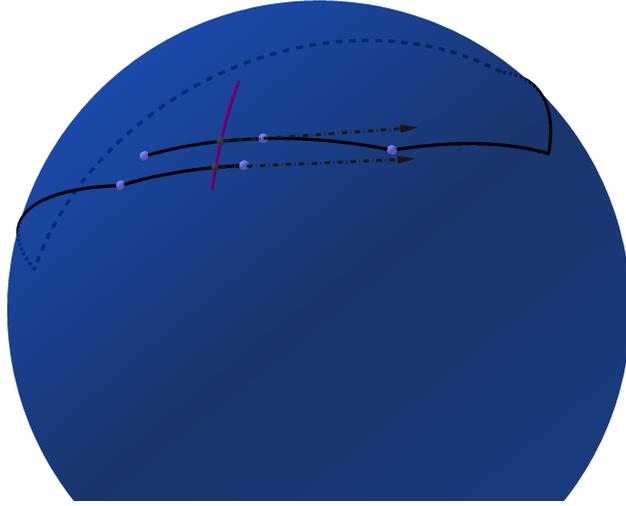


Figura 3.3: Los vectores derivada en los puntos de corte con la geodésica son similares, el ángulo que forman no puede ser mayor a $\pi/3$.

El punto x es ω -recurrente lo cual quiere decir que tiene que existir un $f^{j+1}(x)$ en la misma componente conexa que x y además para algún j se cumple eso y que $f^j(x)$ pertenece a la otra componente conexa. La pregunta es ¿por dónde pasa el segmento $[f^j(x), f^{j+1}(x)]$? Porque esta claro que tiene que cortar la curva γ y por hipótesis de que γ_f^x es simple solo puede cortar en $[a, b]$. Pero si corta en $[a, b]$ entonces contradice el lema 3.6. Hemos llegado a un absurdo.

El corolario 3.5 nos dice que no hay puntos fijos a lo largo de la curva γ , ya que $\|f - \mathbb{1}\|_1 < 1/60 < 1/\pi$ luego el corolario nos asegura que no hay puntos fijos en la bola $B(x, d(x, f(x)))$. Quod erat demonstrandum

El campo que nos interesa a nosotros es X la proyección de $f(y) - y$ al tangente de la esfera. Este campo se anula únicamente cuando $f(y) = y$ ya que la opción $f(y) = -y$ queda descartada porque f esta cerca de la identidad

en la distancia C^1 . Acá es donde podemos contemplar la necesidad de la diferenciabilidad para este argumento.

Consideramos γ la curva cerrada simple contenida en γ_f^x . En esta curva X no se anula.

Recordemos que γ es geodésica a trozos, entonces su derivada en un segmento geodésico de la forma $[x_i, f(x_i)]$ es el transporte paralelo del vector $X(x_i)$. Sea $y \in [x_i, f(x_i)]$ entonces por el lema 3.6 tenemos $\text{Ang}(X(y), X(x_i)) < \pi/3$ luego como $\text{Ang}(X(y), \gamma'(t))$ es constante en t a lo largo de un segmento geodésico, tenemos que el ángulo entre $X(\gamma(t))$ y $\gamma'(t)$ es menor a $\pi/3$.

Sea D la clausura de uno de los discos que componen el complemento de la curva γ . Si bien la curva γ tiene vértices donde no es derivable observamos que el campo X a lo largo de γ persigue la derivada de la curva a menos de $\pi/3$, cuando esta existe (ver figura 3.2). Observamos que el campo X da una vuelta a lo largo de la curva γ . Entonces el campo X debe tener una singularidad en el interior de D .

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 3.11. *Sea f un difeomorfismo de la esfera, con $\|f - \mathbb{1}\| < 1/60$ y sea $x \notin \text{Fix}(f)$ un punto ω -recurrente por f . Entonces existe una curva cerrada simple γ contenida en γ_f^x , que es borde de dos discos D_1, D_2 tal que ambos contienen puntos fijos de f únicamente en su interior.*

Lema 3.12. *Si f y g no tienen puntos fijos en común, sea r una distancia tal que $\forall x \in \text{Fix}(g)$ y $\forall y \in \text{Fix}(f)$*

$$d(f^i(x), f^{i+1}(x)) > r \text{ y } d(g^i(y), g^{i+1}(y)) > r.$$

Entonces,

1. γ_f^x y γ_g^y son curvas disjuntas
2. La distancia entre γ_f^x y γ_g^y es mayor a r .

Demostración. Supongamos por absurdo que γ_g^y y γ_f^x se cortan entonces, existen i, j tal que

$$[f^i(x), f^{i+1}(x)] \cap [g^j(x), g^{j+1}(x)] \neq \emptyset$$

entonces

$$\begin{aligned} d(f^i(x), g^j(y)) &\leq d(f^i(x), f^{i+1}(x)) + d(g^j(y), g^{j+1}(y)) \\ &\leq 2\max\{d(f^i(x), f^{i+1}(x)), d(g^j(y), g^{j+1}(y))\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Entonces si $g^j(y)$ pertenece a la bola $B(f^i(x), 4d(f^i(x), f^{i+1}(x)))$, como g y f conmutan $g^j(y)$ es un punto fijo de f , esto contradice el corolario 3.5. Análogamente si $f^i(x) \in B(g^j(x), 4d(g^j(x), g^{j+1}(x)))$ también contradice el corolario 3.5 ya que $f^i(x) \in \text{Fix}(g)$. Con lo cual llegamos al absurdo en la desigualdad (1).

Ahora probaremos el punto 2, también por absurdo, sea $a \in [f^i(x), f^{i+1}(x)]$ y $b \in [g^j(y), g^{j+1}(y)]$ dos puntos tal que $d(a, b) < r$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f^i(x), g^j(y)) &\leq d(f^i(x), f^{i+1}(x)) + r + d(g^j(y), g^{j+1}(y)) \\ &\leq 3\max\{d(g^j(y), g^{j+1}(y)), d(f^i(x), f^{i+1}(x))\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lo cual nuevamente contradice el corolario 3.5. Quod erat demonstrandum

3.3. Teorema y demostración

Teorema 3.13 (Bonatti). *Sean f y g dos difeomorfismos conmutativos de clase C^1 en la esfera S^2 , tal que $\|f - \mathbb{1}\|_1 < 1/60$ y $\|g - \mathbb{1}\|_1 < 1/60$. Entonces f y g tienen un punto fijo en común.*

Demostración. Supongamos por absurdo que f y g son dos difeomorfismos que no tienen puntos fijos en común y ambos se encuentran a menos de $1/60$ en la distancia C^1 de la identidad.

Por la proposición 1.21 podemos afirmar que los conjuntos de puntos fijos de g y f son no vacíos. Estos, $\text{Fix}(g)$ y $\text{Fix}(f)$, son compactos por ser cerrados dentro de la esfera. Consideramos la siguiente función $D : \text{Fix}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D(x) = \|x - f(x)\|$, o sea a cada punto fijo por g le asignamos la distancia hasta su imagen por f . Esta función no se anula, continua y tiene dominio compacto. Entonces admite un mínimo mayor a cero, esto es decir existe una distancia mínima positiva que todos los puntos fijos por g se mueven cuando se les aplica f . Análogamente existe una distancia mínima positiva que se mueven todos los puntos fijos por f cuando se les aplica g . Esto nos permite tomarnos $r > 0$ tal que, para todo $x \in \text{Fix}(g)$ y todo $y \in \text{Fix}(f)$ se cumple;

$$d(x, f(x)) > r \text{ y } d(y, g(y)) > r$$

Tomamos $x_0 \in \text{Fix}(g)$ y consideramos $\overline{\mathcal{O}(f, x_0)}$; observamos que $\overline{\mathcal{O}(f, x_0)} \subset \text{Fix}(g)$, por continuidad de g . Tomemos un conjunto minimal no vacío dentro

de $\overline{\mathcal{O}(f, x_0)}$, que sabemos que existe aplicando el lema de Zorn, eventualmente podría ser todo $\overline{\mathcal{O}(f, x_0)}$. Para poder referirnos a este conjunto tomaremos $\overline{x_0}$ un elemento de él. Por ser un elemento de un conjunto minimal se tiene que $\overline{x_0}$ tiene una órbita que acumula sobre él mismo i.e. $\overline{x_0}$ es ω -recurrente.

Nos encontramos en las hipótesis de la proposición 3.11, existe una curva cerrada simple γ_0 contenida en $\gamma_f^{\overline{x_0}}$, tal que $\partial D_0 = \gamma_0$ donde D_0 es un disco que contiene a y_1 punto fijo por f .

El lema 3.12 nos dice que la curva $\gamma_g^{y_1}$ se encuentra a distancia mayor que r de γ_0 , en particular $\overline{\mathcal{O}(g, y_1)}$ esta contenido en el interior de D_0 . Tomamos $\overline{y_1}$ el límite de una subsucesión convergente de $\{g^n(y_1)\}_n$, esto nos da un punto fijo por f y recurrente por g . Aplicando nuevamente la proposición 3.11 obtenemos una curva cerrada simple $\gamma_1 \subset \gamma_g^{\overline{y_1}}$ tal que $\partial D_1 = \gamma_1$ donde D_1 es un disco que contiene a x_2 punto fijo por g . Mas aún el borde de D_1 dista mas de r del borde de D_0 y el conjunto $D_0 - D_1$ contiene una bola de radio $r/3$.

Uno podría iterar este proceso y construir una cantidad infinita de discos D_i tal que $D_{i+1} \subset D_i$ tal que el conjunto diferencia $D_i - D_{i+1}$ contiene una bola de radio $r/3$. Esas bolas, serían disjuntas y sus centros estarían uniformemente alejados uno del siguiente, lo cual nos daría una sucesión sin subsucesiones convergentes en la esfera. Lo cual contradice que la esfera es compacta.

Quod erat demonstrandum

Apéndice A

Integración de campos vectoriales en variedades

Para nosotros es importante cuando un flujo es resultado de integrar un campo sobre una variedad diferenciable, ya que trabajamos con campos definidos en la esfera S^2 y los flujos que estos inducen.

Teorema A.1. *Sea $X : M \rightarrow TM$ campo sea de clase C^k con $k \geq 1$ entonces existe $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ flujo de clase C^k que integra X . Esto es decir*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = X(x).$$

Pedir que el campo sea de clase C^k con $k \geq 1$ es sencillamente para poder aplicar el teorema de Picard, que tiene como hipótesis que el campo sea localmente Lipschitz. Como ser de clase C^1 implica ser localmente Lipschitz podemos aplicar el teorema de Picard para ecuaciones diferenciales. Si el campo es solo continuo aún podemos encontrar soluciones al campo, esto es trayectorias que respetan que su velocidad esté dada por los vectores del campo, pero no serian necesariamente únicas y esto no nos permite definir un flujo.

Demostración. Sea $U \subset M$ y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un entorno coordinado de M , como φ es un difeomorfismo podemos definir $\tilde{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $\tilde{X}(x) = d_{\varphi^{-1}(x)}X(\varphi^{-1}(x))$. En \mathbb{R}^n para el campo \tilde{X} aplicamos el teorema de Picard para ecuaciones diferenciales, esto nos permite considerar un flujo $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sera el único que cumple

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(0, x) = \tilde{X}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mientras tanto en U tenemos $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ definido como $f_t(u) = \varphi^{-1}(\tilde{f}_t(\varphi(u)))$, diremos que este flujo es el resultado de integrar X en U . Observamos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = X(x).$$

En otras palabras, f no depende de φ solamente del campo que integra. Por lo cual si U y V son dos entornos de M con intersección no vacía, φ y ψ sus respectivos mapas coordenadas a \mathbb{R}^n ; tenemos que si f es el flujo resultante de integrar X en U y h es el flujo resultante de integrar X en V entonces $f_t|_{U \cap V} \equiv h_t|_{U \cap V}$. Lo cual nos permite concluir la tesis de nuestro teorema.

Quod erat demonstrandum

Apéndice B

Teorema de Poincaré-Bendixson continuo

El siguiente resultado fue utilizado en el capítulo 2, extiende lo que sabemos sobre flujos de clase C^1 a flujos continuos. Este resultado en sí mismo es muy interesante, ya que si bien la versión clásica del teorema es muy conocida una demostración de esta versión es difícil de encontrar. Por lo cual decidimos incluir una demostración en este apéndice.

Teorema B.1 (Poincaré-Bendixson continuo). *La variedad M es el plano \mathbb{R}^2 o la esfera S^2 .*

Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow S^2$ un flujo en M y $x \in M$ un punto tal que $\omega(x, \varphi)$ es acotada. Entonces se tiene $\omega(x, \varphi) \cap \text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ si y solo si $\omega(x, \varphi)$ es una órbita periódica sin puntos fijos.

La demostración clásica de Poincaré-Bendixson usa la existencia de una variedad localmente transversal al campo que el flujo integra y esta al viajar por el flujo define un entorno tubular. Nos encontramos en un contexto en el que no podemos utilizar el concepto de transversalidad, si bien la esfera es una variedad diferenciable nuestro flujo es continuo, por lo cual no podemos pensar en el vector velocidad.

Teorema B.2 (extensión de Tietze-Urysohn).

Proposición B.3. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo en una variedad de dimensión n con $x \in M$ un punto regular del flujo φ (i.e. $\varphi_t(x) \neq x$ para $t \in [-c, +c]$ con*

$c > 0$). Entonces existe S subvariedad de dimensión $n - 1$ de M con $x \in S$ tal que $\varphi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times S \rightarrow M$ es inyectivo.

Demostración. Consideramos $I_c = \{\varphi_t(x) : -c \leq t \leq c\}$, o sea la órbita de x pero solo a través del intervalo $[-c, c]$. Naturalmente podemos definir la función que a cada punto de este intervalo le asigna el t necesario para que x viaje hasta él a través de φ , ya que $\varphi(\cdot)$ es inyectiva en $[-c, c]$;

$$F : I_c \rightarrow [-c, c], \varphi_t(x) \rightarrow t.$$

Por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn F se extiende a una función de M en los reales. A partir de ahora usaremos F para referirnos a esta extensión.

Consideremos

$$H(y) = \int_{-c}^c F(\varphi_t(y)) dt$$

la integral de la función F en el segmento de órbita de y . En particular $H(x) = \int_{-c}^c F(\varphi_t(x)) dt = \int_{-c}^c t dt = 0$. Estudiemos la derivada de esta función al avanzar por una órbita i.e. $(H \circ \varphi(\cdot))'$.

$$\begin{aligned} \frac{H(\varphi_{t+s}(y)) - H(\varphi_t(y))}{s} &= \int_{-c}^c \frac{F(\varphi_{t+s}(y))}{s} dt - \int_{-c}^c \frac{F(\varphi_t(y))}{s} dt = \\ &= \int_{-c+s}^{c+s} \frac{F(\varphi_t(y))}{s} dt - \int_{-c}^c \frac{F(\varphi_t(y))}{s} dt = \int_c^{c+s} \frac{F(\varphi_t(y))}{s} dt - \int_{-c}^{-c+s} \frac{F(\varphi_t(y))}{s} dt, \end{aligned}$$

observamos que cuando $s \rightarrow 0$ este cociente incremental tiende a $F(\varphi_c(y)) - F(\varphi_{-c}(y))$ por lo cual existe $(H \circ \varphi(\cdot))'$ y es continua, además $F(\varphi_c(x)) - F(\varphi_{-c}(x)) = 2c > 0$ lo cual nos dice que H es estrictamente creciente en un entorno de la órbita de x .

Consideramos U entorno de órbitas cercanas a x de la forma,

$$U = \bigcup_{|t| < \varepsilon, y \in B_\delta(x)} \varphi_t(y)$$

tal que H es estrictamente creciente a lo largo de los segmentos de órbitas contenidos en U , esta es una forma de asegurarnos que sea inyectiva en los segmentos de órbita. Como $H(x) = 0$ y H es creciente en el segmento de órbita de x contenido en U sabemos que $H(\varphi_{-\varepsilon}(x)) < 0 < H(\varphi_\varepsilon(x))$, por lo cual podemos asumir que $H(\varphi_{-\varepsilon}(y)) < 0 < H(\varphi_\varepsilon(y))$ para todo $y \in B_\delta(x)$, a lo sumo tendremos que achicar U para que esto sea cierto. Estamos en condiciones

de tomarnos $S := H^{-1}(0) \cap U$. El conjunto S tiene una y solamente una intersección con cada segmento de órbita.

Tomamos $s \in S$ veamos que $t \rightarrow \varphi_t(s)$ es inyectiva para t tal que $\varphi_t(s) \in U$; si $\mathcal{O}(x, \varphi)$ fuese una órbita periódica contenida en U entonces H no podría ser creciente al circular por la órbita, porque pasaría infinitas veces por los mismos puntos.

Veamos que $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon] \times S)$ es un entorno de x , sea $x_n \rightarrow x$ una sucesión de puntos de M veremos que existe N tal que $x_n \in \varphi([- \varepsilon, \varepsilon] \times S) \forall n > N$. Sabemos que $H(x_n) \rightarrow 0$, supondremos $H(x_n) \geq 0$ pero el argumento para el caso general es tomar la mas exigente de dos cotas obtenidas por este método, como H es continua podemos considerar $e > 0$ tal que $e < \min_{s \in S} \{ \max \{ H(\varphi([- \varepsilon, \varepsilon] \times \{s\})) \} \}$ luego por ser H inyectiva en cada órbita cualquier y tal que $0 \leq H(y) < e$ pertenece a $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon] \times S)$.

Quod erat demonstrandum

En la demostración anterior podemos pensar que tomando $F^{-1}(0)$ en un entorno de x también obtendríamos un candidato a S y estaríamos cometiendo un grave error. Ya que si bien la función F es estrictamente creciente a lo largo de I_c no tiene por qué ser estrictamente creciente en las órbitas cercanas.

Bibliografía

- [Lima] Elon L. Lima, Commuting Vector Fields on S^2 , *Proceedings of the American Mathematical Society* **15** (Feb., 1964), 138–141;
- [Bonatti] Christian Bonatti, Un Point fixe commun pour des difféomorphismes commutant de S^2 , *Annals of Mathematics, Second Series*. **129** (Jan., 1989), 61–69;
- [KAT] Anatole Katok & Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical System* Cambridge, 1995.
- [PAS] Alejandro Passeggi & Luis Piñeyrúa, *Introducción a los Sistemas Dinámicos* UDELAR, 2017.

Índice alfabético

Índice, [23](#)

Acción de un grupo, [8](#)

Bonatti, [27](#)

Brouwer, [10](#)

Conmutatividad de difeomorfismos, [20](#)

Conmutatividad de flujos, [13](#)

Curva de Jordan, [10](#)

Disco topológico, [6](#)

Esfera, [6](#)

Lima, [16](#)

Norma C^0 en la esfera, [6](#)

Poincaré-Bendixson, [9](#)

 Poincaré-Bendixson continuo, [31](#)

Punto recurrente, [8](#)

Tietze-Urysohn, [31](#)