SUR LE RECOUVREMENT DU CERCLE PAR DES ENSEMBLES PLACÉS AU HASARD

PAR

MARIO WSCHEBOR

ABSTRACT

If T is the unit circle and (B_n) a given sequence of subsets of T, we consider the problem of covering T with random independent uniform translates of (B_n). The technique used is based on a theorem on rearrangements of functions.

1. Introduction

Soient T le cercle de longueur égale à 1, $\{I_n\}$ une suite d'intervalles de longueurs $\{l_n\}$ données, aléatoirement indépendants et uniformément distribués sur T, et F_∞ l'ensemble aléatoire:

$$F_\infty = T \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Le problème posé par A. Dvoretzky en 1956 [2], de trouver des conditions sur la suite $\{l_n\}$ permettant de dire si F est presque sûrement vide ou pas, aètè considéré par la suite aussi par P. Billard [1], J.-P. Kahane [6] et références citées, B. Mandelbrot [7] et S. Orey [9]. Récemment, L. A. Shepp [11] a donné une condition nécessaire et suffisante pour que $P(F_\infty = \emptyset) = 1$, qui est la suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(l_1 + \cdots + l_n) = +\infty. \tag{1}$$

Les résultats de Shepp s'appuient sur le théorème suivant. Soient $U_\nu = \bigcup_{n=1}^{\nu} I_n$, $F_\nu = T \sim U_\nu$; pour chaque ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, on pose $m_\nu(\varepsilon) = m(F_\nu \cap (0,\varepsilon))$, m étant la mesure de Lebesgue sur T, normalisée par $m(T) = 1$. On indiquera par χ_n la fonction caractéristique de l'intervalle aléatoire I_n et par

Received September 20, 1972

$\xi_n(t) = E(\chi_n(t)\chi_n(0))$. On va supposer aussi que les intervalles I_n sont ouverts; en fait, cette restriction est très facile à enlever, nous verrons cela après.

THÉORÈME 1 (Shepp). *Sont équivalentes*:

i) $P(F_\infty = \varnothing) = 1$.

ii) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ (*ou bien pour un* $\varepsilon > 0$) *on a*:

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\nu}(1-l_n)^2}\int_0^{\varepsilon}\prod_{n=1}^{\nu}(1+2l_n+\xi_n(t))dt = +\infty. \tag{2}$$

L'implication (i) ⇒ (ii) peut être largement généralisée. On prend pour T un groupe compact quelconque, m sa mesure de Haar normalisée par $m(T) = 1$, $\{B_n\}$ une suite quelconque de sous-ensembles mesurables de T et $\{\theta_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune uniformément distribuée sur T (par rapport à m, évidemment). On pose $I_n = \theta_n \cdot B_n$($\cdot$ indiquant l'opération du groupe T); et on garde le reste des notations précédentes. Alors

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\nu}(1-l_n)^2}\int_T\prod_{n=1}^{\nu}(1-2l_n+\xi_n(t))dm(t) < \infty \tag{3}$$

entraine $P(F_\infty \neq \varnothing) > 0$ ($l_n = m(B_n)$).

L'idée d'une démonstration s'appuyant sur une technique différente de celle employée par Shepp pour la démonstration du Théorème 1 et qui permet de dire quelque chose sur la vitesse de convergence de $m(F_\nu)$, est la suivante:

Soit $\zeta_\nu = m(F_\nu)/(1-l_1)\cdots(1-l_\nu)$ et $\mathscr{F}_\nu$ la σ-algèbre engendrée par $\{\theta_1,\cdots,\theta_\nu\}$. Il est facile de voir que $\{\zeta_\nu, \mathscr{F}_\nu\}$ est une martingale, et l'expression qui figure dans (3), n'est autre chose que $\limsup_{\nu\to\infty} E(\zeta_\nu^2)$. Le théorème de convergence de martingales (voir [8]) entraine qu'il existe une variable aléatoire ζ, tel que $\zeta_\nu \to \zeta \geqq 0$ ($\nu \to \infty$) presque sûrement et aussi dans L^1. Donc, $E(\zeta) = E(\zeta_\nu) = 1$ et $P(\zeta > 0) > 0$. Si les ensembles B_n sont tous ouverts, la compacité de T implique $\{F_\infty \neq \varnothing\} \supset \{\zeta > 0\}$ et ceci achève la démonstration. Sinon, ils peuvent être approchés par des ouverts plus grands tout en conservant (3), à cause de la régularité de m, et on obtient le même résultat.

Par la suite, on va s'occuper du problème de recouvrement, quand au lieu d'intervalles on a des ensembles quelconques. Plus précisément, dans le Paragraphe 3, on montre que dans certaines conditions assez générales, les intervalles jouissent d'une propriété de maximalité pour le recouvrement, parmi les ensembles de mesures données. Finalement, dans le Paragraphe 4 on donne un exemple qui montre qu'en choisissant convenablement la forme des ensembles de mesures données, on peut toujours se situer dans le cas de non-recouvrement.

Je remercie M. J.-P. Kahane pour son orientation et ses remarques au cours de mon travail.

2. Une inégalite intégrale

Soit $\phi: R^K \to R^+$ une fonction mesurable de K variables réelles à valeurs réelles non-négatives. On peut voir qu'il existe une fonction $\phi^*: R^K \to R^+$ avec les propriétés suivantes:

i) $\phi^*(x_1, \cdots, x_K) = \Phi((x_1{}^2 + \cdots + x_K^2)^{\frac{1}{2}})$, Φ étant une fonction de $R^+ \to R^+$, décroissante et continue à gauche.

ii) $m_K(\{x : x \in R^K, \phi^*(x) > a\}) = m_K(\{x : x \in R^K, \phi(x) > a\})$ $\forall a \in R^+$ où m_K indique la mesure de Lebesgue ordinaire dans R^K.

La fonction ϕ^* s'appelera par la suite la "réarrangée symétrique" de ϕ. De façon analogue, si B est un sous-ensemble de R^K, le "réarrangé symétrique" B^* de B, sera l'ensemble $B^* = \{x : \chi_B^*(x) = 1\}$ où χ_B^* est la réarrangée symétrique de la fonction caractéristique χ_B de B. On voit bien que B^* est une boule centrée à l'origine, de même m_K-mesure que B.

THÉORÈME 2. *Soient* $f_0, f_1, \cdots, f_K$, $K+1$ *fonctions de* $R \to R^+$ *qui prennent seulement les valeurs* 0 *et* 1, *et* $g: R^K \to R^+$. *On définit*:

$$\psi(x_1, \cdots, x_K) = \int_R f_0(t) f_1(x_1 + t) \cdots f_K(x_K + t) dt.$$

Alors:

$$\int_{R^K} g \psi \, dm_K \leqq \int_{R^K} g^* ({}^*\psi)^* dm_K$$

ou

$${}^*\psi(x_1, \cdots, x_K) = \int_R f_0^*(t) f_1^*(x_1 + t) \cdots f_K^*(x_K + t) dt.$$

(Pour $K = 1$, ce théorème est dû à F. Riesz [10]; voir aussi [3] et [4]. Quant à la démonstration qui suit, elle est inspirée sur celle de [5, pp. 279–284], pour le cas $K = 1$.)

DÉMONSTRATION. On va d'abord démontrer le théorème quand g prend seulement les valeurs 0 et 1. Le reste sera plus simple.

Supposons donc que $f_0, f_1, \cdots, f_K$ sont les fonctions caractéristiques de certains sous-ensembles mesurables $A_0, A_1, \cdots, A_K$ de R respectivement et g la fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable B de R^K. Soit $S = \{x : {}^*\psi(x) > 0\}$.

a) Si $m_K(B) \geqq m_K(S)$, la démonstration est la suivante:

D'une part:

$$\int_{R^K} g\psi dm_K \leqq \int_{R^K} \psi dm_K = m_1(A_0)m_1(A_1)\cdots m_1(A_K) \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\int_{R^K} g^*({}^*\psi)^* dm_K = \int_{B^*} ({}^*\psi)^* d_{m_K}.$$

Mais $S^* = \{x : ({}^*\psi)^*(x) > 0\}$ d'où:

$$m_K(B^*) = m_K(B) \geqq m_K(S) = m_K(S^*)$$

et puisque B^* et S^* sont deux boules centrées à l'origine, ceci implique que $S^* \subset B^*$. Donc

$$\int_{B^*} ({}^*\psi)^* dm_K = \int_{R^K} ({}^*\psi)^* dm_K = \int_{R^K} {}^*\psi dm_K = m_1(A_0)m_1(A_1)\cdots m_1(A_k)$$

ce qui avec (4) prouve bien que $\int_{R^K} g\psi dm_K \leqq \int_{R^K} g^*({}^*\psi)^* dm_K$ dans le cas considéré.

b) Soit maintenant $m_K(B) < m_K(S)$.

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où chaque A_j $(j = 0, 1, \cdots, K)$ est l'union disjointe d'un nombre fini d'intervalles de longueur donnée $\Delta > 0$, et après passer à la limite. Soit aussi $m_K(B) > 0$.

On va introduire encore quelques notations.

Soit δ, $0 \leqq \delta \leqq \inf\{m_1(A_j) : 0 \leqq j \leqq K\} = \delta_0$.

On indiquera par $A_{0\delta}, A_{1\delta}, \cdots, A_{K\delta}$ les ensembles qui s'obtiennent respectivement en supprimant de $A_0, A_1, \cdots, A_K$ l'ensemble de mesure totale δ qui est "plus à droite"; $I_0, I_1, \cdots, I_K$ les intervalles centrés à l'origine de longueur $m_1(A_0), m_1(A_1), \cdots, m_1(A_K)$ et $I_{0\delta}, I_{1\delta}, \cdots, I_{K\delta}$ les intervalles centrés à l'origine de longueur $m_1(A_0) - \delta, m_1(A_1) - \delta, \cdots, m_1(A_K) - \delta$ (c'est-à-dire que $I_j = A_j^*$, $I_{j\delta} = A_{j\delta}^*$ $(j = 0, 1, \cdots, K)$). De la même façon on définit $\psi_\delta, {}^*\psi_\delta, S_\delta = \{x : {}^*\psi_0(x)$

$> 0\}$ et $D_\delta = m_K(S_\delta) - m_K(B)$. Avec les notations ci-dessus, on va prouver:

$$(5) \qquad D_\delta \geqq 0 \to \int_{R^K} g(\psi - \psi_\delta) dm_K \leqq \int_{R^K} g^*((^*\psi)^* - (^*\psi_\delta)^*) dm_K .$$

Si on démontre (5), la démonstration quand la fonction g prend seulement les valeurs 0 et 1 sera terminée. En effet, D_δ est continue et décroissante comme fonction de δ, $D_0 = m_K(S) - M_K(B) > 0$, $D_{\delta_0} = -m_K(B) < 0$, c'est-à-dire qu'il existe δ_1, $0 < \delta_1 < \delta_0$ tel que $D_{\delta_1} = 0$. Comme nous l'avons déjà vu dans (a), ceci implique:

$$\int_{R^K} g\psi_{\delta_1} dm_K \leqq \int_{R^K} g^*(^*\psi_{\delta_1})^* dm_K$$

qui avec (5) (pour $\delta = \delta_1$) donne la thèse.
On va montrer que pour chaque $x \in R^K$ on a:

$$(6) \qquad 0 \leqq \psi(x) - \psi_\delta(x) \leqq \delta .$$

Or, il est clair qu'il suffit de démontrer (6) pour $0 < \delta \leqq \Delta$. Parce que si $\Delta < \delta \leqq 2\Delta$, on supprime d'abord l'intervalle de longueur Δ qui est plus à droite dans chaque A_j $(j = 0, 1, \cdots, K)$ et puis on raisonne avec la nouvelle configuration, c'est-à-dire en changeant ψ par ψ_Δ et δ par $\delta - \Delta$. On obtient donc:

$$0 \leqq \psi(x) - \psi_\Delta(x) \leqq \Delta$$
$$0 \leqq \psi_\Delta(x) - \psi_\delta(x) \leqq \delta - \Delta$$

qui ensemble donnent (6). Et en général, si $p\Delta < \delta \leqq (p+1)\Delta$, la procédure est la même. Pour démontrer (6) pour $0 < \delta \leqq \Delta$ on a:

$$\psi(x) = \psi(x_1, \cdots, x_K) = m_1(A_0 \cap (-x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (-x_K + A_K))$$
$$\psi_\delta(x) = \psi_\delta(x_1, \cdots, x_K) = m_1(A_{0\delta} \cap (-x_1 + A_{1\delta}) \cap \cdots \cap (-x_K + A_{K\delta}))$$

et posons $y_h = \sup(-x_h + A_h)$ (on convient de mettre $x_0 = 0$) $(h = 0, 1, \cdots, K)$ et h_0 tel que $y_{h_0} = \min\{y_h : h = 0, 1, \cdots, K\}$. C'est-à-dire que y_{h_0} est l'extrême droite des ensembles $-x_h + A_h$ qui est le plus à gauche. Aussi:

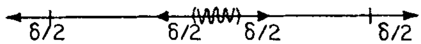
$$M_x = [A_0 \cap (-x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (-x_K + A_K)] \sim [A_{0\delta} \cap (-x_1 + A_{1\delta}) \cap \cdots \cap (-x_K + A_{K\delta})] .$$

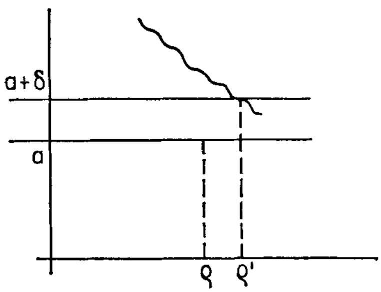
Il est clair que:

$$m_1(M_x) = \psi(x) - \psi_\delta(x) .$$

Donc, il suffit de voir que $M_x \subset [y_{h_0} - \delta, y_{h_0}]$. Or, si $t > y_{h_0}$ alors $t \notin M_x$ puisque $t \notin x_{h_0} + A_{h_0}$, et si $t < y_{h_0} - \delta$ et $t \in A_0 \cap (-x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (-x_K + A_K)$, on voit que $t < y_h - \delta$, $t \in x_h + A_h$ pour tout $h = 0,1,\cdots,K$, donc, que $t \in -x_h + A_{h\delta}$ pour tout $h = 0,1,\cdots,K$. Ça veut dire que: $t \in A_{0\delta} \cap (-x_1 + A_{1\delta}) \cap \cdots \cap (-x_K + A_{K\delta})$ et par conséquent, $t \notin M_x$. D'autre part, si $({}^*\psi_\delta)(x) > 0$ on voit facilement que: $({}^*\psi)(x) = ({}^*\psi_\delta)(x) + \delta$ dès que:

$$ {}^*\psi(x_1,\cdots,x_K) = m_1(I_0 \cap (-x_1 + I_1) \cap \cdots \cap (-x_K + I_K)) $$
$$ {}^*\psi_\delta(x_1,\cdots,x_K) = m_1(I_{0\delta} \cap (-x_1 + I_{1\delta}) \cap \cdots \cap (-x_K + I_{K\delta})). $$





Ceci implique que si $a \geqq 0$ on a:

$$ m_K(({}^*\psi_\delta)^* > a) = m_K({}^*\psi_\delta > a) \leqq m_K({}^*\psi > a + \delta) = m_K(({}^*\psi)^* > a + \delta) $$

et puisque les ensembles $\{({}^*\psi_\delta)^* > a\}$ et $\{({}^*\psi)^* > a + \delta\}$ sont deux boules centrées à l'origine on a:

$$ \{({}^*\psi_\delta)^* > a\} \subset \{({}^*\psi)^* > a + \delta\}. $$

Par conséquent:

$$ ({}^*\psi_\delta)^*(x) = b > 0 \Rightarrow ({}^*\psi)^*(x) > a + \delta \quad \forall a,\ 0 \leqq a < b \Rightarrow ({}^*\psi)^*(x) \geqq b + \delta. $$

Donc,

$$ x \in S_\delta^* \Rightarrow ({}^*\psi)^*(x) - ({}^*\psi_\delta)^*(x) \geqq \delta. \tag{7} $$

Si maintenant $D_\delta \geqq 0$, dès que ceci entraine $B^* \subset S_\delta^*$, et compte-tenu de (6) et (7), on aura:

$$ \int_{R^K} g(\psi - \psi_0)dm_K \leqq \delta \int_{R^K} g dm_K = \delta \int_{R^K} g^* dm_K = \delta \int_{B^*} g^* dm_K $$
$$ = \delta \int_{S_\delta^*} g^* dm_K \leqq \int_{S_\delta} g^*(({}^*\psi)^* - ({}^*\psi_\delta)^*) dm_K $$
$$ = \int_{R^K} g^*(({}^*\psi)^* - ({}^*\psi_\delta)^*) dm_K. $$

Ceci prouve (5) et achève donc cette partie de la démonstration.

Si maintenant g est une fonction simple non-négative, elle peut s'écrire sous la forme:

$$g = a_1\chi_{B_1} + \cdots + a_n\chi_{B_n}$$

où $a_1,\cdots,a_n > 0$; $B_1 \supset \cdots \supset B_n$.

Soit $h = a_1\chi^*_{B_1} + \cdots + a_n\chi^*_{B_n}$. On a $h = g^*$. En effet, posons $a_0 = 0$, $a_{n+1} = +\infty$ et il est clair que si $a_0 + a_1 + \cdots + a_j \leqq a < a_0 < a_1 + \cdots + a_{j+1}$ on a:

$$\{g > a\} = B_j \text{ et } \{h > a\} = B^*_j$$

c'est-à-dire que $m(g > a) = m(h > a)$ quel que soit a. Puisque on a aussi $h(x_1,\cdots,x_K) = \Phi(\sqrt{x_1^2, + \cdots + x_K^2})$ où Φ est décroissante et continue à gauche, on conclut que $h = g^*$. Par conséquent:

$$\int_{R^K} g\psi dm_K = \sum_{j=1}^n a_j \int_{R^K} \chi_{B_j}\psi dm_K \leqq \sum_{j=1}^n a_j \int_{R^K} \chi^*_{B_j}(^*\psi)^* dm_K =$$

$$= \int_{R^K} \left(\sum_{j=1}^n a_j\chi^*_{B_j}\right)(^*\psi)^* dm_K = \int_{R^K} g^*(^*\psi)^* dm_K.$$

Finalement, si g est non-négative, elle est limite d'une suite monotone croissante de fonctions simples, et pour terminer la démonstration il suffit de passer à la limite en appliquant le théorème de Beppo-Levi.

COROLLAIRE. *Soient* $A_0,A_1,\cdots,A_K$, $K+1$ *sous-ensembles mesurables de* R *et* $\psi(x_1,\cdots,x_K) = m_1(A_0 \cap (x_1 + A_1) \cap \cdots \cap (x_K + A_K))$. *Alors, si* $p \gtreqqless 1$ *on a*:

$$\| \psi \|_p \leqq \| ^*\psi \|_p$$

où $\| h \|_p = \left[\int_{R^K} | h |^p dm_K \right]^{1/p}$.

DÉMONSTRATION. Pour appliquer la théorème, changeons x_j en $-x_j$ $(j = 1,\cdots, K)$ et prenons $g = \psi^{p-1}$. En utilisant l'inégalité de Hölder et le théorème antérieur, on obtient:

$$\int_{R^K} \psi^p dm_K \leqq \int_{R^K} (\psi^*)^{p-1}(^*\psi)^* dm_K \leqq \left(\int_{R^K} (\psi^*)^p dm_K \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{R^K} (^*\psi)^{*p} dm_K \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{R^K} \psi^p dm_K \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{R^K} (^*\psi)^p dm_K \right)^{1/p}.$$

Donc, si chaque ensemble A_j $(j = 0,1,\cdots,K)$ est borné, alors la fonction ψ est à support compact, $\int_{R^K}\psi^p dm_K$ est fini et on conclut le résultat. Dans le cas contraire, il suffit de prendre l'intersection de A_j $(j = 0,1,\cdots, K)$ avec $B_n = \{x: x = (x_1,\cdots,x_K),\ \sum_{j=1}^{K} x_j^2 \leqq n^2\}$ et prendre la limite quand $n \to +\infty$ en utilisant le théorème de Beppo-Levi.

REMARQUE. Le raisonnement du théorème et du corollaire s'applique de la même forme, si au lieu de la droite R on prend le cercle, pourvu que chacun des ensembles $A_0, A_1,\cdots, A_K$ soit contenu dans un demi-cercle.

3. Maximalité des intervalles

Soit $B_1, B_2,\cdots$ une suite de sous-ensembles mesurables du cercle T des nombres réels modulo 1; $\theta_1,\theta_2,\cdots$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur T. On indique, comme avant, par l_n la mesure $m(B_n)$ (m est la mesure de Le'esgue normalisée sur T), $F_\nu = T \sim \bigcup_{n=1}^{\nu}(\theta_n + B_n)$, $F_\infty = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$.

THÉORÈME 3. *Avec les notations ci-dessus, supposons que chaque B_n soit contenu dans un demi-cercle.*

Soit $\{I_n\}$ une suite d'intervalles de longueurs $l_n = m(I_n)$, et indiquons par F_ν^*, F_∞^* les ensembles qui s'obtiennent en remplaçant $\{B_n\}$ par $\{I_n\}$. Alors:

$$P(F_\infty^* \neq \phi) > 0 \Rightarrow P(F_\infty \neq \phi) > 0.$$

C'est-à-dire, que si on n'a pas de recouvrement presque sûr avec les intervalles, alors, on n'a pas de recouvrement presque sûr avec des autres ensembles de même mesure.

DÉMONSTRATION. Nous savons que si χ_n est la fonction caractéristique de $\theta_n + B_n$ et $\xi_n(t) = E(\chi_n(0)\chi_n(t))$, alors:

$$E(m^2(F_\nu)) = \int_T \prod_{n=1}^{\nu} (1 - 2l_n + \xi_n(t))dt.$$

Si $n_1 < n_2 < \cdots < n_K$, on a:

$$\int_T \xi_{n_1}(t)\cdots\xi_{n_K}(t)dt = \int_T\int_T E(\chi_{n_1}(s)\chi_{n_1}(s+t))E(\chi_{n_2}(s)\chi_{n_2}(s+t))\cdots E(\chi_{n_K}(s)\chi_{n_K}(s+t))dtds$$

$$= \int_T\int_T E(\chi_{n_1}(s)\chi_{n_2}(s)\cdots\chi_{n_K}(s)\chi_{n_1}(s+t)\chi_{n_2}(s+t)\cdots\chi_{n_K}(s+t))dtds$$

$$= E(m^2((\theta_{n_1} + B_{n_1}) \cap (\theta_{n_2} + B_{n_2}) \cap \cdots \cap (\theta_{n_K} + B_{n_K})))$$

$$= \int_{T^K} m^2((x_1 + B_{n_1}) \cap (x_2 + B_{n_2}) \cap \cdots \cap (x_K + B_{n_K}))dx_1 \cdots dx_K.$$

Mais, d'après la remarque finale du § 2. on a:

$$\int_{T^K} m^2((x_1 + B_{n_1}) \cap \cdots \cap (x_K + B_{n_K}))dx_1 \cdots dx_K$$

$$\leqq \int_{T^K} m^2((x_1 + I_{n_1}) \cap \cdots \cap (x_k + I_{n_K}))dx_1 \cdots dx_K$$

c'est-à-dire que:

$$E(m^2(F_\nu)) \leqq E(m^2(F_\nu^*)).$$

D'autre part, $E(m(F_\nu)) = E(m(F_\nu^*)) = \Pi_{n=1}^{\nu}(1 - l_n)$.

D'après le Théorème 1, $E(m^2(F_\nu^*))/[E(m(F_\nu^*))]^2$ est borné indépendamment de ν et par conséquent, aussi $E(m^2(F_\nu))/[E(m(F_\nu))]^2$ est borné indépendamment de ν. La remarque faite après le Théorème 1 montre que ceci entraine la thèse.

4. Exemple

La proposition suivante montre qu'on peut choisir la suite d'ensembles $\{B_n\}$ avec des longueurs données $\{l_n\}$, de telle forme qu'on n'ait pas de recouvrement presque sûr.

PROPOSITION. *Soit $\{l_n\}$ une suite de nombres réels positifs, $0 < l_n < 1$. Alors, il existe une suite $\{B_n\}$ d'ensembles ouverts tel que $m(B_n) = l_n$ $\forall n$ et*

$$P(F_\infty \neq \emptyset) > 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après ce qu'on a vu, il suffit de choisir B_n de telle façon que

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\nu} (1 - l_n)^2} \int_F \prod_{n=1}^{\nu} (1 - 2l_n + \xi_n(t))dt$$

soit borné indépendamment de ν, où $\xi_n(t) = E(\chi_n(0)\chi_n(t))$, χ_n étant la fonction caractéristique de l'ensemble $\theta_n + B_n$.

Partons d'intervalles B_n^0 de longueurs l_n^0; soient χ_n^0 les fonctions indicatrices des B_n^0 et $\xi_n(t) = E(\chi_n^0(0)\chi_n^0(t))$. On définit par induction une suite d'entiers $\lambda_n \nearrow \infty$ et B_n les ensembles ayant la fonction caractéristique $\chi_n(t) = \chi_n^0(\lambda_n t)$.

Donc $\xi_n(t) = \xi_n^0(\lambda_n t)$.

Reste à montrer que pour un choix convenable des λ_n on a:

$$\int_T \prod_{n=1}^{\nu} (1 - 2l_n + \xi_n^0(\lambda_n t))dt \leqq A \prod_{n=1}^{\nu} (1 - l_n)^2 .$$

Ceci peut se faire à partir de la proposition suivante: si f est sommable et g est bornée sur T, alors:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_T f(t)g(\lambda t)dt = \int_T f(t)dt \int_T g(t)dt .$$

Donc, si $\varepsilon_n \searrow 0$ est donnée, on peut définir par induction les λ_n de façon que:

$$\int_T \prod_{n=1}^{\nu} (1 - 2l_n + \xi_n^0 (\lambda_n(t))dt \leqq (1 + \varepsilon_\nu) \int_T (1 - 2l_\nu + \xi_\nu^0(t))dt \int_T \prod_{n=1}^{\nu-1} (1 - 2l_n(1 + \xi_n^0(\lambda_n t))dt$$

$$= (1 + \varepsilon_\nu)(1 - l_\nu)^2 \int_T \prod_{n=1}^{\nu-1} (1 - 2l_n + \xi_n^0(\lambda_n t))dt$$

et il suffit de prendre $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ pour avoir l'exemple cherché.

Quand à la démonstration de la proposition utilisée, il est clair qu'il suffit de la démontrer quand f est la fonction caractéristique d'un intervalle I. Or, dans ce cas:

$$\int_T f(t)g(\lambda t)dt = \int_I g(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda I} g(u)du = \frac{1}{\lambda} \left\{ [\lambda m(I) - 1] \int_T g + \alpha \right\}$$

où $[a]$ est la partie entière de a et $|\alpha| \leqq 2 \int_T |g|$. Donc;

$$\int_T f(t)g(\lambda t)dt \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} m(I) \int_T g = \int_T f \int_T g .$$

Bibliographie

1. P. Billard, *Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **83** (1965), 131–179.

2. A. Dvoretzky, *On covering a circle by randomly placed arcs*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 199–203.

3. R. M. Gabriel, *The rearrangement of positive Fourier coefficients*, Proc. London Math. Soc. (2) **33** (1932), 32–51.

4. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Notes on the theory of series (VIII): an inequality.* J. London Math. Soc. **3** (1928), 105–110.

5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

6. J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath. Math. Mon. (1968).

7. B. Mandelbrot, *Renewal sets and random cutouts* and *On Dvoretzky coverings of the circle*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **22** (1972), 145–157 and 158–160.

8. P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, Herman, Paris, 1966.

9. S. Orey, *Random arcs on the circle*, University of Minnesota, 1971.

10. F. Riesz, *Sur une inégalité intégrale*, J, London Math. Soc. **5** (1930).

11. L. A. Shepp, *Covering the circle with random arcs*, Israel J. Math. **11** (1972), 328–345.

INSTITUTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA,
MONTEVIDEO, URUGUAY