Introducción a la Teoría de Números

5. Fracciones continuas - entrega 28/10

1. Mostrar que cualquier número racional no nulo puede representarse como fracción continua finita en exactamente dos maneras distintas.

2. Evaluar la fracción continua infinita $[2, \overline{1, 2, 1}]$.

3. Determinar la fracción continua infinita de $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

4. Sea $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ una fracción continua ($a_i > 0$ para $i \neq 0$). Si $b > 0$, entonces
$$[a_0, a_1, \dots, a_n + b] < [a_0, a_1, \dots, a_n]$$
si y sólo si n es impar.

5. Sea d un entero coprimo con 10. Probar que la expansión decimal de $1/d$ tiene período igual al orden de 10 módulo d. Sugerencia: $\frac{1}{10^r - 1} = \sum_{n \geq 1} 10^{-rn}$.

6. Sea $c_m = \frac{p_m}{q_m}$ el m-ésimo convergente parcial de $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ con $a_0 > 0$. Mostrar que
$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$
y
$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$
Sugerencia: notar que $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$.

7. $\star\star$ Probar que si $\alpha > 1$ es un irracional cuadrático tal que su conjugado $\alpha' \in (-1, 0)$ entonces la fracción continua de α es puramente periódica.

8. Sea N un natural, no cuadrado perfecto.
   (a) Probar que $\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}]$. Sugerencia: $\sqrt{N} + a_0$ está en las condiciones del problema anterior. [Se puede probar más aún: que $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}$, etc. es decir que hay una simetría extra en el desarrollo en fracción continua.]
   (b) Probar que
   $$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + a_0)p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N} + a_0)q_n + q_{n-1}}$$
   donde p_n/q_n es el n-ésimo convergente parcial de $\sqrt{N}$. Sugerencia: $\sqrt{N} + a_0 = r_{n+1}$ en la notación usada en clase.
   (c) Despejar p_{n-1} y q_{n-1} en términos de p_n y q_n, usando que 1 y $\sqrt{N}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (porque $\sqrt{N}$ es irracional).
   (d) Concluir que
   $$p_n^2 - N q_n^2 = (-1)^{n+1}$$

9. Encontrar una solución a la ecuación
$$X^2 - 14Y^2 = 1$$
con $X, Y \in \mathbb{Z}$, $Y \neq 0$.