Introducción a la Teoría de Números
1. Números primos – entrega 2/9

1. Usar la criba de Eratóstenes para hacer una lista de todos los primos hasta 100.
2. Probar que hay infinitos primos de la forma $6x - 1$.
3. Usar el Teorema de los Números Primos ($\pi(x) \sim x/\log x$) para deducir que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$
4. $\star$ Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio cuadrático con coeficientes enteros y $a > 0$, e.g. $f(x) = x^2 + x + 6$. Formular una conjetura sobre cuándo el conjunto
$$\{f(n) \ : \ n \in \mathbb{Z} \text{ y } f(n) \text{ es primo}\}$$
es infinito.
5. Si p es un entero positivo tal que p y $p^2 + 2$ son primos entonces $p = 3$.
6. Si $a^n - 1$ es primo, con $n \geq 2$, mostrar que $a = 2$ y que n es primo. Los primos de la forma $2^p - 1$ se llaman primos de Mersenne, por ejemplo $2^3 - 1 = 7$ y $2^5 - 1 = 31$. El número primo más grande conocido a la fecha es el primo de Mersenne $2^{32.582.657} - 1$. No se sabe si hay infinitos primos de Mersenne (se conocen 44 a la fecha).
7. Si $a^n + 1$ es primo, con $n \geq 2$, mostrar que a es par y que n es una potencia de 2. Primos de la forma $2^{2^t} + 1$ se llaman primos de Fermat. Por ejemplo, $2^{2^1} + 1 = 5$ y $2^{2^2} + 1 = 31$. No se sabe si hay infinitos primos de Fermat.
8. $\star$ Mostrar que $\sum{}' \, 1/n$, la suma sobre los enteros libres de cuadrados, diverge. Deducir que $\prod_p (1 + 1/p)$ diverge. Como $e^x > 1 + x$, concluir que $\sum_p 1/p$ diverge.
9. Calcular el máximo común divisor $\gcd(455, 1235)$ a mano.
10. Encontrar $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $2261x + 1275y = 17$.
11. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mostrar que la ecuación $ax + by = c$ tiene solución en enteros sii $\gcd(a, b) \mid c$.
12. Sea $d = \gcd(a, b)$. Mostrar que uno puede usar el algoritmo de Euclides para encontrar enteros m y n tales que $am + bn = d$. Sugerencia: escribir cada resto sucesivo como combinación lineal de a y b (e.g. $r = a - bq$ en el primer paso).
13. Para todo impar n, mostrar que $8 \mid n^2 - 1$. Si $3 \nmid n$, entonces $6 \mid n^2 - 1$.
14. Para todo n mostrar que $30 \mid n^5 - n$ y que $42 \mid n^7 - n$.