

Universal circles for the foliations associated to a Skewed $\mathbb{R}$ -covered Anosov flow on a compact 3-manifold

Ylan Hernandez-Motte

Encadré par **Rafael Potrie**

Travail de fin d'études

Magistère de Mathématiques de Grenoble

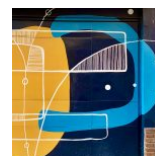


Table des matières

1	Introduction	2
2	Espace d'orbites d'un flot d'Anosov	3
2.1	Premières définitions	3
2.2	Dichotomie	4
2.3	Exemples	5
2.3.1	Flot Géodésique	5
2.3.2	Exemple de flot d'Anosov $S\mathbb{R} - covered$ sur une 3-variété hyperbolique	5
2.3.3	Flot d'Anosov de Reeb	5
2.4	Compactification de l'espace d'orbites	5
3	Quelques propriétés sur les feuilletages Anosov	6
3.1	Structure des orbites sur une feuille	6
3.1.1	Théorème de structure	6
3.1.2	Raffinement du théorème de structure	7
3.2	Tubulation au dessus de l'espace des feuilles	7
3.2.1	Définition et structure	7
3.2.2	Les marqueurs de E_∞	9
3.2.3	La section non marqueur	12
4	Cercles universels	15
4.1	Introduction	15
4.2	Construction de Calegari et Dunfield	16
4.3	Construction de Landri-Minsky-Taylor	22
4.4	Construction du cercle universel transverse	30
5	Dynamique de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^r$	32
5.1	Le cas hyperbolique	32
5.1.1	Arbres non Hausdorff au sens de Fenley	33
5.1.2	Les arbres non Hausdorff dans le contexte des flots d'Anosov	34
5.1.3	Points fixes super attractifs	36
5.1.4	Démonstration du théorème 5.1	37
5.2	Ouverture	37

1 Introduction

Introduits par Thurston dans [Thu97] les cercles universels ont joué un rôle important dans la géométrisation des 3 variétés Haken. Bien que Perelman est achevé la géométrisation des 3 variétés, les cercles universels demeurent importants à travers leur récente utilité dans l'avancement de la conjecture des L-espaces. Dans ce mémoire nous étudierons un exemple particulier de feuilletage tendu qui proviendra d'un flot d'Anosov $S\mathbb{R} - covered$.

Un flot d'Anosov φ sur une 3-variété fermée $\mathcal{M}$ est un flot qui possède la propriété remarquable que ses orbites se dilatent exponentiellement dans une direction et se contractent exponentiellement dans la direction transverse (voir définition 2.1). Cette propriété donne lieu à l'existence de deux feuilletages transverse de codimension 1 que l'on note $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ qui sont saturés par les orbites de φ . Le feuilletage $\mathcal{W}^s$ est appelé feuilletage faiblement stable car il possède la propriété que pour tout $x \in \mathcal{M}$, et $y \in \mathcal{W}^s(x)$ il existe une reparamétrisation σ telle que $d(\varphi^t(x), \varphi^{\sigma(t)}(y)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Une propriété analogue se produit en temps négatif pour $\mathcal{W}^u$. Ces deux feuilletages se relèvent au revêtement universel et passent au quotient pour munir l'espace d'orbites d'une structure de plan bifeuilleté (voir [Bar95]). Dans ce mémoire nous allons nous restreindre à une classe particulière de flots d'Anosov dont l'espace d'orbites possède un bifeuilletage qui s'apparente au feuilletage trivial de $\mathbb{R}^2$ par les abscisses et ordonnées mais qui est *biaisé* (voir théorème 2.7). Parmi cette classe de flots que l'on appellera $S\mathbb{R} - covered$ figurent notamment les flots géodésiques sur des surfaces hyperboliques compactes ou encore les flots d'Anosov de Reeb (voir section 2.3).

Une autre propriété remarquable des feuilletages associés à un flot d'Anosov qui nous vient d'un résultat profond de A.Candel ([Can93]) nous donne l'existence d'une métrique lisse continue feuille à feuille g telle que sa restriction à chaque feuille soit hyperbolique. On obtient alors en particulier que chaque feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ du feuilletage relevé est quasi-isométrique à $\mathbb{H}^2$ ce qui permet de la compactifier en rajoutant un cercle à l'infini $\partial_\infty \lambda$. On peut maintenant définir la *tubulation* au dessus de $\mathcal{W}^u$ qui est l'ensemble $\bigcup_{\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u} \partial_\infty \lambda$. Cet ensemble possède une structure de fibré en cercle au dessus de l'espace des feuilles de $\mathcal{W}^u$, dans le cas $S\mathbb{R} - covered$ il sera même homéomorphe au cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Il est par ailleurs muni d'une action du groupe fondamental héritée de l'action par monodromie sur le revêtement universel. Un **cercle universel** pour $\mathcal{W}^u$ est alors un cercle $\mathcal{C}$ muni d'une action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}$ et de projections monotones $\pi_\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \partial_\infty \lambda$ qui font commuter les actions du groupe fondamental sur la tubulation et sur le cercle universel. Avec cette construction on peut alors décomposer l'action du groupe fondamental sur la tubulation et une action sur l'espace des feuilles et une action sur le cercle universel. Pour un même feuilletage on peut construire différents cercles universels, on introduira la notion d'*isomorphisme* de cercles universels pour comparer les différentes constructions entre elles.

Le mémoire sera structuré de la façon suivante, dans la section 2 nous rappellerons les résultats classiques sur les flots d'Anosov et donnerons des exemples de flots d'Anosov $S\mathbb{R} - covered$. La section 3 aura pour but dans un premier temps d'introduire un théorème de structure qui nous donne la *forme* des orbites du flot sur chaque feuilles et dans un second temps de construire rigoureusement la tubulation $E_\infty = \bigcup_{\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u} \partial_\infty \lambda$. Nous montrerons enfin que celle-ci est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ dans le cas $S\mathbb{R} - covered$ et qu'elle possède une section particulière que l'on nommera la section *non-marqueur*. Le cœur du mémoire sera contenu dans la section 4, dans cette section nous verrons trois constructions distinctes de cercles universels. La première construction provient de Calegari et Dunfield et est faite dans un cadre plus général dans [CD02]. Cette construction donnera lieu à deux cercles universels $\mathcal{C}^l$ et $\mathcal{C}^r$ qui seront *non-isomorphes*. Ce non isomorphisme entre eux se traduira par le fait que l'action du groupe fondamental sur $\mathcal{C}^l$ possède un point fixe global alors que celle sur $\mathcal{C}^r$ est minimale. La seconde construction provient de [BT25] et utilise la construction plus générale d'un cercle universel lorsqu'un feuilletage est transverse à un flot pseudo-Anosov faite dans [LMT24]. Cette construction nous donnera deux cercles universels isomorphes $\partial^+ \mathcal{O}_\varphi$ et $\partial^- \mathcal{O}_\varphi$. Le lecteur remarquera que la notation fait référence au bord de l'espace d'orbites, cette référence n'est pas anodine, en effet les deux cercles construits ici feront appel au bord l'espace d'orbites dans la compactification de Fenley. Les deux premières constructions seront liées par le fait que $\partial^\pm \mathcal{O}_\varphi$ est un revêtement double de $\mathcal{C}^l$. La troisième et dernière construction de cette section est peut être la plus important mais technique. Cette construction faite dans [Fen02] donnera lieu à un cercle universel que l'on notera $\mathbb{S}_\partial^1$. Ce cercle sera isomorphe à $\mathcal{C}^r$, mais à travers un résultat important qui l'identifie au cercle universel construit comme bord de l'espace d'orbites d'un flot pseudo-Anosov transverse et régulant à $\mathcal{W}^u$ (voir définition 4.38) on pourra obtenir des informations importantes en vue de la démonstration du théorème central de ce mémoire qui viendra dans la section 5. La section 5 se placera dans le cadre d'une 3 variété hyperbolique fermée pour permettre l'identification entre $\mathbb{S}_\partial^1$ et le bord de l'espace d'orbites d'un flot pseudo-Anosov transverse et régulant à $\mathcal{W}^u$. A l'aide cette

identification on pourra montrer le résultat suivant sur la dynamique de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^r$:

Théorème central : *Soit $\mathcal{M}$ une 3 variété hyperbolique fermée et φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR}$ – covered sur $\mathcal{M}$. Il existe $\mathfrak{k}(\varphi) > 0$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, γ^k agit avec un nombre fini de points fixes sur $\mathcal{C}^r$ qui sont alternativement attractifs et répulsifs.*

Je souhaite remercier Erwan Lanneau sans qui je n'aurais peut être jamais découvert la théorie des flots d'Anosov, Ana Rechtman qui m'a encadré dans mon précédent stage sur l'étude de l'espace d'orbites d'un flot d'Anosov et qui, avec Erwan m'ont mis en contact avec Rafael Potrie pour rendre ce stage possible. Je souhaite aussi remercier toute l'équipe éducative et administrative du magistère de Grenoble pour la formation de grande qualité que j'ai reçu mais aussi pour l'aide sur les financements me permettant de partir en Uruguay (merci à Sara et Grégory notamment). Je souhaite remercier chaleureusement toutes les personnes que j'ai rencontrées en Uruguay : Françoise dal'Bo, Ioannis Iakovoglou, Juan Kurchan, Pierre Badra, Mariana Haim et tant d'autres que je ne pourrais toutes les citer. Pour terminer, un immense merci à Rafael Potrie qui m'a encadré de la meilleur des manières, en me laissant choisir ce que j'allais étudier tout en me guidant quand je partais trop loin, j'espère que cette collaboration n'est que le début d'une longue histoire !

Bonne lecture !

2 Espace d'orbites d'un flot d'Anosov

2.1 Premières définitions

On fixe dans tout ce mémoire $\mathcal{M}$ une 3-variété fermée.

L'objectif de cette section est de rappeler certains résultats connus sur les flots d'Anosov. Dans ce mémoire on se restreindra à l'étude des flots d'Anosov lisses, pour autant un grand nombre de résultats présentés ici s'avèrent être vrais pour la classe plus générale des flots *Pseudo-Anosov* (voir [BM25, Définition 1.1.10]). Lorsque ce sera le cas nous le préciserons et donnerons en référence une preuve plus générale. Commençons par rappeler la définition de flot d'Anosov lisse :

Définition 2.1 [Flot d'Anosov lisse] Un $\mathcal{C}^1$ flot $\varphi^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est dit d'Anosov s'il existe une décomposition du fibré tangent $T\mathcal{M} = E^s \oplus \mathbb{R}X \oplus E^u$ qui soit $D\varphi^t$ invariante et deux constantes $a, b > 0$ telles que :

i) X est le champ de vecteurs qui engendre φ^t ;

ii) pour tout $v \in E^s$, et $t > 0$

$$\|D\varphi^t(v)\| \leq be^{-at}\|v\| ;$$

iii) pour tout $v \in E^u$, et $t > 0$

$$\|D\varphi^{-t}(v)\| \leq be^{-at}\|v\|.$$

La décomposition du fibré tangent pour un flot d'Anosov lisse s'intègre de façon à donner quatre feuilletages :

Théorème 2.2 (Existence de feuilletages transverses [Ano63]). *Soit φ^t un flot d'Anosov lisse sur $\mathcal{M}$, alors les distributions $E^s, E^u, E^s \oplus \mathbb{R}X, E^u \oplus \mathbb{R}X$ sont uniquement intégrables et donnent donc lieu à deux couples de feuilletages transverses que l'on note $\mathcal{W}^{ss}, \mathcal{W}^{su}$ pour feuilletages stable fort et instable fort et $\mathcal{W}^s, \mathcal{W}^u$ pour les feuilletages stable faible et instable faible.*

Par ailleurs on peut relever le flot pour obtenir deux paires de feuilletages transverses $(\widetilde{\mathcal{W}}^s, \widetilde{\mathcal{W}}^u)$ et $(\widetilde{\mathcal{W}}^{ss}, \widetilde{\mathcal{W}}^{su})$ dans le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$. On notera $\tilde{\varphi}$ le flot relevé. L'existence de cette paire de feuilletage et les propriétés dynamiques du flot sur ceux-ci motivent la notion plus générale de flot d'Anosov topologique ([BM25, Définition 1.1.7]). De façon informelle un flot φ^t est un flot d'Anosov **topologique** si il existe de deux feuilletages topologiquement transverses saturés par les orbites du flot de telle sorte que le flot *contracte* les orbites dans les feuilles stables et les *dilate* dans les feuilles instables.

Une des caractéristiques importantes des flots d'Anosov lisses réside dans le fait que ceux-ci possèdent la stabilité structurelle suivante :

Théorème 2.3 (Stabilité structurelle [Ano67]). *Soit φ^t un flot d’Anosov lisse sur $\mathcal{M}$. Il existe un voisinage pour la topologie C^0 , tel que tout flot dans ce voisinage est équivalent en orbites à φ^t . De plus pour tout flot ψ^t suffisamment proche dans la topologie C^1 , on a ψ^t Anosov et équivalent en orbite à φ^t .*

Un objet important que l’on doit présenter maintenant est l’espace d’orbites associé à un flot d’Anosov lisse. On considère l’espace $\mathcal{O}_\varphi := \widetilde{\mathcal{M}}/\tilde{\varphi}$ qui revient à quotienter le revêtement universel de $\mathcal{M}$ par la relation *être dans la même orbite* du flot relevé. On peut définir cet espace dans le cadre plus général des flots d’Anosov topologiques et aussi des flots Pseudo-Anosov (voir [BM25, Section 1]). Barbot ([Bar95]) puis Fenley-Mosher ([FM01]) ont respectivement montrés que l’espace d’orbites d’un flot d’Anosov puis d’un pseudo-Anosov est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ muni d’une structure de plan bifeuilleté qui provient du bifeuilletage Anosov (resp. pseudo-Anosov). Avant d’étudier plus en détail l’espace d’orbites nous introduisons un autre espace qui sera tout autant important : *l’espace des feuilles*.

Définition 2.4 (Espace des feuilles) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété $\mathcal{M}$, on note $\Lambda(\mathcal{F})$ l’ensemble quotient $\widetilde{\mathcal{M}}/\sim$ où $\sim$ est la relation *être dans la même feuille*.

Pour un feuilletage Anosov on notera $\mathcal{L}^{s/u}$ les espaces des feuilles stables (resp. instables). Pour un flot d’Anosov lisse (plus généralement topologique) les espaces des feuilles dans le revêtement universel possèdent la structure suivante :

Proposition 2.5. *Soit φ un flot d’Anosov lisse sur $\mathcal{M}$ alors les espaces de feuilles $\mathcal{L}^s$ et $\mathcal{L}^u$ sont des 1-variétés connexes, simplement connexes non nécessairement Hausdorffs.*

Démonstration. On pourra consulter [BM25, Proposition 1.3.9] pour une esquisse de preuve. $\square$

Pour décrire les points non séparés on donne la définition suivante :

Définition 2.6 (Feuilles non séparées) Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage et λ, λ' deux feuilles de $\mathcal{F}$. On dit que λ et λ' sont **non séparées** si pour tout voisinages ouverts $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ dans $\Lambda(\mathcal{F})$ de λ et λ' on a $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$. On dit qu’une feuille λ est **branchée** si il existe une feuille λ' telle que λ et λ' soient non séparées.

A l’inverse on dira que deux feuilles sont **comparables** si il existe un arc transverse au feuilletage les reliant. Enfin, dans le cas d’un flot d’Anosov lisse lorsque les espaces de feuilles sont Hausdorffs ils sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ et on dira alors que φ est **$\mathbb{R}$ -covered**.

Passons maintenant à une étude un peu plus approfondie de l’espace d’orbites.

2.2 Dichotomie

Pour la suite de ce mémoire nous allons nous restreindre aux flots d’Anosov lisses $\mathbb{R}$ -covered. Il existe deux familles de flots d’Anosov $\mathbb{R}$ -covered. Pour les distinguer on énonce un théorème qui caractérise entièrement les espaces d’orbites possibles dans cette situation :

Théorème 2.7. *Soit φ un flot d’Anosov $\mathbb{R}$ -covered, alors l’une des deux situations se produit :*

1. $\mathcal{O}_\varphi$ est isomorphe au plan bifeuilleté trivial (feuilletage de $\mathbb{R}^2$ par les coordonnées) ;
2. $\mathcal{O}_\varphi$ est isomorphe à la bande ouverte $y = x, y = x + 1$ trivialement feuilletée (voir la figure 1 issue de [BM25]).

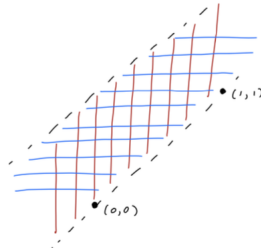


FIGURE 1 – Plan **Skew**

La démonstration de ce théorème combine plusieurs résultats de Barbot et Fenley, on peut en trouver une démonstration dans l’article de Barthelmé et Mann : [BM25, Théorème 2.6.1]. On dira que φ est un flot d’Anosov **skewed $\mathbb{R}$ -covered** ($S\mathbb{R}$ – covered) si son espace d’orbites correspond au second point du théorème ci dessus. C’est cette famille de flots d’Anosov qui nous intéressera dorénavant.

2.3 Exemples

Dans cette section on développe brièvement des exemples de flots d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$.

2.3.1 Flot Géodésique

On considère ici S une surface hyperbolique compacte, on peut alors identifier S avec le quotient $\mathbb{H}^2/\Gamma$ où $\Gamma \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe cocompact. Le flot géodésique sur S est alors défini comme : $\varphi_{geod}^t : T^1S \rightarrow T^1S$ qui à un couple (p, v) associe $(\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t))$ avec γ l’unique géodésique vérifiant $\gamma(0) = p$ et $\frac{d}{dt}\gamma(0) = v$. Intuitivement l’action du flot géodésique consiste à parcourir pendant une distance t la géodésique associée au couple (p, v) . Les orbites du flot sont alors les géodésiques, et on peut montrer que ce flot est un flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$. Pour une preuve de ce résultat on invite le lecteur à consulter [FH19, Section 2.2] et [BM25, Section 4.2]. Pour terminer cette section on décrit la variété stable et instable passant par un point $(p, v) \in T^1S$. Pour cela on considère γ_v la géodésique associée au couple (p, v) et on note $\gamma_v(-\infty)$, $\gamma_v(+\infty)$ sa limite négative (resp. positive). On considère alors l’ensemble des géodésiques ayant pour limite négative $\gamma_v(-\infty)$, on note cet ensemble $\mathcal{W}^u(p, v)$ et on note $\mathcal{W}^s(p, v)$ l’ensemble des géodésiques ayant pour limite positive $\gamma_v(+\infty)$. L’action du flot géodésique sur ces ensembles vérifie exactement les conditions de la définition [BM25, Definition 1.1.7] et la forme des orbites sur ces ensembles est particulièrement intéressante. En effet, par construction on voit clairement l’apparition du point *entonnoir* du théorème 3.6 ce qui motive en quelque sorte ce résultat.

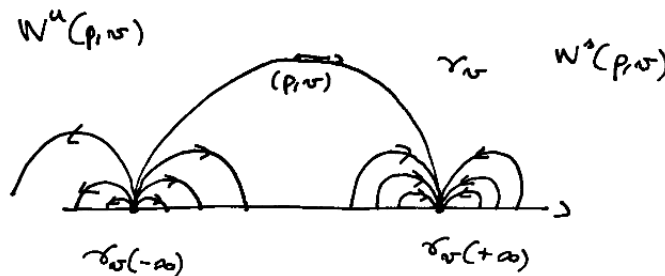


FIGURE 2 – Variété stable et instable.

Le flot géodésique est un flot d’Anosov qui *vit* dans le fibré unitaire tangent de S . T^1S est une 3 variété compacte qui est un fibré de Seifert, il serait maintenant intéressant de trouver un exemple de flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$ dans une 3-variété hyperbolique.

2.3.2 Exemple de flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur une 3-variété hyperbolique

On invite le lecteur à consulter [BM25, Exemple 1.2.5] pour un rappel sur les de chirurgies de Dehn. Une façon de construire un flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur une 3 variété hyperbolique revient à effectuer des chirurgies de Dehn sur des orbites periodiques du flot géodésique sur une surface hyperbolique. En effet, Fenley a montré que si on effectue des chirurgies de Dehn orientées de façon cohérente sur un nombre fini d’orbites périodiques du flot géodésique sur S_g avec $g \geq 2$ on obtient un flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$, par ailleurs dans de nombreuses situations la variété obtenue est hyperbolique (voir [Fen94, Théorème D]).

2.3.3 Flot d’Anosov de Reeb

Le dernier exemple que l’on mentionne pour une question de diversité sont les flot d’Anosov de Reeb (voir [FH19, Definition 8.2.2]), un résultat relativement récent par T.Marty dans [Mar25] montre que tout flot d’Anosov $\mathcal{SR} - covered$ est orbite équivalent à un flot d’Anosov de Reeb.

2.4 Compactification de l’espace d’orbites

Dans [Fen12] Fenley a montré que l’on peut compactifier l’espace d’orbites d’un flot d’Anosov (et plus généralement d’un pseudo-Anosov) en un disque $\bar{\mathcal{O}}_\varphi = \mathcal{O}_\varphi \cup \partial\mathcal{O}_\varphi$. Par ailleurs on peut prolonger continuellement

l'action du groupe fondamental sur $\mathcal{O}_\varphi$ en une action sur $\bar{\mathcal{O}}_\varphi$. Dans les grandes lignes, pour compactifier l'espace d'orbites, Fenley considère tout d'abord les points limite des arcs de feuilletages, cet ensemble possède un ordre circulaire. Si on prend 3 points de cet ensemble on peut considérer un cercle suffisamment grand qui intersecte les arcs de feuilletages qui limitent sur notre triplet de point. On peut alors compléter cet ensemble en un cercle que l'on note $\partial\mathcal{O}_\varphi$. On montre enfin que l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{O}_\varphi$ s'étend continuellement en une action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \bar{\mathcal{O}}_\varphi = \mathcal{O}_\varphi \cup \partial\mathcal{O}_\varphi$. Une autre construction de la compactification de l'espace d'orbites a été effectuée dans [Bon24].

3 Quelques propriétés sur les feuilletages Anosov

3.1 Structure des orbites sur une feuille

3.1.1 Théorème de structure

L'objectif de cette section est de préparer le terrain pour la section suivante sur les cercles universels. On considère alors φ un flot d'Anosov sur $\mathcal{M}$ et l'on note $\mathcal{W}^s, \mathcal{W}^u$ ses feuilletages stable et instable faibles. On notera par ailleurs $\mathcal{W}^{ss}, \mathcal{W}^{uu}$ ses feuilletages stable et instable forts pour un reparamétrage donné. Ces deux dernier feuilletages seront utiles par la suite pour *tilter* le flot dans la section 4.3.

Pour commencer nous allons étudier la forme des orbites du flot relevé sur chaque feuille stable et instable faibles.

Définition 3.1 Une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ est une *quasi-géodésique* s'il existe $k \geq 1, c \geq 0$ tels que pour tout $t_1, t_2 \in I$:

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq \frac{1}{k}|t_1 - t_2| - c$$

et

$$|t_1 - t_2| \leq kd(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + c$$

On dira qu'une famille de courbes est *uniformément* quasi-géodésique si les constantes k et c sont les mêmes pour toute la famille.

Remarque 3.2. Dans le cas d'un flot d'Anosov la métrique peut être choisie de façon à ce que celle-ci varie *continuellement* de feuille en feuille et que sa restriction à chaque feuille soit *hyperbolique*. La justification de ce résultat invoque un théorème de Candel (voir [Can93]) et l'impossibilité de l'existence d'une mesure transverse invariante pour une dynamique Anosov (voir [Pot25, Section 5] pour une explication). Pour cette métrique on obtient que toute feuille stable faible et instable faible est localement isométrique à $\mathbb{H}^2$, ainsi son revêtement universel est isométrique à $\mathbb{H}^2$ ce qui permet donc de la compactifier en rajoutant un cercle à l'infini qui correspond au bord de $\mathbb{H}^2$ dans le modèle du disque de Poincaré. Pour une feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ (resp. $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$) on notera $\partial_\infty \lambda$ son bord à l'infini pour la métrique hyperbolique.

On présente maintenant un premier résultat qui étend un résultat de Fenley ([Fen94, Lemme 5.7]) :

Théorème 3.3. [Pot25, Proposition 5.3] Soit φ un flot d'Anosov sur $\mathcal{M}$. Alors les orbites du flot sont des *quasi-géodésiques uniformes* dans leurs feuilles stables (resp. instables).

La force de ce théorème réside dans le fait qu'il permettra de mettre en avant une structure très forte des orbites dans les feuilles relevées. En effet on verra que les orbites vont toutes avoir un point limite commun qui sera attractif ou répulsif. Ce point particulier jouera un rôle central dans la suite du mémoire.

Définition 3.4 Soit $\mathcal{T}$ un feuilletage par lignes sur $\mathcal{H}$ une surface quasi-isométrique à $\mathbb{H}^2$, on dit que le feuilletage est un *ventilateur quasi-géodésique* si $\mathcal{T}$ est un feuilletage par des quasi-géodésiques (uniformes) tel qu'il existe un point $\xi \in \partial\mathcal{H}$ et une bijection entre les feuilles de $\mathcal{T}$ et les points de $\partial\mathcal{H} \setminus \{\xi\}$ qui envoie chaque point $\eta \in \partial\mathcal{H} \setminus \{\xi\}$ sur une feuille de $\mathcal{T}$. On appelle ξ un *point entonnoir*.

On verra que cette définition correspond au feuilletage par orbites sur les feuilles stables et instables d'un feuilletage Anosov dans le revêtement universel. On présente une dernière définition qui elle correspondra au feuilletage par les feuilles fortement stables (resp. instables) dans une feuille stable (resp. instable).

Définition 3.5 Soit $\mathcal{T}$ un feuilletage par des lignes sur $\mathcal{H}$ une surface quasi-isométrique à $\mathbb{H}^2$, on dit que ce feuilletage est *horocyclique* si l'espace des feuilles de $\mathcal{T}$ est séparé et si il existe un point $\xi \in \partial\mathcal{H}$ tel que chaque feuille $l \in \mathcal{T}$ vérifie que son adhérence est exactement $l \cup \{\xi\}$.

En utilisant la remarque 3.2 et les propriétés dynamiques d'un flot d'Anosov (pas forcément $\mathcal{SR}$ -covered) on peut en déduire le théorème suivant qui décrit les feuilletages par orbites et feuilles fortes sur les feuilles du revêtement universel :

Théorème 3.6. [Théorème de Structure] [Pot25, Theorem 5.6]

Soit φ un flot d'Anosov sur $\mathcal{M}$. Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{W}}^s$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}^u$) sont uniformément quasi-isométriques à $\mathbb{H}^2$, pour chaque feuilles $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}^u$) le feuilletage par orbites est un ventilateur quasi-géodésique possédant un point entonnoir $\theta_\lambda \in \partial_\infty \lambda$ qui est attractif (resp. répulsif). Enfin ce feuilletage est transverse au feuilletage par les feuilles fortement stables $\widetilde{\mathcal{W}}^{ss}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$) qui lui est horocyclique avec θ_λ comme point à l'infini.

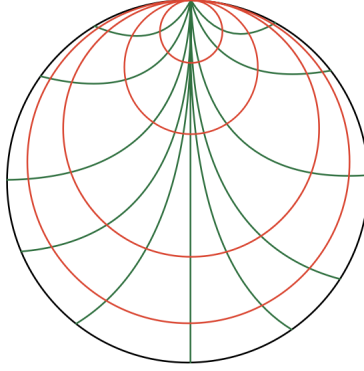


FIGURE 3 – Feuilletage par orbites d'un feuilletage instable, les orbites sont en vert et les feuilles fortement instables en rouge.

Remarque 3.7. Le théorème de structure s'applique simultanément aux feuilletages stable et instable. C'est un résultat qui est indépendant de la métrique choisie. En revanche il peut être intéressant de présenter une notion plus forte qui sera utile pour *tilter* le flot dans la section 4.3. Cette notion en revanche ne pourra s'appliquer simultanément aux deux feuilletages.

3.1.2 Raffinement du théorème de structure

Définition 3.8 Soit φ un flot d'Anosov sur une 3 variété fermée. On dit que $\mathcal{W}^u$ (resp. $\mathcal{W}^s$) possède une forme *adaptée* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- i) Il existe une métrique lisse g sur $\mathcal{M}$ continue feuille à feuille telle que sa restriction à chaque feuille de $\mathcal{W}^u$ (resp. $\mathcal{W}^s$) est hyperbolique ;
- ii) les orbites de φ dans les feuilles de $\mathcal{W}^u$ (resp. $\mathcal{W}^s$) sont des géodésiques ;
- iii) les feuilles du feuilletage fortement instable $\mathcal{W}^{uu}$ (resp. fortement stable $\mathcal{W}^{ss}$) sont des projections d'horocycles dans $\mathcal{W}^u$ (resp. $\mathcal{W}^s$).

Le résultat utile est le suivant :

Proposition 3.9. [BFP23, Corollaire 5.23]

Il existe un flot d'Anosov φ' orbite équivalent à φ tel que $\mathcal{W}^u$ soit adapté à φ' . Il existe de même φ'' orbite équivalent à φ tel que $\mathcal{W}^s$ soit adapté à φ'' .

Dans tout ce mémoire on supposera $\mathcal{W}^u$ adapté à φ , quand ce ne sera pas le cas on le précisera.

3.2 Tubulation au dessus de l'espace des feuilles

3.2.1 Définition et structure

Étant donné que d'après la section précédente on peut associer à chaque feuilles $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ un bord à l'infini $\partial_\infty \lambda \simeq \mathbb{S}^1$ on veut en quelque sorte *recoller* les bords de toutes les feuilles les uns après les autres. Dans le cas $\mathcal{SR}$ -covered, comme l'espace des feuilles est homéomorphe à $\mathbb{R}$ il semblerait normal que si on recolle tout les bords des feuilles on obtienne un ensemble homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, ce sera le cas. L'objectif de cette

section sera alors de construire cet espace et de justifier qu'il a bien la structure voulue. Si nous avons pour objectif de le décrire en détail dans le cas $\mathcal{SR} - covered$ nous donneront une construction assez générale qui sera éventuellement utile plus tard. Dans cette section on utilise la construction faite dans [Cal07, Sec 7.2].

Définition 3.10 Soit $\mathcal{T}$ un feuilletage par feuilles quasi-isométriques à $\mathbb{H}^2$. Pour $l \in \mathcal{T}$ on note $\partial_\infty l$ son bord à l'infinie pour la métrique hyperbolique. On appelle **tubulation** au dessus de $\mathcal{L}$ l'ensemble :

$$E_\infty = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \partial_\infty l$$

On vient maintenant construire une topologie sur E_∞ . Pour cela on considère τ un arc transverse à $\mathcal{T}$, on pose alors :

$$e_\tau : UT\tilde{\mathcal{T}}|_\tau \longrightarrow E_\infty|_\tau$$

définie comme suit :

Soit $v \in UT\tilde{\mathcal{T}}|_\tau$ on lui associe alors $e_\tau(v) \in E_\infty|_\tau$ qui correspond à la limite positive de la géodésique passant par $l \cap \tau$ et ayant pour vecteur dérivé v .

Voici un dessin pour illustrer tout cela :

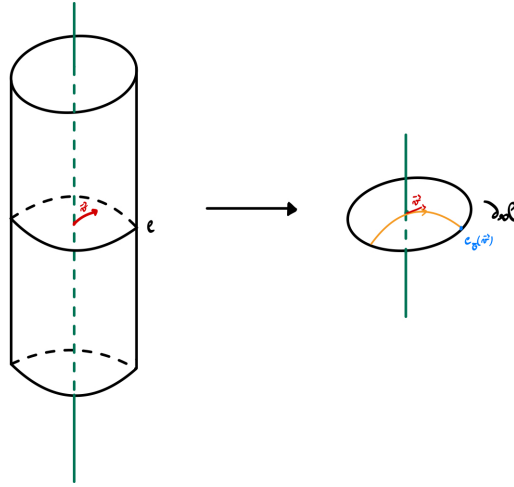


FIGURE 4 – Action des applications e_τ

On munit E_∞ de la topologie faisant des e_τ des homéomorphismes. Il faut en revanche faire attention, pour que cette topologie soit bien définie il faut que si τ_1, τ_2 se projettent sur le même intervalle dans $\mathcal{L}$ alors $e_{\tau_2}^{-1} \circ e_{\tau_1}$ réalise un homéomorphisme entre $UT\tilde{\mathcal{T}}|_{\tau_1}$ et $UT\tilde{\mathcal{T}}|_{\tau_2}$. Pour un flot d'Anosov (pas forcément $\mathcal{SR} - covered$) la métrique qui munit les feuilles d'une structure hyperbolique varie **continuellement**, alors par définition des e_τ il devient direct que la composition ci dessus définit un homéomorphisme. On peut maintenant énoncer le théorème de structure suivant :

Théorème 3.11. Soit φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur $\mathcal{M}$, alors la tubulation au dessus de $\mathcal{L}^u$ associée à $\tilde{\mathcal{W}}^u$ (resp. $\mathcal{L}^s$ associée à $\tilde{\mathcal{W}}^s$) est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. De plus cet ensemble est muni d'une action de $\pi_1(\mathcal{M})$ qui provient de l'action par monodromie sur $\tilde{\mathcal{M}}$.

Démonstration. On effectue la preuve pour la tubulation associée au dessus de $\mathcal{L}^u$, une preuve analogue peut être faite pour la tubulation au dessus de $\mathcal{L}^s$. Par ce qui a été fait précédemment on obtient que E_∞ possède une structure de fibré en cercle ($UT\tilde{\mathcal{T}}|_\tau$ ayant une structure de fibré en cercle au dessus de la projection dans $\mathcal{L}$ de tout arc transverse τ), ainsi comme $\mathcal{L}^u \simeq \mathbb{R}$ et par simple connexité de $\mathbb{R}$ on obtient directement que $E_\infty \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}$.

Pour ce qui est de l'action, pour $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ et $(l, t) \in E_\infty$ on définit :

$$\gamma \cdot (l, t) := (\gamma \cdot l, \gamma \cdot t)$$

Si l'action de γ sur l est bien connue, il faut prendre un peu plus de pincettes pour définir $\gamma \cdot t$. Pour cela, on remarque que pour $t \in \partial_\infty l \setminus \theta_l$, par le théorème de structure il existe une unique orbite qui tend vers t . On

note cette orbite $o = \{\tilde{\varphi}^t(x_0)\}$ pour un certain $x_0 \in l$ et on pose alors $\gamma \cdot t := \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}^t(\gamma \cdot x_0)$. Pour θ_l on pose simplement $\gamma \cdot \theta_l := \theta_{\gamma \cdot l}$ et par construction on peut facilement vérifier que l'on obtient alors bien une action de $\pi_1(\mathcal{M})$ sur E_∞ . $\square$

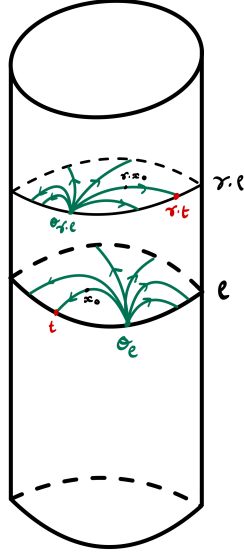


FIGURE 5 – Visualisation de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright E_\infty$.

Remarque 3.12. La preuve précédente s'adapte au cas non $\mathbb{R}$ -covered, en revanche dans cette situation E_∞ possède uniquement une structure de fibré en cercle au dessus de $\mathcal{L}^u$ qui n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

3.2.2 Les marqueurs de E_∞

On souhaite maintenant définir un objet qui permet de relier les cercles à l'infini $\partial_\infty \lambda$ de façon ensuite à construire un cercle universel qui encodera une partie de l'information de l'action de $\pi_1(\mathcal{M})$ sur E_∞ .

Définition 3.13 Soit $\mathcal{T}$ un feuilletage par des feuilles hyperboliques et $\lambda \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Un point $\xi \in \partial_\infty \lambda$ est appelé un **point de marqueur** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un arc quasi-géodésique $r \subset \lambda$ tel qu'il existe un plongement

$m : [0, +\infty[\times I \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ (où I est un segment) qui vérifie les conditions suivantes :

- i) $m(\cdot, 0)$ paramétrise r par longueur d'arc ;
- ii) $m(\{t\} \times I)$ est un arc transverse à $\widetilde{\mathcal{T}}$ de longueur inférieur ou égale à ε ;
- iii) pour tout $s \in I$ il existe une feuille $\lambda_s \in \widetilde{\mathcal{T}}$ tel que $m(\cdot, s) \subset \lambda_s$ soit une quasi-géodésique dans λ_s .

Dans le cadre des flots d'Anosov nous allons voir que pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$, l'ensemble des points de marqueurs dans $\partial_\infty \lambda$ est exactement $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$. Ce résultat que l'on démontrera dans cette section motive alors la définition suivante :

Définition 3.14 On appelle **section non-marqueur** la fonction

$$s_{nm} : \mathcal{L}^u \longrightarrow E_\infty$$

qui associe θ_λ à $\lambda \in \mathcal{L}^u$, on note par ailleurs $\mathbf{s}_{nm} := s_{nm}(\mathcal{L}^u)$.

On se place ici avec un flot d'Anosov φ muni d'une paire de feuilletages transverse $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$. On commence par montrer que pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$, tous les points de $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ sont des points de marqueurs :

Proposition 3.15. *Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ alors tout point $\eta \in \partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ est un point de marqueur.*

Démonstration. Pour montrer ce résultat nous allons exhiber une structure intéressante, en effet les plongements qui donnent les arcs quasi-géodésiques sont exactement donnés par les feuilles $\mathcal{W}^s$. Pour être plus précis considérons $\eta \in \partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ et $\varepsilon > 0$, alors η est la limite positive d'une orbite $\gamma \in \lambda$. On considère alors la feuille $\mu = \widetilde{\mathcal{W}}^s(\gamma)$, un arc τ de μ qui croise γ en un seul point τ_0 et m sa saturation positive par le flot, c'est à dire :

$$m : [0, +\infty[\times \tau \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

défini par :

$$m(t, x) = \varphi^t(x)$$

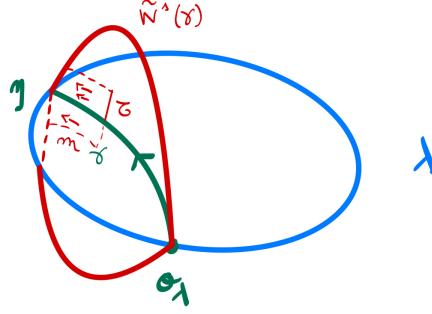


FIGURE 6 – Construction du plongement.

Tout d'abord, m est bien un plongement par construction (le flot agissant par homéomorphismes). On pose alors $r = m(\cdot, \tau_0)$ et quitte à déplacer τ le long de γ on peut supposer que $m(\cdot, \tau_0)$ paramétrise r par longueur d'arc. Par ailleurs par construction de m , pour tout $x \in \tau$, $m(\cdot, x)$ est une quasi-géodésique qui reste dans la feuille $\widetilde{\mathcal{W}}^u(x)$. Enfin, quitte à réduire τ et comme l'holonomie le long du feuilletage stable est *contractante* on a bien que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $m(\{t\} \times \tau)$ est un arc transverse à $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ de longueur inférieur à ε . $\square$

Passons maintenant à la partie un peu plus compliquée, en effet on veut maintenant montrer que pour toute feuille $\lambda \in \mathcal{W}^u$ le point entonnoir θ_λ n'est pas un point marqueur. Pour cela nous avons besoin d'introduire quelques notions métriques sur les feuilletages :

Définition 3.16 Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, une application $f : X \longrightarrow Y$ est une **quasi-isométrie** s'il existe des constantes $A \geq 1$ et $B, C \geq 0$ telles que pour tout $x_1, x_2 \in X$:

$$\frac{1}{A}d_X(x_1, x_2) - B \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ad_X(x_1, x_2) + B$$

On demande enfin que pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $d_Y(y, f(x)) \leq C$.

Dans notre cadre d'étude on peut considérer deux distances, celle donnée par la métrique sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et celle induite par la restriction de la métrique sur chaque feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ (resp. $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$). Un lemme important démontré par Calegari [Cal07, Lemme 4.49] affirme que toute feuille relevée $\lambda \in \widetilde{\mathcal{F}}$ d'un feuilletage $\mathbb{R}$ -covered dans une 3-variété fermée possède la propriété remarquable d'être quasi-isométriquement plongée dans son δ -voisinage $N_\delta(\lambda)$ et ce pour tout $\delta > 0$. Sachant cela et comme $\mathcal{W}^u$ est $\mathbb{R}$ -covered on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.17. Soit γ_1, γ_2 deux quasi-géodésiques de $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ (resp. $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$) si γ_1 et γ_2 restent à distance bornée dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ alors elles définissent le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda$ (resp. $\partial_\infty \mu$)

Démonstration. Supposons que γ_1 et γ_2 restent à distance bornée dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ alors il existe $\delta > 0$ tel que γ_1 et γ_2 restent à distance bornée dans $N_\delta(\lambda)$. On utilise alors le fait que λ se plonge quasi-isométriquement dans $N_\delta(\lambda)$. Ainsi il existe des constantes $A > 1$ et $B \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{1}{A}d_\lambda(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) - B \leq d_{N_\delta(\lambda)}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq K$$

d'où $d_\lambda(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq A(K + B)$. On a donc bien γ_1 et γ_2 qui restent à distance bornée dans λ et donc elles définissent bien le même point idéal positif dans $\partial_\infty \lambda$. $\square$

Avant de démontrer la deuxième partie du théorème énoncé au début de cette partie on vient prendre un peu de recul de façon à montrer un lemme important. Pour cela on étend la définition 3.13 en appelant ε -**marqueur** l'ensemble des points limite dans E_∞ d'un plongement vérifiant les conditions de la définition 3.13, on notera par ailleurs $\partial_\infty m$ le marqueur sur E_∞ associé au plongement m .

Lemme 3.18. *Soit m_1, m_2 deux ε -marqueurs. Si m_1 et m_2 ne sont pas disjoints, leur union $m_1 \cup m_2$ est un intervalle transverse aux fibres dans E_∞ .*

Démonstration. On suppose que ces marqueurs s'intersectent, soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ telle que les points limite des marqueurs coïncident et $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ une feuille qui intersectent m_1 et m_2 . On note γ_i^λ et γ_i^μ les intersections de m_i avec λ et μ .

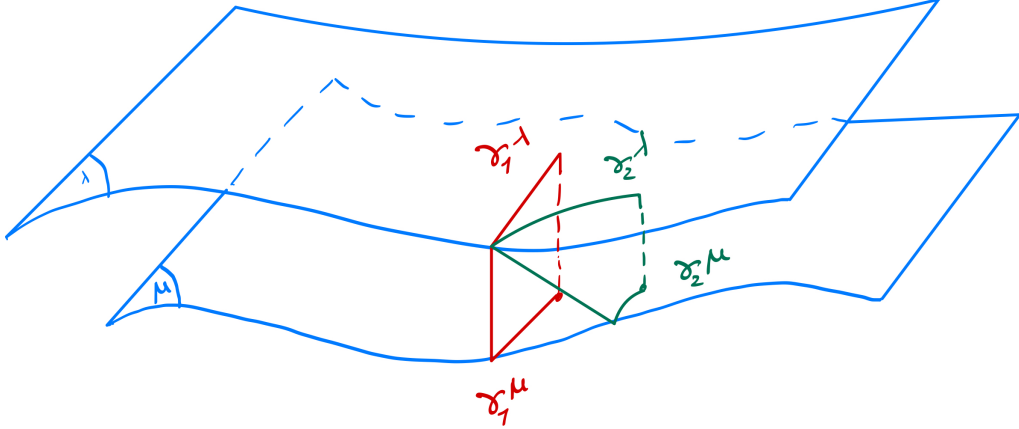


FIGURE 7 – Situation impossible où γ_1^μ et γ_2^μ ne restent pas à distance bornée au sein de μ .

Par hypothèse les deux quasi-géodésiques γ_1^λ et γ_2^λ restent à distance bornée dans λ . On a donc une constante $M_\lambda \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$d_\lambda(\gamma_1^\lambda(t), \gamma_2^\lambda(t)) \leq M_\lambda$$

Comme m_1 et m_2 sont des ε -marqueurs on obtient que l'inégalité

$$d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\gamma_1^\mu(t), \gamma_2^\mu(t)) \leq d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\gamma_1^\mu(t), \gamma_1^\lambda(t)) + d_\lambda(\gamma_1^\lambda(t), \gamma_2^\lambda(t)) + d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\gamma_2^\lambda(t), \gamma_2^\mu(t))$$

se transforme en :

$$d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\gamma_1^\mu(t), \gamma_2^\mu(t)) \leq 2\varepsilon + M_\lambda$$

Ainsi γ_1^μ et γ_2^μ restent à distance bornée dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ et on peut alors appliquer lemme 3.17. $\square$

Proposition 3.19. *Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ alors le point entonnoir θ_λ est l'unique point qui n'est pas un point de marqueur.*

Démonstration. On considère $\varepsilon > 0$ vérifiant que pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ si $p \in \lambda$ est à distance au plus ε d'une autre feuille $\lambda' \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ alors $\widetilde{\mathcal{W}}^s(p)$ intersecte λ' . Un tel $\varepsilon > 0$ existe grâce au caractère transverse des feuilletages $(\widetilde{\mathcal{W}}^s, \widetilde{\mathcal{W}}^u)$ dans $\mathcal{M}$ qui est compacte.

Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ et θ_λ le point entonnoir de λ . On suppose alors par l'absurde qu'il existe un plongement m de taille verticale plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$ tel que $m(x, 0) = \gamma(x) \rightarrow \theta_\lambda$ quand x tend vers $+\infty$ avec γ une quasi-géodésique de λ . Comme les feuilles stables définissent des marqueurs, par le lemme 3.18 on obtient que quitte à réduire verticalement le plongement et/ou changer de feuille on peut se restreindre à traiter uniquement les deux situations suivantes :

- 1) Le marqueur $\partial_\infty m$ coïncide localement avec la section de non-marqueur ;
- 2) Il existe une feuille $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ telle le marqueur donné par μ coïncide avec $\partial_\infty m \setminus \theta_\lambda$.

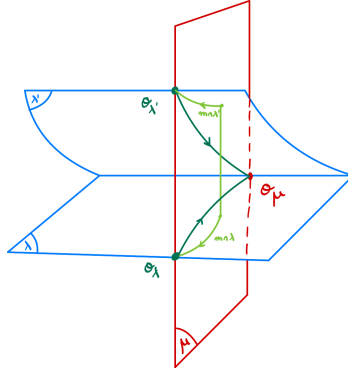
On commence par traiter la première question, par le théorème de structure pour toute feuille stable μ , l'orbite négative $\lambda \cap \mu$ reste à distance bornée de $m \cap \lambda = \gamma$. Considérons alors $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ qui intersecte λ . Comme $\partial_\infty m$ coïncide localement avec s_{nm} il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de λ tel que pour tout $\lambda' \in \mathcal{U}$ on a $m \cap \lambda'$ qui tend positivement vers $\theta_{\lambda'}$ et tel que λ' intersecte μ . Pour $\lambda' \in \mathcal{U}$ on a par ailleurs aussi $m \cap \lambda'$ qui reste à distance bornée de l'orbite négative $\mu \cap \lambda'$. Voici alors la contradiction, par la dynamique Anosov, les deux orbites négatives $\mu \cap \lambda$ et $\mu \cap \lambda'$ ne restent pas à distance bornée au sein de μ , or elle restent à distance bornée dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ ce qui contredit le lemme 3.17. En effet (si on note α_λ et $\alpha_{\lambda'}$ les deux orbites négatives) on a :

$$d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\alpha_\lambda(t), \alpha_{\lambda'}(t)) \leq d_\lambda(\alpha_\lambda(t), m \cap \lambda(t)) + d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(m \cap \lambda(t), m \cap \lambda'(t)) + d_{\lambda'}(m \cap \lambda'(t), \alpha_{\lambda'}(t))$$

Mais comme m est un marqueur et par ce qu'on a dit au par avant il existe deux constantes M_λ et $M_{\lambda'}$ telles que l'inégalité devienne :

$$d_{\widetilde{\mathcal{M}}}(\alpha_\lambda(t), \alpha_{\lambda'}(t)) \leq M_\lambda + \frac{\varepsilon}{2} + M_{\lambda'}$$

Cela montre bien que α_λ et $\alpha_{\lambda'}$ restent à distance bornée dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ ce qui est impossible.



On considère maintenant la seconde situation, on note $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ la feuille qui induit un marqueur a qui coïncide avec $\partial_\infty m \setminus \theta_\lambda$. Comme $\partial_\infty m$ est un $\varepsilon/2$ -marqueur on obtient que μ intersecte λ et donc par continuité du marqueur $\mu \cap \lambda$ tend positivement vers θ_λ . Ainsi $\mu \cap \lambda$ tend positive et négativement vers le même point, ce qui contredit le fait que ce soit une quasi-géodésique. $\square$

On a donc montré que pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ tous les points de $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ sont des points marqueurs et que θ_λ n'est jamais un point marqueur. Ainsi le sous ensemble $\mathbf{s}_{nm} \subseteq E_\infty$ est **exactement** l'ensemble des points non marqueurs. On admettra par ailleurs pour l'instant que la fonction s_{nm} est continue. L'objectif de la section suivante sera d'étudier précisément à quoi ressemble $\mathbf{s}_{nm} \subset E_\infty$ dans le cas d'un flot d'Anosov $\mathbb{S}\mathbb{R} - covered$.

3.2.3 La section non marqueur

Dans cette section nous allons construire un espace homéomorphe à E_∞ qui permettra d'avoir une image claire de la section non marqueur $\mathbf{s}_{nm}$.

Pour cela on commence par définir la **fonction de suture** $\Phi : \mathcal{O}_\varphi \rightarrow E_\infty \setminus \mathbf{s}_{nm}$. On considère pour cela l'application :

$$\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow E_\infty \setminus \mathbf{s}_{nm}$$

qui à un $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ renvoi l'élément $(\widetilde{\mathcal{W}}^u(x), \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}^t(x)) \in E_\infty$ qui correspond à la limite positive de l'orbite du flot relevé passant par x dans la feuille $\widetilde{\mathcal{W}}^u(x)$. Cette application est constante sur les orbites de $\tilde{\varphi}$ et $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariante, elle induit donc une application $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariante entre $\mathcal{O}_\varphi$ et $E_\infty \setminus \mathbf{s}_{nm}$ que l'on note Φ . On vient démontrer un résultat important qui possède une démonstration dans le cas plus général d'un flot d'Anosov pas forcément $\mathbb{S}\mathbb{R} - covered$, on s'inspire ici de cette démonstration que l'on retrouve dans [BT25, Théorème 5.3].

Définition 3.20 Soit $X \subseteq \mathcal{O}_\varphi$, on définit la **saturation instable** de X comme l'ensemble :

$$\mathcal{S}^u(X) = \{x \in \mathcal{O}_\varphi, \mathcal{O}_\varphi^u(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

On définit de manière analogue la saturation stable $\mathcal{S}^s(X)$.

Remarque 3.21. On rappelle que $\mathcal{O}_\varphi$ est bifeuilleté, on note alors pour $x \in \mathcal{O}_\varphi$ $\mathcal{O}_\varphi^u(x)$ la feuille instable contenant x et $\mathcal{O}_\varphi^s(x)$ la feuille stable contenant x .

Théorème 3.22. *L'application de suture $\Phi : \mathcal{O}_\varphi \longrightarrow E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\mathbf{nm}}$ est un homéomorphisme $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant. Par ailleurs Φ envoie le feuilletage stable $\mathcal{O}_\varphi^s$ sur le feuilletage par les marqueurs verticaux de $E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\mathbf{nm}}$ et le feuilletage instable $\mathcal{O}_\varphi^u$ sur le feuilletage par les arcs ouverts horizontaux $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ de $E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\mathbf{nm}}$.*

Démonstration. Pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$, le seul point qui n'est pas une limite positive d'une orbite de $\tilde{\varphi}$ est le point entonnoir θ_λ . Ainsi pour tout $x \in \partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ il existe une orbite o dans λ telle que $\Phi(o) = x$. Cela étant valable pour toute feuille instable, on obtient que Φ est surjective. De plus comme deux orbites distinctes ne peuvent avoir la même limite positive dans une feuille instable cela entraîne que Φ est aussi injective. On considère maintenant $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ et $l = \Theta(\lambda)$ sa projection sur $\mathcal{O}_\varphi$, par le théorème de structure Φ envoie homéomorphiquement l sur $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$. Pour justifier la dernière assertion il suffit de remarquer que $l \simeq \mathbb{R}$ et que par le théorème de structure en faisant un choix arbitraire d'orientation on obtient que Φ agit de façon strictement croissante de $l \simeq \mathbb{R}$ vers $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda \simeq \mathbb{R}$ ce qui donne que Φ est un homéomorphisme. Il reste donc à montrer que Φ envoie le feuilletage $\mathcal{O}_\varphi^s$ sur le feuilletage par marqueur de $E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\mathbf{nm}}$ et que Φ est *globalement* un homéomorphisme. Pour la première partie, on considère une feuille $l \in \mathcal{O}_\varphi^s$ alors chaque intersection avec une feuille instable correspond à une orbite de $\tilde{\varphi}$. L'application Φ envoie cette orbite sur sa limite positive dans la feuille instable ce qui donne que $\Phi(l)$ est exactement le marqueur stable donné par cette feuille. On considère la restriction $E_\infty|_m$ qui correspond au fibré en cercle au dessus de la projection de $\mathcal{S}^u(m)$ dans $\mathcal{L}^u$. Par définition on a alors $\Phi^{-1}(E_\infty|_m) = \mathcal{S}^u(m)$. On vient maintenant se restreindre au cas $\mathbb{S}\mathbb{R}$ -covered pour pouvoir visualiser simplement $\mathcal{S}^u(m)$:

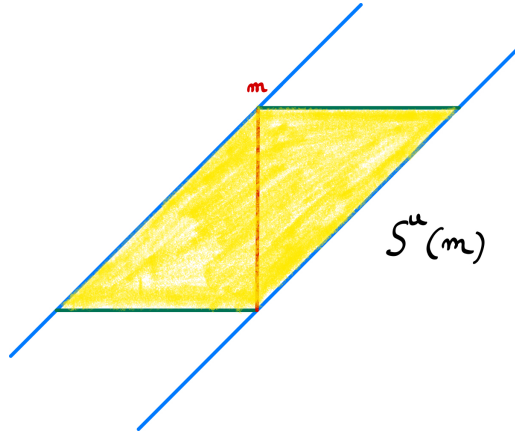


FIGURE 8 – Saturation instable d'une feuille $m \in \mathcal{O}_\varphi^s$

Étant donné que les feuilles instables qui bordent $\mathcal{S}^u(m)$ dans $\mathcal{O}_\varphi$ (les deux traits verts dans la figure 8)) forment un *perfect fit* (voir [BM25, Définition 2.4.2]) avec m on peut conclure que $\mathcal{S}^u(m)$ est un *ouvert* de $\mathcal{O}_\varphi$. Il suffit donc de montrer que la restriction de Φ à toute saturation instable d'une feuille stable est un homéomorphisme sur son image. Par le théorème d'invariance du domaine et comme Φ est continue et injective (pour le caractère continu on peut remarquer que $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \Theta$ avec $\tilde{\Phi}$ continue par le théorème de structure et par le fait que la métrique varie continuellement) il suffit même uniquement de montrer que Φ est *ouverte*.

Pour démontrer cela, considérons $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}^u(m)$ une boîte de feuilletage ouverte telle que son adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ soit bordée par des segments de feuilles $l_1, l_2 \in \mathcal{O}_\varphi^u$ et $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_\varphi^s$ (voir figure 9). On note tout d'abord que t_1 détermine une ligne ouverte plongée dans la projection de m dans $\mathcal{L}^u$ de telle sorte que $E_\infty|_{t_1}$ soit un cylindre ouvert plongé dans $E_\infty|_m$. Par l'action de Φ , $\partial \bar{\mathcal{U}}$ est envoyée sur la boucle fermée nulle homotope $\Phi(\partial \bar{\mathcal{U}})$, de plus $\mathcal{U}$ doit être envoyé dans l'intérieur de la région déterminée par $\Phi(\partial \bar{\mathcal{U}})$ car Φ est continue sur les feuilles de $\mathcal{O}_\varphi^u$. L'intérieur de cette région étant ouverte cela permet donc de conclure. $\square$

Remarque 3.23. Même si la figure 9 permet de comprendre ce qu'il se passe, il est important de noter que l'on ne connaît pas encore à *priori* la forme géométrique de $\Phi(t_i)$, il se pourrait que ce ne soit pas un segment vertical, néanmoins le raisonnement logique effectué dans la preuve précédente n'utilise pas cette propriété donc le dessin ne rend pas la preuve *imparfaite*. L'objectif de la fin de cette section sera de justifier qu'en autres les marqueurs verticaux sont bien des traits verticaux dans E_∞ .

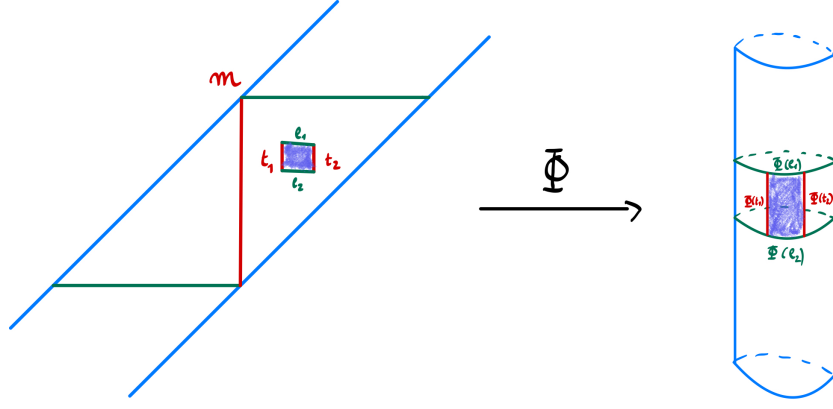


FIGURE 9 – Action de Φ sur une boîte de feuilletage ouverte dans $\mathcal{S}^u(m)$.

On considère maintenant une **transversale globale** s à $\mathcal{O}_\varphi^u$. On obtient alors que $\mathcal{S}^u(s) = \mathcal{O}_\varphi$. On vient compactifier partiellement l'espace d'orbites en rajoutant deux copies de s sur les points limite positifs et négatifs des feuilles instables :

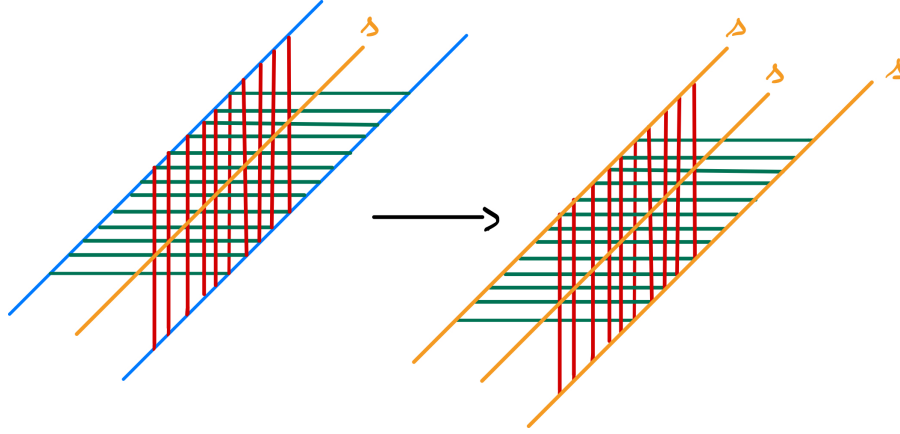


FIGURE 10 – Compactification partielle de $\mathcal{S}^u(s) = \mathcal{O}_\varphi$

Considérons maintenant l'espace quotient :

$$X = \mathcal{S}^u(s) / \sim$$

où $\sim$ est l'identification des bords.

On obtient un espace homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ avec une partie particulière qui correspond au lieu de recollement que l'on note $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \bigcup_{l \in \mathcal{O}_\varphi^u} \{x \in \mathcal{S}^u(s), x = l^+\} \cup \{x \in \mathcal{S}^u(s), x = l^-\}$$

avec $l^\pm$ qui correspond au point limite positif ou négatif de la feuille $l \in \mathcal{O}_\varphi^u$.

On peut maintenant considérer l'application

$$h : X \longrightarrow E_\infty$$

$$p \longmapsto \begin{cases} \Phi(p) & \text{si } p \notin \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_{\text{nm}}(\lambda) & \text{si } p \text{ est point limite positif ou négatif de } \lambda \end{cases}$$

Nous allons montrer que $h : X \longrightarrow E_\infty$ est un homéomorphisme et que le lieu de recollement $\mathbf{s}$ jouera le rôle de la section non marqueur. Cela nous permettra d'avoir une représentation visuelle claire de la forme de $\mathbf{s}_{\text{nm}} \subset E_\infty$ dans le cas $\mathbb{S}\mathbb{R}$ – covered. Cette représentation nous sera particulièrement utile dans la suite du mémoire.

Théorème 3.24. *L'application $h : X \longrightarrow E_\infty$ définie plus haut est un homéomorphisme.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que par le théorème 3.22 h effectue un homéomorphisme qui préserve les feuilletages de $X \setminus \mathbf{s}$ vers $E_\infty \setminus \mathbf{s}_{nm}$. Par ailleurs, les deux espaces sont feuilletés par des cercles (pour E_∞ se sont les fibres $\partial_\infty \lambda$ et pour X se sont les fibres $l \cup \{\mathbf{s} \cap l\}$) et h (resp. h^{-1}) envoient ces feuilletages l'un sur l'autre, ainsi on obtient la continuité de h (resp. h^{-1}) au voisinage de $\mathbf{s}$ (resp. $\mathbf{s}_{nm}$). Pour s'en convaincre il suffit de voir que si on prend un point dans $\mathbf{s}$ on peut s'approcher continuellement de celui-ci le long de la feuille instable qui le contient, en revanche il se pourrait qu'en voulant approcher ce point en partant d'une autre feuille instable qu'une discontinuité se produisent, ceci est évité justement car h envoie continuellement le feuilletage par des cercles de X sur celui par les fibres de E_∞ . $\square$

Maintenant que l'on a démontré ce théorème on peut récolter les fruits de notre travail. Nous allons donc conclure cette section par la construction de $\mathbf{s}_{nm}$ dans E_∞ . Pour cela on considère alors une transversale globale s comme dans la figure 10. Lorsqu'on recolle les bords pour obtenir X on obtient par l'identification par h que $\mathbf{s}$ est précisément $\mathbf{s}_{nm}$, mais alors par un simple exercice de pensée il est rapide de voir que $\mathbf{s}_{nm}$ vient *s'enrouler* autour de E_∞ de telle sorte que une feuille stable soit un trait vertical compris exactement entre deux *bandes d'enroulement* de $\mathbf{s}_{nm}$:

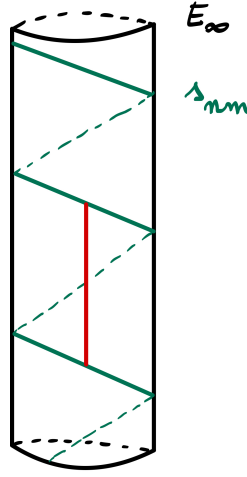


FIGURE 11 – La section $\mathbf{s}_{nm}$ dans E_∞

4 Cercles universels

4.1 Introduction

Après avoir défini la tubulation E_∞ , et l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright E_\infty$, on souhaite construire un cercle $\mathcal{C}$ avec une action de groupe $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}$ et des *projections* :

$$\pi_\lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \partial_\infty \lambda$$

tel que l'action de $\pi_1(\mathcal{M})$ sur $\mathcal{C}$ et sur $\mathcal{L}^u$ permette de retrouver l'information de l'action de $\pi_1(\mathcal{M})$ sur chaque fibre de E_∞ . Il existe plusieurs façon de construire un tel cercle et chacune de ces constructions ne produit pas forcément un cercle avec les mêmes informations. L'objectif de ce chapitre sera de présenter différentes constructions possibles et voir les liens entre elles. On utilisera pour cela plusieurs références en restant toujours dans le cas $\mathcal{SR}$ – *covered* pour faciliter les preuves et nous permettre d'avoir une vision globale avant d'étudier plus en profondeur l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}$ dans le cas d'une construction particulière de **cercle universel**. L'objectif final sera alors d'étudier l'existence de point fixes pour cette action dans le cas où la variété support est hyperbolique.

Définition 4.1 Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles, une **application monotone** :

$$\pi : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$$

est une application continue à fibres connexes.

Définition 4.2 Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathcal{M}$ par des feuilles hyperboliques, un **cercle universel** pour $\mathcal{F}$ est un cercle $\mathcal{C}$ muni d'une action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}$ et d'un ensemble d'applications monotones $\{\pi_\lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \partial_\infty \lambda\}$ tel que les conditions suivantes soit vérifiées :

1. Pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$ le diagramme suivant avec les applications horizontales correspondant aux actions respectives $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}$ et $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright E_\infty$ commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\cdot \gamma} & \mathcal{C} \\ \pi_\lambda \downarrow & & \downarrow \pi_{\gamma \cdot \lambda} \\ \partial_\infty \lambda & \xrightarrow{\cdot \gamma} & \partial_\infty \gamma \cdot \lambda \end{array}$$

2. La fonction $\pi : \mathcal{C} \times \mathcal{L} \longrightarrow E_\infty$ définie par :

$$\pi(z, \lambda) := \pi_\lambda(z)$$

est continue.

3. Pour toute paire de feuilles *incomparables* λ et μ de $\mathcal{L}$, le cœur de π_λ est inclut dans un seul trou de π_μ .

Pour une application monotone $\pi : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ un *trou* de π est un intervalle maximal dans la fibre d'un point. Le cœur de π est le complémentaire de tous ses trous.

Remarque 4.3. Le troisième point sera toujours trivialement vérifié dans la suite du mémoire car pour un feuilletage instable (resp. stable) d'un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ il n'existe pas de paire de feuilles *incomparables* (i.e qui ne sont pas reliées par une transversale dans $\widetilde{\mathcal{M}}$).

Définition 4.4 Un cercle universel $\mathcal{C}$ pour un feuilletage $\mathcal{F}$ est **minimal** s'il n'existe pas d'intervalle ouvert dans $\mathcal{C}$ qui soit contenu dans un trou de π_λ pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$.

Remarque 4.5. Une définition équivalente (voir [BT25, Définition 3.1]) de cercle universel minimal consiste à dire qu'il n'existe pas de couple de points $x, y \in \mathcal{C}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$, $\pi_\lambda(x) = \pi_\lambda(y)$.

L'intérêt de cette notion réside dans le fait que l'on souhaite identifier quand est-ce que deux cercles universels sont *différents*. Pour cela on introduit la notion d'isomorphisme de cercle universel. En revanche comme on le verra dans la section 4.3 il se peut qu'un cercle universel soit un revêtement fini d'un autre, dans cette situation, même si les deux cercles ne sont pas isomorphes leur structure possède beaucoup de similarité. Dans un objectif de classification on souhaite alors distinguer des cercles universels minimaux pour éviter justement cette situation.

Définition 4.6 Deux cercles universels $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ pour un feuilletage $\mathcal{F}$ sont **isomorphes** s'il existe un homéomorphisme $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant $h : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ tel que le diagramme suivant commute pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}_2 \\ \pi_\lambda^{\mathcal{C}_1} \downarrow & \swarrow \pi_\lambda^{\mathcal{C}_2} & \\ \partial_\infty \lambda & & \end{array}$$

On commence par présenter la construction effectuée par Calegari et Dunfield dans [CD02]. Cette construction faite dans le cadre plus général d'un feuilletage tendu sur une 3-variété hyperbolique sera traitée dans le cas moins général d'un feuilletage jouant le rôle du feuilletage instable d'un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$. En revanche par le théorème de structure on peut enlever l'hypothèse d'hyperbolicité sur $\mathcal{M}$.

4.2 Construction de Calegari et Dunfield

Dans cette section nous allons présenter la construction des cercles universels dits **leftmost** et **rightmost** et nous montrerons qu'ils ne sont pas isomorphes en tant que cercles universels. Dans [CD02] Calegari et Dunfield présentent une construction faisant apparaître les **leftmosts** et **rightmost sections** qui sont des objets géométriques complexes en toute généralité. Dans le cas $\mathcal{SR} - covered$ et grâce au travail effectué dans la section 3.2.3 ces sections seront beaucoup plus simples à comprendre et à utiliser. Avant de définir ces deux sections prenons un peu de recul pour comprendre l'intérêt de celles-ci. Dans la construction du

cercle universel on souhaite construire des applications $\pi_\lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \partial_\infty \lambda$ qui soient monotones, une façon de faire cela est de construire des sections sur E_∞ de telle sorte que celles-ci ne se croisent pas. L'ensemble des ces sections sera alors circulairement ordonné. Cet ensemble pourra ensuite être complété en un cercle et les applications π_λ seront simplement les évaluations de ces sections sur $\partial_\infty \lambda \subseteq E_\infty$.

Définition 4.7 Soit $p \in E_\infty$ la *leftmost section* passant par p que l'on note s_p^l est construite comme-ci :

1. si $p \in \mathbf{s}_{\text{nm}}$ alors $s_p^l = \mathbf{s}_{\text{nm}}$;
2. si $p \notin \mathbf{s}_{\text{nm}}$, s_p^l coïncide avec le marqueur stable passant par p puis avec $\mathbf{s}_{\text{nm}}$ ailleurs.

Remarque 4.8. Si le lecteur est familier avec la construction de Calegari et Dunfield il remarquera qu'ici lorsqu'on atteint la section non marqueur on ne peut que la suivre indéfiniment car dès que l'on atteint un point non marqueur si l'on tourne à gauche alors on tombe directement sur un point marqueur qui nous amène directement sur la section non marqueur à nouveau quand on suit le marqueur le contenant.

Pour définir la *rightmost section* il nous faut introduire un couple d'applications qui seront très importantes par la suite.

Définition 4.9 Soit φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR}$ – covered on considère alors $f^{s/u} : \mathcal{L}^{s/u} \longrightarrow \mathcal{L}^{s/u}$ qui agissent comme translations de $+1$ sur $\mathcal{L}^{s/u} \simeq \mathbb{R}$. On appelle ces applications les *one step-up maps*.

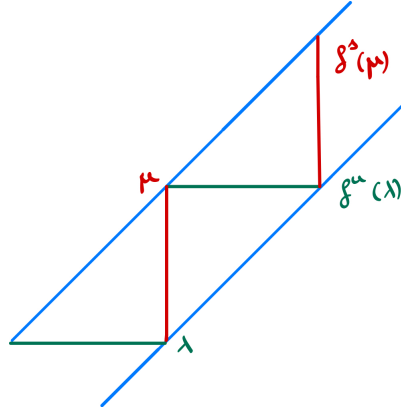


FIGURE 12 – Action des applications $f^{s/u}$.

Avant de définir la rightmost section on remarque un fait important, si $p \in E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\text{nm}}$ alors il existe un unique marqueur stable qui le contient. Si maintenant $p \in \mathbf{s}_{\text{nm}} \cap \partial_\infty \lambda$ pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ alors $h^{-1}(p)$ est une classe composée par les limites positive et négative de λ dans X , comme φ est $\mathcal{SR}$ – covered il existe une unique feuille stable μ qui vérifie que μ et $f^s(\mu)$ fassent un perfect fit avec λ en ses limites négatives et positives respectivement (ou vice versa selon l'orientation choisie).

Définition 4.10 Soit $p \in E_\infty \setminus \mathbf{s}_{\text{nm}}$, la *rightmost section* passant par p que l'on note s_p^r est l'image par l'application h du théorème 3.24 de l'orbite par la one step up map f^s de l'unique feuille stable donnant l'unique marqueur stable contenant p à laquelle on ajoute les points limite positifs et négatifs des feuilles de l'orbite dans X . Si $p \in \mathbf{s}_{\text{nm}}$, s_p^r est l'image par h de l'orbite par la one step up map f^s de l'unique feuille stable qui vérifie que λ fasse un perfect fit avec elle et son image par f^s . On rajoute de même les limites positives et négatives des feuilles de l'orbite dans X .

Remarque 4.11. Encore une fois le lecteur familier avec la construction de Calegari et Dunfield remarquera que lorsqu'on atteint un point non marqueur si on *tourne à droite* on tombe directement sur un point marqueur mais en revanche cette fois-ci nous sommes au dessus de la section non marqueur d'où le fait que la section s_p^r corresponde à une ligne verticale dans E_∞ .

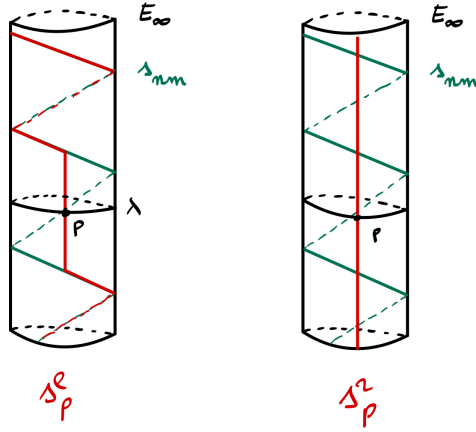


FIGURE 13 – Les sections *leftmost* et *rightmost*.

Dans les deux constructions on obtient un ensemble de sections sur E_∞ que l'on note $S^{l/r}$, ces sections ne se croisent pas et elles permettent ainsi de munir $S^{l/r}$ d'un ordre circulaire. Pour un rappel sur les ensembles circulairement ordonnés on invite le lecteur à consulter [Fra13], ici nous aurons seulement besoin de l'ordre circulaire sur $\mathbb{S}^1$ qui peut être représenté par une fonction :

$$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

qui renvoie 1 si un triplet est ordonné dans le sens *horaire*, -1 s'il l'est dans le sens *anti-horaire* et 0 si le triplet est *dégénéré* (deux points ou plus sont égaux). Pour munir $S^{l/r}$ d'un ordre circulaire on remarque que si on considère trois sections s_1, s_2, s_3 on peut regarder le triplet $(s_1(\lambda), s_2(\lambda), s_3(\lambda))$ pour $\lambda \in \mathcal{L}^u$, comme s_1, s_2, s_3 ne se croisent pas alors $\langle s_1(\lambda), s_2(\lambda), s_3(\lambda) \rangle$ reste de signe constant (éventuellement nul si le triplet devient dégénéré), on munit alors $S^{l/r}$ d'un ordre circulaire hérité de celui des fibres $\partial_\infty \lambda$. Maintenant que l'on sait que $S^{l/r}$ est ordonné circulairement on peut le compléter en un cercle (voir [Fra13] pour plus de détails) on obtient alors deux cercles $\mathcal{C}^{l/r}$ qui sont munis d'une action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^{l/r}$ héritée de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright E_\infty$ donnée par $\gamma \cdot s_p^{l/r} = s_{\gamma \cdot p}^{l/r}$. On peut enfin associer à ces deux cercles des applications monotones $\pi_\lambda^{l/r} : \mathcal{C}^{l/r} \longrightarrow \partial_\infty \lambda$ (dont le caractère continu sera justifié plus bas) qui sont définies par :

$$\pi_\lambda^{l/r}(s_p^{l/r}) = s_p^{l/r}(\lambda)$$

On peut alors énoncer le théorème central de cette section :

Théorème 4.12. *Les cercles $\mathcal{C}^{l/r}$ munis de leurs applications monotones $\pi_\lambda^{l/r}$ sont des cercles universels pour $\mathcal{W}^u$ qui sont **non isomorphes** en tant que cercles universels.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème nous allons raisonner en deux parties, dans la première nous allons montrer que $\mathcal{C}^{l/r}$ sont des cercles universels pour $\mathcal{W}^u$, puis dans la seconde pour montrer que ces deux cercles sont non isomorphes nous exhiberons deux isomorphismes de cercles universels qui permettront de différencier $\mathcal{C}^l$ et $\mathcal{C}^r$ plus facilement.

Commençons par montrer que $\mathcal{C}^{l/r}$ est un cercle universel, pour cela il suffit de montrer les points **1** et **2** de la définition 4.2. On considère alors $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, $z = s_p^{l/r} \in \mathcal{C}^{l/r}$ et $\lambda \in \mathcal{L}^u$, alors

$$\gamma \cdot \pi_\lambda^{l/r}(s_p^{l/r}) = \gamma \cdot s_p^{l/r}(\lambda) = s_{\gamma \cdot p}^{l/r}(\gamma \cdot \lambda) = \pi_{\gamma \cdot \lambda}^{l/r}(\gamma \cdot s_p^{l/r})$$

Justifions l'égalité du milieu, pour cela il faut se rappeler la définition des *leftmost-rightmost sections* et de l'action du groupe fondamental sur celles-ci. Traitons le cas des *leftmost-sections* en premier, il faut alors distinguer deux situations :

Si

$$s_p^l(\lambda) = s_{nm}(\lambda) = \theta_\lambda$$

alors

$$\gamma \cdot s_p^l = \gamma \cdot \theta_\lambda = \theta_{\gamma \cdot \lambda}$$

Par ailleurs comme l'action de γ préserve les intersections on a forcément $s_{\gamma \cdot \lambda}^l(\gamma \cdot \lambda) = \theta_{\gamma \cdot \lambda}$ en effet, sinon on aurait $\widetilde{\mathcal{W}}^s(\gamma \cdot p) \cap \gamma \cdot \lambda \neq \emptyset$ et $\lambda \cap \widetilde{\mathcal{W}}^s(p) = \emptyset$ ce qui est absurde. Si maintenant $s_p^l(\lambda)$ correspond à un point donné par un marqueur stable μ alors on peut écrire $s_p^l(\lambda) = (\lambda, \lim_+ \lambda \cap \mu)$ où $\lambda \cap \mu$ est une orbite du flot relevé. Ainsi $\gamma \cdot s_p^l(\lambda) = (\gamma \cdot \lambda, \lim_+ \gamma \cdot \lambda \cap \gamma \cdot \mu) = s_{\gamma \cdot p}^l(\gamma \cdot \lambda)$.

Remarque 4.13. Pour $p \in E_\infty \setminus \mathbf{s}_{nm}$ on note $\widetilde{\mathcal{W}}^s(p)$ la feuille stable définissant le marqueur stable passant par p .

Un raisonnement analogue permet de montrer l'égalité pour s_p^r ce qui permet de conclure sur le premier point. On doit maintenant montrer que les applications

$$\pi^{\mathcal{C}^{l/r}} : \mathcal{C}^{l/r} \times \mathcal{L}^u \longrightarrow E_\infty$$

sont continues. Pour cela on considère un ouvert $\mathcal{U} \subset E_\infty$ tel que son adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ soit bordée par des segments de feuilles $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_\varphi^s$, $l_1, l_2 \in \mathcal{O}_\varphi^u$ (qu'on projette dans E_∞ par Φ) (voir figure 14). Pour $\pi^{\mathcal{C}^r}$ nous avons directement le résultat voulu car

$$(\pi^{\mathcal{C}^r})^{-1}(\mathcal{U}) = \langle s_{p_1}^r, \cdot, s_{p_2}^r \rangle \times]l_1, l_2[$$

et ce même si $\mathcal{U} \cap \mathbf{s}_{nm} \neq \emptyset$. Pour $\pi^{\mathcal{C}^l}$ il faut faire un peu plus attention et distinguer le cas similaire où $\mathcal{U} \cap \mathbf{s}_{nm} = \emptyset$ qui se traite comme précédemment et celui un peu plus complexe où $\mathcal{U} \cap \mathbf{s}_{nm} \neq \emptyset$. Pour celui-là on invite le lecteur à consulter la preuve du théorème 4.18 et surtout la figure 17 qui permet de voir que dans cette situation $(\pi^{\mathcal{C}^l})^{-1}(\mathcal{U}) = [\alpha, \beta]^c \times]l'_1, l'_2[$ où α représente la section donnée par le marqueur stable qui contient $(f^s)^{-1}(t'_1)$ et β la section donnée par le marqueur stable qui contient t'_2 avec les notations de la figure 17. Cela achève la preuve du fait que $\mathcal{C}^{l/r}$ sont des *cercles universels* pour $\mathcal{W}^u$.

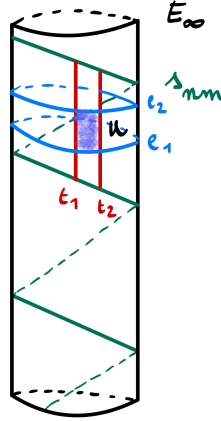


FIGURE 14 – l'ouvert $\mathcal{U}$ dans E_∞

Pour montrer qu'ils sont non isomorphes ils nous faut considérer deux autres cercles universels qui permettront plus facilement de conclure. Le premier cercle universel que l'on considère est le cercle $\mathcal{L}^s/f^s$ muni des applications :

$$\pi_\lambda : \mathcal{L}^s/f^s \longrightarrow \partial_\infty \lambda$$

qui à une classe $[x] \in \mathcal{L}^s/f^s$ associent la limite positive de l'orbite $x \cap \lambda$ pour x l'unique représentant qui intersecte λ . Par ailleurs elles associent θ_λ à l'unique classe de feuille qui vérifie qu'aucun élément de celle-ci n'intersecte λ . Il est facile de vérifier que ces applications sont des homéomorphismes monotones, en effet le caractère bijectif est immédiat et la continuité des deux applications provient du fait que la topologie sur les deux espaces est essentiellement la même car la topologie circulaire sur $\mathcal{L}^s/f^s$ est construite à partir de celle sur $\partial_\infty \lambda$ en comparant trois classes à l'aide de l'évaluation sur E_∞ de représentants des trois sur une fibre transverse qui les coupe en même temps.

Proposition 4.14. $(\mathcal{L}^s/f^s, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}^u})$ est un cercle universel pour $\mathcal{W}^u$.

Démonstration. Il existe une action sur $\mathcal{L}^s/f^s$ donnée par $\gamma \cdot [x] := [\gamma \cdot x]$ qui est bien définie par la proposition 4.17. Par le même raisonnement que pour $\pi^{\mathcal{C}^r}$ on obtient que $\pi : \mathcal{L}^s/f^s \times \mathcal{L}^u \longrightarrow E_\infty$ est continue. On

considère alors $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ et $\lambda \in \mathcal{L}^u$, si $[x_0]$ est envoyée par π_λ sur θ_λ alors comme l'action de γ préserve les intersections on obtient que pour tout $x \in [x_0]$, $\gamma \cdot x$ n'intersecte pas $\gamma \cdot \lambda$ et donc $\pi_{\gamma \cdot \lambda}(\gamma \cdot [x]) = \theta_{\gamma \cdot \lambda}$. Si maintenant $[x_0]$ est envoyée par π_λ sur la limite positive de l'orbite $x \cap \lambda$ pour $x \in [x_0]$ l'unique représentant qui intersecte λ . Alors par le même raisonnement que précédemment $\gamma \cdot x$ intersecte $\gamma \cdot \lambda$ et donc on obtient l'égalité voulue. $\square$

On considère la fonction $r : \mathcal{L}^s/f^s \longrightarrow \mathcal{C}^r$ qui à une orbite $[x]$ associe la **rightmost section** construite en comblant les trous qui correspondent aux limites positives et négatives des feuilles de l'orbite dans $\mathcal{O}_\varphi$ (voir figure 15)

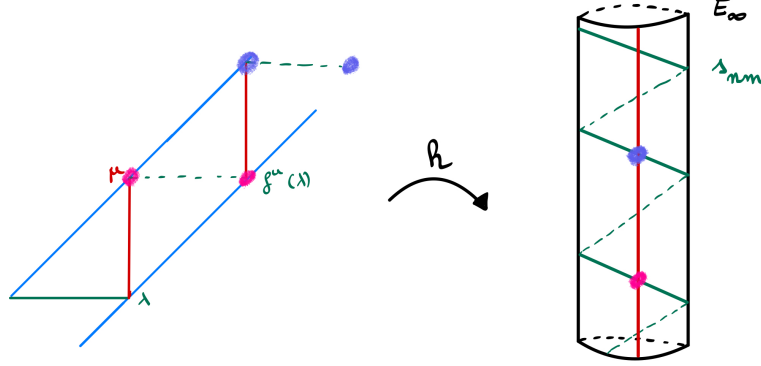


FIGURE 15 – L'action de l'application $r : \mathcal{L}^s/f^s \longrightarrow \mathcal{C}^r$ comprise à partir de la forme d'une orbite d'une feuille stable par f^s dans $\mathcal{O}_\varphi$.

Proposition 4.15. *L'application r construite ci dessus est un isomorphisme de cercles universels.*

Démonstration. Par le même raisonnement que pour montrer que les applications monotones

$$\pi_\lambda : \mathcal{L}^s/f^s \longrightarrow \partial_\infty \lambda$$

sont des homéomorphismes on en déduit que r est un homéomorphisme de surcroît $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant. On considère alors $[x] \in \mathcal{L}^s/f^s$ et $\lambda \in \mathcal{L}^u$, si un représentant de $[x]$ intersecte λ alors il est immédiat que $\pi_\lambda([x]) = \pi_\lambda^{\mathcal{C}^r}(r([x]))$. Si maintenant aucun élément de $[x]$ n'intersecte λ alors $\pi_\lambda([x]) = \theta_\lambda$, par ailleurs dans E_∞ la rightmost section $r([x])$ intersecte s_{nm} en θ_λ sur $\partial_\infty \lambda$ car la feuille λ n'est jamais coupée par une feuille de $[x]$ et donc $r([x])(\lambda)$ correspond à θ_λ ce qui conclut la preuve. $\square$

Maintenant que l'on a identifié $\mathcal{C}^r$ avec le cercle universel $\mathcal{L}^s/f^s$ on peut démontrer la propriété suivante :

Proposition 4.16. *Il n'existe pas de point fixe globale pour l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^r$.*

Pour démontrer ce résultat il suffit par ce qu'on vient de faire à se ramener à l'étude de l'action du groupe fondamental sur $\mathcal{L}^s/f^s$. On présente ici un résultat classique de l'action du groupe fondamental sur l'espace des feuilles dans le cas $\mathbb{S}\mathbb{R}$ – covered qui est énoncé dans [BM25, Exercice 2.3.7]. Pour une preuve de ce résultat on invite le lecteur à consulter [Her].

Proposition 4.17. *Soit φ un flot d'Anosov $\mathbb{S}\mathbb{R}$ – covered sur une 3 variété fermée, alors :*

1. *L'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{L}^s$ passe au quotient pour donner une action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{L}^s/f^s$;*
2. *un élément $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ agit sans point fixe si et seulement il n'est pas dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ ;*
3. *si $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ est dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ alors γ agit avec exactement deux points fixes sur $[0, 1[\subset \mathcal{L}^s$ un répulsif et un attractif. En particulier il agit avec exactement deux points fixes sur $\mathcal{L}^s/f^s$;*
4. *L'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{L}^s$ est minimale.*

A l'aide de cette proposition on peut maintenant démontrer la proposition 4.16. Supposons par l'absurde qu'il existe une classe $[x] \in \mathcal{L}^s / f^s$ qui soit fixée par tous les $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$. Cela revient alors à dire que l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{x + n\} \subset \mathcal{L}^s$ est invariant par l'action de $\pi_1(\mathcal{M})$, or cet ensemble est fermé et par la proposition 4.17 cette action est minimale ce qui donne donc une contradiction. On passe maintenant à la construction d'un autre cercle universel qui sera isomorphe à $\mathcal{C}^l$. Pour cela on considère la compactification à un point de $\mathcal{L}^s \simeq \mathbb{R}$. On note $\hat{\mathcal{L}}^s \simeq \mathbb{S}^1$ cet ensemble. Avant de définir les applications monotones on remarque que l'on peut paramétriser $\mathcal{C}^l$ par $\hat{\mathcal{L}}^s$. Pour s'en convaincre regardons la forme des sections vues dans $\mathcal{O}_\varphi$. Les sections **leftmost** étant entièrement définies par un marqueur donné par une feuille stable (le reste de la section correspondant à $\mathbf{s}_{\text{nm}}$) on peut identifier chaque section "non triviale" avec une feuille $\mu \in \mathcal{L}^s$. La section $\mathbf{s}_{\text{nm}}$ est quand à elle identifiée avec ∞ . Cela motive alors à prendre comme applications monotones :

$$\begin{aligned} \pi_\lambda : \hat{\mathcal{L}}^s &\longrightarrow \partial_\infty \lambda \\ x &\longmapsto s_x(\lambda) \end{aligned}$$

où s_x représente la leftmost section de $\mathcal{C}^l$ paramétrisée par $x \in \hat{\mathcal{L}}^s$. Par le raisonnement d'identification fait précédemment et l'ordre circulaire sur $\hat{\mathcal{L}}^s$ on obtient que se sont bien des applications monotones, il faut néanmoins faire attention pour justifier la continuité en ∞ . Pour cela on remarque que l'on a convergence simple vers $\mathbf{s}_{\text{nm}}$ de toute section quand on fait tendre x vers l'infini, en effet pour toute feuille $\lambda \in \widehat{\mathcal{W}}^u$, pour x assez grand le marqueur stable qui définit la section représentée par x n'intersecte plus $\partial_\infty \lambda$, et on a donc $s_x(\lambda) = \theta_\lambda$.

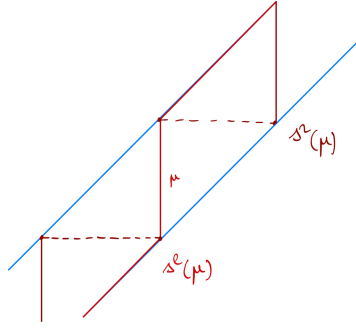


FIGURE 16 – Formes des sections dans $\mathcal{O}_\varphi$.

Théorème 4.18. *Le cercle $\hat{\mathcal{L}}^s$ muni des applications $\{\pi_\lambda\}$ est un cercle universel pour $\mathcal{W}^u$.*

Démonstration. Pour démontrer la continuité de l'application $\hat{\pi}$ on distingue deux cas, si notre ouvert $\mathcal{U}$ vérifie que $\bar{\mathcal{U}} \cap \mathbf{s}_{\text{nm}} = \emptyset$, alors $\hat{\pi}^{-1}(\mathcal{U}) =]t_2, t_1[\times]l_1, l_2[$. Si maintenant $\mathcal{U}'$ vérifie que $\bar{\mathcal{U}}' \cap \mathbf{s}_{\text{nm}} \neq \emptyset$, alors $\hat{\pi}^{-1}(\mathcal{U}') = [(f^s)^{-1}(t_1'), t_2']^c \times]l_1', l_2']$ (voir figure 17). Dans les deux situations on a bien des ouverts de $\hat{\mathcal{L}}^s \times \mathcal{L}^u$. Considérons maintenant $x \in \hat{\mathcal{L}}^s$, $\lambda \in \mathcal{L}^u$ et $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ alors $\gamma \cdot \hat{\pi}_\lambda(x) = \hat{\pi}_{\gamma \cdot \lambda}(\gamma \cdot x)$ encore une fois car l'action de γ préserve les intersections. $\square$

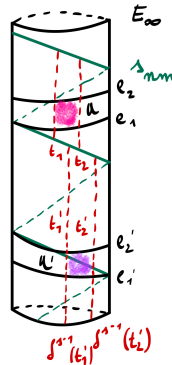


FIGURE 17 – Les deux situations possibles

On considère maintenant l'application :

$$\hat{r} : \hat{\mathcal{L}}^s \longrightarrow \mathcal{C}^l$$

$$x \longmapsto \begin{cases} s_x & \text{si } x \neq \infty \\ \mathbf{s}_{\text{nm}} & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

Proposition 4.19. *L'application $\hat{r}$ est un isomorphisme de cercles universels.*

Démonstration. Par l'identification faite plus haut on obtient directement le fait que $\hat{r}$ est un homéomorphisme $\pi_1(\mathcal{M})$ -équivariant. La dernière vérification est tout aussi directe. On considère $x \in \mathcal{L}^s$ et $\lambda \in \mathcal{L}^u$ alors

$$\pi_\lambda^{\mathcal{C}^l}(\hat{r}(x)) = \pi_\lambda^{\mathcal{C}^l}(s_x) = s_x(\lambda) = \hat{\pi}_\lambda(x).$$

□

Pour conclure la preuve du théorème 4.12 on remarque alors que comme pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ l'action de celui-ci préserve les intersections cela entraîne que $\infty \in \hat{\mathcal{L}}^s$ est un point fixe global pour l'action du groupe fondamental. Alors par la proposition 4.16 nous avons que $\mathcal{C}^l$ ne peut être isomorphe à $\mathcal{C}^r$. □

Pour terminer cette section discutons rapidement du caractère minimal des deux cercles et aussi des trous qu'ils possèdent. Pour le cercle $\hat{\mathcal{L}}^s$ comme chaque point de $\partial_\infty \lambda \setminus \theta_\lambda$ est un point de marqueur associé à une unique feuille stable et que θ_λ est associé à la section non marqueur alors la pré-image de chaque point est un singleton et ainsi pour tout λ le cœur de $\hat{\pi}_\lambda$ est $\hat{\mathcal{L}}^s$ tout entier. Il est alors immédiat que $\hat{\mathcal{L}}^s$ (et donc $\mathcal{C}^l$) est minimal comme cercle universel car aucune projection ne possède de trous. Pour $\mathcal{C}^r$ on laisse le lecteur vérifier que l'on obtient le même résultat, c'est à dire que $\mathcal{C}^r$ est minimal et que pour tout λ le cœur de $\pi_\lambda^{\mathcal{C}^r}$ est $\mathcal{C}^r$ tout entier.

4.3 Construction de Landri-Minsky-Taylor

L'objectif de cette section est de présenter une autre construction de cercle universel pour un flot d'Anosov $S\mathbb{R}$ -covered qui est faite dans un cadre plus général dans [BT25]. Pour cela on va *tilter* le flot pour le rendre transverse au feuilletage instable $\mathcal{W}^u$ et à partir de cette propriété arriver à construire un cercle universel.

Commençons par construire un flot qui tiltera le feuilletage $\mathcal{W}^u$ pour le rendre transverse au flot φ . En utilisant la proposition 3.9 on peut se ramener à la situation où $\mathcal{W}^s$ est adaptée à φ . Passons maintenant à la construction d'une application $\tilde{\eta}_+^t : \tilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ de la façon suivante :

On considère une feuille $\lambda \in \tilde{\mathcal{W}}^u$ et $x \in \lambda$ alors la feuille fortement stable contenant x est un horocycle sur $\tilde{\mathcal{W}}^s(x) \simeq \mathbb{D}$ qui est centré en $\theta_{\tilde{\mathcal{W}}^s(x)}$. On pose alors $\tilde{\eta}_+^t(x) := x_t$ où x_t est l'unique point de l'horocycle contenant x qui est à distance par longueur d'arc égale à t de x dans le sens positif (il faut ici faire un choix d'orientation uniforme pour tous les horocycles).

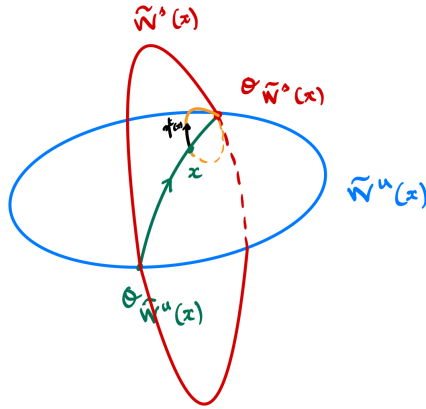


FIGURE 18 – Action de l'application $\tilde{\eta}_+^t$.

Le flot $\tilde{\eta}_+^t$ étant défini pour chaque feuille et comme la métrique varie continuellement de feuille en feuille on

obtient un flot global sur $\widetilde{\mathcal{M}}$. On peut pareillement définir $\tilde{\eta}_-^t$ en prenant le point à distance t dans le passé de x . On pose alors $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u$ l'image par $\tilde{\eta}_\pm^1$ de $\widetilde{\mathcal{W}}^u$. Démontrons alors le premier résultat important :

Proposition 4.20. *Les feuilletages $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u$ sont transverses à $\tilde{\varphi}$.*

Démonstration. Le feuilletage stable est fixé par $\tilde{\eta}_\pm^t$ ainsi $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u \pitchfork \widetilde{\mathcal{W}}^s$. Maintenant pour montrer que $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u$ est transverse à $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ il nous faut comprendre un peu mieux l'action de $\tilde{\eta}_\pm^t$ sur le feuilletage instable. Pour ça, changeons de point de vue en identifiant les feuilles non plus à $\mathbb{D}$ mais à $\mathbb{H}^2$. On obtient alors la compactification en $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R}$. On peut ici supposer quitte à composer par une isométrie que le point entonnoir correspond à ∞ . On obtient donc que pour une feuille $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ le feuilletage par orbites de celle-ci correspond au feuilletage par des lignes verticales. Par construction pour chaque orbite $\lambda \cap \mu$ avec $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ on a $\eta_+^1(\lambda \cap \mu)$ qui correspond au bord (positif) du 1-voisinage hyperbolique de $\lambda \cap \mu$ **dans** μ . On se ramène alors au cas le plus simple de la droite imaginaire (0∞) . Il suffit de comprendre à quoi ressemble dans μ le bord du 1-voisinage hyperbolique de $\eta_\pm^1((0 \infty))$ pour pouvoir avoir alors la forme globale de l'action de $\eta_\pm^1$ sur $\widetilde{\mathcal{W}}^u$. Notons alors $Z(r)$ le point à distance 1 de ir qui possède la même partie imaginaire et qui est "à droite" de (0∞) . Ce point correspond exactement à l'image par η_+^1 de ir car l'horocycle passant par ir ayant pour centre ∞ est exactement la droite horizontale d'équation $y = r$. On rappelle ici la formule de la distance hyperbolique dans le demi-plan de Poincaré entre $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\Im(z_1)\Im(z_2)}\right)$$

ce qui donne dans notre contexte que $Z(r)$ vérifie l'équation :

$$1 = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{|ir - Z(r)|^2}{2r^2}\right)$$

en isolant $|ir - Z(r)|$ on obtient :

$$|ir - Z(r)| = (\sqrt{2(\operatorname{ch}(1) - 1)})r$$

Le fait que la distance entre ir et $Z(r)$ varie linéairement en r nous dit alors que $\eta_+^1((0 \infty))$ est une droite qui forme un angle α avec (0∞) . Par des arguments de géométrie on trouve l'expression suivante pour α :

$$\alpha = \operatorname{Arctan}(\sqrt{2(\operatorname{ch}(1) - 1)})$$

On peut maintenant visualiser dans μ l'action de η_+^1 :

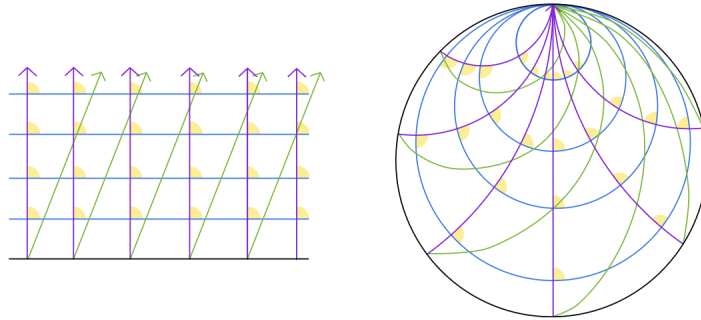


FIGURE 19 – Action de η_+^1 sur les orbites $\lambda \cap \mu$ (image tirée de [BT25]).

Ce raisonnement nous permet donc de conclure sur le caractère transverse du feuilletage $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u$ avec $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ et donc sur le fait que $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm^u$ soit transverse à $\tilde{\varphi}$. $\square$

On vient maintenant étudier la projection des feuilles tiltées sur l'espace d'orbites de φ . Pour cela pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ on note $\Omega_\lambda^\pm = \Theta \circ \eta_\pm^1(\lambda)$ où $\Theta : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{O}_\varphi$ représente la projection canonique sur l'espace d'orbites, on note par ailleurs $\lambda^\pm = \eta_\pm^1(\lambda)$. On appelle $\Omega_\lambda^\pm$ **l'ombre positive** (resp. **négative**) de la feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$.

On fixe une fois pour toutes l'orientation suivante sur l'espace d'orbites :

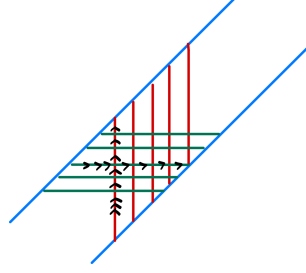


FIGURE 20 – Orientation fixée.

On peut maintenant définir la saturation stable positive et négative d'un ensemble $X \subseteq \mathcal{O}_\varphi$.

Définition 4.21 Soit $X \subseteq \mathcal{O}_\varphi$, la **saturation stable positive** de X que l'on note $\mathcal{O}_\varphi^{+,s}(X)$ est l'ensemble :

$$\mathcal{O}_\varphi^{+,s}(X) := \{q \in l \text{ avec } l \in \mathcal{O}_\varphi^s(p) \text{ et } q \text{ du coté positif de } p, p \in X\}$$

On peut définir pareillement la **saturation instable positive** et de même pour le cas négatif.

On souhaite maintenant montrer que pour une feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ on a l'égalité $\Omega_\lambda^\pm = \mathcal{O}_\varphi^{\pm,s}(\Theta(\lambda))$. Pour cela, comme les feuilles sont feuilletées par des orbites il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.22. Soit γ une orbite $\tilde{\varphi}$ alors :

$$\Theta \circ \eta_\pm^1(\gamma) = \mathcal{O}_\varphi^{\pm,s}(\Theta \circ \gamma)$$

Démonstration. Tout le travail a déjà été fait, en effet par le raisonnement de la proposition 4.20 on obtient que $\eta_\pm^1(\gamma)$ intersecte dans $\widetilde{\mathcal{W}}^s(\gamma)$ toutes les orbites du coté positif de γ . Ainsi quand on projette on retrouve bien l'égalité voulue. $\square$

On obtient donc bien que pour toute feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$:

$$\Omega_\lambda^\pm = \mathcal{O}_\varphi^{\pm,s}(\Theta(\lambda))$$

On vient maintenant compactifier l'espace d'orbites $\mathcal{O}_\varphi$ avec la construction que l'on a brièvement rappelée dans la section 2.4. On souhaite maintenant représenter l'ombre positive de λ dans la compactification $\bar{\mathcal{O}}_\varphi$ de l'espace d'orbites. Pour comprendre la forme de cette ombre dans le compactifié il faut remarquer que le bord dans $\mathcal{O}_\varphi$ de Ω_λ^+ est composé de deux feuilles, une feuille stable verticale faisant un perfect fit avec λ à droite et λ elle même. La compactification dans le cas $\mathbb{S}\mathbb{R}$ – covered se faisant en rajoutant les limites des arcs de feuilles au bord en plus de deux points à l'infini $\xi^\pm$ (voir [Fen12, Section 3]) on obtient alors la forme suivante dans le compactifié :

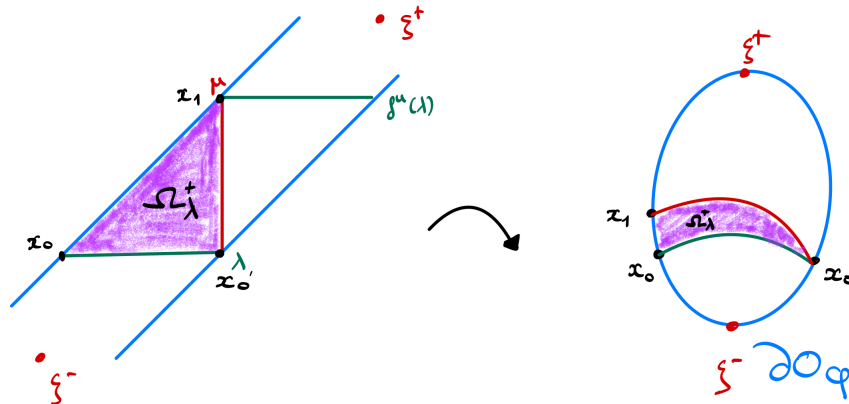


FIGURE 21 – Ω_λ^+ dans $\bar{\mathcal{O}}_\varphi$.

Pour justifier formellement ce dessin il faut démontrer le résultat suivant où $\text{Fr}\Omega_\lambda^+$ représente la frontière topologique de Ω_λ^+ dans $\mathcal{O}_\varphi$:

Proposition 4.23. *L'adhérence $\bar{\Omega}_\lambda^+$ est un disque dans $\bar{\mathcal{O}}_\varphi$ qui rencontre $\partial\mathcal{O}_\varphi$ en $\partial_\infty\Omega_\lambda^+$ et $\mathcal{O}_\varphi$ en $\Omega_\lambda^+ \cup \text{Fr}\Omega_\lambda^+$*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\bar{\Omega}_\lambda^+ \setminus \Omega_\lambda^+$ est un cercle. Pour cela on souhaite construire un homéomorphisme avec le bord. Si l'on revient alors sur la figure 21 on veut construire ici un homéomorphisme qui fixe la zone $\partial_\infty\Omega_\lambda^+$ et qui induit des homéomorphismes entre les deux composantes connexes de $\text{Fr}\Omega_\lambda^+$ et les deux bandes infinies avec les points limite rajoutés. Pour cela on commence par construire deux homéomorphismes $(h_i)_{i \in \{1,2\}}$ qui partent des composantes connexes de $\text{Fr}\Omega_\lambda^+$ vers des parties du bord de $\mathcal{O}_\varphi$. Par symétrie du raisonnement il suffit de construire l'homéomorphisme h_1 entre λ et la partie "basse" du bord de l'espace d'orbites. Pour cela notons $x_0 \in \mathbb{R}$ la limite négative de $\Theta \circ \lambda$ sur le bord gauche qui est homéomorphe à $\mathbb{R}$, on note de même x'_0 sa limite positive. $\Theta \circ \lambda$ peut être identifié par un homéomorphisme à $]0, 1[$, par ailleurs la feuille "compactifiée" $\Theta \circ \lambda \cup \{x_0, x'_0\}$ peut être identifiée avec $[0, 1]$. On note r_g l'homéomorphisme qui identifie le bord gauche à $\mathbb{R}$, r_d l'homéomorphisme qui identifie le bord droit à $\mathbb{R}$ et g l'homéomorphisme qui identifie $\Theta \circ \lambda \cup \{x_0, x'_0\}$ à $[0, 1]$.

Remarque 4.24. On fait ici une remarque importante, dans le cas $\mathcal{S}\mathbb{R}$ -covered $r_g(x_0) = r_d(x'_0)$ car l'espace d'orbites est isomorphe à la bande ouverte bornée par $y = x$ et $y = x + 1$ qui est trivialement feuilletée. On note alors dorénavant $x_0 = r_g(x_0) = r_d(x'_0) \in \mathbb{R}$ et ce sera clair selon le contexte de quel élément on parle.

Posons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{1,1} : [0, \frac{1}{2}] &\longrightarrow [-\infty, x_0] \\ x &\longmapsto \begin{cases} x_0 - \tan(\pi x) & \text{si } x \neq \infty \\ -\infty & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \tan(\pi x)$ réalisant un homéomorphisme croissant entre $[0, \frac{1}{2}[$ et $[0, +\infty[$ on obtient bien un homéomorphisme entre $[0, \frac{1}{2}]$ et $[-\infty, x_0]$ tel que $\tilde{h}_{1,1}(0) = x_0$ et $\tilde{h}_{1,1}(\frac{1}{2}) = -\infty$. On construit pareillement un homéomorphisme $\tilde{h}_{1,2}$ entre $[\frac{1}{2}, 1]$ et $[-\infty, x_1]$ tel que $\tilde{h}_{1,2}(\frac{1}{2}) = -\infty$ et $\tilde{h}_{1,2}(1) = x_0$. On peut maintenant construire l'homéomorphisme h_1 comme suit :

$$\begin{aligned} h_1 : \Theta \circ \lambda \cup \{x_0, x_1\} &\longrightarrow \text{Bord "bas" de l'espace d'orbites} \\ x &\longmapsto \begin{cases} r_g^{-1}(\tilde{h}_{1,1}(g(x))) & \text{si } g(x) \in [0, \frac{1}{2}[\\ r_d^{-1}(\tilde{h}_{1,2}(g(x))) & \text{si } g(x) \in]\frac{1}{2}, 1] \\ \xi^- & \text{si } g(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Par les considérations faites précédemment on vérifie bien que h_1 est un homéomorphisme qui envoie $\Theta \circ \lambda \cup \{x_0, x_1\}$ sur le bord bas de l'espace d'orbites qui par ailleurs fixe x_0 et x_1 . On construit alors pareillement un homéomorphisme h_2 qui envoie le compactifié de la feuille rouge sur le "bord haut" de l'espace d'orbites de telle sorte que x_1 et x'_0 soit fixés. Si on note $\text{Fr}^{s/u}\Omega_\lambda^+$ les feuilles stables et instables formant la frontière topologique de Ω_λ^+ dans $\mathcal{O}_\varphi$ on obtient alors l'homéomorphisme voulu en posant :

$$\begin{aligned} h : \bar{\Omega}_\lambda^+ \setminus \Omega_\lambda^+ &\longrightarrow \partial\mathcal{O}_\varphi \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \partial_\infty\Omega_\lambda^+ \\ h_1(x) & \text{si } x \in \text{Fr}^u\Omega_\lambda^+ \\ h_2(x) & \text{si } x \in \text{Fr}^s\Omega_\lambda^+ \end{cases} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Schoenflies on obtient alors le résultat voulu. $\square$

On peut maintenant passer à la construction du cercle universel qui sera ici basée sur le cercle $\partial\mathcal{O}_\varphi$, par la construction de Fenley on sait que l'action du groupe fondamental sur $\mathcal{O}_\varphi$ se prolonge continuellement sur $\partial\mathcal{O}_\varphi$, on souhaite donc construire des applications monotones $\pi_\lambda^\mathcal{O} : \partial\mathcal{O}_\varphi \longrightarrow \partial_\infty\lambda$ qui vérifient les propriétés voulues. Pour cela partons de Ω_λ^+ avec son bifeuilletage $\Omega_\lambda^{+,s/u}$.

Remarque 4.25. Les arcs de feuilletage de Ω_λ^+ ont des points limite bien définis, en effet dans la composante $\partial_\infty\Omega_\lambda^+$ cela est assuré par la compactification de Fenley, dans les composantes de $\text{Fr}\Omega_\lambda^+$ cela est assuré car chaque point de ces feuilles est intersecté par un unique arc de feuilletage transverse.

On rappelle que le feuilletage $\widetilde{\mathcal{W}}_+^u$ étant transverse à $\tilde{\varphi}$, on obtient sur chaque feuille une structure bi-feuilletée induite par le bifeuilletage de $\tilde{\varphi}$. Pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ on note $\lambda^{+,s/u}$ le bifeuilletage sur λ^+ .

Proposition 4.26. *Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$, les arcs de feuilletage de $\lambda^{+,s/u}$ vérifient les propriétés suivantes :*

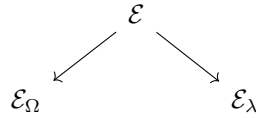
- i) [Fen09, Corollary 5.5] : *Les arcs de feuilletages possèdent des points limite bien définis sur $\partial_\infty \lambda^+$;*
- ii) [Fen09, Prop 6.3] : *Les points limite du feuilletage stable sont denses dans $\partial_\infty \lambda^+$ (de même pour le feuilletage instable).*

Il existe une identification canonique entre les arcs de feuilletage de λ^+ et ceux de Ω_λ^+ . On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points limite des arcs de feuilletage.

Proposition 4.27. *L'ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'un ordre circulaire.*

Démonstration. Si on considère trois points limite d'arcs de feuilletage. En prenant des cercles centrés en 0 tous orientés dans le sens horaire, alors pour des cercles de rayon assez grand nous allons avoir les trois arcs qui les intersectent, on considère alors les premiers points d'intersection des arcs avec un des cercles qui nous donne ainsi un triplet ordonné, par ailleurs l'ordre ne dépend pas du cercle choisi car ceux-là ont la même orientation (voir [Bon24, Lemme 2.1]). Comme Ω_λ^+ et λ^+ sont bifeuilletés et que l'on identifie canoniquement les arcs de feuilletages (et donc feuilletage) on peut choisir les cercles dans l'un ou dans l'autre sans changer la valeur renvoyée. Cela permet donc de munir $\mathcal{E}$ d'un ordre circulaire en ordonnant les triplets de points d'après l'ordre des arcs les définissant. $\square$

On note maintenant $\mathcal{E}_{\lambda^+} \subseteq \partial_\infty \lambda^+$ le sous ensemble des points idéals d'arcs de feuilletage de λ^+ et $\mathcal{E}_\Omega \subseteq \partial \bar{\Omega}_\lambda^+$ le sous ensemble des points idéals d'arc de feuilletage de Ω_λ^+ . On obtient le diagramme suivant avec les identifications canoniques qui préservent l'ordre circulaire (où le dégénèrent éventuellement) :

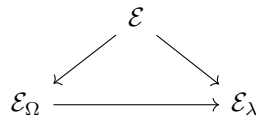


On souhaite compléter ce diagramme en un diagramme triangulaire commutatif tel que chaque applications préservent ou dégénère l'ordre. Pour cela il faut faire un peu attention, en effet dans $\mathcal{E}$ il n'existe pas de triplets dégénérés car tous les arcs sont disjoints, en revanche il se pourrait par exemple que dans λ^+ deux arcs de feuilletage restent à distance bornée et définissent ainsi le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda^+$, l'identification canonique $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda$ viendrait alors identifier deux points distincts sur le même point dans $\mathcal{E}_\lambda$. Cette application préserve ou dégénère bien l'ordre. Pour s'assurer que l'on peut compléter le diagramme on vient alors montrer que si deux arcs de feuilletages r_1, r_2 définissent le même point idéal dans $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+$ alors ils définissent le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda^+$. Cela nous permet alors de construire une application qui préserve ou dégénère l'ordre de $\mathcal{E}_\Omega$ vers $\mathcal{E}_\lambda$, à priori rien nous assure que l'on peut faire de même dans le sens inverse.

Lemme 4.28. *Soit r_1, r_2 deux arcs de feuilletage qui possèdent le même point idéal dans $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+$, alors ils possèdent le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda^+$.*

Démonstration. Si r_1, r_2 sont deux arcs distincts ils intersectent une feuille en deux points distincts, ainsi comme r_1, r_2 possèdent le même point idéal on obtient forcément que celui-ci est dans $\partial_\infty \Omega_\lambda \subseteq \partial \mathcal{O}_\varphi$ alors par la compactification de Fenley on obtient que r_1 et r_2 sont dans la même suite finie de *perfect fit*. On doit donc montrer que deux arcs effectuant un *perfect fit* dans $\partial_\infty \Omega_\lambda^+ \subseteq \partial \mathcal{O}_\varphi$ possèdent nécessairement le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda^+$. Supposons alors que r_1 et r_2 effectuent un *perfect fit*, si r_1 et r_2 sont deux feuilles stables il n'existe pas de feuille instable comprise entre les deux. Ainsi dans $\partial_\infty \lambda^+$ cela se traduit par le fait qu'il n'existe pas de point idéal provenant d'un arc instable dans l'intervalle $\langle r_1^\infty, \cdot, r_2^\infty \rangle$ ce qui contredit directement la proposition 4.26. On raisonne pareillement si r_1 et r_2 sont des arcs instables. $\square$

Par le lemme précédent, l'application $\mathcal{E}_\Omega \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda$ est alors bien définie et préserve ou dégénère l'ordre ce qui nous permet de compléter le diagramme en un diagramme commutatif à flèches qui préservent ou dégénèrent l'ordre :



Par la proposition 4.26 $\mathcal{E}_\lambda$ est dense dans $\partial_\infty \lambda^+$. Par ailleurs par la compactification de Fenley $\mathcal{E}_\Omega|_{\partial_\infty \Omega_\lambda^+} = \partial_\infty \Omega_\lambda^+ \setminus \{x_0, x'_0, x'_1\}$ et donc en particulier $\mathcal{E}_\Omega|_{\partial_\infty \Omega_\lambda^+}$ est dense dans $\partial_\infty \Omega_\lambda^+$. De plus $\mathcal{E}_\Omega|_{\text{Fr}\Omega_\lambda^+} = \text{Fr}\Omega_\lambda^+$. Ainsi on obtient que $\mathcal{E}_\Omega$ est dense dans $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+$. On obtient alors que $\mathcal{E}_\Omega \rightarrow \mathcal{E}_\lambda$ se prolonge en une unique application **monotone** entre cercles $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+ \rightarrow \partial_\infty \lambda^+$ qui fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{E}_\Omega & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial \bar{\Omega}_\lambda^+ & \xrightarrow{\quad} & \partial_\infty \lambda^+ \end{array}$$

On souhaite construire des applications monotones entre $\partial \mathcal{O}_\varphi$ et $\partial_\infty \lambda^+$ pour cela on doit encore montrer un dernier lemme :

Lemme 4.29. *Si deux arcs de feuilletages possèdent des points idéals dans la même composante de $\text{Fr}\Omega_\lambda^+$ alors ils possèdent le même point idéal dans $\partial_\infty \lambda^+$.*

Démonstration. si r_1 et r_2 sont deux arcs stables qui intersectent $\text{Fr}^u \Omega_\lambda^+$ alors il n'y a pas de point idéal d'arc instable entre les deux. Par densité des points idéals instables dans $\partial_\infty \lambda^+$ cela force l'intervalle $\langle r_1^\infty, \cdot, r_2^\infty \rangle$ d'être réduit à un point. $\square$

Par ce lemme on obtient donc que l'application monotone $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+ \rightarrow \partial_\infty \lambda^+$ effondre les feuilles "frontières" alors on peut directement obtenir une application monotone continue entre $\partial \mathcal{O}_\varphi$ et $\partial_\infty \lambda^+$. Pour cela on considère l'homéomorphisme $h : \partial \bar{\Omega}_\lambda^+ \rightarrow \partial \mathcal{O}_\varphi$ qui fixe $\partial_\infty \Omega_\lambda^+$ donné dans la proposition 4.23. En précomposant par h^{-1} on obtient le résultat voulu, par ailleurs comme $\partial \bar{\Omega}_\lambda^+ \rightarrow \partial_\infty \lambda^+$ effondre la frontière cette construction est indépendante du l'homéomorphisme choisit tant que celui-ci fixe $\partial_\infty \Omega_\lambda^+$, enfin l'application ainsi obtenue est bien monotone car h fixe $\partial_\infty \Omega_\lambda^+$. On obtient enfin le diagramme suivant avec $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ qui est l'application monotone recherchée :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{E}_\Omega & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial \bar{\Omega}_\lambda^+ & \xrightarrow{\quad \Psi \quad} & \partial_\infty \lambda^+ \\ \downarrow h & \nearrow \pi_\lambda^\mathcal{O} & \\ \partial \mathcal{O}_\varphi & & \end{array}$$

Avant de montrer que $\partial \mathcal{O}_\varphi$ muni des applications $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ est un cercle universel pour le feuilletage $\widetilde{\mathcal{W}}_+^u$ il peut être intéressant de mieux comprendre l'action des applications $\pi_\lambda^\mathcal{O}$. Dans le cas $\mathcal{SR} - covered$ tous les points de $\partial \mathcal{O}_\varphi$ sauf $\xi^\pm$ sont des points limite (positifs ou négatifs) d'une feuille. Par continuité des applications $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ et par le lemme 4.29 on obtient que tous les points $x \notin \partial_\infty \Omega_\lambda^+$ sont envoyés par $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ sur $\alpha \in \partial_\infty \lambda^+$ qui est l'image commune de x_0, x_1 et le point de *perfect fit* dans la figure 21. Pour comprendre la valeur de α il faut remarquer que le flot tilté $\tilde{\varphi}^+ = \eta_+^1 \circ \tilde{\varphi} \circ (\eta_+^1)^{-1}$ est un flot d'Anosov conjugué à $\tilde{\varphi}$ qui possède le même feuilletage stable que $\tilde{\varphi}$ et qui possède $\widetilde{\mathcal{W}}_+^u$ comme feuilletage instable. On a donc que le feuilletage stable des feuilles $\lambda^+ \in \widetilde{\mathcal{W}}_+^u$ est donné par le feuilletage par orbites de $\tilde{\varphi}^+$, ainsi les arcs de feuilletage stables possèdent le même point limite négatif qui n'est autre que θ_{λ^+} . Si on regarde le feuilletage stable de Ω_λ^+ , alors les limites positives des feuilles stables (qui recouvrent entièrement $\partial_\infty \bar{\Omega}_\lambda^+ \setminus \{x_0, x'_0, x_1\}$) sont envoyés sur les limites positives de ces mêmes feuilles stables dans $\partial_\infty \lambda^+$ et les limites négatives sont envoyés sur le point entonnoir θ_{λ^+} enfin, par l'orientation définie précédemment on a alors que $\alpha = \theta_{\lambda^+}$. Par ce raisonnement et le lemme 4.28 on comprend alors entièrement l'action de l'application $\pi_\lambda^\mathcal{O}$.

On présente maintenant un lemme important démontré par Fenley que l'on a traduit dans notre contexte :

Lemme 4.30. [*Fen09*, Lemme 6.2] Soit $\lambda^+ \in \widetilde{\mathcal{W}}_+^u$, W une feuille stable ou instable de $\tilde{\varphi}$ et $r = W \cap \lambda^+$ un arc de feuilletage (stable/instable) dans celle-ci. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subseteq \Lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_+^u)$ de λ^+ tel que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow E_\infty \\ \mu &\longmapsto r_\mu^\infty \end{aligned}$$

est continue où r_u est l'arc formé par $W \cap \mu$.

Remarque 4.31. On remarque la chose suivante, si $x \in \partial\mathcal{O}_\varphi \cap \partial_\infty \bar{\Omega}_\lambda^+ \setminus \{x_0, x'_0, x_1\}$ alors il est limite positive d'un arc de feuilletage stable qui est alors envoyé sur sa limite positive dans $\partial_\infty \lambda^+$ par $\pi_\lambda^\mathcal{O}$. Il existe par ailleurs un voisinage $\mathcal{U}$ de λ^+ dans $\Lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_+^u)$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{U}$ on ait x toujours dans $\partial\mathcal{O}_\varphi \cap \partial_\infty \bar{\Omega}_\mu^+ \setminus \{x_0(\mu), x'_0(\mu), x_1(\mu)\}$, alors par le lemme précédent $\mu \mapsto \pi_\mu^\mathcal{O}(x)$ est continue sur ce voisinage.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le fait que :

Théorème 4.32. Le couple $(\partial\mathcal{O}_\varphi, \{\pi_\lambda^\mathcal{O}\})$ est un cercle universel pour $\widetilde{\mathcal{W}}_+^u$.

Démonstration. Considérons $(\lambda, p) \in \Lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_+^u) \times \partial\mathcal{O}_\varphi$ et $(\lambda_n, p_n) \longrightarrow (\lambda, p)$. Montrons alors que

$$\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(p_n) \longrightarrow \pi_\lambda^\mathcal{O}(p)$$

On distingue deux situations, si $\pi_\lambda^\mathcal{O}(p) = \theta_\lambda$, on considère alors $x, y \in \partial_\infty \lambda^+ \setminus \theta_{\lambda^+}$ et $a, b \in \partial\mathcal{O}_\varphi \cap \partial_\infty \bar{\Omega}_\lambda^+ \setminus \{x_0, x'_0, x_1\}$ tels que $\pi_\lambda^\mathcal{O}(a) = x$ et $\pi_\lambda^\mathcal{O}(b) = y$. Par la remarque 4.31 nous avons que $\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(a) \longrightarrow x$ et $\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(b) \longrightarrow y$. Comme $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ est monotone nous avons $p \in]a, b[^c$ ainsi pour n assez grand nous avons $p_n \in]a, b[^c$. Comme les $\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}$ sont monotones nous avons $\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(p_n) \in]\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(a), \pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(b)[^c$ pour n assez grand. Par ce qu'on vient de dire on a donc l'existence de points d'accumulation de $(\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(p_n))_{n \geq 0}$ dans $]x, y[^c$. Comme on peut choisir x, y de façon arbitrairement proche de θ_{λ^+} on obtient que $\pi_{\lambda_n}^\mathcal{O}(p_n) \longrightarrow \pi_\lambda^\mathcal{O}(p)$. Dans la deuxième situation on suppose que $\pi_\lambda^\mathcal{O}(p) \neq \theta_{\lambda^+}$. On fait alors de même avec $x, y \in \partial_\infty \lambda^+ \setminus \theta_{\lambda^+}$ tels que $\pi_\lambda^\mathcal{O}(p) \in [x, y]$ et on obtient le même résultat.

On considère maintenant $\lambda \in \Lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_+^u)$, $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ et $z \in \partial\mathcal{O}_\varphi$. Si $z = \xi^\pm$ alors γ fixe z (modulo une permutation) et

$$\pi_{\gamma \cdot \lambda}^\mathcal{O}(\gamma \cdot \xi^\pm) = \pi_{\gamma \cdot \lambda}^\mathcal{O}(\xi^\pm) = \pi_{\gamma \cdot \lambda}^\mathcal{O}(x_0^{\gamma \cdot \lambda}) = \gamma \cdot \pi_\lambda^\mathcal{O}(x_0^\lambda) = \gamma \cdot \pi_\lambda^\mathcal{O}(\xi^\pm)$$

Si maintenant $z \neq \xi^\pm$ alors comme l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \partial\mathcal{O}_\varphi$ est un prolongement continu de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{O}_\varphi$ et que z est un point limite d'un arc de feuilletage on obtient le résultat suivant car les intersections (et *perfect fits*) sont préservés :

Lemme 4.33. Si $z \in \partial_\infty \Omega_\lambda^+$ alors $\gamma \cdot z \in \partial_\infty \Omega_{\gamma \cdot \lambda}^+$ et de même si $z \notin \partial_\infty \Omega_\lambda^+$.

A partir de ce résultat on obtient directement que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{O}_\varphi & \xrightarrow{\gamma \cdot} & \partial\mathcal{O}_\varphi \\ \downarrow \pi_\lambda^\mathcal{O} & & \downarrow \pi_{\gamma \cdot \lambda}^\mathcal{O} \\ \partial_\infty \lambda & \xrightarrow{\gamma \cdot} & \partial_\infty \gamma \cdot \lambda \end{array}$$

commute. □

Maintenant que l'on a construit le cercle universel $\partial\mathcal{O}_\varphi$ pour $\widetilde{\mathcal{W}}_+^u$ on peut se ramener à un cercle universel pour $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ car les deux feuilletages sont isotopes. En effet comme η_+^1 induit un isomorphisme entre $\mathcal{L}^u$ et $\Lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_+^u)$ qui identifie les bords $\partial_\infty \lambda$ et $\partial_\infty \eta_+^1(\lambda)$ (cette application envoie les points à distance borné au sein d'une même feuille stable) on peut alors considérer les applications monotones :

$$\pi_\lambda^+ = \eta_+^1 \circ \pi_\lambda^\mathcal{O}$$

qui définissent un cercle universel pour $\widetilde{\mathcal{W}}^u$. On note $\partial^+ \mathcal{O}_\varphi$ ce cercle universel. On peut construire de façon analogue le cercle universel $\partial^- \mathcal{O}_\varphi$ en regardant l'ombre *négative*. La seule subtilité ici est qu'on construit des applications monotones de telle sorte que les points limite **négatifs** des feuilles stables $\mathcal{O}^s \cap \Omega_\lambda^-$ soient

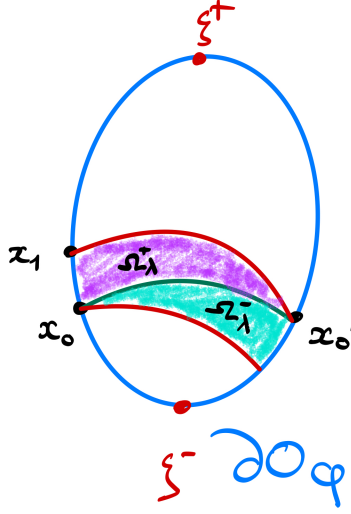


FIGURE 22 – Ombre *positive* et *negative* d'une feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$.

envoyés sur les points limite **positifs** de ces feuilles dans λ^- et les points limite positifs ainsi que tous les autres points de $\partial\mathcal{O}_\varphi$ soient envoyés sur θ_{λ^-} .

Après avoir modifié cette étape là on peut raisonner pareillement pour construire le cercle universel $\partial^-\mathcal{O}_\varphi$ pour $\widetilde{\mathcal{W}}^u$.

Remarque 4.34. Dans le cas $\mathcal{SR}$ – *covered* on obtient un isomorphisme de cercles universels entre $\partial^+\mathcal{O}_\varphi$ et $\partial^-\mathcal{O}_\varphi$ qui est donné par l'involution $i^s : \partial\mathcal{O}_\varphi \longrightarrow \partial\mathcal{O}_\varphi$ qui fixe $\xi^\pm$ et inverse les points limite de chaque feuilles stables. On peut aussi effectuer cette construction dans le cas non $\mathbb{R}$ – *covered*, en revanche Buckminster et Taylor ont montrés (voir [BT25, Th 7.1]) que dans cette situation là $\partial^+\mathcal{O}_\varphi$ et $\partial^-\mathcal{O}_\varphi$ sont non-isomorphes.

Présentons maintenant un lien intéressant entre $\partial^\pm\mathcal{O}_\varphi$ et $\mathcal{C}^r$ avant de démontrer la continuité de la section non marqueur.

Proposition 4.35. $\partial^\pm\mathcal{O}_\varphi$ est un revêtement double de $\mathcal{C}^l$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas de $\partial^+\mathcal{O}_\varphi$. Comme $\mathcal{C}^l \simeq \hat{\mathcal{L}}^s$ nous allons plutôt raisonner avec ce cercle universel là. Considérons l'application $p : \partial^+\mathcal{O}_\varphi \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}^s$ qui à $x \in \partial\mathcal{O}_\varphi \setminus \{\xi^\pm\}$ associe la classe de la feuille dans $\mathcal{L}^s$ dont il est point limite et à $\xi^\pm$ associe ∞ . Comme une même feuille possède deux points limite dans $\partial\mathcal{O}_\varphi$ et que dans le cas $\mathcal{SR}$ – *covered* tout les points du bord sauf $\xi^\pm$ sont points limite d'une feuille on obtient à la fois le caractère continu et le fait que pour tout ouvert $\mathcal{U} \subseteq \hat{\mathcal{L}}^s$:

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_+ \sqcup \mathcal{U}_-$$

L'ouvert $\mathcal{U}_+$ correspond aux points limite positifs (et éventuellement ξ^+) et $\mathcal{U}_-$ aux points limite négatifs (et éventuellement ξ^-). Le caractère bi-continu et bijectif des restrictions est tout aussi immédiat. $\square$

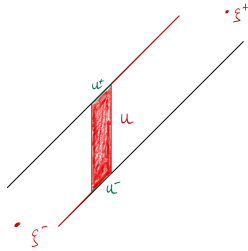


FIGURE 23 – Visualisation de $p^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_+ \sqcup \mathcal{U}_-$.

Passons maintenant à la justification de la continuité de la section non marqueur :

Proposition 4.36. L'application $s_{nm} : \mathcal{L}^u \longrightarrow E_\infty$ est continue.

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \mathcal{L}^u$ et $x \in \partial\mathcal{O}_\varphi$ limite négative d'une feuille de $\mathcal{O}^s \cap \Omega_\lambda^+$ qui intersecte l'intérieur de λ_0 . Par continuité de l'application h_u^r qui à une feuille instable associe son point limite positif dans $\partial\mathcal{O}_\varphi$ (cela se vérifie immédiatement dans le cas $\mathcal{SR} - covered$) on obtient l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}^u$ de λ_0 tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, $h_u^l(\lambda) \neq x$. Ainsi on obtient que pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$:

$$\pi_\lambda^+(x) = \theta_\lambda$$

Autrement dit $\mathbf{s}_{\text{nm}}$ coïncide au voisinage de λ_0 avec la section continue $\sigma^x : \lambda \mapsto \pi_\lambda^+(x)$. Cela étant fait pour λ_0 quelconque la preuve est donc achevée. $\square$

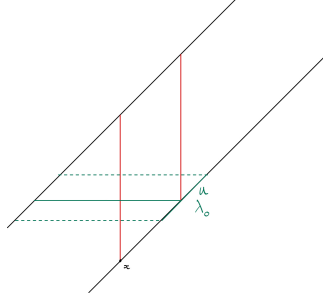


FIGURE 24 – Visualisation de l'ouvert $\mathcal{U}$ avec l'identification du bord droit de $\partial\mathcal{O}_\varphi$ avec $\mathcal{L}^u$.

Pour terminer cette section étudions rapidement la minimalité et les trous du cercle $\partial^+\mathcal{O}_\varphi$. Dans cette situation il y a une famille remarquable de trous. En effet pour tout $\lambda \in \mathcal{L}^u$ la pré-image par $\pi_\lambda^\mathcal{O}$ de θ_λ est le complémentaire dans $\partial\mathcal{O}_\varphi$ de l'intérieur de $\partial_\infty\Omega_\lambda^\pm$. Par la remarque 4.31 c'est par ailleurs l'unique trou. Enfin $\partial^+\mathcal{O}_\varphi$ n'est pas minimal car pour tout $\lambda \in \mathcal{L}^u$, $\pi_\lambda^\mathcal{O}(\xi^+) = \pi_\lambda^\mathcal{O}(\xi^-)$.

4.4 Construction du cercle universel transverse

Dans cette section nous présenterons la construction d'un cercle universel, sa construction étant plus technique nous présenterons simplement les résultats nécessaires. Après avoir construit ce cercle nous allons montrer qu'il s'identifie au cercle $\mathcal{C}^r$ pour ensuite montrer dans la dernière section de ce mémoire un résultat non trivial sur la dynamique de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^r$.

Pour commencer, une définition :

Définition 4.37 Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte $\mathcal{M}$ est *uniforme* si pour toute paire de feuilles $L, L' \in \mathcal{F}$ il existe une constante $M(L, L') > 0$ telle que $d_{\text{Haus}}(L, L') \leq M(L, L')$.

Le feuilletage stable (resp. instable) d'un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ étant uniforme (voir [Pot25, Proposition 5.9]) on se retrouve exactement dans le cadre voulu pour construire le cercle universel transverse que l'on note $\mathbb{S}_{\text{tr}}^1$. Pour construire ce cercle on va se baser sur la construction présentée en détails dans [Fen02, Proposition 3.4].

Pour commencer on remarque que dire que $\mathcal{F}$ est un feuilletage *uniforme* revient à dire que pour toute paire de feuilles L, L' et pour tout $x \in L$ il existe $y \in L'$ tel que $d_{\mathcal{M}}(x, y) \leq M(L, L')$ (et réciproquement). Si $\mathcal{F}$ est uniforme alors $\tilde{\mathcal{F}}$ l'est aussi car on munit $\tilde{\mathcal{M}}$ de la métrique *tirée en arrière* par la projection du revêtement universel. Fixons alors deux feuilles $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage $\mathbb{R}$ -covered uniforme par des feuilles hyperboliques d'une 3-variété compacte (typiquement on prend $\mathcal{F} = \mathcal{W}^u$ ici). Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ est uniforme il existe $b_1 > 0$ tel que $d_{\text{Haus}}(L, L') \leq b_1$, on construit alors une application $\phi : L \rightarrow L'$ définie par :

$$\phi(x) = y \text{ avec un } y \in L' \text{ tel que } d_{\tilde{\mathcal{M}}}(x, y) < b_1$$

Cette fonction n'est pas bien définie, en revanche à l'aide du caractère $\mathbb{R}$ -covered du feuilletage on peut montrer qu'il existe une constante k qui ne dépend que de b_1 telle que :

$$d(x, y) < b_1 \text{ et } d(x, z) < b_1 \text{ alors } d_{L'}(y, z) < k$$

On dit que ϕ est grossièrement définie. On peut alors montrer que ϕ définit une quasi-isométrie (si on étend la définition au caractère grossièrement défini). Quoi qu'il arrive comme le bord d'une feuille hyperbolique

$\partial_\infty L$ vérifie la propriété que chaque point est limite d'une quasi-géodésique et que deux quasi-géodésiques qui restent à distance bornée définissent le même point idéal (positif) au bord on peut montrer que ϕ se prolonge en un homéomorphisme ϕ_∞ (bien défini cette fois-ci) entre $\partial_\infty L$ et $\partial_\infty L'$. On obtient alors une famille de quasi-isométries (grossièrement définies) $\phi^{L,E} : L \rightarrow E$ qui se prolongent en des homéomorphismes $\phi_\infty^{L,E}$ entre $\partial_\infty L$ et $\partial_\infty E$ pour toute paire de feuilles $L, E \in \tilde{\mathcal{F}}$. Pour $E \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $y \in \partial_\infty E$ on note $\alpha_y = \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \{\phi_\infty^{E,F}(y)\}$. On peut alors montrer que les ensembles α_y pour $y \in E_\infty$ sont des courbes continues qui intersectent chaque fibre transversale en un seul point. Par ailleurs si $z \neq z' \in \partial_\infty E$ alors $\alpha_z \cap \alpha_{z'} = \emptyset$. On obtient alors un feuilletage de E_∞ par des transversales globales aux fibres qui permet de définir un cercle universel en considérant l'ensemble quotient $E_\infty / \sim = \mathbb{S}_\cap^1$ où $x \sim y$ si et seulement si $y \in \alpha_x$. Les applications monotones sont simplement les évaluations $\pi^\cap : \mathbb{S}_\cap^1 \rightarrow \partial_\infty L$ qui à une classe associe son unique représentant dans la fibre transversale. On vérifie que l'on a une action du groupe fondamental sur $\mathbb{S}_\cap^1$ qui provient de l'action du groupe fondamental sur E_∞ et que celle-ci accompagnée des applications définies précédemment permet effectivement de construire un cercle universel pour $\mathcal{F}$.

Ce cercle universel possède une autre interprétation qui nous sera utile par la suite. Tout d'abord une définition :

Définition 4.38 Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage et X_t un flot sur $\mathcal{M}$, on dit que X est **régulant** pour $\mathcal{F}$ si toute orbite de $\tilde{X}_t$ intersecte chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Pour un feuilletage $\mathbb{R}$ -covered et uniforme $\mathcal{F}$ dans une 3 variété **hyperbolique** on peut montrer qu'il existe un flot Pseudo-Anosov transverse et régulant (voir [Cal07, Theoreme 9.31]). Dans la section précédente on a tilté le feuilletage pour le rendre transverse à notre flot φ et à partir de cette situation on a pu construire un cercle universel pour le feuilletage tilté (et donc pour le feuilletage de départ par isotopie) en considérant le bord de l'espace d'orbites de φ . Il s'avère que cette construction peut se faire dans le cadre plus général d'un flot pseudo-Anosov transverse à un feuilletage $\mathcal{F}$ (voir [LMT24]), par ailleurs ici le fait que le flot soit **régulant** entraîne que l'ombre de toute feuille de $\mathcal{F}$ soit égale à l'espace d'orbites entier du flot pseudo-Anosov transverse.

Pour fixer les idées revenons à notre feuilletage $\mathcal{W}^u$ de notre flot d'Anosov $\mathcal{SR}$ -covered φ avec la restriction de prendre $\mathcal{M}$ hyperbolique, alors il existe un flot pseudo-Anosov transverse et régulant pour $\mathcal{W}^u$ que l'on note $\varphi^\cap$. On note $\mathcal{W}_\cap^u$ et $\mathcal{W}_\cap^s$ le bifeuilletage singulier associé à $\varphi^\cap$ et $\mathcal{O}_\varphi^\cap$ son espace d'orbites. Pour toute feuille $\lambda \in \tilde{\mathcal{W}}^u$ on note enfin $\Omega_\lambda^\cap = \Theta^\cap(\lambda)$ avec $\Theta : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{O}_\varphi^\cap$ la projection canonique. Par le caractère régulant de $\varphi^\cap$ on obtient que $\Omega_\lambda^\cap = \mathcal{O}_\varphi^\cap$ pour tout $\lambda \in \tilde{\mathcal{W}}^u$. Ainsi en reprenant le diagramme permettant de définir les applications monotones de la section précédente on obtient un diagramme encore plus simple cette fois-ci car $h = id$:

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{E} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\mathcal{E}_\Omega & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}_\lambda \\
\downarrow & & \downarrow \\
\partial \bar{\Omega}_\lambda^\cap & \xrightarrow{\quad} & \partial_\infty \lambda \\
\parallel \scriptstyle id & \nearrow \scriptstyle \pi_\lambda^\cap & \\
\partial \mathcal{O}_\varphi^\cap & &
\end{array}$$

Le choix de notation des applications monotones n'est pas anodin ici, en effet, le théorème [Cal07, Théoreme 9.31] nous dit qu'il existe une identification entre $\mathbb{S}_\cap^1$ et le cercle défini ici.

Ce qu'il faut alors retenir de cette construction réside dans le fait que lorsque l'on suppose $\mathcal{M}$ hyperbolique alors le cercle universel $\mathbb{S}_\cap^1$ peut s'identifier au bord de l'espace d'orbites du pseudo-Anosov transverse et régulant. En particulier toute feuille stable ou instable du bifeuilletage singulier associé à $\varphi^\cap$ permet de définir des points à l'infini dans l'espace d'orbites de $\varphi^\cap$ et donc des points de $\mathbb{S}_\cap^1$.

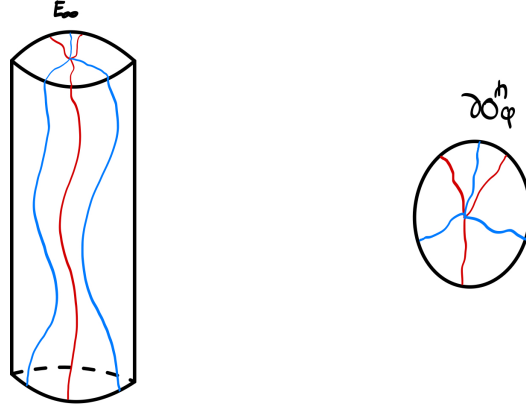


FIGURE 25 – Un 3-prong donne 6 points au bord de l'espace d'orbites et donc 6 points dans $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$.

Pour terminer cette section on démontre un résultat important pour la suite :

Proposition 4.39. *Soit $\mathcal{M}$ une 3 variété fermée (pas forcément hyperbolique) et φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur $\mathcal{M}$, alors les cercles $\mathcal{C}^r$ et $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$ sont isomorphes en tant que cercles universels.*

Démonstration. On vient montrer ici que les sections des deux cercles sur E_∞ coïncident. Pour cela, considérons $x \in \partial_\infty \lambda$ tel que $x \neq \theta_\lambda$. Il existe alors $\mu \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ tel que x soit la limite positive de l'orbite $\lambda \cap \mu$, par ailleurs comme $x \neq \theta_\lambda$ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de λ dans $\mathcal{L}^u$ tel que pour tout $\lambda' \in \mathcal{U}$, $\lambda' \cap \mu \neq \emptyset$. Montrons que la feuille α_x coïncide avec le marqueur défini par μ sur $\mathcal{U}$. Pour montrer cela on utilise le fait que pour tout $\lambda' \in \mathcal{U}$ les quasi-géodésiques $\lambda \cap \mu$ et $\lambda' \cap \mu$ restent à distance bornée en temps positif (cela provient du théorème de structure). Ainsi, comme notre application quasi-isométrique définie grossièrement $\phi^{\lambda, \lambda'}$ envoie la géodésique $\lambda \cap \mu$ à distance bornée de $\lambda \cap \mu$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ on a alors que $\phi^{\lambda, \lambda'}(\lambda \cap \mu)$ reste à distance bornée de $\lambda' \cap \mu$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Par le lemme 3.17 on obtient que $\lambda' \cap \mu$ et $\phi_\infty^{\lambda, \lambda'}(x)$ définissent le même point sur $\partial_\infty \lambda'$. On peut prolonger cette égalité sur la section non marqueur, notons $\lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ la feuille qui effectue un perfect fit "en haut" (pour l'orientation définie dans la figure 20) avec μ . Supposons par l'absurde que $\alpha_x \cap \lambda_0 \neq \theta_{\lambda_0}$, par ce qu'on vient de faire il existe alors un voisinage $\mathcal{U}'$ de λ_0 et une feuille $\mu' \in \widetilde{\mathcal{W}}^s$ tels que α_x coïncide avec le marqueur défini par μ' sur $\mathcal{U}'$, en particulier il existe $\lambda_1 \in \mathcal{U}'$ telle que $\lambda_1 \cap \mu \neq \emptyset$ et $\lambda_1 \cap \mu' \neq \emptyset$ mais alors comme $|\alpha_x \cap \lambda_1| = 1$ on obtient que deux orbites restent à distance bornée en temps positif dans une feuille instable ce qui est impossible. On prolonge de même l'égalité en $f^{u-1}(\lambda_0)$ et après de manière directe à tout $\mathcal{L}^u$. Les deux cercles possèdent alors les mêmes sections, ils sont donc isomorphes ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 4.40. Quand on applique le lemme 3.17 il y a une petite subtilité car $\phi^{\lambda, \lambda'}$ est grossièrement définie, en revanche par construction $\phi^{\lambda, \lambda'}$ envoie $\lambda \cap \mu$ à distance bornée d'une vraie quasi-géodésique qui définit dès lors le point $\phi_\infty^{\lambda, \lambda'}(x) \in \partial_\infty \lambda'$. C'est cette quasi-géodésique que l'on utilise pour appliquer notre lemme.

Corollaire 4.41. *Si $\mathcal{M}$ est une 3 variété fermée hyperbolique, φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur $\mathcal{M}$ et $\varphi^{\mathfrak{h}}$ le flot pseudo-Anosov régulant pour $\mathcal{W}^u$ alors $\mathcal{C}^r$ et $\partial \mathcal{O}_\varphi^{\mathfrak{h}}$ sont isomorphes en tant que cercles universels.*

5 Dynamique de l'action $\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright \mathcal{C}^r$

L'objectif de cette dernière partie est de démontrer un premier résultat non trivial sur l'action du groupe fondamental sur $\mathcal{C}^r$. Si l'objectif de ce mémoire fut de traiter le cas où la variété support est hyperbolique et le flot d'Anosov est $\mathcal{SR} - covered$ les questions ici posées peuvent être traitées dans un cadre bien plus général avec des résultats qui sont pour le moment ouverts où totalement différents de ceux démontrés dans le cas hyperbolique.

5.1 Le cas hyperbolique

Dans cette section on fixe $\mathcal{M}$ une 3 variété hyperbolique fermée, φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ et $\varphi^{\mathfrak{h}}$ le flot pseudo-Anosov régulant pour $\mathcal{W}^u$. L'objectif de cette section est alors de montrer le résultat suivant :

Théorème 5.1. Soit $\mathcal{M}$ une 3 variété hyperbolique fermée et φ un flot d'Anosov $\mathbb{S}\mathbb{R}$ -covered sur $\mathcal{M}$, alors il existe une constante $\mathfrak{k}(\varphi)$ telle que pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, $\gamma^{\mathfrak{k}(\varphi)}$ agit sur $\mathcal{C}^r$ avec un nombre fini de points fixes alternativement attractif/répulsif.

Pour démontrer ce théorème nous allons avoir besoin de certains résultats sur les arbres non Hausdorff au sens de Fenley, la présentation de ces objets et des résultats utiles fait l'objet de cette sous section.

5.1.1 Arbres non Hausdorff au sens de Fenley

Dans cette section nous allons nous baser sur les définitions et résultats introduits par Fenley dans l'article [Fen03].

On rappelle tout d'abord qu'un **segment** abstrait est un ensemble possédant un ordre linéaire le rendant isomorphe (homéomorphe pour la topologie de l'ordre) à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 5.2 Un **arbre non Hausdorff** au sens de Fenley est un ensemble $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $\mathcal{H}$ est une réunion de segments ouverts,
- ii) pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, il existe une suite finie de segments $I_1, \dots, I_n$ avec $x \in I_1$ et $y \in I_n$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$,
- iii) pour tout $x \in \mathcal{H}$ et I_1, I_2 deux prongs distincts en x (segments contenant x isomorphes à $[0, 1]$ ou $[0, 1[$ tel que x corresponde à 0) il se produit la chose suivante :
Pour $y_1 \in I_1 \setminus \{x\}$ et $y_2 \in I_2 \setminus \{x\}$, toute suite finie de segments reliant y_1 à y_2 doit contenir x dans au moins un des segments.

On peut munir un arbre non Hausdorff d'une topologie de la manière suivante :

Définition 5.3 (Topologie de $\mathcal{H}$) Soit $\mathcal{H}$ un arbre non Hausdorff, la topologie sur $\mathcal{H}$ est la suivante : Soit $A \subseteq \mathcal{H}$, A est ouvert si et seulement si pour tout $x \in A$ et tout prong I en x , il existe un sous-prong $I' \subseteq I$ tel que $I' \subseteq A$.

Proposition 5.4. La topologie définie plus haut est effectivement une topologie sur $\mathcal{H}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de la définition 5.3. Nous avons immédiatement $\emptyset$ et $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{T}$. Soit $\{A_j\}_{j \in J}$ une famille quelconque de $\mathcal{T}$, $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$ et I un prong en x , il existe $j_0 \in J$ tel que $x \in A_{j_0}$ ainsi il existe $I' \subseteq I$ un prong en x tel que $I' \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Soit maintenant $A_1, \dots, A_n$ une famille finie de $\mathcal{T}$, $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j$ et I un prong en x , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe $I_j \subseteq I$ sous prong en x tel que $I_j \subseteq A_j$, ainsi $\bigcap_{j=1}^n I_j \subseteq I$ est un sous prong en x et $\bigcap_{j=1}^n I_j \subseteq \bigcap_{j=1}^n A_j$. $\square$

Passons maintenant à quelques définitions importantes :

Définition 5.5 Soit $x, y \in \mathcal{H}$ on dit que $z \in \mathcal{H}$ **sépare** x et y si x et y sont dans des composantes distinctes de $\mathcal{H} \setminus \{z\}$.

Définition 5.6 (Intervalles) Soit $x, y \in \mathcal{H}$ on note $]x, y[$ l'ensemble :

$$]x, y[= \{z \in \mathcal{H}, z \text{ sépare } x \text{ et } y\}$$

On note pareillement $[x, y]$ l'ensemble :

$$[x, y] =]x, y[\cup \{x, y\}$$

Remarque 5.7. Si x, y sont les bornes d'un segment fermé $I \subseteq \mathcal{H}$ alors $I = [x, y]$. En effet pour tout $z \in I \setminus \{x, y\}$ on a par définition que z sépare x et y ainsi $I \subseteq [x, y]$. Réciproquement on peut montrer que $[x, y]$ est l'intersection des chemins reliant x à y (voir [Fen03, Lemme 3.4]). Comme I est un chemin reliant x à y on obtient ainsi directement l'autre inclusion et donc $I = [x, y]$.

On considère maintenant γ un homéomorphisme qui agit **librement** sur $\mathcal{H}$ (c'est à dire sans points fixes). On peut alors définir son **axe fondamental** $\mathcal{A}(\gamma)$:

Définition 5.8 Soit γ un homéomorphisme agissant librement sur $\mathcal{H}$, *l'axe fondamental* de γ est l'ensemble $\mathcal{A}(\gamma)$ défini comme suit :

$$\mathcal{A}(\gamma) = \{x \in \mathcal{H}, \gamma(x) \text{ sépare } x \text{ et } \gamma^2(x)\}$$

Une définition équivalente revient à dire que x sépare $\gamma^{-1}(x)$ et $\gamma(x)$. On présente maintenant trois lemmes et un théorème important :

Lemme 5.9. [Fen03, Lemme 3.7] Soit γ un homéomorphisme agissant librement sur $\mathcal{H}$, alors $x \in \mathcal{A}(\gamma)$ si et seulement s'il existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H} \setminus \{x\}$ non vide tel que $\gamma(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.

Lemme 5.10. [Fen03, Proposition 3.10] Soit γ un homéomorphisme agissant librement sur $\mathcal{H}$, pour tout $x \in \mathcal{A}(\gamma)$:

$$\mathcal{A}(\gamma) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [\gamma^i(x), \gamma^{i+1}(x)].$$

Passons maintenant au dernier lemme important, comme $\mathcal{H}$ n'est pas Hausdorff il se peut que $[x, y]$ ne soit pas séparé pour $x, y \in \mathcal{H}$, en revanche on peut l'écrire comme une union finie de segments fermés (et surtout compacts) telle que les bornes de segments consécutifs ne soient pas séparées :

Lemme 5.11. Soit $x, y \in \mathcal{H}$, il existe une famille finie de segments fermés $[x_i, y_i]$ homéomorphes à $[0, 1]$ (ou éventuellement $[0, 0]$) avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x_1 = x, y_n = y$ telle que

i)

$$[x, y] = \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i]$$

ii) y_i n'est pas séparé avec x_{i+1} pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Et enfin le théorème de Fenley qui sera central ici :

Théorème 5.12. [Fen03, Théorème 3.8] (Existence d'un Axe) Soit γ un homéomorphisme agissant librement sur $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{A}(\gamma) \neq \emptyset$.

On peut maintenant utiliser ces résultats dans le contexte de l'espace des feuilles d'un flot d'Anosov d'après une généralisation de la proposition 2.5 qui nous dit que l'espace des feuilles stables (resp. instables) d'un flot pseudo-Anosov sur une 3 variété fermée est un arbre non Hausdorff au sens de Fenley.

5.1.2 Les arbres non Hausdorff dans le contexte des flots d'Anosov

Proposition 5.13. [GO89, Proposition 6.10] Soit φ un pseudo-Anosov sur une 3 variété fermée $\mathcal{M}$, on note $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ ses feuilletages stables et instables singuliers sur $\mathcal{M}$. Alors les espaces des feuilles $\Lambda(\mathcal{W}^s)$ et $\Lambda(\mathcal{W}^u)$ sont des arbres non Hausdorff au sens de Fenley.

Remarque 5.14. Dans leur article [GO89] Gabai et Oertel démontrent en fait un résultat plus général sur les laminations essentielles.

Par ailleurs on rappelle qu'un élément $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ agit par homéomorphismes sur les espaces de feuilles d'un pseudo-Anosov.

Reprenons maintenant les notations de la section 4.4, on fixe φ un flot d'Anosov $\mathbb{S}\mathbb{R}$ -covered sur une 3-variété hyperbolique $\mathcal{M}$, on note $\varphi^\#$ le flot pseudo-Anosov transverse et régulant pour $\mathcal{W}^u$ et on note $\mathcal{W}_\#^s$, $\mathcal{W}_\#^u$ les feuilletages stables et instables de $\varphi^\#$. On note enfin $\mathcal{L}_\#^s$ l'espace des feuilles stables de $\varphi^\#$. Un résultat important démontré par Fenley dans [Fen12] :

Théorème 5.15. [Fen12, Théorème G] L'espace de feuille $\mathcal{L}_\#^s$ est Hausdorff.

Sachant cela on peut démontrer le lemme important suivant :

Proposition 5.16. Soit $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ qui n'est pas dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de $\varphi^\#$, alors pour tout $x \in \mathcal{A}(\gamma) \subseteq \mathcal{L}_\#^s$, $\gamma^n x$ sort de tout compact.

Démonstration. Supposons qu'il existe un compact $K_0 \subseteq \mathcal{L}_\Phi^s$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k_n \geq n$ tel que $\gamma^{k_n}x \in K_0$. On peut alors extraire une sous-suite $\gamma^{n_j}x$ qui vérifie que pour tout $n_j \in \mathbb{N}$, $\gamma^{n_j}x \in K_0$. Par compacité de K_0 on peut extraire une sous suite $\gamma^{n_j^k}x$ qui converge vers un unique point $x_\infty \in K_0$ (et dans $\mathcal{L}_\Phi^s$ car $\mathcal{L}_\Phi^s$ est Hausdorff). Mais alors par continuité de γ , on obtient que $\gamma(\gamma^{n_j^k}x) \rightarrow \gamma x_\infty$, de plus comme x est dans l'axe on a $\gamma(\gamma^{n_j^k}x) = \gamma^{n_j^k+1}x \in [\gamma^{n_j^k}x, \gamma^{n_j^k+1}x]$. On fait alors tendre k vers l'infini et on obtient que $\gamma x_\infty \in [x_\infty, x_\infty]$ et donc γ fixe $x_\infty \in \mathcal{L}_\Phi^s$. Cela entraîne alors que γ fixe une feuille de $\widetilde{\mathcal{W}}_\Phi^s$ et donc γ est dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ^Φ (pour une justification de la dernière implication on peut voir par exemple [Her, Proposition 4.3.6]). $\square$

On présente le premier résultat important de cette partie :

Théorème 5.17. *Soit $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ qui n'est pas dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ^Φ , alors l'axe $\mathcal{A}(\gamma)$ permet de définir deux points $\zeta^\pm \in \partial\mathcal{O}_\varphi^\Phi$ qui sont fixés par l'action de γ sur $\partial\mathcal{O}_\varphi^\Phi$.*

Démonstration. Par le théorème 5.12 on sait que $\mathcal{A}(\gamma) \neq \emptyset$, on considère alors $x \in \mathcal{A}(\gamma)$, en combinant le lemme 5.9 et le lemme 5.10 on obtient une suite de compacts emboîtés $\{\mathcal{U}_n\}$ qui vérifient : $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{L}_\Phi^s \setminus \{\gamma^{n-1}(x)\}$. On considère alors la suite de compacts emboîtés $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ définie comme suit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ la saturation à droite de $\gamma^{n-1}(x)$ dans $\widetilde{\mathcal{O}}_\varphi^\Phi$. Formellement $x \in \mathcal{A}(\gamma)$ correspond à une feuille $l_x \in \mathcal{O}_\varphi^{s,\Phi}$, celle-ci coupe en deux $\mathcal{L}_\Phi^s$ (et donc $\widetilde{\mathcal{O}}_\varphi^\Phi$) et permet de définir une orientation. Une autre façon de définir $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ est de considérer la projection de $\mathcal{U}_n$ dans $\widetilde{\mathcal{O}}_\varphi^\Phi$ que l'on note $p(\mathcal{U}_n)$ et de prendre

$$\widetilde{\mathcal{U}}_n = p(\mathcal{U}_n) \cup \partial\mathcal{O}_\varphi^\Phi \cap [p^+(\gamma^{n-1}(x)), p^-(\gamma^{n-1}(x))]$$

où $p^+(\gamma^{n-1}(x))$ et $p^-(\gamma^{n-1}(x))$ désigne les points limite positifs et négatifs de la feuille compactifiée $p(\gamma^{n-1}(x)) \subseteq \widetilde{\mathcal{O}}_\varphi^\Phi$ et $[p^+(\gamma^{n-1}(x)), p^-(\gamma^{n-1}(x))]$ désigne le segment orienté dans le sens horaire dans $\partial\mathcal{O}_\varphi^\Phi$ (voir figure 26). On résume tout cela par la figure suivante :

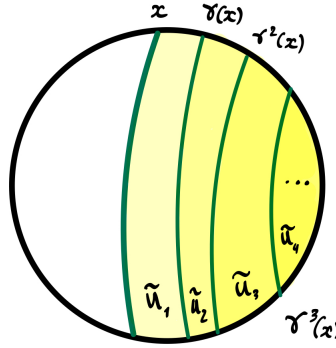


FIGURE 26 – Les compacts $\widetilde{\mathcal{U}}_n$.

Comme il existe un nombre fini de feuilles singulières on peut prendre x qui n'est pas singulière car au bout d'un nombre fini d'itérations ce sera le cas.

Étudions maintenant un peu les propriétés des compacts $\widetilde{\mathcal{U}}_n$. Tout d'abord comme la suite $\mathcal{U}_n$ est emboîtée, on obtient assez facilement que la suite $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ l'est aussi, en effet l'inclusion $p(\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq p(\mathcal{U}_n)$ est immédiate et l'inclusion

$$[p^+(\gamma^n(x)), p^-(\gamma^n(x))] \subseteq [p^+(\gamma^{n-1}(x)), p^-(\gamma^{n-1}(x))]$$

provient du fait que deux feuilles ne peuvent se croiser donc les points limite de $\gamma^n(x)$ sont inclus dans l'intervalle $[p^+(\gamma^{n-1}(x)), p^-(\gamma^{n-1}(x))]$.

Un lemme utile :

Lemme 5.18. $\text{diam}(\widetilde{\mathcal{U}}_n) \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Par diamètre on entend le diamètre pour la métrique euclidienne sur $\bar{\mathcal{O}}_\varphi^\hbar \simeq \mathbb{D}^2$. Tout d'abord, par ce qu'on a fait, on sait que la suite $\text{diam}(\widetilde{\mathcal{U}}_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers $\delta \geq 0$. On veut ici montrer que $\delta = 0$. Pour cela remarquons tout d'abord qu'il n'existe pas de feuille $\alpha \in \mathcal{L}_\hbar^s$ qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\gamma^n(x)$ sépare x et α , en effet si par l'absurde une telle feuille existait, on aurait donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n(x) \in [x, \alpha]$ or par le lemme 5.11 $[x, \alpha]$ est compact ainsi on a $\gamma^n(x)$ qui reste dans un compact ce qui contredit la proposition 5.16. Maintenant supposons par l'absurde que $\text{diam}(\widetilde{\mathcal{U}}_n) \rightarrow \delta > 0$, alors il existe un compact K_0 tel que $\text{diam}(K_0) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $K_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{U}}_n$. Comme $\text{diam}(K_0) > 0$ il existe une feuille $\alpha \in \mathcal{L}_\hbar^s$ qui vérifie que sa compactification intersecte l'intérieur de K_0 . On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\gamma^n(x)$ sépare x et α , en effet si par l'absurde il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma^{n_0}(x)$ ne sépare pas α et x (on peut prendre α et $\gamma^{n_0}(x)$ non singulière par ailleurs) on a alors α et x dans la même composante de $\mathcal{L}_\hbar^s \setminus \{\gamma^{n_0}(x)\}$ et donc en particulier $\bar{\alpha} \cap \widetilde{\mathcal{U}}_{n_0} = \emptyset$ ainsi $K_0 \subsetneq \widetilde{\mathcal{U}}_{n_0}$ ce qui est absurde. En conclusion, α vérifie que $\gamma^n(x)$ sépare α et x pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est absurde, K_0 ne peut alors pas exister ce qui conclut la preuve. $\square$

On a donc $\{\widetilde{\mathcal{U}}_n\}$ une suite de compacts emboîtés telle que $\text{diam}(\widetilde{\mathcal{U}}_n) \rightarrow 0$ alors

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{U}}_n = \{\zeta^+\}$$

avec $\zeta^+ \in \bar{\mathcal{O}}_\varphi^\hbar$. De plus comme $\zeta^+ \in \widetilde{\mathcal{U}}_n$ pour tout $n \geq 0$ et $\gamma(\widetilde{\mathcal{U}}_n) \subseteq \widetilde{\mathcal{U}}_n$ (cela provient du fait que $\gamma(\mathcal{U}_n) \subseteq \mathcal{U}_n$) on a donc $\gamma(\zeta^+) \in \widetilde{\mathcal{U}}_n$ pour tout $n \geq 0$ et ainsi $\gamma(\zeta^+) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{U}}_n = \{\zeta^+\}$. Conclusion ζ^+ est fixé par γ , mais comme γ n'est pas dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de $\varphi^\hbar$ on a forcément $\zeta^+ \in \partial \mathcal{O}_\varphi^\hbar$. On peut raisonner de même avec la suite $\{\gamma^{-n}(x)\}$ pour obtenir le second point fixe $\zeta^- \in \partial \mathcal{O}_\varphi^\hbar$. $\square$

L'objectif de la section suivante sera de présenter un survol de la notion de point fixe **super attractif/répulsif** introduite par Fenley et Potrie dans [FP24] qui permet de justifier que ζ^+ et ζ^- sont effectivement les uniques points fixes de γ .

5.1.3 Points fixes super attractifs

On prend dans cette section les mêmes notations que la section précédente. On considère par ailleurs $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ et $\xi \in \mathbb{S}_\hbar^1$ un point fixe de γ . Pour une feuille $\lambda \in \widetilde{\mathcal{W}}^u$ on note γ_λ l'action induite de γ sur $\lambda \cup \partial_\infty \lambda$ qui est définie comme suit :

On prend un point $x \in \lambda$, on l'envoie sur $\gamma(x) \in \gamma(\lambda)$ puis on le renvoie sur λ en parcourant le flot régulier $\varphi^\hbar$. Si maintenant $x \in \partial_\infty \lambda$ alors on l'envoie sur $\gamma(x) \in \partial_\infty \gamma(\lambda)$ et encore une fois on le ramène sur λ en prenant le point $\alpha_{\gamma(x)} \cap \partial_\infty \lambda$. En utilisant le théorème de Novikov ([Nov65]) sur $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ on peut montrer que toute orbite de $\varphi^\hbar$ n'intersecte qu'une fois une feuille de $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ sinon on pourrait construire une boucle transverse à $\widetilde{\mathcal{W}}^u$ qui serait nulle-homotope comme on travaille dans le revêtement universel. Ainsi γ_λ est bien définie car l'application sur le bord l'est aussi (les feuilles α_x n'intersectent une fibre qu'en un seul point).

On souhaite maintenant définir une base de voisinage cohérente pour $\xi \in \mathbb{S}_\hbar^1$, pour cela on prend un intervalle $I \subseteq \mathbb{S}_\hbar^1$ contenant ξ dans son intérieur, on considère alors la projection sur $\partial_\infty \lambda$ par l'application monotone $\pi_\lambda^\hbar : \mathbb{S}_\hbar^1 \rightarrow \partial_\infty \lambda$ définie dans la section 4.4. On note maintenant l_I^λ la géodésique dans λ qui relie les deux bornes de $\pi_\lambda^\hbar(I)$. On considère enfin la composante de $(\lambda \cup \partial_\infty \lambda) \setminus l_I^\lambda$ qui contient $\pi_\lambda^\hbar(I)$ et qui définit ainsi un voisinage ouvert de $\pi_\lambda^\hbar(\xi)$ dans $\lambda \cup \partial_\infty \lambda$.

On peut maintenant définir la notion de point fixe super attractif/répulsif :

Définition 5.19 Un point fixe ξ de γ est **super attractif** si il existe une feuille λ et une base de voisinage de $\pi_\lambda^\hbar(\xi)$ dans $\lambda \cup \partial_\infty \lambda$ définie par des géodésiques l_i dans λ telles que la distance minimale entre des points de l_i et $\gamma_\lambda(l_i)$ tend vers l'infinie quand $i \rightarrow \infty$. De manière analogue ξ est **super répulsif** pour γ s'il est super attractif pour γ^{-1} .

Remarque 5.20. Il s'avère qu'un point fixe super attractif est en particulier un point fixe attractif, la raison de ce fait n'est pas tout à fait évidente et fait appel à quelques arguments de géométrie hyperbolique, voir par exemple [Bar+20, Lemme A4].

Proposition 5.21. *Soit $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ qui n'est pas la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ alors si γ agit avec points fixes sur $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$ ceux-ci sont finis et il sont alternativement attractif/répulsif.*

Démonstration. Par le lemme [Bar+24, Lemme 8.5] si γ possède des points fixes sur $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$ ils sont tous super attractifs ou super répulsifs. Par la remarque précédente, ils sont par ailleurs attractifs ou répulsifs. De plus comme les points fixes (attractifs/répulsifs) sont isolés dans $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$ qui est compact il sont en un nombre fini (sinon ils admettraient un point d'accumulation qui, par continuité de γ serait un point fixe mais ni attractif ni répulsif). Enfin par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que les points fixes attractifs et répulsifs alternent bien entre eux. $\square$

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème 5.1.

5.1.4 Démonstration du théorème 5.1

On rappelle l'énoncé du théorème :

Théorème 5.1 *Soit $\mathcal{M}$ une 3 variété hyperbolique fermée et φ un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur $\mathcal{M}$, alors il existe une constante $\mathfrak{k}(\varphi)$ telle que pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, $\gamma^{\mathfrak{k}(\varphi)}$ agit sur $\mathcal{C}^r$ avec un nombre fini de points fixes alternativement attractif/répulsif.*

Démonstration. On considère alors $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, si γ est dans la même classe d'homotopie libre que φ alors par la proposition 4.17 il agit avec deux points fixes, un attractif et un répulsif sur $\mathcal{L}^s/f^s$. Par la proposition 4.15 $\mathcal{C}^r$ est isomorphe à $\mathcal{L}^s/f^s$ et donc γ agit avec deux points fixes sur $\mathcal{C}^r$, un attractif et un répulsif. Maintenant supposons que γ n'est pas dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ . On souhaite maintenant appliquer la proposition 5.21. Deux situations peuvent se produire, si γ est en revanche dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de $\varphi^{\mathfrak{h}}$ alors celle-ci fixe un point x_0 dans l'espace d'orbite. Ce point est l'intersection d'une feuille stable et d'une feuille instable qui définissent des points sur $\partial\mathcal{O}_{\varphi}^{\mathfrak{h}}$ que γ vient faire permuter. Si l'orbite périodique est non singulière, alors comme γ préserve les feuilletages on obtient directement que γ possède quatre points fixes qui sont les points limite positifs et négatifs des deux feuille $\mathcal{O}_{\varphi}^{s,\mathfrak{h}}(x_0)$ et $\mathcal{O}_{\varphi}^{u,\mathfrak{h}}(x_0)$. Il se pourrait en revanche que x_0 représente une orbite périodique singulière associée à un $p - prong$ avec $p \geq 3$ dans ce cas là les points limite positif et négatifs des deux feuilles qui sont au nombre de $2p$ ne sont pas forcément fixés car γ peut agir comme un $p - cycle$ sur les branches du prong. C'est pour cela qu'il faut prendre γ^p qui lui vient fixer les $2p$ points limite donnés par le $p - prong$. Comme un flot pseudo-Anosov possède un nombre fini de prongs, l'entier $\mathfrak{k}(\varphi) = \text{ppcm}\{p_i, p_i\text{-prong}\}$ est bien défini. Enfin pour $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ qui ne représente ni une orbite périodique de φ ni de $\varphi^{\mathfrak{h}}$, on obtient par le théorème 5.17 que γ agit aussi avec points fixes sur $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$. Pour conclure, on a donc que pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$, $\gamma^{\mathfrak{k}(\varphi)}$ agit avec points fixes sur $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$, si γ est dans la même classe d'homotopie libre qu'une orbite périodique de φ alors $\gamma^{\mathfrak{k}(\varphi)}$ agit avec deux points fixes et sinon par la proposition 5.21 on a $\gamma^{\mathfrak{k}(\varphi)}$ qui agit avec un nombre fini de points fixes qui sont aussi alternativement répulsifs/attractifs. $\square$

5.2 Ouverture

Durant tout le mémoire nous avons considéré un flot d'Anosov $\mathcal{SR} - covered$ sur une 3 variété, l'hypothèse $\mathcal{SR} - covered$ nous a permis de construire avec plus de facilité les cercles $\mathcal{C}^r, \mathcal{C}^l, \partial^{\pm}\mathcal{O}_{\varphi}$. On peut tout à fait les construire quand φ n'est pas $\mathcal{SR} - covered$ mais cette fois-ci comme E_{∞} n'est qu'un fibré en cercle au dessus de $\mathcal{L}^u$ qui n'est plus Hausdorff cela demande plus de travail (voir [Cal07],[BT25]). On ne retrouve pas forcément les mêmes résultats, par exemple $\partial^+\mathcal{O}_{\varphi}$ et $\partial^-\mathcal{O}_{\varphi}$ ne sont plus isomorphes (voir [BT25, Théorème 7.1]). Une autre généralisation intéressante est l'étude de l'action du groupe fondamental sur $\mathbb{S}_{\mathfrak{h}}^1$ quand la variété n'est plus hyperbolique, dans cette situation on peut définir un flot régulant mais il n'est plus pseudo-Anosov. Il est adapté à la décomposition **JSJ** dans le sens où il est pseudo-Anosov dans les composantes hyperboliques et il parcourt les fibres le long des composantes de Seifert (voir [Fen23]). Dans cette situation on peut montrer que le théorème 5.1 ne s'applique pas et que certains éléments du groupe fondamental agissent avec un ensemble de Cantor de points fixes (voir [FP21]).

Références

- [Ano63] D ANOSOV. “Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature”. In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 151 (1963).
- [Ano67] D ANOSOV. “Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature”. In : *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 90 (1967).
- [Bar+20] T BARTHELMÉ et al. “Dynamical incoherence for a large class of partially hyperbolic diffeomorphisms”. In : *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 41(11) (2020).
- [Bar+24] T BARTHELMÉ et al. “Partially hyperbolic diffeomorphisms homotopic to the identity in dimension 3, Part I : The dynamically coherent case”. In : *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* (2024).
- [Bar95] T BARBOT. “Caractérisation des flots d’Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles”. In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* (15) (1995).
- [BFP23] T BARTHELMÉ, S FENLEY et R POTRIE. “Collapsed Anosov flows and self orbit equivalences”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 98(4) (2023).
- [BM25] T BARTHELMÉ et K MANN. “Pseudo-Anosov Flows : a Plane Approach”. In : *ArXiv : :2509.15375 [math.DS]* (2025).
- [Bon24] C BONATTI. “Action on the circle at infinity of foliations of $\mathbb{R}^2$ ”. In : *Enseign. Math.*(2) (2024).
- [BT25] E BUCKMINSTER et S TAYLOR. “Universal circles for Anosov foliations”. In : *arXiv :2512.10107v1 [math.GT]* (2025).
- [Cal07] D CALEGARI. *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*. Clarendon Press Oxford, 2007.
- [Can93] A CANDEL. “Uniformization of surfaces laminations”. In : *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (26) (1993).
- [CD02] D CALEGARI et M DUNFIELD N. “Laminations and groups of homeomorphisms of the circle”. In : *Invent. math.* (152) (2002).
- [Fen02] S FENLEY. “Foliations, topology and geometry of 3-manifolds : $\mathbb{R}$ -covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* (77) (2002).
- [Fen03] S FENLEY. “Pseudo-Anosov Flows and Incompressible Tori”. In : *Geometriae Dedicata* (99) 61-102 (2003).
- [Fen09] S FENLEY. “Geometry of foliations and flows I : Almost transverse pseudo-Anosov flows and asymptotic behavior of foliations”. In : *Journal of Differential Geometry* (81) (2009).
- [Fen12] S FENLEY. “Ideal boundaries of pseudo-Anosov flows and uniform convergence groups with connections and applications to large scale geometry.” In : *Geom. Topol.* (16) (2012).
- [Fen23] S FENLEY. “ $\mathbb{R}$ -covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows in atoroidal pieces”. In : *Comment. Math. Helv.* (98) (2023).
- [Fen94] S FENLEY. “Anosov flows in 3-manifolds”. In : *Ann. of Math.* (2) (1994).
- [FH19] T FISHER et B HASSELBLATT. *Hyperbolic Flows*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics, 2019.
- [FM01] S FENLEY et L MOSHER. “Quasigeodesic flows in hyperbolic 3-manifolds”. In : *Topology* (40) (2001).
- [FP21] S FENLEY et R POTRIE. “Minimality of the action of the universal circle of uniform foliations”. In : *Groups Geom. Dyn.* (15) (2021).
- [FP24] S FENLEY et R POTRIE. “Partial hyperbolicity and pseudo-Anosov dynamics”. In : *Geom. Funct. Anal.* (34) (2024).
- [Fra13] S FRANKEL. “Quasigeodesic flows and möbius-like groups”. In : *Journal of Differential Geometry*, 93(3) (2013).
- [GO89] D GABAI et U OERTEL. “Essential laminations in 3-manifolds”. In : *Annals of Mathematics* (130) 41-73 (1989).
- [Her] Y HERNANDEZ-MOTTE. “Espace d’orbites d’un flot d’Anosov”. Mémoire de M1, pour y accéder : hernandezmotteylan@gmail.com.
- [LMT24] M LANDRY, Y MINSKY et J TAYLOR. “Simultaneous universal circles”. In : *J. Topol.* (19) (2024).

- [Mar25] T MARTY. “Skewed Anosov flows in dimension 3 are Reeb-like”. In : *J. Eur. Math. Soc.* (2025).
- [Nov65] S.P NOVIKOV. “The topology of foliations”. In : *Trudy Moskov.Mat.Obsc. (14)* 248-278 (1965).
- [Pot25] R POTRIE. “Anosov flows in dimension 3 : an outside look”. In : *J. Fixed Point Theory Appl.* (27) (2025).
- [Thu97] W.P THURSTON. “Three-manifolds, Foliations and Circles, I preliminary version”. In : *arXiv :math/9712268v1 [math.GT]* (1997).

Ylan Hernandez-Motte

Magistère de Grenoble

hernandezmotteylan@gmail.com