

Sistemas Parcialmente Hiperbólicos en Fibrados por Círculos sobre Superficies.

Mario Shannon

Trabajo para la obtención del Título de Magíster en
Matemática, Pedeciba - UdelaR. Orientador: Rafael Potrie.

Agradecimiento y Dedicatoria

Al escribir esta tesis, no puedo dejar de sentirme agradecido a todos los compañeros del CMAT/IMERL con quienes hemos discutido bastante de matemática en este tiempo, y a quienes también está dedicado este trabajo. Sería un despropósito nombrarnos a todos en esta página, *porque somos una banda!*

II

*... pero yo sigo,
con la esperanza,
de que no me moriré,
sin que yo la vuelva a ver.
A dónde está ... ?
El príncipe.*

Resumen

El contexto general en el que se enmarca esta tesis es el de dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en fibrados por círculos sobre superficies $M \rightarrow \Sigma$. Estas 3-variedades se pueden clasificar mediante un invariante que se llama número de Euler, que es un número entero que denotaremos por $e(M)$. Un fibrado (su clase de difeomorfismos como variedad de dimensión tres) queda completamente determinado por su base Σ y su número de Euler $e(M)$. Los resultados previos conocidos hasta el momento son los siguientes:

1. Si la base del fibrado es la esfera \mathbf{S}^2 entonces M no admite parcialmente hiperbólicos. (En particular, la esfera \mathbf{S}^3 no admite sistemas parcialmente hiperbólicos). Esto es un trabajo de Burago e Ivanov del año 2008.
2. Cuando la base es el toro entonces todo fibrado M admite parcialmente hiperbólicos. De hecho, existe una clasificación de estos sistemas (Potrie-Hammerlindl).
3. Cuando la base Σ es una superficie hiperbólica, E. Ghys probó (entre otras cosas) que uno de estos fibrados admite un flujo de Anosov si y sólo si $e(M)$ es un divisor de la característica de Euler $\chi(\Sigma)$. Por lo tanto, cuando esto ocurre, M admite parcialmente hiperbólicos.

El resultado central que probaremos en esta tesis es el siguiente:

Teorema. *Sea M una 3-variedad cerrada y orientable, que admite una estructura de fibrado por círculos sobre una superficie cerrada y orientable Σ . Entonces M admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico transitivo si y sólo si $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$ (si y sólo si M admite un flujo de Anosov).*

Este trabajo fue hecho en colaboración con Rafael Potrie y Andrew Hammerlindl.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Fibrados por círculos sobre superficies	1
1.1. Generalidades acerca de fibrados.	1
1.2. Fibrados por círculos sobre superficies.	4
1.2.1. Orientabilidad de los fibrados	6
1.3. Clasificación de los fibrados.	8
1.3.1. Fibrados sobre superficies con borde.	8
Superficies Compactas	9
Cómo construir fibrados sobre superficies con borde.	11
El producto orientable sobre Σ	11
Clasificación de los fibrados orientables con borde	12
1.3.2. Fibrados sobre superficies cerradas.	13
Construcción de un modelo estándar de fibrado	13
La clasificación de los fibrados y el número de Euler	16
El grupo fundamental de los fibrados	17
1.4. Morfismos, cubrimientos y campos de vectores en fibrados.	18
1.4.1. Morfismos que conmutan sobre la identidad.	18
Cubrimientos	18
Grado en las fibras.	19
Morfismos y número de Euler	21
1.4.2. Campos unitarios en fibrados	22
2. Sistemas parcialmente hiperbólicos	25
2.1. Sistemas parcialmente hiperbólicos en 3-variedades.	25
2.1.1. Integrabilidad de los fibrados invariantes	26
Foliaciones ramificadas invariantes.	27
2.1.2. Topología de las foliaciones invariantes.	29
Foliaciones estable e inestable.	30
Foliaciones centro-estable y centro-inestable.	31
2.2. Sistemas parcialmente hiperbólicos en fibrados por círculos sobre superficies.	32
2.2.1. Fibrados con base \mathbf{S}^2	32
2.2.2. Fibrados con base \mathbf{T}^2	33
2.2.3. Fibrados con base Σ de género ≥ 2	33
2.3. Teorema central	34
2.3.1. Preliminares	34

Horizontalidad y verticalidad de las hojas de una foliación.	34
Espacio de hojas de una foliación ramificada.	35
2.3.2. Demostración del teorema 2.3.1	35
Bibliografía	41

Capítulo 1

Fibrados por círculos sobre superficies

1.1. Generalidades acerca de fibrados.

En esta sección describiremos uno de nuestros principales objetos de estudio: Los fibrados por círculos sobre superficies. Comenzaremos primero haciendo algunas consideraciones de carácter general acerca de fibrados. Consideremos dos espacios topológicos X y F y el espacio producto $E = X \times F$ con la topología producto. De manera canónica podemos asociar a este espacio un par de mapas $\pi : E \rightarrow X$ y $\rho : E \rightarrow F$ que son las proyecciones sobre la primer y segunda coordenada respectivamente. La topología del espacio producto E puede ser descrita satisfactoriamente a partir de la topología de X y la de F , en el sentido de que si conocemos ciertos invariantes topológicos de X y F podemos conocer fácilmente los correspondientes invariantes de E . Esta idea aplica por ejemplo a los grupos de homotopía, grupos de homología, anillos de cohomología, etc. Desde un punto de vista más conceptual podemos pensar lo siguiente: Dado que el mapa π es sobreyectivo, el espacio E se puede descomponer como

$$E = \{\pi^{-1}(x) : x \in X\} = \{F \times \{x\} : x \in X\},$$

de modo que podemos pensar que el espacio E se puede construir uniendo copias del espacio F , y la manera en que estas copias se pegan está codificada a través del mapa $\pi^{-1} : x \mapsto \pi^{-1}(x) = F \times \{x\}$. En la teoría topológica, *fibrado localmente trivial* E con base X y fibra F es un concepto que generaliza la idea anterior, acorde a la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Un *fibrado localmente trivial* E con base X y fibra F es un mapa continuo y sobreyectivo $\pi : E \rightarrow X$ entre dos espacios topológicos, que satisface la siguiente propiedad llamada *condición de trivialización local*: Para todo punto $x \in X$ existe un entorno U de x de modo que el conjunto $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfo a $U \times F$, por un homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ que hace conmutar el siguiente diagrama (donde el mapa $U \times F \rightarrow U$ es la proyección en la primer coordenada):

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\
 & \searrow \pi & \downarrow \\
 & & U
 \end{array}$$

Los homeomorfismos $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ se llaman *trivializaciones locales del fibrado* y un conjunto de la forma $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$, donde $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una base de la topología de X y φ_α es una trivialización local para cada α , se conoce como *sistema de trivializaciones locales*. Se dice que E es el *espacio total* del fibrado, X es la *base*, F es la *fibra* y π es la *proyección*. En general diremos que E es un *fibrado sobre X con fibra F* para indicar lo anterior, y omitiremos aclarar que es *localmente trivial*.

Observemos que el producto cartesiano $X \times F$ con la proyección $X \times F \rightarrow X$ sobre la primer coordenada cumple trivialmente la definición anterior. Para construir nuestros primeros ejemplos consideremos el cuadrado $[0, 1] \times [-1, 1]$, que es un fibrado sobre $[0, 1]$ con la proyección en la primer coordenada. Si identificamos los lados $\{0\} \times [-1, 1]$ y $\{1\} \times [-1, 1]$ de este cuadrado usando el mapa $(0, x) \mapsto (1, x)$, el espacio que obtenemos es un cilindro que llamaremos E_1 . Si ahora en cambio lo hacemos usando el mapa $(0, x) \mapsto (1, -x)$ lo que obtenemos es una banda de Möbius que llamaremos E_2 . En ambos casos, al construir el cociente la proyección sobre la primer coordenada $[0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ induce un mapa $\pi_i : E_i \rightarrow \mathbf{S}^1$ sobre el círculo \mathbf{S}^1 , que le da una estructura de fibrado con base \mathbf{S}^1 y fibra $[-1, 1]$.

Definición 1.1.2. Un *morfismo* entre dos fibrados $\pi_i : E_i \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$ es un par de mapas $F : E_1 \rightarrow E_2$ y $f : X_1 \rightarrow X_2$ que entran en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{f} & X_2
 \end{array}$$

Denotaremos a este par como (F, f) , y diremos que F es un mapa que conmuta sobre f . Un *isomorfismo* entre dos fibrados $\pi_i : E_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$ (ambos con la misma base) es un homeomorfismo $F : E_1 \rightarrow E_2$ que conmuta sobre la identidad en X .

Dado que el cilindro y la banda de Möbius no son espacios homeomorfos, vemos que tampoco son isomorfos como fibrados sobre el círculo. La noción de fibrado localmente trivial E con base X y fibra F generaliza la de producto cartesiano en el siguiente sentido: El espacio E tiene una proyección sobre la primer coordenada $\pi : E \rightarrow X$ de forma tal que todas las preimágenes $\pi^{-1}(x)$ son homeomorfas a F , y en un entorno $\pi^{-1}(U_\alpha)$ de esta preimagen podemos definir una proyección en la segunda coordenada $\rho_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow F$ usando las trivializaciones locales, pero ésta no necesariamente está definida globalmente. (Obsérvese que dados los espacios E , X y F la siguiente condición es equivalente a que $E = X \times F$: Existen dos mapas sobreyectivos $\pi : E \rightarrow X$ y $\rho : E \rightarrow F$ tales que $\rho|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow F$ es un homeomorfismo, para todo $x \in X$.) Dicho de otro modo, el espacio E se puede escribir como unión de productos cartesianos

$U \times F$, con U en una base de entornos de X , aunque globalmente no sea un producto. Hagamos una observación acerca de la condición de trivialización local: Si $\pi : E \rightarrow X$ es cualquier mapa (continuo) sobreyectivo, el espacio E se puede descomponer en una unión disjunta de subconjuntos parametrizados por X , a saber $E = \{\pi^{-1}(x) : x \in X\}$, pero la forma en la que estos conjuntos varían puede ser muy complicada y aportar poca información sobre E . La condición de trivialización local impone que la topología de E está ligada más a las propiedades topológicas globales del mapa π que a su comportamiento local. Un ejemplo donde podemos ver esto es en la construcción del cilindro y la banda. Nuestro procedimiento fue construir un fibrado por intervalos sobre el círculo pegando vía homeomorfismos dos lados opuestos de un rectángulo. La topología del espacio obtenido sólo depende de la clase de homotopía del mapa de pegado, y sólo hay dos posibilidades: La clase que preserva orientación y la clase que la revierte. En un caso obtenemos el cilindro y en el otro la banda, y son las dos únicas posibilidades. No es difícil intuir que estos dos espacios son los únicos fibrados por intervalos sobre el círculo que existen, a menos de isomorfismos.

La definición anterior se puede adaptar a la categoría de las variedades de clase C^r , para lo cual hay que pedir que E , X y F sean variedades de clase C^r y las trivializaciones locales sean difeomorfismos C^r . Como consecuencia inmediata, la proyección π es una submersión de clase C^r . Los fibrados también pueden tener estructuras adicionales como por ejemplo:

- *Fibrado vectorial*: El espacio F es un espacio vectorial y cada fibra $\pi^{-1}(x) \subset E$ posee una estructura de espacio vectorial, de manera que las trivializaciones locales $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ entorno a x se restringen a un isomorfismo lineal $\varphi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$.
- *G-fibrados principales*: Aquí G es un grupo (topológico, de Lie, etc.), F es un espacio donde G actúa de forma libre y transitiva y cada fibra $\pi^{-1}(x)$ está munida de una acción libre y transitiva de G , de manera que las trivializaciones locales son G -equivariantes.

Para adaptar las definiciones de morfismo e isomorfismo a estos contextos hay que pedir que los mapas involucrados en la definición sean de clase C^r , lineales en cada fibra o G -equivariantes, según sea el caso. Como ejemplos clásicos de fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable M queremos citar el espacio tangente TM , el espacio cotangente T^*M , el espacio de las formas bilineales simétricas en TM , el espacio $\Lambda^k(TM^*)$, el espacio normal NM si M es una variedad inmersa en otra, y como ejemplos de G -fibrados principales tenemos el fibrado de referenciales $GL(TM)$ donde la fibra sobre un punto x son las bases de T_xM y sus análogos $SL(TM)$ o $SO(TM)$ en el caso de que M tenga una métrica riemanniana. Si M posee una métrica podemos definir el tangente unitario T^1M como el conjunto de todos los vectores en TM de norma uno, cuya fibra es la esfera $\mathbf{S}^{dim(M)-1}$.

Se dice que un fibrado $E \rightarrow X$ con fibra F es *trivial* si es isomorfo al producto $X \times F$. Por supuesto, el objetivo general de la teoría de los fibrados es poder clasificar estos espacios a menos de isomorfismos.

Definición 1.1.3. Una sección del fibrado $\pi : E \rightarrow X$ es un mapa $\sigma : X \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$.

Observemos que en un fibrado trivial siempre existen secciones, por ejemplo definiendo $\sigma(x) = (x, v)$, donde v es un elemento fijo de F . De modo que la no existencia de secciones es una obstrucción para que un fibrado sea trivial. En el caso de un fibrado vectorial, siempre existe al menos una sección que es la sección nula, i.e. la sección que asigna a cada punto $x \in X$ el vector nulo de $\pi^{-1}(x)$. Sin embargo, una condición necesaria para que un fibrado vectorial sea trivial es la existencia de una sección no nula. Así por ejemplo, el teorema de Poincaré-Hopf aplicado a una variedad cerrada de característica de Euler no nula nos dice que todo campo de vectores, que no es otra cosa que una sección del fibrado tangente, debe tener singularidades; esto quiere decir que el fibrado tangente de esta variedad no admite secciones no nulas, y por lo tanto este fibrado no es trivial. En el caso de un G -fibrado principal, la existencia de una sección en el fibrado es equivalente a que éste sea trivial.

1.2. Fibrados por círculos sobre superficies.

Comenzaremos escribiendo la definición de fibrado por círculos sobre una superficie. Trabajaremos siempre en la categoría de las variedades de clase \mathcal{C}^∞ (a la cual nos referiremos simplemente con el término *diferenciable*) ya que es el espacio donde consideraremos nuestros difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en el capítulo siguiente, pero los resultados que describiremos en esta sección dependen solamente de la estructura \mathcal{C}^0 de nuestros espacios. Queremos aclarar que, sin embargo, los mapas que usaremos no siempre serán diferenciables.

Definición 1.2.1. Un *fibrado por círculos sobre una superficie* es un mapa sobreyectivo $\pi : M \rightarrow \Sigma$ entre una variedad M de dimensión tres y una superficie Σ , que satisface la siguiente propiedad llamada *condición de trivialización local*: Para todo punto $x \in \Sigma$ existe un entorno U de x de modo que el conjunto $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times \mathbf{S}^1$, por un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{S}^1$ que hace conmutar el siguiente diagrama (donde el mapa $U \times \mathbf{S}^1 \rightarrow U$ es la proyección en la primer coordenada):

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbf{S}^1 \\ & \searrow \pi & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

Como primer comentario, observemos que la propiedad de trivialización local implica inmediatamente que el mapa π es una submersión diferenciable. Observemos también que el mapa π es equivalente al mapa cociente $M \rightarrow M/\sim$ que se obtiene al identificar cada fibra de M a un punto, y el *espacio de las fibras* M/\sim es difeomorfo a la superficie Σ . Esto es porque, gracias a la condición de trivialización local, el mapa π es abierto. A continuación describiremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.2.1 (Fibrado trivial). Es el producto cartesiano $\Sigma \times \mathbf{S}^1$ de una superficie con el círculo, con la proyección sobre la primer coordenada.

Ejemplo 1.2.2 (Fibrado tangente unitario). El fibrado tangente unitario de una superficie riemanniana Σ se define como el conjunto de los vectores tangentes a Σ y de norma unitaria. Este espacio es independiente de la métrica que se utilice para definirlo, y es nuestra primer clase de ejemplos no triviales. Recordemos que una obstrucción para que un fibrado sea trivial es la existencia de una sección, así que usando el *Teorema de Poincaré-Hopf* podemos ver que el fibrado tangente unitario de una superficie cerrada de característica de Euler no nula no puede ser trivial. En el caso del toro, podemos ver que su fibrado tangente unitario es trivial usando la construcción habitual del toro como cociente del plano por el látice \mathbb{Z}^2 . En el caso de una superficie orientable con borde no vacío, su tangente unitario siempre es trivial, como veremos más adelante.

Ejemplo 1.2.3 (La fibración de Hopf). La fibración de Hopf es un fibrado por círculos sobre la esfera \mathbf{S}^2 donde el espacio total es la esfera \mathbf{S}^3 . Para construirlo consideremos la esfera tridimensional $\mathbf{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. La esfera \mathbf{S}^3 puede identificarse con el grupo $SU(2)$ de las matrices unitarias de tamaño 2×2 y determinante uno mediante el mapa

$$(z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix},$$

y esta identificación nos da una estructura de grupo de Lie en \mathbf{S}^3 . Por otro lado observemos que existe una acción (diferenciable) libre del grupo $U(1) = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$ en esta esfera, definida como $u \cdot (z, w) = (uz, uw)$, y esta acción es $SU(2)$ -equivariante. Las órbitas de esta acción nos dan una descomposición de \mathbf{S}^3 en círculos. Para ver que el cociente de \mathbf{S}^3 por las órbitas de la acción es una superficie hay que probar que cada uno de estos círculos tiene un entorno difeomorfo al producto de un abierto del plano con \mathbf{S}^1 , por un difeomorfismo que preserve los círculos, y para esto alcanza con probarlo para una única órbita de esta acción, porque la acción es $SU(2)$ -equivariante. Observemos que la fibra $U(1) \cdot \{(1, 0)\} \subset \mathbf{S}^3$ tiene un entorno W como el que necesitamos dado por el difeomorfismo

$$\varphi : D \times \mathbf{S}^1 \rightarrow W \text{ tal que } \varphi(z, u) = u \cdot (\sqrt{1 - |z|^2}, z)$$

donde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$. De modo que el cociente de \mathbf{S}^3 por las órbitas de esta acción es una superficie. Para ver que esta superficie es la esfera \mathbf{S}^2 observemos que el conjunto $C = \{(z, r) \in \mathbf{S}^3 : 0 \leq r \leq 1\}$ es un disco encajado en \mathbf{S}^3 que cumple que su borde es un círculo de la fibración y que cualquier otra fibra intersecta a C en un único punto de su interior. Esto quiere decir que el espacio cociente se puede obtener identificando todo el borde de C a un punto, lo que nos da la esfera \mathbf{S}^2 .

Ejemplo 1.2.4. Consideremos la superficie $\tilde{\Sigma} = \mathbb{R} \times \mathbf{S}^1$. Sea $R : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ un difeomorfismo que revierte orientación y consideremos los difeomorfismos $T_i : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$, $i = 1, 2$ definidos como $T_1(x, \theta) = (x + 1, \theta)$ y $T_2(x, \theta) = (x + 1, R(\theta))$. Observemos que T_1 preserva la orientación de $\tilde{\Sigma}$ y T_2 la revierte. Cada uno de estos mapas actúa de manera propiamente discontinua en el cilindro $\tilde{\Sigma}$ y la superficie cociente Σ_i es un toro para $i = 1$ y una botella de Klein para $i = 2$. Sea ahora $\tilde{M} = \tilde{\Sigma} \times \mathbf{S}^1$, que es un fibrado por círculos sobre $\tilde{\Sigma}$ con la proyección sobre la primer coordenada, y consideremos los difeomorfismos $f_i : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$,

$i = 1, 2$, definidos como $f_1 = T_1 \times \text{id}_{\mathbf{S}^1}$ y $f_2 = T_2 \times R$. Ambos mapas actúan de manera propiamente discontinua en \tilde{M} y *ambos preservan orientación*. Tomando el cociente de estas acciones podemos construir dos fibrados $\pi_i : M_i \rightarrow \Sigma_i$, $i = 1, 2$, en donde M_i es una variedad orientable. El primero tiene como espacio base al toro Σ_1 y M_1 es, de hecho, el toro de dimensión tres (fibrado sobre el toro de dimensión dos con la proyección en la primera coordenada). En el segundo caso el espacio base no es orientable. Por supuesto, podemos considerar los mapas $g_1 = T_1 \times R$ y $g_2 = T_2 \times \text{id}_{\mathbf{S}^1}$. Estos mapas revierten la orientación de \tilde{M} , y nos permiten construir fibrados sobre el toro y la botella de Klein donde el espacio total no es orientable.

Ejemplo 1.2.5 (Representaciones de grupos por homeomorfismos del círculo). El ejemplo anterior es un caso particular de una construcción más general: Sean $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ un cubrimiento, G su grupo de automorfismos y $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(\mathbf{S}^1)$ un homomorfismo. Sea $\tilde{M} = \tilde{\Sigma} \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \tilde{\Sigma}$. Podemos definir una acción de G en este espacio mediante $g \cdot (x, \theta) = (g \cdot x, \rho(g)(\theta))$. Esta acción preserva las fibras de \tilde{M} y es propiamente discontinua. Tomando el cociente de \tilde{M} por esta acción obtenemos un fibrado $M \rightarrow \Sigma$. Por supuesto, el caso más paradigmático es cuando $\tilde{\Sigma}$ es el cubrimiento universal y G es el grupo fundamental de Σ . Aclaremos que no todo fibrado puede ser obtenido por este procedimiento. Una obstrucción viene dada por el *Teorema de Milnor-Wood*, ver por ejemplo [7] pág. 367.

Ejemplo 1.2.6. Otra manera interesante de construir fibrados es pegando dos fibrados a través de su borde. Sean $M_i \rightarrow \Sigma_i$, $i = 1, 2$ dos fibrados donde las superficies base tienen borde no vacío, C_i una componente de borde de Σ_i y $T_i = \pi^{-1}(C_i)$ una componente de borde de M_i . Los conjuntos T_i siempre son toros en el caso en que M_i es orientable, o pueden ser botellas de Klein en el otro caso. Si tomamos ahora un difeomorfismo $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ que preserve las fibras, esto es, que commute sobre un difeomorfismo $f : C_1 \rightarrow C_2$, entonces el espacio que se obtiene al pegar M_1 con M_2 usando φ es un fibrado $M_1 \sqcup_{\varphi} M_2 \rightarrow \Sigma_1 \sqcup_f \Sigma_2$. Por ejemplo, si tomamos $M_1 = M_2 = \mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ y $\varphi = \text{id}_{\partial \mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1}$ el espacio que obtenemos es $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^2$. El ejemplo 1.2.4 también se puede explicar por este procedimiento. Hay que considerar el fibrado $[0, 1] \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow [0, 1] \times \mathbf{S}^1$ y luego pegar entre sí sus dos componentes de borde.

1.2.1. Orientabilidad de los fibrados

En vista del ejemplo 1.2.4 podemos decir que tenemos cuatro tipos de fibrados por círculos sobre superficies $M \rightarrow \Sigma$, a saber: fibrados donde M y Σ son orientables, fibrados donde M es orientable pero Σ no lo es, y sus dos análogos con M no orientable.

Definición 1.2.2. Decimos que un fibrado $\pi : M \rightarrow \Sigma$ es *orientable* si M es orientable como variedad de dimensión tres.

En este trabajo nos apegaremos a la tradición de trabajar mayoritariamente con espacios orientables. Recordemos que una variedad cerrada de dimensión n es orientable si existe una n -forma no degenerada $\omega \in \Omega^n(X)$, y las orientaciones de X son las clases de equivalencia en $\Omega^n(X)$ bajo la relación $\omega \sim \omega'$ sii existe una función diferenciable $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\omega = \rho \omega'$. De modo que la elección de

una orientación queda determinada por la elección de una forma no degenerada ω . Una *orientación de las fibras* de M es una elección continua de una orientación en cada fibra, cuando esto es posible, claro está. Una orientación de las fibras de M es equivalente a la existencia de un campo V de vectores unitarios y tangentes a las fibras, y como las órbitas de este campo son las fibras de M , esto también es equivalente a la existencia de una acción (diferenciable) libre y transitiva de $\mathbf{S}^1 = U(1)$ (visto como grupo de Lie) en M , que preserve las fibras y deja invariante a V . El fibrado M munido de esta acción es lo que se llama un \mathbf{S}^1 -fibrado principal sobre Σ . Si consideramos el diferencial $d\pi : TM \rightarrow T\Sigma$ del mapa proyección, podemos ver que $d\pi(V) = 0$. Diremos que un vector $X \in T_pM$ es *vertical* si $X \in \ker(d_p\pi)$, y que es *horizontal* en otro caso. Diremos que un plano $H \subset T_pM$ es *horizontal* cuando es transversal a $\ker(d_p\pi)$. Observemos que para cualquier plano horizontal H vale que $T_pM = \ker(d_p\pi) \oplus H$ y que la restricción $d_p\pi : H \rightarrow T_{\pi(p)}\Sigma$ es un isomorfismo lineal.

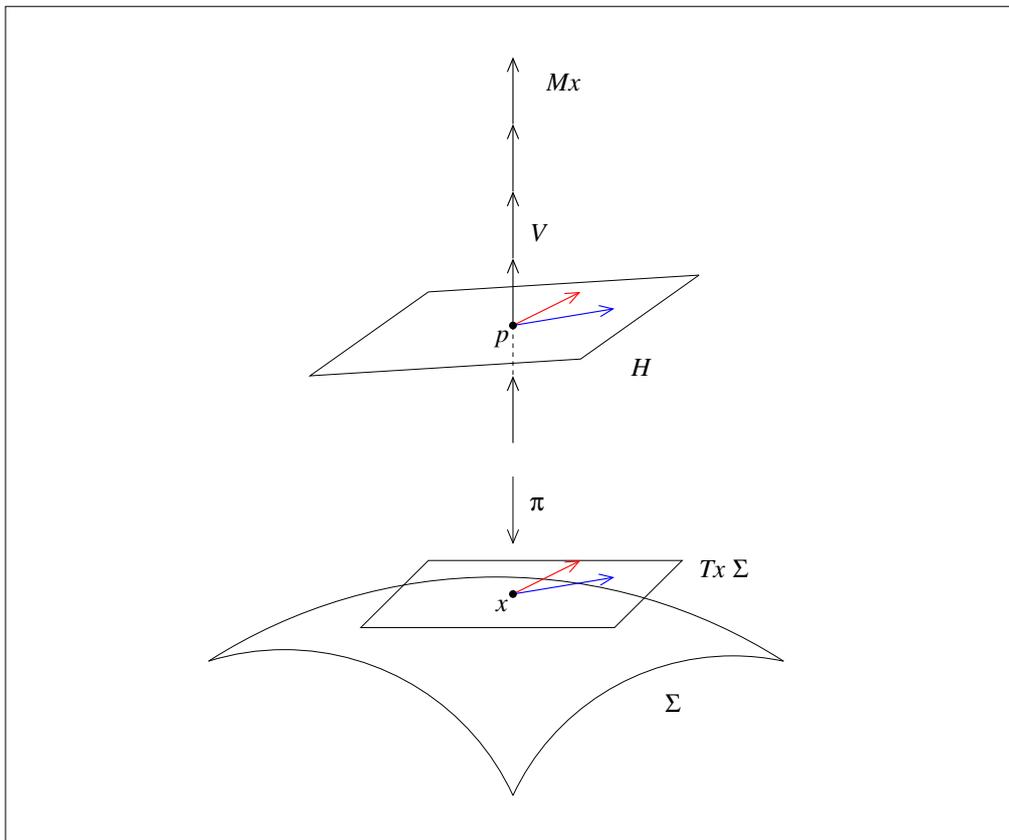


Figura 1.1: Planos y vectores en T_pM .

Proposición 1.2.1. *Sea $\pi : M \rightarrow \Sigma$ un fibrado orientable. Entonces, M admite una orientación de las fibras si y sólo si Σ es orientable.*

Demostración. Si M admite una orientación de las fibras, sea V un campo unitario tangente a las fibras. Dado un punto $x \in \Sigma$ tomemos un punto $p \in \pi^{-1}(x)$ y un plano horizontal $H \subset T_pM$, como hemos esquematizado en la figura 1.2.1.

Observemos que una orientación en $T_x\Sigma$ siempre nos permite definir una orientación *pull-back* en H , porque $d_p\pi : H \rightarrow T_x\Sigma$ es un isomorfismo lineal. Para cada $x \in \Sigma$ sea $\omega(x)$ la orientación de $T_x\Sigma$ que hace que $(d_p\pi)^*\omega(x) \wedge (V(p))^*$ coincida con la orientación de T_pM . Es fácil verificar que esta orientación no depende de la elección del plano $H \subset T_pM$, así como tampoco del punto $p \in \pi^{-1}(x)$. Esto último es porque V es invariante por la acción de \mathbf{S}^1 . De modo que $x \mapsto \omega(x)$ es una elección continua de orientaciones en $T_x\Sigma$, y por lo tanto la superficie es orientable. Recíprocamente, una orientación ω de Σ nos permite definir una orientación η del espacio tangente a la fibras ($= \ker(d\pi)$) mediante el mismo procedimiento, bajo el requerimiento de que $(d_p\pi)^*\omega(x) \wedge \eta(p)$ coincida con la orientación de T_pM . \square

Consideremos ahora un fibrado orientable $\pi : M \rightarrow \Sigma$, donde Σ es una superficie cerrada y orientable. La proposición anterior nos dice que M admite una orientación de sus fibras y, por supuesto, hay dos posibles elecciones de esta orientación. El procedimiento que usamos para demostrar la proposición anterior también nos muestra como es que se relacionan la orientación de M , la orientación de Σ y la orientación de las fibras. Para ello consideremos un campo $H \leq TM$ de planos horizontales (que siempre existe, por ejemplo, podemos tomar $H = \ker(d\pi)^\perp$) y sea ω la orientación de Σ . Como $d_p\pi : H(p) \rightarrow T_p\Sigma$ es un isomorfismo lineal para todo $p \in M$, la 2-forma $d\pi^*(\omega)$ permite definir una orientación global del campo de planos H . O sea, *todo campo de planos horizontales es orientable*. Si tomamos ahora una orientación η de las fibras, podemos ver que $d\pi^*(\omega) \wedge \eta$ es una 3-forma no degenerada en M . Tenemos entonces que:

Observación 1.2.1. Una orientación ω de Σ y una orientación Ω de M determinan una única orientación η en las fibras definida por $d\pi^*\omega \wedge \eta \sim \Omega$.

Diremos que ésta es la *orientación canónica* de las fibras, determinada por la orientación de la base y la orientación en el fibrado.

1.3. Clasificación de los fibrados.

En esta sección estudiaremos una clasificación topológica de los fibrados por círculos sobre superficies compactas. Primero veremos el caso en que la superficie base tiene borde no vacío y luego, a partir de éste, veremos el caso general. La idea atrás de todo será que si $M \rightarrow \Sigma$ es un fibrado por círculos sobre una superficie cerrada, siempre es posible descomponer la superficie como dos superficies Σ_0 y Σ_1 pegadas por su borde, y entonces descomponer a M como un fibrado M_0 sobre Σ_0 y otro fibrado M_1 sobre Σ_1 , pegados por su borde. Los fibrados sobre superficies con borde son muy simples de entender: existe esencialmente un único fibrado sobre una superficie con borde. Esto nos dirá que toda la información topológica acerca del fibrado M estará codificada en el mapa que se usa para pegar el borde de M_0 con el de M_1 .

1.3.1. Fibrados sobre superficies con borde.

Analizaremos ahora el caso de los fibrados por círculos sobre superficies compactas con borde no vacío. Comenzaremos con una digresión acerca de superficies compactas.

Superficies Compactas

Un *polígono* es un disco cerrado $P \subset \mathbb{R}^2$ cuyo borde es una concatenación finita de curvas diferenciables que llamaremos *lados del polígono*. Como consecuencia del *teorema de clasificación de superficies*, no es difícil probar que toda superficie compacta se puede obtener a partir de un polígono, pegando sus lados a través de difeomorfismos. Más concretamente, dada cualquier superficie compacta Σ siempre existe un polígono P tal que:

- Sus lados son las curvas $\{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s\}$,
- Para todo $i = 1, \dots, r$ existe un difeomorfismo $f_i : a_i \rightarrow b_i$ tal que si identificamos el lado a_i con b_i usando f_i , el espacio que obtenemos es la superficie Σ . (Las curvas c_j son las que van a formar el borde de Σ .)

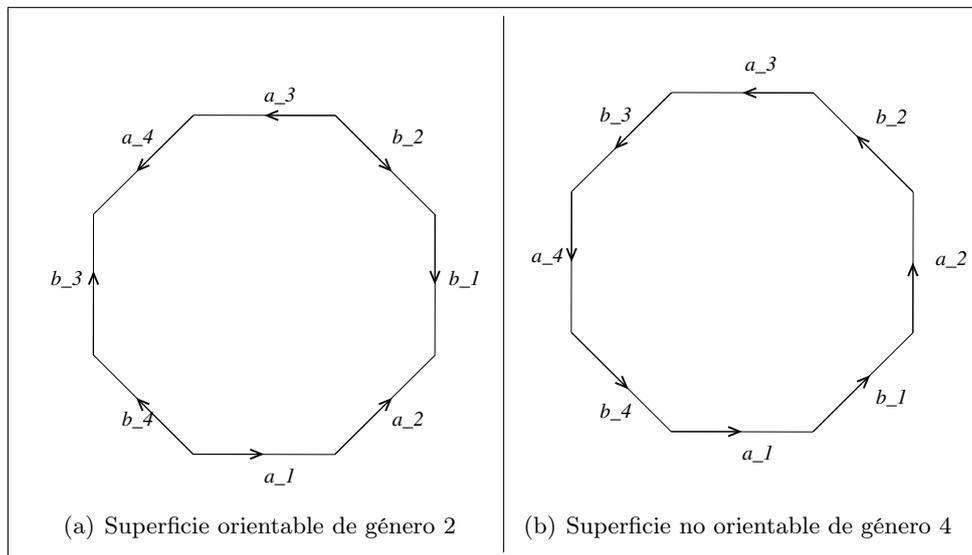


Figura 1.2:

Observación 1.3.1. Sean X una variedad orientada de dimensión n y con borde no vacío, $M, N \subset \partial X$ dos subvariedades de dimensión $n - 1$ orientadas con la *orientación borde* y $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Sea Y la variedad que se obtiene identificando a M y N a través del difeomorfismo f . Entonces, Y es orientable si y sólo si el mapa f *revierte orientación*. Además, la clase de difeomorfismos de Y sólo depende de la clase de isotopía de f .¹

A todas las curvas a_i y b_i les daremos la orientación que tienen como borde de P . Observemos que una superficie Σ es orientable si y sólo si toda curva cerrada simple en Σ tiene un entorno tubular difeomorfo a un cilindro. Esto quiere decir que al construir Σ pegando lados de P , ésta va a ser orientable si y solo si *todos los difeomorfismos f_i revierten orientación*. En las figuras 1.2(a), 1.2(b) vemos los procedimientos estándar para obtener una superficie orientable de género n y

¹Si en cambio Y es una variedad que se obtiene a partir de un cubrimiento $X \rightarrow Y$, donde X es orientable, entonces Y es orientable si y sólo si todos los elementos del grupo de transformaciones de cubrimiento preservan orientación.

sin borde a partir de un polígono de $4n$ lados, y una superficie no orientable de género n y sin borde a partir de un polígono de $2n$ lados. Como estas superficies tienen borde vacío, todos los lados del polígono participan del pegado y no existen lados etiquetados como c_j según la notación anterior. En el caso de una superficie con borde no vacío, se cumple la siguiente propiedad:

Lema 1.3.1. *Sea Σ una superficie compacta con borde no vacío. Entonces existe un polígono P tal que, con la notación anterior, se cumple que para todo $i = 1, \dots, r$ los lados adyacentes a a_i tienen etiquetas c_j , y lo mismo para los b_i .*

Observemos que sólo los lados con etiquetas a_i o b_i son los que participan en el pegado, de modo que lo que quiere decir este lema es que toda superficie con borde se puede obtener a partir de un polígono en donde los lados que participan en el pegado quedan intercalados con otros que no (que son los que tienen etiquetas c_j).

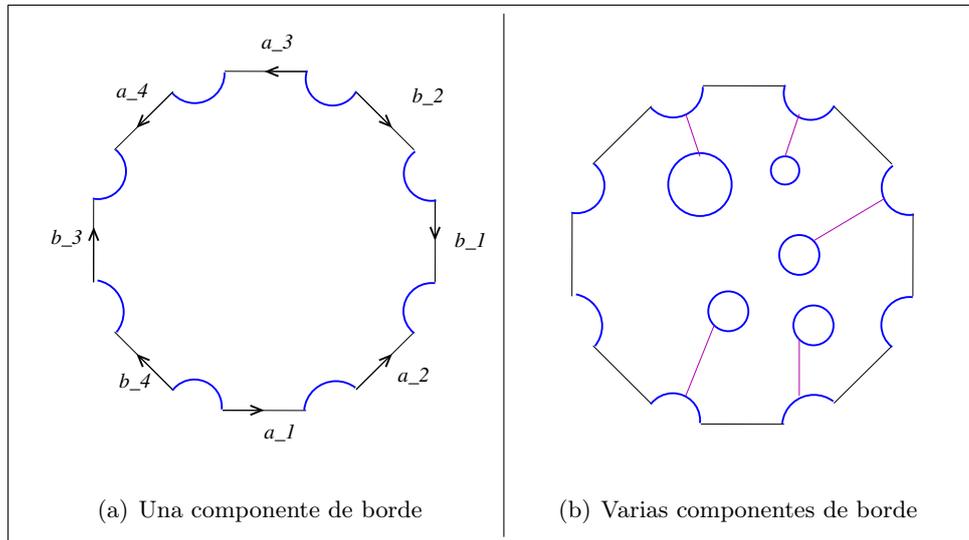


Figura 1.3:

Demostración. Supongamos primero que Σ tiene una sola componente de borde, entonces podemos obtener Σ a partir de un polígono como el que se muestra en la figura 1.3(a), que cumple las propiedades deseadas. (La figura sólo muestra el caso orientable. El caso no orientable se obtiene con el mismo polígono, pero poniendo las etiquetas adecuadas.) En esta figura las curvas con la etiqueta c_j que no participan del pegado están dibujadas en azul. Si ahora la superficie tiene más de una componente de borde, digamos $n + 1$ componentes, entonces podemos obtener Σ a partir de un polígono como el anterior al que le tenemos que quitar el interior de n discos cerrados en el interior del polígono. Para cada una de estas n componentes podemos tomar un segmento que conecta la componente con alguna de las curvas c_j como en la figura 1.3(b). Si tomamos estos arcos dos a dos disjuntos y recortamos esta superficie usando estos arcos, obtenemos un nuevo polígono que satisface la condición deseada. \square

Cómo construir fibrados sobre superficies con borde.

Con la caracterización que hemos hecho de las superficies con borde, podemos ahora construir ejemplos de fibrados sobre una superficie con borde no vacío de la siguiente manera: Sea Σ una superficie con borde y P un polígono como el que asegura el lema previo, con lados $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$ y mapas de pegado $f_i : a_i \rightarrow b_i$. Consideremos el fibrado trivial $P \times \mathbf{S}^1$ y observemos que podemos descomponer su borde en los siguientes conjuntos:

$$A_i = a_i \times \mathbf{S}^1, i = 1, \dots, r$$

$$B_i = b_i \times \mathbf{S}^1, i = 1, \dots, r$$

$$C_j = c_j \times \mathbf{S}^1, j = 1, \dots, s$$

Cada uno de estos conjuntos es un anillo, i.e. es el producto de un intervalo con un círculo, y la idea ahora es pegar los anillos A_i con los B_i para construir un fibrado sobre Σ . Véase la figura 1.3.1. Para cada $i = 1, \dots, r$ consideremos un mapa $F_i : A_i \rightarrow B_i$ que conmuta sobre el mapa f_i (esto es, un mapa que respete las fibras). Entonces la 3-variedad que se obtiene identificando el borde de $P \times \mathbf{S}^1$ mediante los mapas F_i es un fibrado por círculos sobre Σ , que llamaremos M .

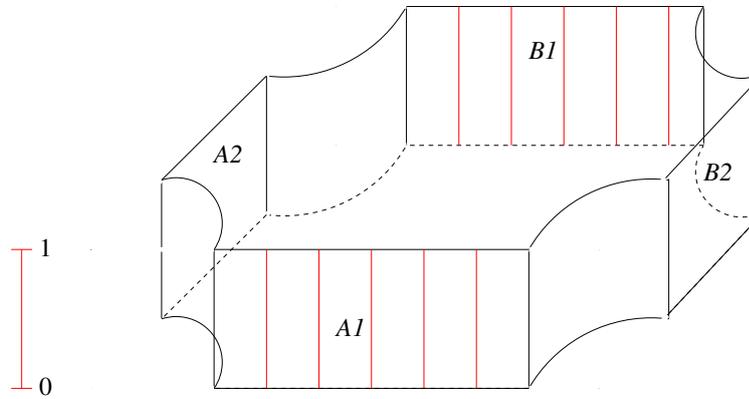


Figura 1.4: En esta figura representamos el producto del polígono P con el círculo, donde el círculo está representado como la coordenada vertical.

El producto orientable sobre Σ

Para la construcción que vamos a describir ahora no es necesario asumir que Σ tiene borde no vacío. Sea P un polígono a partir del cual podemos construir Σ pegando sus lados. Para cada $i = 1, \dots, s$ definamos $F_i = f_i \times g_i$, donde $g_i : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ es la identidad si f_i revierte la orientación borde de los segmentos a_i, b_i y g_i es la reflexión $z \mapsto \bar{z}$ en el otro caso. Los mapas F_i así obtenidos preservan

los círculos y revierten la orientación que tienen los anillos A_i, B_i como borde de $P \times \mathbf{S}^1$, de modo que el fibrado M que se obtiene al pegar con estos mapas es orientable. A este fibrado le llamaremos *producto orientable sobre Σ* . Si la superficie Σ es orientable, entonces todos los mapas g_i anteriores son la identidad y $M = \Sigma \times \mathbf{S}^1$. Cuando la superficie no es orientable también le llamaremos a este fibrado *producto twist*, y lo denotaremos por $M = \Sigma \tilde{\times} \mathbf{S}^1$. Una observación que queremos hacer es que el producto orientable siempre admite secciones. Esto se puede verificar en la construcción anterior ya que las secciones $P \times \{1\}$ y $P \times \{-1\}$ de $P \times \mathbf{S}^1$ son fijas para todos los mapas $F_i = f_i \times g_i$ (recordemos que g_i puede ser o bien la identidad, o bien la reflexión $z \mapsto \bar{z}$, pero en cualquier caso 1 y -1 son puntos fijo de g_i) y por lo tanto definen secciones en M .

Clasificación de los fibrados orientables con borde

Vayamos ahora al punto central de esta sección, que es describir cómo son los fibrados orientables sobre superficies con borde.

Proposición 1.3.2. *Todo fibrado $M \rightarrow \mathbf{D}^2$ es trivial.*

No demostraremos esta proposición, pero queremos comentar que se deduce de una propiedad más general, que es que *todo fibrado sobre un espacio contractible es trivial*. Una prueba puede encontrarse en [11], pág. 21. Aquí la prueba está hecha para fibrados vectoriales, pero en realidad es independiente de esta hipótesis.

Proposición 1.3.3. *Sea Σ una superficie con borde no vacío. Entonces todo fibrado orientable $M \rightarrow \Sigma$ es isomorfo al producto orientable sobre Σ .*

Demostración. Sea P un polígono con lados a_i, b_i y c_i como el que asegura el lema 1.3.1, y sea $q : P \rightarrow \Sigma$ el mapa cociente que se obtiene al identificar los lados de P . Como P es topológicamente un disco, la proposición previa nos asegura que en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} q^*M & \xrightarrow{q^*} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{q} & \Sigma \end{array}$$

el fibrado *pull-back* $q^*M \rightarrow P$ es isomorfo al fibrado trivial $P \times \mathbf{S}^1$, y M se puede obtener pegando los anillos $A_i = a_i \times \mathbf{S}^1$ y $B_i = b_i \times \mathbf{S}^1$ del borde de $P \times \mathbf{S}^1$ a través de difeomorfismos $F_i : A_i \rightarrow B_i$ que preservan las fibras, como hemos descrito antes. Como los anillos A_i tienen clausuras disjuntas (es aquí donde verdaderamente usamos el lema 1.3.1, que dice que los anillos $C_i = c_i \times \mathbf{S}^1$ quedan intercalados con los A_i), podemos hacer una homotopía preservando fibras entre el mapa F_i y el mapa

- $f_i \times \text{id}_{\mathbf{S}^1}$, cuando f_i revierte orientación;
- $f_i \times (z \mapsto \bar{z})$, cuando f_i preserva orientación.

Por lo tanto, el fibrado M es isomorfo al producto orientable sobre Σ . \square

Como último comentario de esta sección queremos agregar un corolario.

Corolario 1.3.4. *Todo fibrado orientable sobre una superficie con borde no vacío admite secciones.*

1.3.2. Fibrados sobre superficies cerradas.

Construcción de un modelo estándar de fibrado

Sea Σ una superficie compacta y sin borde, no necesariamente orientable. Describiremos un procedimiento para construir fibrados orientables sobre Σ . Tomemos un disco cerrado $D \subset \Sigma$ y definamos $\Sigma' = \Sigma - \text{int}(D)$. Recordemos que a menos de isomorfismos existe un único fibrado orientable sobre una superficie con borde, y que además admite secciones. Este fibrado coincide con el producto cartesiano cuando la superficie es orientable y, cuando no lo es, le llamamos *producto twist*. Sea M' este fibrado construido sobre Σ' . Como M' es orientable entonces $\partial M'$ es un toro que fibra sobre la curva ∂D y le daremos la orientación borde. Lo que haremos ahora es pegar el borde del fibrado producto $D \times \mathbf{S}^1$ con $\partial M'$ usando un difeomorfismo que preserve las fibras para construir un fibrado sobre nuestra superficie original. Para definir este mapa, primero vamos a describir un sistema de coordenadas para las (clases de homología de) curvas cerradas en el toro $T = \partial M'$. Si α y β son dos curvas cerradas y orientadas en T tal que sus clases de homología forman una base de $H_1(T)$, diremos que esta base es *positiva* si el *número de intersección orientado* de estas dos curvas es $+1$. Observemos que si cambiamos la orientación de M , esto tiene el efecto de tornar una base positiva en negativa. Observemos también que dos curvas cerradas y orientadas en un toro, que tienen número de intersección $+1$ o -1 , siempre forman una base del primer grupo de homología. Tomaremos como α a la clase de homología de una curva que es el borde de alguna sección $\sigma : \Sigma' \rightarrow M'$ y como β a la clase de homología de las fibras, ver figura 1.5(a), y las orientaremos de modo que formen una base positiva de $H_1(T)$ (hay dos maneras posibles de hacer esto). Diremos que la *pendiente* de una curva $\eta = m \cdot \alpha + n \cdot \beta \in H_1(T)$ es la cantidad $\text{pend}(\eta) = n/m$, y observemos que si cambiamos la orientación de la curva α y de la curva β , la nueva base $\{-\alpha, -\beta\}$ sigue siendo una base positiva y en esta base tenemos que $\eta = -m \cdot \alpha - n \cdot \beta$. Entonces, al cambiar de una base a otra ambos coeficientes cambian signo y pero no cambia la pendiente de la curva η . Resaltamos también que si cambiamos la orientación de M , entonces la pendiente de la curva cambia de signo. El mapa inclusión $\iota : \partial M \rightarrow M$ induce un morfismo en homología que cumple que $\iota_*(\alpha) = 0$, y de hecho, α es un generador del núcleo de este mapa. Esto es simplemente porque la curva α es el borde de una superficie en M' , ya que la hemos tomado como el borde de una sección σ . Observemos también que el borde de cualquier sección cumple lo anterior y por lo tanto tenemos lo siguiente:

Lema 1.3.5. *La clase de homología de una curva en T que es el borde de una sección $\sigma : \Sigma \rightarrow M$ es independiente de la sección, y además queda caracterizada por ser un generador del núcleo del mapa $\iota_* : H_1(T) \rightarrow H_1(M)$.*

Sea ahora $\varphi : \partial D \times \mathbf{S}^1 \rightarrow T$ un difeomorfismo que preserve las fibras y consideremos la curva $\gamma = \partial D \times \{\theta_0\}$ que es el borde de la sección $D \times \{\theta_0\}$. Como γ interseca una sola vez a cada fibra $\{x\} \times \mathbf{S}^1$, esto también vale para la curva $\varphi(\gamma) \subset T$ y eso quiere decir que, en la base que hemos definido para $H_1(T)$, esta curva se escribe como $\varphi(\gamma) = \pm\alpha + k \cdot \beta$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Ver figura 1.5(b). Llamaremos n a la pendiente $n = \text{pend}(\varphi(\gamma)) = \pm k \in \mathbb{Z}$. Observemos que si cambiamos el mapa de pegado por $-\varphi$, se cumple que $\text{pend}(-\varphi(\gamma)) = n = \text{pend}(\varphi(\gamma))$. Si tomamos el siguiente juego de coordenadas:

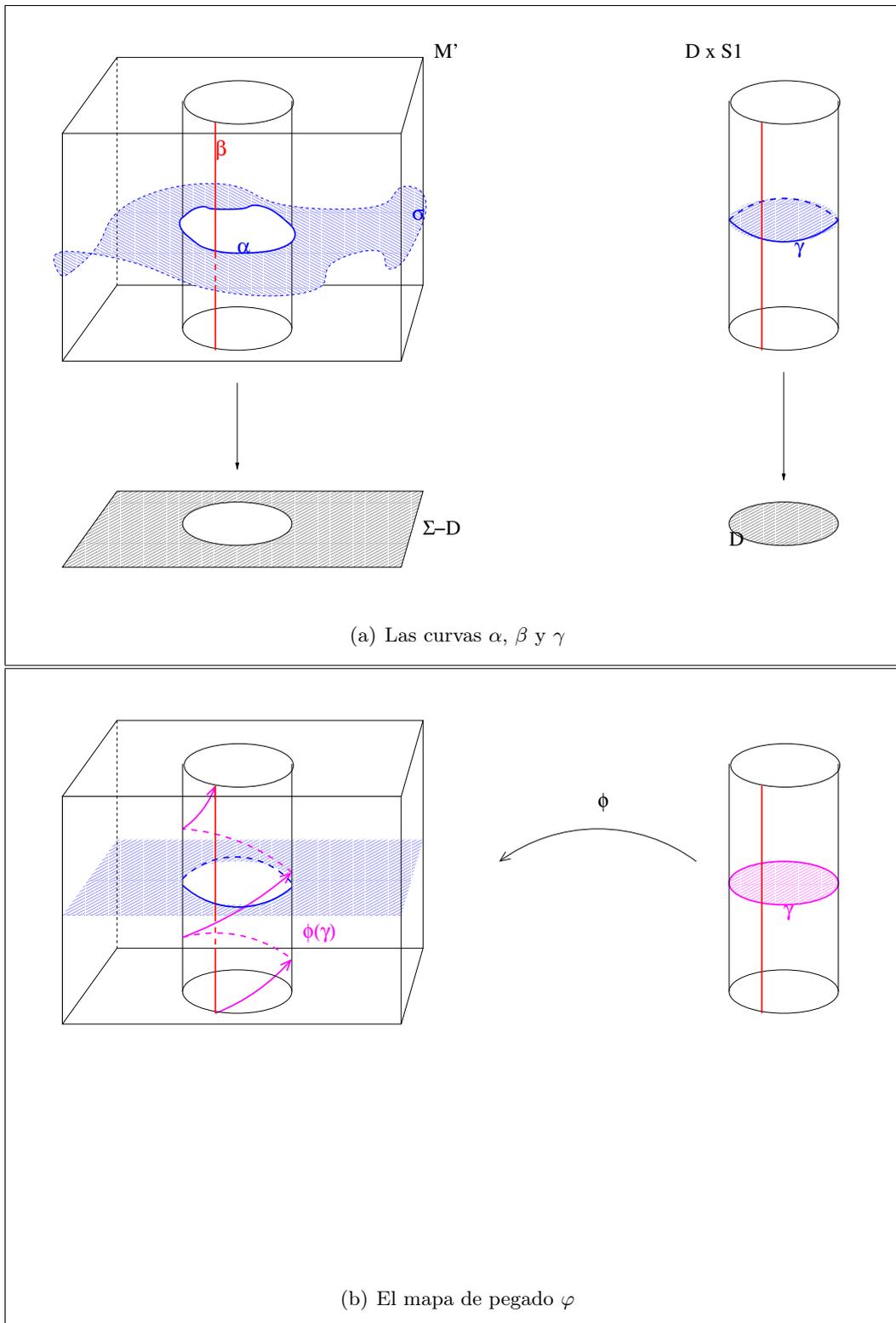


Figura 1.5:

- coordenadas en $\partial D \times \mathbf{S}^1$: $(1, 0) = \gamma$, $(0, 1) = \{x_0\} \times \mathbf{S}^1$ (la coordenada de las fibras)
- coordenadas en T : $(1, 0) = \alpha$, $(0, 1) = \beta$

entonces el mapa φ se escribe como

$$\varphi = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

El espacio que se obtiene pegando M' con $D \times \mathbf{S}^1$ a través de φ es un fibrado por círculos sobre Σ , que denotaremos por $M(n)$. Las siguientes páginas las dedicaremos a probar que cualquier fibrado orientable sobre una superficie cerrada Σ es isomorfo a uno de estos modelos $M(n)$ que hemos construido.

Observación 1.3.2. La clase de isomorfismo de $M(n)$ preservando orientación sólo depende de n (además de Σ , claramente). Esto en particular quiere decir que no depende de la elección particular del disco D que hemos hecho (esto se puede verificar usando un argumento muy similar al de la siguiente observación) y sólo depende de la clase de isotopía del mapa $\pm\varphi$. O sea, si tomamos cualquier mapa de pegado φ' que preserve las fibras y que lleve la curva γ en una curva de pendiente n , -esto quiere decir que φ' es isotópico a φ o a $-\varphi$ - entonces el fibrado obtenido es el mismo.

Observación 1.3.3. Si $M(n)$ es isomorfo a $M(m)$ por un isomorfismo que preserva orientación, entonces $m = n$.

Demostración. Sean $\varphi_n, \varphi_m : \partial D \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \partial M'$ los mapas de pegado de $M(n)$ y $M(m)$ respectivamente. Sea $\gamma = \partial D \times \{\theta_0\}$ y recordemos que $\varphi_n(\gamma) = \alpha + n \cdot \beta$, $\varphi_m(\gamma) = \alpha + m \cdot \beta$. Si existe un isomorfismo $\phi : M(n) \rightarrow M(m)$, entonces llamaremos ϕ' a su restricción a M' y ϕ_0 a su restricción a $D \times \mathbf{S}^1$, que cumplen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D \times \mathbf{S}^1 & \xrightarrow{\phi_0} & D \times \mathbf{S}^1 \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_m \\ M' & \xrightarrow{\phi'} & M' \end{array}$$

Observemos que como consecuencia del lema 1.3.5 tenemos que

- ϕ' lleva secciones de M' en secciones, y entonces $\phi'(\alpha) = \alpha$,
- ϕ' lleva fibras en fibras, y entonces $\phi(\beta) = \beta$,
- ϕ_0 lleva secciones de $D \times \mathbf{S}^1$ en secciones, y entonces $\phi_0(\gamma) = \gamma$.

En la igualdad

$$\phi' \circ \varphi_n(\gamma) = \varphi_m \circ \phi_0(\gamma)$$

tenemos que el término de la izquierda lo podemos reescribir como $\phi' \circ \varphi_n(\gamma) = \phi'(\alpha + n \cdot \beta) = \alpha + n \cdot \beta$, y el de la derecha como $\varphi_m \circ \phi_0(\gamma) = \varphi_m(\gamma) = \alpha + m \cdot \beta$, de donde se sigue que $m = n$. \square

Observación 1.3.4. Si $-M(n)$ denota al fibrado $M(n)$ pero con la orientación contraria a la que tiene, entonces $-M(n)$ es isomorfo preservando orientación a $M(-n)$.

La clasificación de los fibrados y el número de Euler

A continuación enunciaremos el teorema central de esta sección:

Teorema 1.3.6. *Si $\pi : M \rightarrow \Sigma$ es un fibrado por círculos orientable, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que M es isomorfo a $M(n)$, por un isomorfismo que preserva orientación.*

Demostración. Sea $D \subset \Sigma$ un disco cerrado y sean $\Sigma' = \Sigma - \text{int}(D)$, $M_0 = \pi^{-1}(D)$ y $M' = \pi^{-1}(\Sigma')$. Esto nos da una descomposición de M como pegado a través del borde de los dos fibrados $M_0 \rightarrow D$ y $M' \rightarrow \Sigma'$. Según lo explicado en la proposición 1.3.3 el fibrado M_0 es isomorfo a $D \times \mathbf{S}^1$ y M' es isomorfo al fibrado orientable sobre Σ' que usamos anteriormente (el producto cartesiano o el producto twist, según el caso). De modo que M es isomorfo a uno del tipo $M(n)$ que describimos anteriormente. \square

Esto nos da una clasificación de fibrados orientables a menos de isomorfismos que preservan orientación, mediante el invariante $n \in \mathbb{Z}$. A este invariante le llamaremos el *número de Euler* del fibrado M , y lo denotaremos por $e(M)$. O sea que dos fibrados por círculos sobre superficies son isomorfos por un isomorfismo que preserva orientación si y sólo si sus espacios base son difeomorfos y los fibrados tienen igual número de Euler.

Observación 1.3.5. El número de Euler del fibrado trivial $\Sigma \times \mathbf{S}^1$ o del fibrado $\Sigma \tilde{\times} \mathbf{S}^1$ es cero. Esto se desprende simplemente de la construcción de $M(0)$. Observemos también que si $M(n) = M' \sqcup_{\varphi} D \times \mathbf{S}^1$ admite una sección $\sigma : \Sigma \rightarrow M(n)$, el borde de $\sigma|_{\Sigma'}$ es la curva α y el borde de $\sigma|_D$ es la curva γ , y esto quiere decir $\varphi(\gamma) = \alpha$, o sea, $n = 0$. De modo que *el número de Euler se puede interpretar como una obstrucción a la existencia de una sección, y se cumple que $M \rightarrow \Sigma$ admite una sección si y sólo si $e(M) = 0$.*

Observación 1.3.6. Otro comentario importante es acerca del número de Euler del fibrado tangente unitario, para el que se cumple que $e(T^1\Sigma) = \chi(\Sigma)$. Daremos una indicación de como probar esto: Primero, afirmamos (sin demostración) que una superficie cerrada Σ siempre admite un campo de vectores X con una única singularidad, cuyo índice debe igualar a la característica de Euler de Σ , por el teorema de Poincaré-Hopf. Sea D un disco cerrado que además es un entorno de esta singularidad, y supongamos que $|X(x)| = 1$, para todo $x \in \Sigma' = \Sigma - \text{int}(D)$. Esto nos define una sección $\sigma' : \Sigma' \rightarrow T^1\Sigma' = M'$ y $\partial\sigma' = \alpha \subset \partial M'$. Sea X_0 un campo unitario en D , que lo podemos ver como una sección $\sigma_0 : D \rightarrow T^1D = D \times \mathbf{S}^1$, y entonces $\partial\sigma_0 = \gamma \subset \partial D \times \mathbf{S}^1$. Entonces, la pendiente de γ al mirarla como curva en $\partial M'$ es justamente el índice del campo X entorno a su singularidad.

Observación 1.3.7. El número de Euler del fibrado de Hopf $\mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$ es 1.

Esta clasificación se puede afinar un poco más para obtener una clasificación topológica de las 3-variedades que admiten una estructura de fibrados por círculos sobre superficies. Todo radica en el siguiente teorema, que enunciaremos sin demostración (c.f [10]):

Teorema 1.3.7. *Sea M una 3-variedad compacta y orientable. Si esta variedad admite una estructura de fibrado por círculos sobre una superficie Σ , entonces esta estructura es única a menos de isomorfismos.*

Esto nos dice que el invariante $|e(M)|$ determina completamente la clase de difeomorfismos de la variedad M , cuando esta admite una estructura de fibrado por círculos sobre una superficie.

El grupo fundamental de los fibrados

Consideremos una superficie cerrada Σ de género $g \geq 1$. Hablaremos sólo del caso en que Σ es orientable, siendo el otro caso análogo. El grupo fundamental de Σ admite una presentación estándar

$$\pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

Una aplicación directa del *teorema de Van-Kampen* permite escribir una presentación del grupo fundamental de un fibrado $M \rightarrow \Sigma$ con número de Euler $e(M) = n$, a saber:

$$\pi_1(M) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c : [a_i, c] = [b_i, c] = 1, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = c^n \rangle.$$

El generador c representa la clase de homotopía de las fibras de M , y es un generador del centralizador de $\pi_1(M)$. Este grupo también puede ser visto como una *extensión central de $\pi_1(\Sigma)$ por \mathbb{Z}* , significando esto que este grupo entra en una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\Sigma) \rightarrow 0$$

donde el mapa de la izquierda incluye al grupo \mathbb{Z} dentro del centralizador de $\pi_1(M)$. Las extensiones centrales \tilde{G} de un grupo G por \mathbb{Z} pueden ser parametrizadas por un elemento distinguido $e(\tilde{G}) \in H^2(G; \mathbb{Z})$ del *segundo grupo de cohomología con coeficientes en \mathbb{Z}* del grupo G , que se llama *clase de Euler* de la extensión (c.f. ??). En el caso en que $G = \pi_1(\Sigma)$ se tiene que $H^2(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y la clase de Euler de la extensión $\pi_1(M)$ coincide con el número de Euler de M que hemos definido.

Cuando $\Sigma = \mathbf{S}^2$ también podemos usar el teorema de Van-Kampen para calcular el grupo fundamental de M , y se tiene que:

$ e(M) $	Variedad	Grupo Fundamental
0	$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$	\mathbb{Z}
1	\mathbf{S}^3	$\{0\}$
2	$T^1\mathbf{S}^2$	\mathbb{Z}_2
\vdots	\vdots	\vdots
n	-	\mathbb{Z}_n

Observemos que $\pi_1(M)$ es siempre finito, excepto en el caso en que $M = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$.

1.4. Morfismos, cubrimientos y campos de vectores en fibrados.

1.4.1. Morfismos que conmutan sobre la identidad.

Un morfismo entre dos fibrados $\pi_i : M_i \rightarrow \Sigma_i$ es un par de mapas (F, f) que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{f} & \Sigma_2 \end{array} .$$

Comenzaremos explicando una motivación de lo que veremos en esta sección. Si $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es un cubrimiento de grado n entre dos superficies cerradas, es posible tomar una triangulación \mathcal{T} de Σ_2 (con triángulos suficientemente pequeños) de modo que la preimagen por f de \mathcal{T} es una triangulación de Σ_1 , que tiene exactamente n veces la cantidad de caras, aristas y vértices que tiene \mathcal{T} . Esto implica que se cumple la relación $\chi(\Sigma_1) = n \cdot \chi(\Sigma_2)$, conocida como *fórmula de Hurwitz*. La fórmula de Hurwitz determina una obstrucción para construir cubrimientos $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, ya que es necesario que $\chi(\Sigma_2)$ sea un divisor de $\chi(\Sigma_1)$. Existen también otras obstrucciones para construir mapas continuos cualesquiera $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ entre dos superficies, como por ejemplo la *fórmula de Knneser*, que dice que $\chi(\Sigma_1) \leq |\deg(f)| \cdot \chi(\Sigma_2)$. Del mismo modo, existen obstrucciones topológicas para la existencia de morfismos (F, f) entre dos fibrados. Explicaremos un resultado de este tipo para el caso en que $\Sigma_1 = \Sigma_2$ y $f = \text{id}_\Sigma$ y luego veremos una aplicación de esto al estudio de campos de vectores en fibrados por círculos sobre superficies. Vamos a restringirnos únicamente al caso en que Σ es orientable, pero los resultados que veremos son igualmente válidos -con sus correspondientes modificaciones- en el otro caso.

Cubrimientos

Sea $\pi : M \rightarrow \Sigma$ un fibrado orientable sobre una superficie orientable.

Proposición 1.4.1. *Si $f : \hat{M} \rightarrow M$ es un cubrimiento de grado $n > 0$ entonces \hat{M} admite una estructura de fibrado por círculos $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow \hat{\Sigma}$ sobre una superficie $\hat{\Sigma}$, y además el cubrimiento f induce un cubrimiento $f_0 : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, que cumple el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \hat{\Sigma} & \xrightarrow{f_0} & \Sigma \end{array}$$

Demostración. Si $f : \hat{M} \rightarrow M$ es un cubrimiento de grado $n > 0$ entonces el mapa $\rho = \pi \circ f : \hat{M} \rightarrow \Sigma$ es una submersión, y por lo tanto, para cada $x \in \Sigma$, el conjunto $\rho^{-1}(x) \subset \hat{M}$ es una unión finita de círculos, cada uno de los cuales tiene un entorno que admite una trivialización local. Es decir, \hat{M} es un fibrado por círculos sobre una superficie $\hat{\Sigma}$. Como f es un cubrimiento de grado n , vale

que $\rho^{-1}(x) = f^{-1}(\pi^{-1}(x))$ es una unión de $k > 0$ círculos, cada uno de los cuales cubre a $\pi^{-1}(x)$ con grado n/k . Esto quiere decir que el mapa $f : \hat{M} \rightarrow M$ induce, al cocientar por las fibras, un cubrimiento $f_0 : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ de grado n/k que cumple el diagrama conmutativo anterior. \square

Haremos algunas observaciones acerca de estos cubrimientos:

Observación 1.4.1. Observemos que la característica de Euler de Σ cumple que $\chi(\hat{\Sigma}) = \deg(f_0) \cdot \chi(\Sigma)$. Por lo tanto:

- Si la superficie Σ es la esfera \mathbf{S}^2 entonces $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}^2$ y f_0 es un difeomorfismo,
- Si la superficie Σ es el toro \mathbf{T}^2 entonces $\hat{\Sigma} = \mathbf{T}^2$,
- Si la superficie Σ tiene característica de Euler negativa y $\hat{\Sigma} = \Sigma$ entonces f_0 debe ser un difeomorfismo.

Observación 1.4.2. Para cualquier par de cubrimientos (f, f_0) que cumplan el diagrama anterior vale que $\deg(f) = \deg(f_x) \cdot \deg(f_0)$.

Observación 1.4.3. Cada elemento $\tau \in \text{Aut}(\hat{M})$ del grupo de automorfismos del cubrimiento $f : \hat{M} \rightarrow M$ induce, al cocientar por las fibras, una transformación de cubrimiento $\tau_{\hat{\Sigma}}$ en $\text{Aut}(\hat{\Sigma})$. Como estamos asumiendo que M y Σ son orientables, entonces \hat{M} y $\hat{\Sigma}$ son orientables y todos los elementos de $\text{Aut}(\hat{M})$ y de $\text{Aut}(\hat{\Sigma})$ preservan orientación.

Grado en las fibras.

Sea Σ una superficie cerrada y orientable, de género $g \geq 0$, y sean $\pi_i : M_i \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$ dos fibrados orientables. Sea $F : M_1 \rightarrow M_2$ un morfismo que conmuta sobre la identidad en Σ ,

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma \end{array} .$$

Dado un punto $x \in \Sigma$ denotaremos por F_x a la restricción $F_x : \pi_1^{-1}(x) \rightarrow \pi_2^{-1}(x)$, que es un mapa entre dos círculos. Como la superficie base es orientable sabemos que M_i admite una orientación *canónica* de sus fibras determinada por las orientaciones de M_i y de Σ , y en ese caso está bien definido el grado en las fibras $\deg(F_x) \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\deg(F_x)$ es constante. Si escogemos un par de trivializaciones locales $\varphi_1 : \pi_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{S}^1$ y $\varphi_2 : \pi_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{S}^1$ entorno a x que además preserven la orientación de las fibras, podemos escribir al mapa F en estas coordenadas como $F(y, \theta) = (y, G_y(\theta))$, donde $G_y = \varphi_2 \circ F_y \circ \varphi_1^{-1} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$. Como el mapa $y \mapsto G_y$ varía continuamente y $\deg(G_y) = \deg(F_y)$ entonces el mapa $x \mapsto \deg(F_x)$ es localmente constante, y por lo tanto constante.

Lema 1.4.2. *Se cumple que $\deg(F) = \deg(F_x)$. Si además $\deg(F) \neq 0$, entonces F preserva la orientación de las fibras si y sólo si preserva la orientación de M .*

Demostración. Sea $U \subset \Sigma$ un disco cerrado, sean $\varphi_i : \pi_i^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{S}^1$, $i = 1, 2$ dos trivializaciones locales como las anteriores, y escribamos al mapa F en estas coordenadas como $F(y, \theta) = (y, G_y(\theta))$. Sea $D \subset \text{int}(U)$ otro disco cerrado. No es difícil ver que F es homotópico a un mapa F' , mediante una homotopía que preserva fibras, que satisface que

- $F'(y, \theta) = (y, \theta^n)$, para todo $y \in D$, donde $n = \deg(F_x)$,
- F' coincide con F en $\pi_1^{-1}(\Sigma - U)$.

Esto quiere decir que, a menos de una homotopía, podemos suponer que $F : \pi_1^{-1}(D) \rightarrow \pi_2^{-1}(D)$ es un cubrimiento que se restringe a un cubrimiento en cada fibra cuando $\deg(F_x) \neq 0$, o a un mapa que es constante en la coordenada de las fibras cuando $\deg(F_x) = 0$. En este último caso podemos ver fácilmente que $\deg(F) = \deg(F_x)$. Si $\deg(F_x) \neq 0$, sea $q \in \pi_2^{-1}(x)$ y $p \in F^{-1}(q) \subset \pi_1^{-1}(x)$. Como F es un cubrimiento en el entorno que estamos considerando, entonces $d_p F : T_p M_1 \rightarrow T_q M_2$ es un isomorfismo y preserva orientación si y sólo si $\deg(F) > 0$. Sea $H_1 \subset T_p M_1$ un plano horizontal y sea $H_2 = d_p F(H_1) \subset T_q M_2$, que también es horizontal. Si dotamos a cada uno de estos planos con la orientación que es *pull-back* de la orientación en Σ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{d_p F|_{H_1}} & H_2 \\ \downarrow d_p \pi_1 & & \downarrow d_p \pi_2 \\ T_x \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & T_x \Sigma \end{array}$$

implica $d_p F$ siempre preserva la orientación de estos planos. Como la orientación canónica de las fibras es aquella que hace que

$$(\text{orientación de } H_i) \wedge (\text{orientación de } \ker(d_p \pi_i)) = (\text{orientación de } M_i),$$

es claro entonces que F preserva la orientación de las fibras si y sólo si F preserva orientación, y que $\deg(F_x) = \deg(F)$. □

Acción en el grupo fundamental.

Recordemos que utilizando la presentación habitual del grupo fundamental de la superficie Σ ,

$$\Pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

podemos escribir una presentación del grupo fundamental de M_i como

$$\Pi_1(M_i) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_i : [a_j, c_i] = [b_j, c_i] = 1, \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = c_i^{m_i} \rangle$$

donde $m_i = e(M_i)$. (Para el caso en que $\Sigma = \mathbf{S}^2$ vale que $\Pi_1(M_i) = \langle c : c^{m_i} \rangle$.) En esta presentación del grupo fundamental, la clase de homotopía del generador c es la clase de homotopía de las fibras, y además c es un generador del centralizador de $\Pi_1(M_i)$, que es isomorfo al grupo cíclico infinito. La proyección π_i induce un morfismo $(\pi_i)_* : \Pi_1(M_i) \rightarrow \Pi_1(\Sigma)$ que satisface que

- $(\pi_i)_*(a_j) = a_j$,
- $(\pi_i)_*(b_j) = b_j$,
- $(\pi_i)_*(c_i) = 1$.

Un morfismo F como el que venimos considerando induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(M_1) & \xrightarrow{F_*} & \Pi_1(M_2) \\ \downarrow (\pi_1)_* & & \downarrow (\pi_2)_* \\ \Pi_1(\Sigma) & \xrightarrow{\text{id}} & \Pi_1(\Sigma) \end{array}$$

Como F lleva fibras de M_1 en fibras de M_2 , entonces vale que $F_*(c_1) = (c_2)^n$ para algún entero n , donde además $n > 0$ si y sólo si F preserva orientación. En lo que sigue veremos que este entero n está determinado por la siguiente relación:

$$e(M_2) = n \cdot e(M_1).$$

Morfismos y número de Euler

Proposición 1.4.3. *Si $F : M_1 \rightarrow M_2$ es un morfismo que conmuta sobre la identidad de Σ y tiene grado $\deg(F) = \deg(F_x) = n$, entonces*

$$n \cdot e(M_1) = e(M_2)$$

Demostración. Denotaremos por $m_i = e(M_i)$. Según lo explicado en el párrafo anterior, tenemos que

$$c_2^{m_2} = \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = \prod_{j=1}^g [F_*(a_j), F_*(b_j)] = F_*\left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j]\right) = F_*(c_1^{m_1}) = c_2^{n \cdot m_1}$$

de donde se deduce la proposición. \square

Esta proposición quiere decir en particular que, si el grado de F en las fibras es nulo, entonces M_2 debe ser el fibrado trivial, y si es no nulo entonces $e(M_1)$ es un divisor de $e(M_2)$. Además, $e(M_1)$ y $e(M_2)$ tienen igual signo si y sólo si F preserva orientación. Como aplicación de esta relación veamos por ejemplo que, si un fibrado M admite un isomorfismo $F : M \rightarrow M$ que revierte la orientación de las fibras y conmuta sobre la identidad, entonces $e(M) = 0$. Esto es porque un isomorfismo que revierte la orientación de las fibras y conmuta sobre la identidad es un isomorfismo que preserva orientación entre M y $-M$, y por lo tanto $1 \cdot e(M) = e(-M) = -e(M)$, lo que implica $e(M) = 0$.

A continuación veremos que vale la propiedad recíproca: Si $e(M_1)$ divide a $e(M_2)$ entonces existe un morfismo $M_1 \rightarrow M_2$ que conmuta sobre la identidad. Más aún, construiremos este mapa como un cubrimiento.

Proposición 1.4.4. *Sean $M_i \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$, dos fibrados orientables sobre una superficie cerrada y orientable Σ . Si $e(M_1)$ divide a $e(M_2)$, entonces existe un cubrimiento $F : M_1 \rightarrow M_2$ de grado $n = e(M_2)/e(M_1)$ que conmuta sobre id_Σ .*

Demostración. Sean $m_2 = e(M_2)$, m_1 un divisor de m_2 que se escribe como $m_2 = n \cdot m_1$. Lo que haremos es construir un cubrimiento $M_1 \rightarrow M_2$ de grado n , donde $e(M_1) = m_1$. Consideremos la siguiente presentación de $\Pi_1(M_2)$

$$\Pi_1(M_2) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c : [a_j, c] = [b_j, c] = 1, \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = c^{m_2} \rangle.$$

Sea $d = c^n$ y consideremos el subgrupo

$$\Gamma = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d \rangle \leq \Pi_1(M_2).$$

Sea $F : M_1 \rightarrow M_2$ el cubrimiento asociado a este subgrupo Γ . Por la proposición 1.4.1 tenemos que M_1 tiene una estructura de fibrado $\pi_1 : M_1 \rightarrow \Sigma_1$ y se satisface el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{f_0} & \Sigma \end{array}$$

donde f_0 es un cubrimiento. Sean $\tilde{a}_j = (\pi_1)_*(a_j)$, $\tilde{b}_j = (\pi_1)_*(b_j)$, $j = 1, \dots, g$, y sea $\Gamma_0 = \langle \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g \rangle \leq \Pi_1(\Sigma_1)$. Usando la conmutatividad de este diagrama tenemos que $(\pi_2)_*F_*(a_j) = a_j = (f_0)_*(\tilde{a}_j)$ y $(\pi_2)_*F_*(b_j) = b_j = (f_0)_*(\tilde{b}_j)$. Esto quiere decir que $(f_0)_*(\Gamma_0) = \Pi_1(\Sigma)$ y como f_0 es inyectivo entonces $f_0 : \Pi_1(\Sigma_1) \rightarrow \Pi_1(\Sigma)$ es un isomorfismo. O sea que $\Sigma_1 = \Sigma$ y f_0 es un difeomorfismo. Podemos suponer sin problemas que $f_0 = \text{id}_\Sigma$. Además observemos que como el generador d se corresponde con una curva cerrada simple en M_1 y $(\pi_1)_*(d) = 1$, entonces la clase del generador d es la clase de homotopía de las fibras. Tenemos que $\Pi_1(M_1)$ admite una presentación de la forma

$$\Pi_1(M_1) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d : [a_j, d] = [b_j, d] = 1, \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = d^{m_1} \rangle$$

y por como elegimos d se tiene que

$$c^{m_2} = \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = \prod_{j=1}^g [F_*(a_j), F_*(b_j)] = F_*\left(\prod_{j=1}^g [a_j, b_j]\right) = F_*(d^{m_1}) = c^{n \cdot m_1}$$

de donde se concluye la proposición. □

Como consecuencia de las proposiciones 1.4.3 y 1.4.4 tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.5. *Sean $M_i \rightarrow \Sigma$, $i = 1, 2$ dos fibrados por círculos, orientables, sobre una superficie cerrada Σ . Entonces, existe un cubrimiento $M_1 \rightarrow M_2$ que conmuta sobre id_Σ si y sólo si $e(M_1)$ divide a $e(M_2)$.*

No es difícil probar que, en realidad, todo morfismo $F : M_1 \rightarrow M_2$ que conmuta sobre id_Σ es homotópico a un cubrimiento que conmuta sobre id_Σ , mediante una homotopía que preserva fibras (incluso cuando Σ no es orientable). Aunque no probaremos esta afirmación, notemos que da mucho más contenido al teorema previo: Esto quiere decir que los únicos mapas $M_1 \rightarrow M_2$ que conmutan sobre id_Σ son, esencialmente, cubrimientos cuyo grado es un divisor de $e(M_2)$.

1.4.2. Campos unitarios en fibrados

Ahora veremos una aplicación del teorema previo a campos de vectores unitarios en un fibrado $M \rightarrow \Sigma$. En lo que sigue, Σ será una superficie cerrada

orientable y $\pi : M \rightarrow \Sigma$ será un fibrado por círculos orientable. Recordemos que un vector no nulo $X \in TM$ se dice *vertical* cuando es tangente a una fibra, y que el espacio tangente a las fibras está definido por $\ker(d\pi) \leq TM$. Si X es un campo de vectores unitarios en M , diremos que X es *horizontal* si no es vertical en ningún punto. Veamos que $\Sigma \times \mathbf{S}^1$ no admite campos unitarios horizontales cuando la característica de Euler de Σ es no nula.

Proposición 1.4.6. *Si $\chi(\Sigma) \neq 0$, entonces el fibrado trivial $M = \Sigma \times \mathbf{S}^1$ no admite campos de vectores unitarios horizontales.*

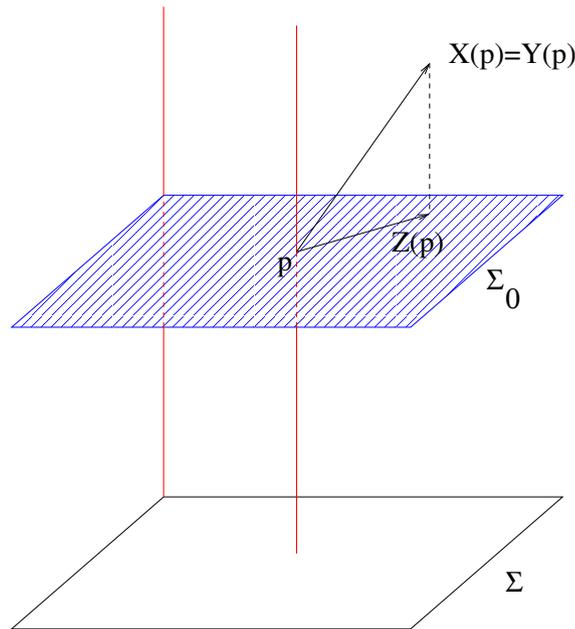


Figura 1.6: Campos horizontales en el fibrado trivial.

Demostración. Hemos esquematizado esta demostración en la figura 1.4.2. Sea $\Sigma_0 = \Sigma \times \{\theta_0\} \subset \Sigma \times \mathbf{S}^1$ una sección y sea $Y = X|_{\Sigma_0}$ la restricción de X a esta superficie. Observemos que para todo punto $p \in \Sigma_0$ se tiene que $T_p M = T_p \Sigma_0 \oplus \ker(d_p \pi)$. Si proyectamos el campo Y sobre $T\Sigma_0$ usando esta descomposición, obtenemos un campo Z en Σ_0 y se cumple que $Z(p) = 0$ si y sólo si $Y(p)$ es vertical. Como estamos asumiendo que $\chi(\Sigma_0) \neq 0$, entonces el campo Z debe tener singularidades, y por lo tanto el campo X tiene puntos donde es vertical. \square

En el siguiente resultado está contenida una de las dos ideas principales que usaremos para encontrar obstrucciones a la existencia de parcialmente hiperbólicos, que es el objetivo general de este trabajo. Es una combinación de la idea anterior con los resultados previos acerca de morfismos y cubrimientos entre fibrados.

Proposición 1.4.7. *Un fibrado $\pi : M \rightarrow \Sigma$ admite un campo de vectores horizontales si y sólo si $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$*

Demostración. Sea X un campo de vectores unitarios y horizontales en M . El mapa $d\pi : TM \rightarrow T\Sigma$ nos permite construir un mapa $f : M \rightarrow T^1\Sigma$ definido como

$$f(p) = \frac{(d_p\pi)X(p)}{\|(d_p\pi)X(p)\|}.$$

Hemos esquematizado este mapa en la figura 1.4.2. Observemos que como $X(p)$ nunca es vertical entonces $(d_p\pi)X(p) \neq 0$ y el mapa anterior está bien definido. Trivialmente se cumple que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & T^1\Sigma \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma \end{array}$$

y entonces, por lo visto en la proposición 1.4.3 tenemos que $e(M)$ divide a $e(T^1\Sigma) = \chi(\Sigma)$. Recíprocamente, si $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$ sea $f : M \rightarrow T^1\Sigma$ un cubrimiento que conmuta sobre la identidad. Afirmamos que el fibrado T^1M siempre admite campos horizontales. Asumiendo esto, es fácil ver que el *pull-back* por el cubrimiento f de un campo horizontal en $T^1\Sigma$ es un campo horizontal en M . Ahora bien, para probar la afirmación basta con observar que, por ejemplo, el *campo geodésico* en $T^1\Sigma$ (i.e. el campo que genera el flujo geodésico en Σ) es horizontal. □

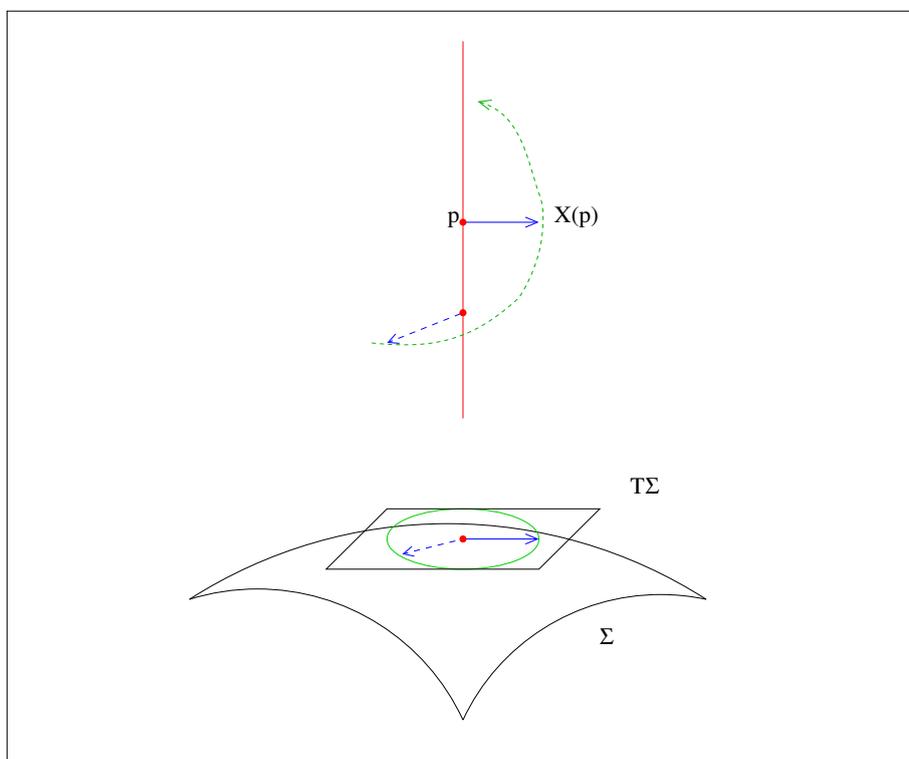


Figura 1.7: Un campo horizontal en M induce un morfismo $M \rightarrow T^1\Sigma$.

Capítulo 2

Sistemas parcialmente hiperbólicos

2.1. Sistemas parcialmente hiperbólicos en 3-variedades.

Definición 2.1.1. Sea M una 3-variedad riemanniana y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase C^1 . Diremos que f es *parcialmente hiperbólico* si existen un $N > 0$ y una descomposición Df -invariante $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ del espacio tangente a M en tres subfibrados continuos y unidimensionales, que llamaremos distribución *estable*, *central* e *inestable*, respectivamente, y tales que para todo $x \in M$:

$$\|D_x f^N|_{E^s}\| < \min\{1, \|D_x f^N|_{E^c}\|\} < \max\{1, \|D_x f^N|_{E^c}\|\} < \|D_x f^N|_{E^u}\|. \quad (2.1.1)$$

Haremos una breve reseña de las propiedades básicas de estos mapas. Primero que nada, si un mapa satisface lo anterior, siempre es posible cambiar la métrica por otra en la que la desigualdad 2.1.1 se satisface para $N = 1$. De hecho, si un difeomorfismo satisface esta definición para una métrica riemanniana en M , entonces también la satisface para cualquier otra métrica que se tome. Esto quiere decir que, aunque recurrimos a una métrica riemanniana para definir *hiperbolicidad parcial*, esta definición es puramente topológica. Se puede probar que las distribuciones E^s , E^c y E^u son continuas, pero en general no son de clase C^1 , incluso cuando f es de clase C^∞ . De la condición 2.1.1 (adaptada para $N = 1$) se desprende que existen dos constantes λ y μ tales que

$$\|D_x f|_{E^s}\| \leq \lambda < 1 < \mu \leq \|D_x f|_{E^u}\|,$$

lo que quiere decir que E^s es un fibrado *contractivo* y E^u es un fibrado *expansivo*. Entonces, un difeomorfismo es parcialmente hiperbólico cuando preserve una descomposición $E^s \oplus E^c \oplus E^u$ de TM en tres subfibrados no triviales, donde E^s es contractivo, E^u es expansivo y el comportamiento de los vectores de E^c está *dominado* por el de los otros dos en el sentido de que para todo $x \in M$ vale que:

$$\|D_x f|_{E^s}\| < \|D_x f|_{E^c}\| < \|D_x f|_{E^u}\|.$$

En la literatura estándar del tema existen varias definiciones de *difeomorfismo parcialmente hiperbólico*. La definición que hemos dado aquí no es la más general, y a veces es conocida también como es *hiperbolicidad parcial fuerte*.

Llamaremos *distribución centro-estable*, *centro-inestable* y *estable-inestable* a las distribuciones de planos $E^{cs} = E^s \oplus E^c$, $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ y $E^{su} = E^s \oplus E^u$ respectivamente. Observemos que estas distribuciones también son Df -invariantes.

2.1.1. Integrabilidad de los fibrados invariantes

Una *foliación* C^0 con hojas C^1 en M es una foliación continua \mathcal{F} (i.e. que los cambios de cartas que la definen son continuos) cuyas hojas $\mathcal{F}(x)$, $x \in M$ son subvariedades inmersas de clase C^1 , y los espacios tangentes $T_x\mathcal{F}(x)$ dependen continuamente de x . Denotaremos por $T\mathcal{F}$ al espacio tangente a una foliación de este tipo. (Notemos que, aunque la distribución tangente $T\mathcal{F}$ es continua, esto no quiere decir que \mathcal{F} es una foliación de clase C^1 .) Diremos que una distribución continua $E \leq TM$ de dimensión k es *integrable* si existe una foliación \mathcal{F} de clase C^0 con hojas C^1 tal que $T\mathcal{F} = E$, y diremos que E es *únicamente integrable* si además se verifica que: Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva tal que $\alpha'(t) \in E(\alpha(t))$, $\forall t \in I$, entonces α está contenida en $\mathcal{F}(\alpha(0))$. Observemos que para el caso en que $\dim(E) = 1$, como E es continuo entonces para cada punto $x \in M$ siempre existe una curva integral $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha'(t) \in E(\alpha(t))$, pero aún así esto no quiere decir que exista una foliación por curvas tangentes a E . El primer resultado que queremos enunciar es acerca de la integrabilidad de los fibrados estable e inestable, y se puede encontrar en [12], capítulo 6.

Proposición 2.1.2. *Los fibrados E^s y E^u son únicamente integrables. A sus respectivas foliaciones tangentes les llamaremos foliación estable y foliación inestable, y las denotaremos por W^s y W^u . Estas foliaciones son f -invariantes, y dado un punto $x \in M$ las respectivas hojas por x satisfacen que:*

$$\begin{aligned} \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \text{ para todo } y \in W^s(x), \\ \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow -\infty, \text{ para todo } y \in W^u(x). \end{aligned}$$

El hecho de que el fibrado E^s sea únicamente integrable está íntimamente ligado a la propiedad que tiene de ser contractivo. Heurísticamente se puede pensar que el hecho de que el diferencial de f en la *dirección estable* sea hiperbólico (o sea, $\|D_x f|_{E^s}\| \leq \lambda < 1$) permite aproximar muy bien el comportamiento de f por el de su diferencial en esta dirección. Tanto es así que existe una foliación por curvas tangente a E^s , f -invariante, y la longitud de cualquier segmento contenido en una de estas curvas decrece exponencialmente al ser iterado por f hacia el futuro. Notemos que este conjunto está contenido en el denominado *conjunto estable de x* , (i.e. el conjunto de todos los $y \in M$ tales que $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$) aunque no tiene por qué coincidir con éste. Una observación completamente análoga vale para la distribución inestable.

En general, el fibrado E^c no tiene por qué ser integrable a una foliación. Un ejemplo paradigmático puede encontrarse en [5]. Diremos que f es *dinámicamente coherente* si existen dos foliaciones f -invariantes W^{cs} y W^{cu} (de clase C^0 con hojas C^1), tangentes a E^{cs} y E^{cu} respectivamente. A estas foliaciones las llamaremos *foliación centro-estable* y *foliación centro-inestable*. Cuando f es dinámicamente coherente, la intersección de sus foliaciones centro-estable y centro-inestable determinan una foliación por curvas tangentes a E^c , que por lo tanto es integrable. A esta foliación la llamaremos *foliación central*. Por ejemplo, el mapa *tiempo=1* de un flujo de Anosov en una 3-variedad es un difeomorfismo

parcialmente hiperbólico y dinámicamente coherente. Aquí la foliación centro-estable(inestable) es la foliación por conjuntos estables(inestables) de las órbitas del flujo, y la foliación central es la foliación por órbitas del flujo.

Describiremos a continuación un tipo de integrabilidad más débil que siempre tienen los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en 3-variedades.

Foliaciones ramificadas invariantes.

Sea M una 3-variedad riemanniana y orientable. Una *superficie inmersa en M* es una inmersión $L \rightarrow M$ de clase C^1 , donde L es una 2-variedad diferenciable y conexa. Haciendo *abuso de la notación*, escribiremos $L \subset M$ para indicar la imagen de la inmersión anterior dentro de M . Diremos que la superficie es *completa* cuando es completa con la métrica inducida en L por M mediante la inmersión $L \rightarrow M$. El *teorema del entorno tubular*, aplicado en este caso, asegura que una superficie inmersa $L \subset M$, sin borde y completa, siempre tiene un entorno N que es difeomorfo, con su topología intrínseca, a un fibrado por rectas sobre esta superficie. Es usual decir que la superficie tiene *dos lados* cuando existe un entorno tubular N tal que $N - L$ tiene dos componentes conexas. Observemos que como M es orientable, este entorno tubular N siempre es orientable. Como todo fibrado por rectas sobre L orientable es isomorfo o bien al producto cartesiano $L \times \mathbb{R}$ en el caso de que L sea orientable, o bien al *producto twist* $L \tilde{\times} \mathbb{R}$ cuando L no es orientable, entonces L tiene dos lados exactamente cuando es orientable. De ahora en más sólo consideraremos superficies inmersas completas y orientables. Sea $\gamma \subset N \subset M$ una curva contenida en un entorno tubular de N de L . Diremos que γ *atraviesa* a la superficie L si γ corta a las dos componentes de $N - L$. Dadas dos superficies inmersas $L, L' \subset M$, diremos que *estas dos superficies se cruzan* si existe una curva γ contenida en L que atraviesa a L' . Es fácil verificar que esta definición es simétrica en L y L' .

Definición 2.1.2. Sea M una 3-variedad orientable y $E \leq TM$ una distribución de planos continua y orientable. Una *foliación ramificada tangente a E* en M es una colección $\mathcal{F} = \{L_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in J}$ de superficies inmersas, tangentes a E , sin borde, completas y orientables, a las que llamaremos *hojas de la foliación*, tales que:

- La colección cubre a M , o sea: $\forall x \in M$ existe una hoja $L \in \mathcal{F}$ tal que $x \in L$;
- L_α y L_β no se cruzan, $\forall \alpha, \beta \in J$;
- Si $x_n \rightarrow x \in M$ y $L_n \in \mathcal{F}$ es una hoja que contiene a x_n , entonces existe una hoja $L \in \mathcal{F}$ tal que $x \in L$ y $L_n \rightarrow L$ uniformemente en compactos.

En la figura 2.1.1 se puede ver una foliación ramificada de dimensión 1 en el plano. (Observemos que la definición anterior se extiende trivialmente a cualquier valor de la dimensión de M o E .) La foliación ramificada que se ve en esta figura está definida como:

$$\mathcal{F} = \{L_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, -L_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : L_x(t) = f(t+x)\},$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ y f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. (Es decir, las hojas de la foliación son los

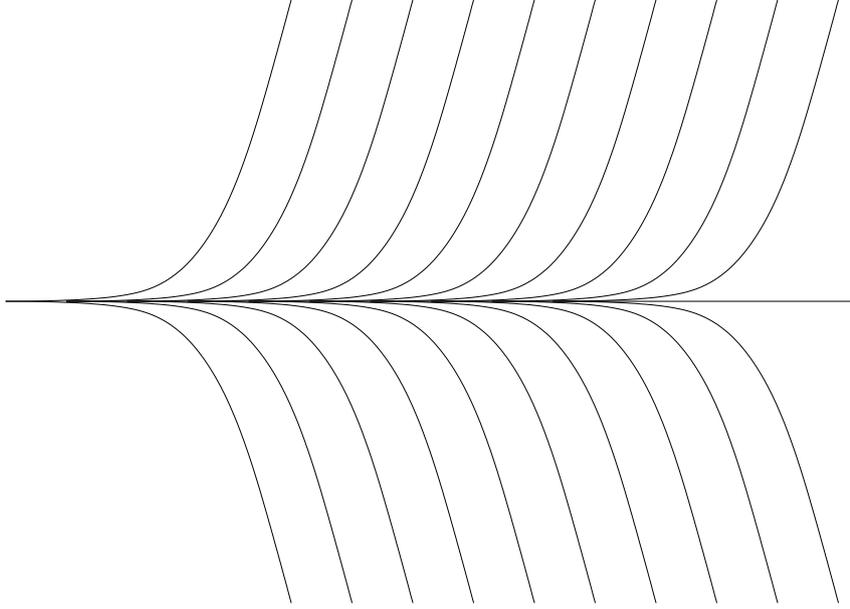


Figura 2.1: Foliación ramificada en el plano.

gráficos de L_x y $-L_x$, $x \in \mathbb{R}$.) Notemos que, tomando el producto cartesiano con \mathbb{R} , podemos extender este ejemplo a una foliación ramificada de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 . Observemos que si tomamos una sucesión $x_n \rightarrow +\infty$, la sucesión de hojas L_{x_n} converge uniformemente en compactos a la curva $\bar{L} = \mathbb{R} \times \{0\}$, pero esta última no forma parte de la foliación. Se dice que una foliación ramificada \mathcal{F} es *completa* si para toda sucesión $L_n \in \mathcal{F}$ que converge uniformemente en compactos a una superficie inmersa L , se cumple que $L \in \mathcal{F}$. Toda foliación ramificada \mathcal{F} admite una completación, i.e. otra foliación ramificada que la contiene y es completa. (cf. [2]). En el ejemplo anterior, se puede completar la foliación \mathcal{F} añadiendo la curva $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Levantamiento al cubrimiento universal. Sea $\mathcal{F} = \{L_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in J}$ una foliación ramificada en M que es tangente a una distribución de planos E y sea $\tilde{M} \rightarrow M$ el cubrimiento universal. Usaremos la notación \tilde{X} para denotar un levantamiento de X a \tilde{M} , cualquiera sea el objeto X que estemos considerando. Vamos a construir un levantamiento de la foliación ramificada \mathcal{F} al cubrimiento universal de M . Si para cada $\alpha \in J$ denotamos por $\tilde{L}_\alpha \rightarrow L_\alpha$ al cubrimiento universal de la hoja L_α , observemos que la composición $\tilde{L}_\alpha \rightarrow L_\alpha \rightarrow M$ admite un levantamiento $\tilde{L}_\alpha \rightarrow \tilde{M}$, que diremos que es *un levantamiento de la hoja L_α* . Consideremos la familia $\tilde{\mathcal{F}}$ de todos los levantamientos de todas las hojas L_α , o sea:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{L} \rightarrow \tilde{M} : \tilde{L} \text{ es un levantamiento de una hoja } L \in \mathcal{F}\}.$$

Entonces, es fácil verificar que $\tilde{\mathcal{F}}$ es una foliación ramificada en \tilde{M} , tangente a la distribución \tilde{E} , que además es invariante por transformaciones de cubrimiento.

Diremos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es el levantamiento de \mathcal{F} al cubrimiento universal. Observemos también que esta foliación es completa cuando \mathcal{F} lo es.

Teorema 2.1.3 (Burago-Ivanov I). *Sea M una 3-variedad cerrada y orientable y sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico de clase C^1 , tal que los fibrados E^s , E^c y E^u son orientables y su orientación es preservada por Df . Entonces, existen foliaciones ramificadas f -invariantes W^{cs} y W^{cu} , tangentes a E^{cs} y E^{cu} respectivamente. Además, estas foliaciones ramificadas pueden suponerse completas, y son invariantes por cualquier difeomorfismo C^1 en M que preserve sus distribuciones tangentes, preservando además su orientación.*

Hagamos una aclaración: Además de la hiperbolicidad parcial de f , este teorema tiene como hipótesis que los tres fibrados E^s , E^c y E^u son orientables y su orientación es preservada por Df (y que M es orientable, como siempre!). Cuando un difeomorfismo parcialmente hiperbólico satisface esta propiedad, diremos que *satisface la hipótesis de orientabilidad del teorema de 2.1.3*. Observemos que la orientabilidad de E^u es equivalente a la del campo de planos E^{cs} , y lo mismo para E^s y E^{cu} . La orientabilidad de las distribuciones centro-estable y centro-inestable es una condición trivialmente necesaria para la existencia de las foliaciones ramificadas W^{cs} y W^{cu} , porque en la definición de foliación ramificada está explicitado que cada hoja de la foliación es orientable (y esto último se utiliza para poder decir que las hojas no tienen cruces topológicos). Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que no satisface la hipótesis de orientabilidad del teorema 2.1.3, siempre podemos tomar un cubrimiento finito $\hat{M} \rightarrow M$ tal que los levantamientos \hat{E}^s , \hat{E}^c y \hat{E}^u son orientables y, como el cubrimiento es finito, siempre existe una potencia $F = f^n$ de nuestro difeomorfismo que admite un levantamiento $\hat{F} = \hat{f}^n : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ y que preserva la orientación de los tres fibrados. Este difeomorfismo es parcialmente hiperbólico en \hat{M} y cumple la hipótesis de orientabilidad del teorema 2.1.3, y por lo tanto admite foliaciones ramificadas centro-estable y centro-inestable. Observemos que no podemos garantizar que estas foliaciones \hat{W}^{cs} y \hat{W}^{cu} descendan por el cubrimiento a foliaciones ramificadas invariantes para F . Las transformaciones de cubrimiento $\tau \in \text{Aut}(\hat{M})$ preservan la distribución centro estable de \hat{E}^{cs} y preservan la orientación de \hat{M} , pero no sabemos si preservan la orientación de \hat{E}^{cs} y por eso no podemos saber si \hat{W}^{cs} es invariante por transformaciones de cubrimiento. Lo mismo vale para \hat{W}^{cu} . Volveremos sobre este punto más adelante, cuando estudiemos el parcialmente hiperbólicos en fibrados por círculos sobre superficies.

Teorema 2.1.4 (Burago-Ivanov II). *Sea M una 3-variedad cerrada y orientable y sea \mathcal{F} una foliación ramificada en M tangente a una distribución continua E . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una foliación \mathcal{F}_ε , de clase C^0 con hojas C^1 , tal que el ángulo entre los planos $E(x)$ y $T\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ es menor que ε , $\forall x \in M$. Además, existe un mapa continuo y sobreyectivo $h_\varepsilon : M \rightarrow M$ tal que $\text{dist}(h_\varepsilon, \text{id}_M) < \varepsilon$, h_ε lleva hojas de \mathcal{F}_ε en hojas de \mathcal{F} y cada restricción $h_\varepsilon : \mathcal{F}_\varepsilon(x) \rightarrow h_\varepsilon(\mathcal{F}_\varepsilon(x))$ es un difeomorfismo local C^1 con la topología intrínseca de cada hoja.*

2.1.2. Topología de las foliaciones invariantes.

Nuestro objetivo en esta sección es enunciar algunas propiedades bastante generales acerca de la topología de las foliaciones (ramificadas) invariantes de

un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Comenzaremos con las foliaciones estable e inestable.

Foliaciones estable e inestable.

En primer lugar, observemos que las foliaciones estable e inestable no tienen curvas cerradas.

Proposición 2.1.5. *Las foliaciones estable e inestable de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico no tienen hojas compactas.*

Demostración. Para probar esto, sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y asumamos que existe una curva cerrada simple γ tangente a W^s (un argumento completamente simétrico funcionará para W^u). Entonces, $f^n(\gamma)$ es una sucesión de curvas cerradas tangentes a W^s , cuya longitud converge a cero cuando $n \rightarrow +\infty$. Esto implica la existencia de una singularidad en la foliación W^s , lo que contradice el hecho de que E^s sea integrable a una foliación por curvas. \square

A continuación haremos una digresión acerca de foliaciones de dimensión dos en 3-variedades.

Componentes de Reeb y teorema de Novikov.

Sea M una 3-variedad y \mathcal{F} una foliación C^0 con hojas C^1 , de dimensión dos. Una *componente de Reeb* de \mathcal{F} es un toro sólido en M , compacto y saturado por hojas, donde la foliación es homeomorfa a la foliación de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ dada por el borde $\partial\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ y los gráficos de las funciones

$$x \mapsto cte + \frac{1}{1 - |x|^2} \pmod{1}$$

definidas en el interior de \mathbf{D}^2 . Aquí hemos tomado $\mathbf{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ y $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Proposición 2.1.6. *Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión dos que tiene una componente de Reeb, y sea W una foliación por curvas que es transversal a \mathcal{F} . Entonces W tiene una hoja cerrada.*

Demostración. Daremos sólo un esbozo de la demostración. Asumamos que W es orientable, lo que quiere decir que W coincide con las órbitas de un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$. Sea $T \subset M$ el toro que es borde de la componente de Reeb. La condición de transversalidad entre \mathcal{F} y W implica que todas las órbitas de este flujo o bien son entrantes al toro sólido, o bien salientes. Asumamos que son entrantes. Una vez que una órbita de ϕ_t corta a una hoja S del interior de la componente de Reeb, la geometría de ésta asegura que esa órbita volverá a cortar a S en el futuro. Más aún, la imagen de S por el mapa de primer retorno del flujo está contenida en un compacto dentro de S . Como S es homeomorfo a un disco, el *teorema del punto fijo de Brouwer* asegura la existencia de una órbita cerrada del flujo. \square

Enunciaremos a continuación el *teorema de la hoja compacta de Novikov*. Por una prueba, referimos al lector interesado a [14].

Teorema 2.1.7 (Teorema de la hoja compacta de Novikov). *Sea M una 3-variedad cerrada y \mathcal{F} una foliación de dimensión dos (de clase C^0 con hojas C^1). Si existe una curva cerrada simple transversal a la foliación y homotópicamente nula, entonces \mathcal{F} tiene una hoja compacta, que además es el borde de una componente de Reeb.*

Diremos que una curva cerrada simple que es transversal a una foliación \mathcal{F} es un *ciclo transversal* a \mathcal{F} . Observemos que toda foliación de dimensión dos en una variedad compacta siempre admite un ciclo transversal. Si el espacio ambiente es la esfera \mathbf{S}^3 entonces \mathcal{F} siempre admite ciclos transversales contractibles. De los dos resultados anteriores podemos deducir lo siguiente:

Proposición 2.1.8. *Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión dos en una 3-variedad cerrada. Si existe un ciclo transversal a \mathcal{F} y contractible, entonces toda foliación de dimensión uno que es transversal a \mathcal{F} tiene una hoja cerrada. En particular, toda foliación por curvas de la esfera \mathbf{S}^3 que sea transversal a una foliación de dimensión dos tiene una hoja cerrada.*

Foliaciones centro-estable y centro-inestable.

Sea $f : M \rightarrow M$ un parcialmente hiperbólico que satisface la hipótesis de orientabilidad del teorema 2.1.3 y sea W^{cs} la foliación ramificada centro-estable asegurada por el teorema. El teorema 2.1.4 asegura la existencia de una foliación \mathcal{F}_ε que aproxima a la anterior, en el sentido de que el ángulo entre $T\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ y $E^{cs}(x)$ es menor que un cierto ε arbitrario y prefijado. Esta foliación no es f -invariante, pero permite decir algunas cosas acerca del mapa f . En particular, el siguiente resultado es muy útil:

Proposición 2.1.9. *No existe una curva cerrada simple en M que sea contractible y transversal a la distribución centro-estable o centro-inestable.*

Demostración. Haremos el argumento sólo para la distribución centro-estable. Supongamos que existe una curva cerrada simple contractible que es transversal a E^{cs} . Si tomamos el parámetro ε suficientemente pequeño, podemos suponer que esta curva también es un ciclo transversal contractible para \mathcal{F}_ε , y que la foliación inestable W^u es transversal a \mathcal{F}_ε . La proposición 2.1.8 implica entonces que existe una curva inestable cerrada, hecho que entra en contradicción con las propiedades básicas de esta foliación. \square

Observación 2.1.1. Tampoco existe una curva cerrada simple en el cubrimiento universal \tilde{M} de M que sea transversal a \tilde{E}^{cs} o a \tilde{E}^{cu} . Este hecho, que se deduce trivialmente de la proposición anterior, lo usaremos más adelante para entender como es el espacio de hojas de la foliación ramificada en el cubrimiento universal.

Observación 2.1.2. La proposición anterior implica directamente que no existen parcialmente hiperbólicos en la esfera \mathbf{S}^3 . (cf. sección 2.2)

Otro resultado que queremos comentar es acerca de la topología de las hojas centro-estables(inestables). La foliación W^{cs} puede tener hojas compactas, como ocurre en el ejemplo dado en [5]. Si T es una hoja compacta de la foliación, ésta debe ser difeomorfa a un toro, porque admite campos de rectas tangentes, a saber, $E^s|_T$ y $E^c|_T$. Usando argumentos similares a los anteriores se puede

probar que T necesariamente es un toro *esencial*, entendiendo por esto que el morfismo $\Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(M)$ inducido por la inclusión es inyectivo. Queremos citar el siguiente resultado de [4], que impone grandes restricciones a la topología de M en el caso de que f admita un toro centro-estable.

Teorema 2.1.10 (Rodriguez Hertz-Rodriguez Hertz-Ures). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Si existe un toro f -invariante tangente a la distribución centro-estable, entonces M admite una estructura de fibrado sobre el círculo \mathbf{S}^1 cuyas fibras son toros.*

2.2. Sistemas parcialmente hiperbólicos en fibrados por círculos sobre superficies.

Sea $\pi : M \rightarrow \Sigma$ un fibrado por círculos sobre una superficie. De ahora en más trabajaremos bajo la hipótesis general de que M y Σ son variedades cerradas y orientables. El objetivo central de este trabajo es estudiar la siguiente pregunta:

Pregunta. *Cuáles son los fibrados por círculos sobre superficies que admiten un difeomorfismo parcialmente hiperbólico?*

Estudiaremos esta pregunta en función de la clasificación topológica de estos espacios que hemos desarrollado en el primer capítulo. Recordemos que si M es una 3-variedad que admite una estructura de fibrado por círculos sobre una superficie Σ en las hipótesis que estamos considerando, entonces esta variedad está únicamente determinada, a menos de difeomorfismos, por el género de Σ y el número de Euler del fibrado. A continuación enunciaremos que es lo que se conoce hasta el momento de este problema.

2.2.1. Fibrados con base \mathbf{S}^2 .

El primer resultado que podemos citar en la dirección de responder esta pregunta aparece en el trabajo [2] de Burago e Ivanov del año 2008, y es una obstrucción topológica para la existencia de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en 3-variedades, que en particular implica la no existencia de estos mapas en fibrados cuya base es la esfera \mathbf{S}^2 .

Teorema 2.2.1 (Burago-Ivanov, [2]). *Los fibrados $M \rightarrow \mathbf{S}^2$ no admiten sistemas parcialmente hiperbólicos.*

Comentaremos algo acerca de la demostración de este teorema. Primero que nada veamos que una 3-variedad cuyo grupo fundamental es finito no puede admitir un sistema parcialmente hiperbólico. Para esto usaremos la proposición 2.1.9, que aparece enunciada como lema 2.3 en [2] y que dice que no puede existir en M una curva cerrada simple contractible y transversal a la distribución centro-estable de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Asumamos que $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico en una 3-variedad con grupo fundamental finito, y sea γ una curva cerrada simple en M transversal a la distribución centro-estable de f . Como $\Pi_1(M)$ es finito existe una potencia γ^n de esta curva que es nula y, por lo tanto, existe una curva cerrada simple en M que es

homotópicamente trivial (homotópica a γ^n) y transversal a la distribución centro-estable, hecho que contradice la proposición 2.1.9. Esto implica que no existen difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en fibrados $M \rightarrow \mathbf{S}^2$ con número de Euler no nulo, ya que éstos tienen grupo fundamental finito (cf. sección 1.3). En el trabajo [2] se prueba que si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico en una 3-variedad cuyo grupo fundamental es abeliano, entonces el mapa $f_* : H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$ inducido por f es una *transformación lineal parcialmente hiperbólica*, entendiéndose por esto que f_* tiene un valor propio de módulo mayor que 1 y otro de módulo menor que 1. Esto permite ver que $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ tampoco admite sistemas parcialmente hiperbólicos, ya que $H_1(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (y también permite explicar el caso anterior, ya que si $\Pi_1(M)$ es finito entonces $H^1(M; \mathbb{R}) = \{0\}$.)

2.2.2. Fibrados con base \mathbf{T}^2

Cuando la base del fibrado es el toro \mathbf{T}^2 tenemos que:

Proposición 2.2.2. *Todo fibrado $M \rightarrow \mathbf{T}^2$ admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico.*

No es difícil construir ejemplos de parcialmente hiperbólicos en estos fibrados. Más aún, existe una clasificación topológica de estos difeomorfismos, que se puede encontrar en el trabajo [9]. Referimos al lector interesado a [8].

2.2.3. Fibrados con base Σ de género ≥ 2 .

Es un hecho conocido que si dotamos a la superficie Σ de una métrica riemanniana de curvatura negativa, entonces el flujo geodésico $\phi_t : T^1\Sigma \rightarrow T^1\Sigma$ es un flujo de Anosov, y por lo tanto el difeomorfismo $f = \phi_1$ es parcialmente hiperbólico. Más aún, si M es otro fibrado tal que $e(M)$ es un divisor de $\chi(\Sigma)$ entonces sabemos que existe un cubrimiento $M \rightarrow T^1\Sigma$, que nos permite levantar el campo geodésico en $T^1\Sigma$ a un campo en M que genera un flujo de Anosov, y por lo tanto M también admite un sistema parcialmente hiperbólico. En un conocido trabajo (E. Ghys, [6]) se prueba que un fibrado por círculos sobre una superficie de género ≥ 2 admite un flujo de Anosov si y sólo si $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$, y además ese flujo es transitivo y topológicamente conjugado a un levantamiento del flujo geodésico en $T^1\Sigma$. De modo que el problema de decidir si un fibrado por círculos sobre una superficie de género mayor a uno admite un sistema parcialmente hiperbólico se reduce al caso en que $e(M)$ no divide a $\chi(\Sigma)$. Si bien no conocemos una respuesta general para esta pregunta, queremos presentar un resultado que vale adicionando la hipótesis dinámica de transitividad.

Teorema 2.2.3. *Sean Σ una superficie cerrada, orientable, de género ≥ 2 , y sea $M \rightarrow \Sigma$ un fibrado por círculos, orientable. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- M admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico transitivo;
- $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$;
- M admite un flujo de Anosov.

En función del resultado que hemos mencionado previamente acerca de flujos de Anosov en estos espacios, para probar este teorema sólo resta ver que si M admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y transitivo entonces $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$. El objetivo central de este trabajo es probar esto, y nos ocupará el resto del capítulo.

2.3. Teorema central

Queremos probar el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1. *Sean Σ una superficie cerrada, orientable, de género ≥ 2 , y sea $M \rightarrow \Sigma$ un fibrado por círculos, orientable. Si existe un difeomorfismo f parcialmente hiperbólico y transitivo en M , entonces $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$.*

En la siguiente subsección vamos a enunciar algunos resultados preliminares que utilizaremos en la prueba. La prueba del teorema vendrá en la última subsección del trabajo.

2.3.1. Preliminares

Horizontalidad y verticalidad de las hojas de una foliación.

Sea $\pi : M \rightarrow \Sigma$ un fibrado por círculos sobre una superficie, y sea $L \subset M$ una superficie inmersa de clase C^1 , orientable, sin borde y completa. Diremos que L es *horizontal* si es transversal a cada fibra que intersecta, y que es *vertical* si contiene a cada fibra que intersecta. Observemos que una superficie L es horizontal si y sólo si $T_p M = T_p L \oplus \ker(d_p \pi)$ para todo punto $p \in M$, y que es vertical si y sólo si existe una curva $\alpha \subset \Sigma$ tal que $L = \pi^{-1}(\alpha)$. Diremos que una superficie $L \subset M$ es *homotópicamente vertical* si existe un camino continuo de inmersiones C^1 entre $L \hookrightarrow M$ y una superficie vertical (o sea, L es isotópica a una superficie vertical). Si L es una superficie en las hipótesis que estamos considerando (completa, orientable, sin borde) y horizontal o vertical, no es difícil probar que L debe ser *esencial* (o sea, $\Pi_1(L) \rightarrow \Pi_1(M)$ es inyectivo).

El siguiente teorema que citaremos es debido a Brittenham, y es una generalización de un teorema previo atribuido a Thurston. Esta versión del teorema la hemos tomado de [3], pág. 178, pero la hemos adaptado a nuestro contexto.

Teorema 2.3.2 (Brittenham, Thurston). *Sea \mathcal{F} una foliación en M , de clase C^0 con hojas C^1 , donde $\pi : M \rightarrow \Sigma$ es un fibrado por círculos sobre una superficie. Si ninguna hoja de \mathcal{F} es un toro, entonces la foliación \mathcal{F} es isotópica a otra foliación que cumple que cada una de sus hojas es o bien vertical, o bien horizontal.*

Observación 2.3.1. En el enunciado anterior, una isotopía de la foliación \mathcal{F} es un camino $\mathcal{F}_t = H_t(\mathcal{F})$ de foliaciones C^0 con hojas C^1 , donde $H_t : M \rightarrow M$ es una homotopía (continua) tal que:

- $H_0 = \text{id}_M$;
- $H_t : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo, que es de clase C^1 cuando se restringe a cada hoja de \mathcal{F} .

En la referencia que hemos dado el teorema se enuncia para *foliaciones taut*. Si bien no explicaremos que es este concepto, queremos aclarar que es una propiedad implicada por la no existencia de toros en la foliación.

Espacio de hojas de una foliación ramificada.

Nos interesa ahora describir cómo es el *espacio de la hojas* de una foliación ramificada. Sea \mathcal{F} una foliación ramificada en \mathbb{R}^3 . Dada una hoja L de esta foliación consideraremos un punto $p \in L$ y un segmento abierto J , transversal a la foliación y que pasa por p . Sea $N(p, J)$ el conjunto de todas las hojas de \mathcal{F} que cortan a J . Es fácil ver que el conjunto

$$\{N(p, J) : p \in \mathbb{R}^3, J \text{ arco trasversal a } \mathcal{F}\}$$

forma una base de entornos para una topología en \mathcal{F} , y que con esta topología el espacio de hojas es una 1-variedad, no necesariamente Hausdorff.

Proposición 2.3.3. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que admite una foliación ramificada centro-estable W^{cs} , y sea \tilde{W}^{cs} su levantamiento al cubrimiento universal \tilde{M} . Entonces, el espacio de hojas de la foliación \tilde{W}^{cs} es una 1-variedad simplemente conexa, no necesariamente Hausdorff.*

Demostración. Hemos visto anteriormente que no puede existir una curva cerrada simple en \tilde{M} que sea transversal a \tilde{W}^{cs} , ya que esto implicaría la existencia de una componente de Reeb para la foliación. Esto quiere decir que el espacio de hojas es simplemente conexo. \square

Los dos teoremas que enunciaremos a continuación serán utilizados más adelante.

Teorema 2.3.4 (Sacksteder, tomado de [1], pág. 577). *Sean X una 1-variedad no necesariamente Hausdorff y Γ el grupo fundamental de una 3-variedad cerrada. Si existe una acción de Γ en X tal que para todo elemento $\gamma \in \Gamma$ se verifica que o bien $\text{Fix}(\gamma) = X$, o bien $\text{Fix}(\gamma) = \emptyset$, entonces X es Hausdorff.*

Teorema 2.3.5 (Hölder, tomado de [13]). *Sea Γ es un grupo que actúa en \mathbb{R} . Si $\text{Fix}(\gamma) = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces Γ es conmutativo.*

2.3.2. Demostración del teorema 2.3.1

Desglosaremos la demostración del teorema en una serie de proposiciones y lemas. Comenzaremos con la siguiente proposición, que es una aplicación de lo visto en la sección 1.4.

Proposición 2.3.6. *Si M admite un difeomorfismo parcialmente hiperbólico tal que el fibrado estable es orientable y homotópico a una distribución horizontal, entonces $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$.*

Demostración. Sea X^s un campo de vectores que genera la distribución E^s , es decir, $E^s(p) = \text{span}\{X^s(p)\}$ para todo $p \in M$. Este campo es homotópico a un campo de vectores horizontales en el fibrado M y por lo tanto $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$, según lo visto en la proposición 1.4.7. \square

Corolario 2.3.7. *Si la distribución centro-estable de f es homotópica a una distribución horizontal y E^s es orientable, entonces $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$.*

Observemos que si $f : M \rightarrow M$ es un fibrado por círculos sobre una superficie en las condiciones que estamos considerando, no pueden existir superficies cerradas f -invariantes y tangentes a la distribución centro-estable. Esto es porque, según el teorema 2.1.10, si W^{cs} tiene una hoja cerrada esta debe ser un toro y la variedad M es un fibrado sobre el círculo \mathbf{S}^1 cuyas fibras son toros. Ahora bien, el único fibrado por círculos sobre una superficie que además es un fibrado sobre \mathbf{S}^1 es $M = \Sigma \times \mathbf{S}^1$ con la proyección sobre \mathbf{S}^1 , y como estamos asumiendo que $\text{gen}(\Sigma) \geq 2$ entonces concluimos que no pueden existir hojas cerradas.

Proposición 2.3.8. *Sea f un parcialmente hiperbólico que satisface la hipótesis de orientabilidad del teorema 2.1.3. Si la foliación ramificada centro-estable de f no tiene hojas homotópicamente verticales, entonces la distribución centro-estable de f es homotópica a una distribución horizontal.*

Demostración. Sea W^{cs} la foliación ramificada asociada a f , que sabemos que no tiene hojas cerradas. El teorema 2.1.4 asegura que esta W^{cs} se puede aproximar por una foliación (no ramificada) en el siguiente sentido: Fijado un parámetro $\varepsilon > 0$, existen una foliación \mathcal{F}_ε en M y un mapa $h_\varepsilon : M \rightarrow M$ tales que:

- Si llamamos E a la distribución tangente a \mathcal{F}_ε se cumple que $\text{dist}(E(p), E^{cs}(p)) < \varepsilon$, $\forall p \in M$. Recordemos que \mathcal{F}_ε es una foliación de clase C^0 cuyas hojas son superficies C^1 ;
- El mapa h_ε es continuo, cumple que $\text{dist}(h_\varepsilon, \text{id}_M) < \varepsilon$ uniformemente, y lleva hojas de \mathcal{F}_ε en hojas de W^{cs} . Además, la restricción de h_ε a cada hoja de \mathcal{F}_ε es localmente un difeomorfismo de clase C^1 .

Es fácil ver que la foliación \mathcal{F}_ε no puede tener hojas cerradas, ya que esto daría hojas cerradas para W^{cs} .

Afirmación. *La foliación \mathcal{F}_ε no tiene hojas homotópicamente verticales, y por lo tanto es homotópica a una foliación horizontal.*

Para probar esta afirmación asumamos por el contrario que existe una hoja homotópicamente vertical L de \mathcal{F}_ε . Sea \tilde{L} su levantamiento al cubrimiento universal y sea c una transformación de cubrimiento en \tilde{M} asociada a un generador del centralizador de $\Pi_1(M)$. Observemos que una superficie inmersa $S \subset M$ es homotópicamente vertical si y sólo si se cumple que $c(\tilde{S}) = \tilde{S}$. Sea $\tilde{h}_\varepsilon : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ el levantamiento de h_ε que satisface que $\text{dist}(\tilde{h}_\varepsilon, \text{id}_{\tilde{M}}) < \varepsilon$. Este levantamiento conmuta con las transformaciones de cubrimiento de \tilde{M} y tenemos entonces que:

$$c(\tilde{h}_\varepsilon(\tilde{L})) = \tilde{h}_\varepsilon(c(\tilde{L})) = \tilde{h}_\varepsilon(\tilde{L})$$

y por lo tanto $\tilde{h}_\varepsilon(\tilde{L})$ es una hoja vertical de la foliación ramificada W^{cs} , lo que contradice nuestras hipótesis. El hecho de que \mathcal{F}_ε es homotópica a una foliación horizontal se deduce de del teorema 2.3.2.

Para concluir observemos que si tomamos el parámetro ε suficientemente pequeño tenemos que la distribución E^{cs} es homotópica a la distribución $E = T\mathcal{F}_\varepsilon$ y esta última, como consecuencia de la afirmación anterior, es homotópica a una distribución horizontal. \square

Sea f un difeomorfismo parcialmente hiperbólico en un fibrado por círculos sobre una superficie de género ≥ 2 que admite una foliación ramificada centro-estable, y sea $\Lambda^{cs} \subset M$ el conjunto formado por la unión de todas las hojas homotópicamente verticales.

Lema 2.3.9. Λ^{cs} es un compacto, f -invariante, y $\Lambda^{cs} \neq M$.

Demostración. Hemos visto en el primer capítulo que todas las fibras de un fibrado son homotópicas, y esta clase de homotopía, que llamaremos c , es un generador del centralizador de $\Pi_1(M)$ que es isomorfo al grupo cíclico infinito. Si una hoja L de W^{cs} es homotópicamente vertical, ésta contiene una curva cerrada simple que es homotópica a una fibra de M y, más aún, como L no puede ser una superficie cerrada entonces es homeomorfa a un cilindro y su grupo fundamental es generado por c . O sea que el grupo fundamental de esta hoja coincide con el centralizador de $\Pi_1(M)$. Recíprocamente, si una hoja L contiene a una curva homotópica a c que además genera su grupo fundamental, esto quiere decir que la hoja es homotópicamente vertical. O sea, las hojas homotópicamente verticales de W^{cs} quedan caracterizadas como aquellas que su grupo fundamental está generado por una curva homotópica a c . Como el morfismo $f_* : \Pi_1(M) \rightarrow \Pi_1(M)$ preserva el centralizador del grupo, entonces f lleva hojas homotópicamente verticales en hojas homotópicamente verticales. Como además la foliación ramificada W^{cs} es f -invariante, entonces deducimos que Λ^{cs} es f -invariante.

Para probar que Λ^{cs} es cerrado (y por lo tanto compacto), veremos que su levantamiento $\tilde{\Lambda}^{cs}$ al cubrimiento universal $q : \tilde{M} \rightarrow M$ es cerrado. Si x_n es una sucesión en $\tilde{\Lambda}^{cs}$ que converge a un punto x , sea L_n una hoja de $\tilde{\Lambda}^{cs}$ que contiene a x_n , y sea L una hoja de \tilde{W}^{cs} que contiene a x y tal que $L_n \rightarrow L$ uniformemente en compactos (garantizada en la definición de foliación ramificada). Si denotamos por c a un generador del centralizador de $\Pi_1(M)$, su acción en \tilde{M} por transformaciones de cubrimiento cumple que $c(L_n) = L_n, \forall n$, y por lo tanto $c(L) = L$, ya que la acción de $\Pi_1(M)$ por transformaciones de cubrimiento es continua en el espacio de hojas. Esto quiere decir que L es una hoja de $\tilde{\Lambda}^{cs}$, y entonces $x \in \tilde{\Lambda}^{cs}$.

Para probar que $\Lambda^{cs} \neq M$, consideremos el espacio X de las hojas de la foliación ramificada \tilde{W}^{cs} en el cubrimiento universal. El espacio X es una 1-variedad simplemente conexa, no necesariamente Hausdorff, donde actúa el grupo fundamental de M . Observemos que el conjunto $\tilde{\Lambda}^{cs} \subset X$ coincide con el conjunto de los puntos fijos de los elementos del centralizador de $\Pi_1(M)$. Supongamos que $\tilde{\Lambda}^{cs} = X$. Afirmamos que si $d \in \Pi_1(M)$ es un elemento que no está en el centralizador, entonces $\text{Fix}(d) = \emptyset$. En caso contrario, si L es una hoja que es fijada por la transformación d , como d conmuta con c (el generador del centralizador) entonces tendríamos que el grupo $\Gamma = \langle c, d \rangle$ generado por estos dos elementos es conmutativo y es un subgrupo del grupo fundamental de la hoja $q(L) \subset M$. Esto quiere decir que esta hoja debe ser un toro, y esto contradice el hecho de que W^{cs} no tiene toros. Se verifica entonces la hipótesis del teorema 2.3.4 de que el conjunto de puntos fijos de cualquier transformación de cubrimiento o bien es vacío, o bien coincide con X . Esto implica que X es una 1-variedad Hausdorff, y como es simplemente conexa entonces es homeomorfa a \mathbb{R} . La acción de $\Pi_1(M)$ en X induce, pasando el centralizador al cociente, una acción de $\Pi_1(\Sigma)$ en la recta, donde cada elemento actúa sin puntos fijos. El teorema 2.3.5 implica entonces que $\Pi_1(\Sigma)$ es un grupo conmutativo, contradiciendo el hecho de que $\text{gen}(\Sigma) \geq 2$. \square

Lema 2.3.10. *El conjunto Λ^{cs} , si es no vacío, es un repulsor para el mapa f .*

Demostración. Dado un punto $p \in M$, denotaremos por $W_\varepsilon^u(p)$ al entorno de tamaño ε de p por dentro de su hoja inestable, con la métrica heredada de M . Si Λ^{cs} es no vacío, sea

$$U_\varepsilon = \bigcup_{p \in \Lambda^{cs}} W_\varepsilon^u(p).$$

La hiperbolicidad parcial del mapa f implica, a menos de cambiar la métrica de M si es necesario, que existe un $\mu < 1$ tal que $f^{-1}(W_\varepsilon^u(p)) \subset W_{\mu\varepsilon}^u(f^{-1}(p))$. Afirmamos que U_ε es abierto. Asumiendo esto, observemos que $f^{-1}(U_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$ y podemos concluir la tesis del lema. Ahora bien, para ver que U_ε es abierto recordemos que Λ^{cs} es saturado por hojas centro-estables y por lo tanto, dado un punto $p \in \Lambda^{cs}$ podemos escoger un pequeño disco D contenido en una hoja centro-estable de Λ^{cs} y que contiene a p . Por la estructura de producto local tenemos que el conjunto $\bigcup_{y \in D} W_\varepsilon^u(y)$ es abierto, lo que nos permite escribir al conjunto U_ε como unión de abiertos. \square

Teorema 2.3.1. Probaremos ahora nuestro teorema central, que afirma que si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico transitivo en un fibrado por círculos sobre una superficie Σ de género ≥ 2 , entonces $e(M)$ divide a $\chi(\Sigma)$. La clave de todo esto está en demostrar que la distribución E^{cs} de f es homotópicamente horizontal. Si el mapa f cumple la hipótesis de orientabilidad del teorema 2.1.3, a saber, que E^s , E^c y E^u son orientables y su orientación es preservada por Df , entonces el lema 2.3.10 implica que f no puede tener hojas verticales (si no, el mapa f tendría un repulsor y esto contradice su transitividad) y entonces el teorema se deduce como aplicación directa de las proposiciones 2.3.8 y 2.3.6. De modo que para probar el teorema sólo resta ver que el mapa satisface la hipótesis de orientabilidad.

Sea $q : \hat{M} \rightarrow M$ un cubrimiento finito tal que al levantar las distribuciones estable, central e inestable de f estas quedan orientables. Llamaremos \hat{E}^s , \hat{E}^c y \hat{E}^u a estas distribuciones. Módulo tomar una potencia de f si es necesario, podemos asumir que existe un levantamiento $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ de f y que preserva la orientación de estas distribuciones. Este mapa \hat{f} (que es parcialmente hiperbólico) satisface la hipótesis del teorema 2.1.3, y por lo tanto admite una foliación ramificada centro estable \hat{W}^{cs} . Sea $\hat{\Lambda}^{cs} \subset \hat{M}$ el conjunto de las hojas verticales, tal como lo hemos definido en el lema 2.3.9. Si es no vacío, este conjunto un atractor para \hat{f} y por lo tanto su proyección $q(\hat{\Lambda}^{cs}) \subset M$ es un atractor para f , hecho que contradice la transitividad de este mapa. Por lo tanto, la foliación \hat{W}^{cs} no tiene hojas verticales. Aplicando la proposición 2.3.8 podemos ver que la distribución de planos \hat{E}^{cs} es homotópica a una distribución horizontal. Ahora bien, en el primer capítulo hemos visto que una distribución de planos horizontales siempre es orientable (esto se consigue tomando el *pull-back* de la orientación de la superficie por la proyección del fibrado) y por lo tanto, \hat{E}^{cs} también es orientable, ya que esta propiedad se preserva por homotopías. Retomaremos ahora una idea que hemos esbozado en la observación ?? en el primer capítulo. El cubrimiento $q : \hat{M} \rightarrow M$ es también un fibrado por círculos sobre una superficie $\hat{\Sigma}$, y existe

un cubrimiento $q_\Sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{q} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Sigma} & \xrightarrow{q_\Sigma} & \Sigma \end{array}$$

Sea $\tau : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ una transformación de cubrimiento. Observemos que, como el mapa \hat{f} es equivariante con respecto a las transformaciones de cubrimiento, entonces $D\tau$ preserva las distribuciones \hat{E}^s , \hat{E}^c , \hat{E}^u y las correspondientes distribuciones centro-estable y centro-inestable. Toda transformación de cubrimiento induce, al cocientar por las fibras, una transformación de cubrimiento $\tau_\Sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$, y se cumple que los siguientes enunciados son equivalentes:

- τ preserva la orientación de la distribución \hat{E}^{cs} ;
- τ preserva la orientación de la distribución \hat{E}^u ;
- τ_Σ preserva orientación.

Como Σ es orientable, entonces $\hat{\Sigma}$ es orientable y toda transformación de cubrimiento τ_Σ preserva orientación. Esto quiere decir las orientaciones de \hat{E}^{cs} y \hat{E}^u son preservadas por $D\tau$. Como todos estos argumentos son simétricos en las distribuciones centro-estables y centro-inestables, podemos concluir que $D\tau$ preserva las orientaciones de \hat{E}^s , \hat{E}^c y \hat{E}^u y, por lo tanto, las distribuciones originales E^s , E^c y E^u son orientables. \square

Bibliografía

- [1] BARBOT, T. Actions de groupes sur les 1-variétés non séparées et feuilletages de codimension un. *Ann. de la fac. de sci. de Toulouse* 7 (4) (1998), 559 – 597 – 407.
- [2] BURAGO, D., AND IVANOV, S. Partially hyperbolic diffeomorphisms of 3-manifolds with abelian fundamental groups. *Journal of Modern Dynamics* 2 (2008), 541 – 580.
- [3] CALEGARY, D. *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics. Clarendon Press - Oxford.
- [4] F. RODRIGUEZ HERTZ, M. R. H., AND URES, R. Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds. *Journal of Modern Dynamics* 5 (2011), 185 – 202.
- [5] F. RODRIGUEZ HERTZ, M. R. H., AND URES, R. A non-dynamically coherent example on t_3 . *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* (2015).
- [6] GHYS, E. Flots d'anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 4 (1984), 67 – 80.
- [7] GHYS, E. Groups acting on the circle. *L'Enseignement Mathématique* 47 (2001), 392 – 407.
- [8] HAMMERLINDL, A., AND POTRIE, R. Partial hyperbolicity and classification: A survey. *to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems*.
- [9] HAMMERLINDL, A., AND POTRIE, R. Poinwise partial hyperbolicity in three dimensional nilmanifolds. *Journal of the London Math. Society* 89 (2014), 853 – 875.
- [10] HATCHER, A. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*.
- [11] HATCHER, A. *Vector Bundles and K-Theory*.
- [12] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, vol. 54 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. Cambridge Univ. Press.
- [13] NAVAS, A. *Grupo de Homeomorfismos del Círculo*, vol. 13 of *Ensaio Matemáticos*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.
- [14] NOVIKOV, S. P. The topology of foliations. *Trudy Moskov. Mat. Obšč* 14 (1965), 248 – 278.