

Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores “Prof. Juan E. Pivel Devoto”

TESELACIONES EN EL PLANO HIPERBÓLICO

TRABAJO FINAL DEL

DIPLOMA EN MATEMÁTICA

MENCIÓN APLICACIONES

Realizado por

María Teresita Carrión Rebellato

Dirigido por

Rafael Potrie

ANEP – UDELAR

2016

Resumen

A diferencia de lo que ocurre en el plano euclidiano, en el *plano hiperbólico* existen infinitas *teselaciones regulares*. Mientras que el primero puede cubrirse con polígonos regulares iguales de tres, cuatro o seis lados, el plano hiperbólico, puede ser cubierto por polígonos regulares iguales de cualquier número de lados y teniendo además la posibilidad de elegir la cantidad de polígonos que concurren a cada vértice.

Esta es una de las consecuencias de la no unicidad de la recta paralela a otra por un punto.

Es que, en esta geometría, los ángulos interiores de los *triángulos hiperbólicos* no suman π y siempre es posible elegir un triángulo cuyos ángulos tengan cualquier medida, siempre que sumen menos que π . Una vez elegidos los ángulos, el triángulo queda determinado, porque todos los triángulos que tienen ángulos iguales son *isométricos*.

Esta particularidad hace que sea posible encontrar polígonos regulares cuyos ángulos interiores no tengan una medida predeterminada, como ocurre en el plano euclidiano, sino que en esta geometría existen polígonos regulares con la misma cantidad de lados y distintas medidas de sus ángulos. Pero lo que no se puede elegir es la medida de sus lados, ya que la misma queda determinada por los otros parámetros elegidos.

El punto clave en todo esto es el concepto de medida, es decir todo depende de la métrica que estemos considerando. La *métrica hiperbólica* no es la misma que la euclidiana y además depende del modelo que se utilice.

En este trabajo nos proponemos describir y justificar las propiedades básicas de la geometría hiperbólica trabajando con los modelos de Poincaré, para terminar con la construcción de una teselación en el disco hiperbólico.

Palabras claves:

Geometría hiperbólica, métrica, transformaciones de Möbius, razón doble, isometrías, teselaciones.

ÍNDICE

Introducción.....	4
Capítulo 1. Los modelos de la Geometría Hiperbólica.....	6
1.1 Modelo de Weierstrass.....	6
1.2 Modelo de Beltrami – Klein.....	7
1.3 El disco de Poincaré.....	8
1.4 El semiplano de Poincaré.....	9
Capítulo 2: Transformaciones de Möbius.....	10
2.1 Definición de transformación de Möbius.....	10
2.2 Transformaciones de Möbius elementales.....	11
2.3 Algunas propiedades de las transformaciones de Möbius.....	13
2.4 Razón doble de cuatro puntos.....	16
Capítulo 3: Modelo del semiplano de Poincaré.....	18
3.1 Métrica hiperbólica.....	18
3.2 Isometrías en H^2	20
3.3 Rectas hiperbólicas.....	22
3.4 Las simetrías.....	24
3.5 Ángulo de paralelismo.....	25
3.6 Triángulos hiperbólicos.....	28
Capítulo 4: El disco hiperbólico.....	32
4.1 Del semiplano al disco.....	32
4.2 Isometrías en D^2	33
Capítulo 5: Teselaciones en el disco.....	35
5.1 Polígono fundamental.....	35
5.2 Ejemplos.....	36
Bibliografía.....	37

INTRODUCCIÓN

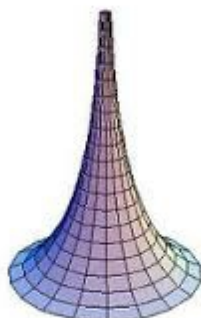
"Out of nothing I have created a new universe."

Bolya

La geometría hiperbólica nace en el siglo XIX de la mano de Bolyai, Gauss y Lobachevsky, como la primera geometría no euclidiana para dejar en evidencia la independencia del quinto postulado de Euclides.

Pero hoy en día, eso no es más que una anécdota histórica de cómo empezó a gestarse una nueva teoría matemática que daría mucho más de lo que seguramente se imaginaban aquellos quienes comenzaron su estudio.

Cuando en 1866, el italiano Eugenio Beltrami demostró que la geometría hiperbólica podía modelarse sobre la superficie llamada *pseudoesfera*, generada por la revolución de una curva llamada tractriz alrededor de su propia asíntota, se entendió que esta nueva teoría sería útil para describir la geometría de las superficies de curvatura constante negativa.

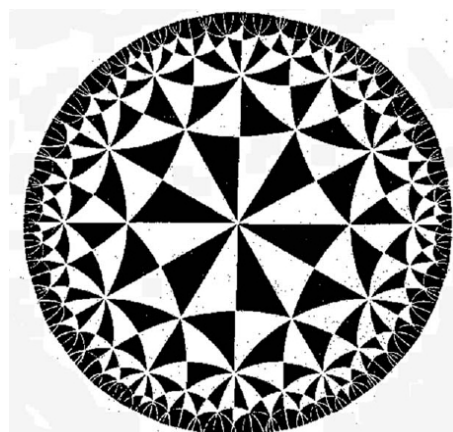


Pseudoesfera¹

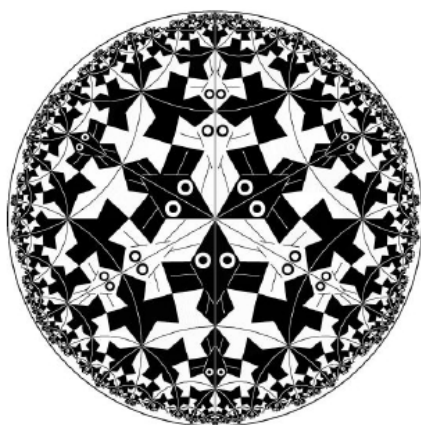
Debido a que la geometría de Euclides resultó insuficiente, ya que no refleja totalmente la realidad física, se necesitó una geometría para comprender la relatividad general de Einstein y nuevas formas para el universo y la mecánica celeste.

Y como si esto fuera poco, los modelos de Poincaré inspiraron a artistas como el holandés Maurits Escher, que obsesionado con representar el infinito, encontró una posible respuesta en un artículo del matemático Coxeter: "Crystal Symmetry and Its Generalizations" (1957) donde vio la siguiente ilustración:

¹ Extraído de <http://gaussianos.com/el-quinto-postulado/>



En la misma, se muestra una teselación del modelo del plano hiperbólico creado por Poincaré. Inspirado en esta imagen, Escher realizó la primera versión de *Círculo Límite*, que luego fue mejorando a medida que profundizó en el tema.



Círculo Límite I (1958)



Círculo Límite III (1959)

CAPÍTULO 1

LOS MODELOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

El quinto postulado de Euclides, en su versión moderna atribuida a Playfair (1748 - 1818), afirma la existencia y unicidad de la recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.

Durante muchos años, numerosos matemáticos intentaron, sin éxito, demostrar este postulado. Hasta que en el siglo XIX, el genio conjunto de Bolyai y Lobachevsky lograron convencerse de la existencia de otros sistemas, donde se cumplen los cuatro primeros axiomas, pero no el quinto.

La negación de este postulado da lugar a dos posibilidades: negar la existencia o negar la unicidad.

La negación de la existencia da lugar a la *Geometría Elíptica* y la negación de la unicidad, a la *Geometría Hiperbólica*.

La Geometría Hiperbólica, la primera geometría no euclidiana en aparecer, mantuvo a varios matemáticos trabajando en la construcción de esta nueva teoría, pero no se logró el total convencimiento hasta encontrar modelos que lo sustentaran. Pero, a falta de uno, se encontraron muchos modelos para representar una geometría donde “por lo menos existen dos rectas paralelas a una recta dada por un punto dado”.

A continuación describiremos brevemente, cuatro de esos modelos, que son equivalentes y complementarios ya que permiten trabajar con el plano hiperbólico desde diferentes ópticas, dependiendo de los objetivos planteados.

1.1 Modelo de Weierstrass.

El modelo de Weierstrass consiste en representar el plano hiperbólico por una superficie de ecuación: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $z > 0$ que es una de las dos hojas de un hiperboloide.

Las rectas de este modelo son las intersecciones del hiperboloide con planos determinados por el origen de coordenadas y dos puntos de la superficie. Dicha intersección es una rama de hipérbola.

Dos puntos cualesquiera de la superficie en cuestión nunca están alineados con el origen de coordenadas, por lo tanto determinan un plano, que a su vez, determina una recta del modelo. Se verifica entonces, el primer axioma de Euclides: “dos puntos distintos determinan una

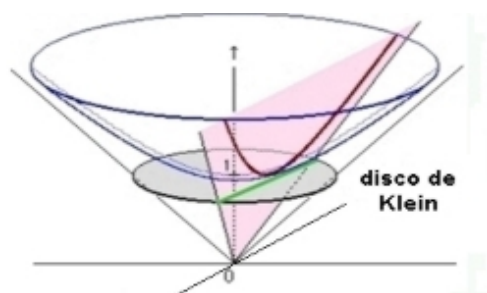
recta”.

Este modelo, aunque no fue el primero en el tiempo, permite entender el plano hiperbólico como si fuera una esfera de radio $\sqrt{-1}$, pues se trata de una superficie riemanniana de curvatura de Gauss constante -1, lo que facilita algunos cálculos.

En este modelo no se puede visualizar fácilmente la existencia de más de una paralela a una recta dada por un punto dado, para eso, lo más conveniente es pasar otros modelos.

1.2 Modelo de Beltrami-Klein

La proyección estereográfica del modelo de Weierstrass, desde el origen de coordenadas, sobre el plano $z = 1$, resulta ser un disco, como muestra la siguiente figura: ²



En este modelo, también conocido con el nombre de disco proyectivo, el plano se representa como el interior de un círculo y las rectas son cuerdas del mismo.

A cada punto del hiperboloide (x, y, z) le corresponde $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ en el disco y

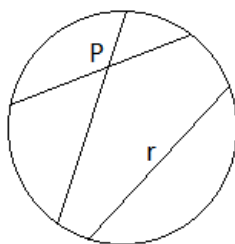
recíprocamente, a cada punto del disco $(x, y, 1)$ le corresponde

$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ en el hiperboloide.

Este modelo tiene la ventaja de que su conjunto de puntos es un subconjunto acotado del plano y las rectas se representan como segmentos, lo que fue útil para mostrar la existencia de más de una paralela a otra por un punto.

Vemos en la siguiente figura, dos rectas no secantes a la recta r por el punto P .

² Extraído de <http://mate.dm.uba.ar/~lechague/intmod.jpg>



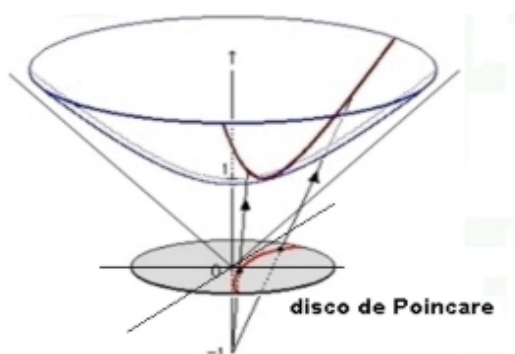
El problema en este modelo es la representación de los ángulos, ya que la representación euclidiana de éstos no corresponde con la medida según la métrica correspondiente.

1.3 El disco de Poincaré

En este modelo, también se representa al plano por medio del interior de un círculo, es decir presenta la misma ventaja que el modelo anterior, y se le suma que es un modelo *conforme*, es decir la representación euclidiana de los ángulos representa su medida real.

Las rectas son arcos de circunferencias ortogonales a la circunferencia borde y los diámetros de la misma.

Se puede obtener el disco de Poincaré a partir del modelo de Weierstrass por medio de una proyección estereográfica sobre el plano $z = 0$ desde el punto $(0, 0, -1)$, como se puede apreciar en la figura³



A cada punto (x, y, z) del hiperbolioide, le corresponde $\left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0\right)$ en el disco y

³ Extraído de <http://mate.dm.uba.ar/~lechague/intmod.jpg>

recíprocamente a cada punto $(x, y, 0)$ del disco, le corresponde

$\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right)$ en el hiperboloide.

Es el modelo más cómodo para estudiar propiedades de los polígonos regulares, tomando como mejor representante a aquél que está centrado en el origen.

1.4 El semiplano de Poincaré

El otro modelo de Poincaré, es el semiplano abierto. Tiene la ventaja de ser un modelo conforme, donde sus rectas son fáciles de dibujar, su métrica es la que tiene la expresión más sencilla y su grupo de isometrías directas se identifica con matrices invertibles de entradas reales.

El capítulo 3 de este trabajo está dedicado a este modelo.

CAPÍTULO 2

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Antes de describir los modelos de Poincaré, presentaremos a las que serán las *isometrías* en dicho modelo.

Definiremos en este capítulo las llamadas *transformaciones de Möbius* y veremos algunas de sus propiedades.

Trabajaremos con el *plano complejo*, pero para que las transformaciones de Möbius resulten *biyectivas*, debemos agregarle un elemento más a dicho conjunto, que denotaremos con el símbolo ∞ , el cual quedará determinado como la imagen de un complejo particular para cada transformación de Möbius y la preimagen de otro.

2.1 Definición de transformaciones de Möbius

Sea $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ al que llamaremos plano complejo ampliado. Las transformaciones de Möbius son funciones biyectivas de \mathbb{C}_∞ en sí mismo, definidas de la siguiente forma:

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Además,

$$\text{Si } c \neq 0 \Rightarrow f(\infty) = a/c \text{ y } f(-d/c) = \infty$$

$$\text{Si } c = 0 \Rightarrow f(\infty) = \infty$$

La condición $ad - bc \neq 0$ se exige para garantizar la biyectividad de la función, ya que si

$$ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow f(z) = \frac{a}{c} \text{ es una función constante.}$$

$$\text{Además, si } ad - bc = k \neq 0 \Rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \text{ tal que } a'd' - b'c' = 1$$

En tanto que sea posible, supondremos que $ad - bc = 1$, ya que por lo antes dicho, no quita generalidad.

Proposición 2.1

El conjunto de transformaciones de Möbius, junto a la composición de funciones forman grupo.

Llamemos \mathcal{M} al conjunto de todas las transformaciones de Möbius.

Dadas $f, g \in \mathcal{M}$, existe $g \circ f$ y $g \circ f \in \mathcal{M}$, evidenciando que la composición de funciones es cerrada en \mathcal{M} y como además, la composición de funciones es asociativa, sigue siendo asociativa en \mathcal{M} .

Por otra parte, tomando $a = c = 1$ y $b = d = 0$, vemos que la identidad es una transformación de Möbius.

También, toda $f \in \mathcal{M}$, es biyectiva, entonces existe su inversa f^{-1} y $f^{-1} \in \mathcal{M}$.

A cada elemento f de \mathcal{M} , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le asociamos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que es invertible porque $ad - bc = 1$.

Se puede probar que a la inversa de f le corresponde la inversa de A , que a la composición de dos transformaciones de Möbius le corresponde el producto de las matrices y que a la identidad le corresponde también la matriz identidad. Este isomorfismo entre el grupo de las transformaciones de Möbius y el de las matrices complejas invertibles de orden 2, nos facilita el cálculo de las inversas y las composiciones.

2.2 Transformaciones de Möbius elementales.

En muchas demostraciones, nos será útil descomponer una transformación de Möbius en otras más simples.

A continuación, presentaremos las transformaciones que llamaremos elementales, ya que cualquier otra se puede expresar como una composición de estas, como veremos en la proposición 2.2.

La transformación de Möbius, de la forma $T(z) = z + b$, donde b es un número complejo es una *traslación* cuyo vector está determinado por b y por lo tanto, si b es un número real, la traslación es paralela al eje real.

La transformación de Möbius, de la forma $H(z) = az$, donde a es un número complejo de módulo ρ y argumento φ ($a = \rho \cos \varphi + i \rho \operatorname{sen} \varphi$) es una rotohomotecia cuyo centro es el origen de coordenadas, ángulo de rotación φ y razón de homotecia igual a ρ . Es claro que si a es un número real, la transformación resulta una homotecia de centro el origen y razón a .

La *inversión* es una transformación de Möbius de la forma $I(z) = \frac{1}{z}$ que deja invariante la circunferencia unitaria centrada en el origen y mapea el interior de la misma con el exterior y viceversa.

También trabajaremos con la transformación de Möbius de la forma $J(z) = -\frac{1}{z}$ que le llamaremos *inversión simétrica* ya que es la composición de una inversión y una simetría de centro O.

Proposición 2.2

Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, rotohomotecias e inversiones.

Si $c = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, f es una composición de una rotohomotecia y una traslación.

Si $c \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{\overbrace{bc-ad}^{-1}}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)} + \frac{a}{c} \Rightarrow f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, siendo $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$,

$$f_3(z) = -\frac{1}{c^2}z \quad \text{y} \quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

O sea que f es una composición de una traslación, una inversión, una rotohomotecia y otra traslación.

Cabe observar que si los coeficientes a, b, c, d fueran números reales, la proposición sigue siendo válida y los coeficientes de las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4 también son reales. Además

si sustituimos f_2 por la inversión simétrica y f_3 por $\frac{1}{c^2}z$ llegamos a que toda Möbius es

una composición de estas cuatro transformaciones.

2.3 Algunas propiedades de las transformaciones de Möbius

Proposición 2.3

En una transformación de Möbius, las rectas y circunferencias se corresponden con rectas o circunferencias.

Para demostrar esta proposición, alcanza con demostrar que las traslaciones, rotohomotecias e inversiones transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

La ecuación de una recta o circunferencia puede escribirse de la forma:

$$Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0, \text{ con } A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C} *$$

Si $A = 0$ representa una recta y en caso contrario, una circunferencia. El coeficiente C indica si la recta o circunferencia pasa por el origen, en caso de ser igual a 0.

Consideramos una traslación, $T(z) = z + b$. Entonces llamando w a $T(z)$, tenemos que

$z = w - b$ y al sustituirlo en la ecuación de la circunferencia, llegamos a

$$Aw\bar{w} + (B - Ab)w + \overline{(B - Ab)w} + C + b^2 - \overline{Bb} = 0$$

que representa también una recta o una circunferencia. Observemos también que a recta corresponde recta y a circunferencia corresponde circunferencia y que pasar por el origen de una no implica que la otra también lo haga.

Si ahora tomamos que w es la imagen de z en una rotohomotecia $H(z) = az$, se cumple que $z = w/a$ y al sustituirlo en la ecuación *, obtenemos,

$$Aw\bar{w} + (B\bar{a})w + \overline{(B\bar{a})w} + Ca\bar{a} = 0$$

que también es recta o circunferencia según lo sea la primera. En este caso, si una pasa por el origen, su imagen también pasará por el origen.

Por último, w es la imagen de z en una inversión $I(z) = \frac{1}{z}$. Sustituyendo $z = 1/w$ en *

se llega a $A + B\bar{w} + \overline{Bw} + Cw\bar{w} = 0$

Observamos que una inversión, transforma rectas que pasan por el origen en rectas por el origen, rectas que no pasan por el origen, en circunferencias que pasan por el origen y viceversa y circunferencias que no pasan por el origen en circunferencias que tampoco pasan por el origen.

Hemos demostrado que las traslaciones, rotohomotecias e inversiones hacen corresponder rectas y circunferencias con rectas y circunferencias, entonces, por lo demostrado en la proposición 2.2, las transformaciones de Möbius dejan invariante a la familia de rectas y circunferencias.

Proposición 2.4

Las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas

Sean $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ dos curvas que forman un ángulo en z_0 y $f(z)$ una transformación de Möbius tal que $f(z_0) = w_0$.

Queremos demostrar que el ángulo formado por las curvas $f(\gamma_1(t))$ y $f(\gamma_2(t))$ en w_0 es igual al que forman $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ en z_0

Si $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, llamamos ángulo formado por γ_1 y γ_2 en z_0 al ángulo que forman sus tangentes por dicho punto y ese ángulo queda determinado por el argumento del complejo

$$\frac{\gamma'_2(t_0)}{\gamma'_1(t_0)}.$$

Por lo tanto, queremos demostrar que $\arg\left(\frac{f'(\gamma_1(t_0))}{f'(\gamma_2(t_0))}\right) = \arg\left(\frac{\gamma'_1(t_0)}{\gamma'_2(t_0)}\right)$

Otra vez, recurrimos a la proposición 2.2 y demostraremos que los ángulos se preservan en las traslaciones, rotohomotecias e inversiones.

Si $T(z) = z + b \Rightarrow T(\gamma(t)) = \gamma(t) + b \Rightarrow T'(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, por lo que es inmediato que las traslaciones conservan los ángulos:

$$\frac{T'(\gamma_1(t_0))}{T'(\gamma_2(t_0))} = \frac{\gamma'_1(t_0)}{\gamma'_2(t_0)}$$

Si $H(z) = az \Rightarrow H(\gamma(t)) = a\gamma(t) \Rightarrow H'(\gamma(t)) = a\gamma'(t)$, también es inmediato que las rotohomotecias conservan los ángulos:

$$\frac{H'(\gamma_1(t_0))}{H'(\gamma_2(t_0))} = \frac{\gamma_1'(t_0)}{\gamma_2'(t_0)}$$

Si $I(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow I(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} \Rightarrow I'(\gamma(t)) = -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}$ y teniendo en cuenta que

$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, se cumple también que las inversiones conservan los ángulos:

$$\frac{I'(\gamma_1(t_0))}{I'(\gamma_2(t_0))} = \frac{\gamma_1'(t_0)}{\gamma_2'(t_0)}$$

Proposición 2.5

Dados tres puntos tales que no hay dos iguales, z_1, z_2, z_3 , existe y es única la transformación

de Möbius tal que $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1, f(z_3) = \infty$

Para demostrar la existencia, la determinaremos distinguiendo varios casos:

Si ninguno de los tres puntos dados es ∞ , tomamos $f(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ que cumple lo pedido.

En cambio, si $z_3 = \infty$, consideramos $f(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, que verifica $f(\infty) = \infty$.

Pero, si $z_2 = \infty$, necesitamos tomar $f(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}$, para que $f(\infty) = 1$.

Por último, si $z_1 = \infty$, elegimos $f(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$ y con esto queda demostrada la existencia de

tal transformación para todos los casos.

Para demostrar la unicidad, suponemos que existe otra g tal que:

$$f(z_1) = g(z_1) = 0, f(z_2) = g(z_2) = 1, f(z_3) = g(z_3) = \infty$$

Entonces, $f \circ g^{-1}$ fija los puntos $0, 1, \infty$ y cualquier transformación que haga esto es la

identidad. Por lo tanto, por la unicidad de la transformación inversa: $f = g$

2.4 Razón doble de cuatro puntos.

Dados cuatro puntos, z_0, z_1, z_2, z_3 definimos la *razón doble* entre ellos, como el número complejo w tal que $w = (z_0, z_1, z_2, z_3) = f(z_0)$ siendo f la transformación de Möbius encontrada en la proposición 2.5.

Proposición 2.6.

Las transformaciones de Möbius preservan las razones dobles:

$$\text{Si } f \in \mathcal{M} \Rightarrow (z_0, z_1, z_2, z_3) = (f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$$

Se considera la transformación de Möbius g tal que

$$g(f(z_1)) = 1, \quad g(f(z_2)) = 0, \quad g(f(z_3)) = \infty.$$

Si aplicamos la definición de razón doble, vemos que $(z_0, z_1, z_2, z_3) = g(f(z_0))$ y

$$(f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = g(f(z_0)) \text{ también, por lo tanto, llegamos a que ambas}$$

$$\text{razones dobles son iguales: } (z_0, z_1, z_2, z_3) = (f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$$

Proposición 2.7

$$\text{Sea } H^2 = \{z \in \mathbb{C}_\infty, \text{Im}(z) > 0\}.$$

Una transformación de Möbius $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1$ deja H^2

invariante si y solo si sus coeficientes son reales.

Directo

Sea $f(z)$ que transforma H^2 en sí mismo. Entonces $f(z)$ transforma también el eje real en sí mismo.

$$\text{Si } f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \overline{f(z)} = \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}$$

Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{f(z)} = f(z)$. Por lo tanto, las funciones $f(z)$ y $\overline{f(z)}$ coinciden para todos los números reales y como las transformaciones de Möbius quedan determinadas por tres puntos, estas funciones coinciden.

Por lo tanto $a = \pm\bar{a}$, $b = \pm\bar{b}$, $c = \pm\bar{c}$, $d = \pm\bar{d}$, los coeficientes son todos reales o todos imaginarios puros.

Por otro lado, la imagen de un punto de H^2 debe pertenecer a H^2 , por ejemplo tomamos el punto i .

$$f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(-\bar{c}i+\bar{d})}{|ci+d|^2} = \frac{(a\bar{c}+b\bar{d})+(a\bar{d}-b\bar{c})i}{c^2+d^2}$$

Si los coeficientes fueran imaginarios puros, la parte imaginaria de $f(i)$ queda $\frac{(a\bar{d}-b\bar{c})}{|ci+d|^2}$

que es igual a $-\frac{\overline{ad-bc}}{|ci+d|^2} = \frac{-1}{|ci+d|^2} < 0$ y por lo tanto $f(i)$ no pertenece a H^2 , lo que

contradice que f preserva H^2 y concluimos que los coeficientes deben ser reales.

Recíproco

Sea $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demostraremos que $f(z) \in H^2 \Leftrightarrow z \in H^2$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{ad \operatorname{Im}(z) + bc \operatorname{Im}(\bar{z})}{|cz+d|^2} = \\ &= \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{=1} \operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Im}(f(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ y $\operatorname{Im}(f(z)) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0$, o sea que $f(z) \in H^2 \Leftrightarrow z \in H^2$

CAPÍTULO 3

MODELO DEL SEMIPLANO DE POINCARÉ

Representaremos los puntos de este modelo con los números complejos con parte imaginaria positiva y por lo tanto, el plano hiperbólico será el semiplano superior abierto, que denotamos con H^2 en el capítulo anterior.

Nos proponemos demostrar en este capítulo que semirrectas y semicircunferencias ortogonales al eje real, son buenas representantes de rectas y que las transformaciones de Möbius que mantienen invariante a H^2 son las isometrías de este modelo. Recordemos que dichas transformaciones son las que tienen coeficientes reales, tales que $ad - bc = 1$ según lo demostrado en la proposición 2.7.

El concepto de isometría, involucra necesariamente una métrica, y dado que una transformación de Möbius es una composición de traslaciones, homotecias e inversiones, y sabemos que la métrica euclidiana no se preserva en las homotecias ni en las inversiones, por lo que la métrica euclidiana no se preserva en las transformaciones de Möbius. Es necesario entonces, definir una métrica especial, que se preserve en las transformación de Möbius que mantienen invariante a H^2 .

3.1 Métrica hiperbólica

Una curva en \mathbb{C} es una función diferenciable $\gamma : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{C}$, siendo (t_1, t_2) un intervalo real, abierto o cerrado, finito o infinito.

Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ es una curva en \mathbb{C} , el vector tangente a γ en t es el número complejo $x'(t) + iy'(t)$

Si $\gamma : (t_1, t_2) \rightarrow H^2$ es una curva en H^2 , definimos la *longitud hiperbólica* de γ como

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

y la *distancia hiperbólica* entre los puntos z_1 y z_2 se define como

$$d_H(z_1, z_2) = \inf \{ l(\gamma) \mid \gamma : (t_1, t_2) \rightarrow H^2, \gamma(t_1) = z_1, \gamma(t_2) = z_2 \}$$

Proposición 3.1

La distancia hiperbólica está bien definida.

Es decir, cumple las propiedades:

- 1) No negatividad: $d_H(z_1, z_2) \geq 0$
- 2) Simétrica: $d_H(z_1, z_2) = d_H(z_2, z_1)$
- 3) Reflexiva: $d_H(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
- 4) Desigualdad triangular: $d_H(z_1, z_2) + d_H(z_2, z_3) \geq d_H(z_1, z_3)$

Las tres primeras se cumplen directamente como consecuencia de las propiedades de las integrales y teniendo en cuenta que estamos trabajando con complejos con parte imaginaria positiva.

La propiedad 4 es consecuencia de la definición, ya que $d_H(z_1, z_2) + d_H(z_2, z_3)$ es el menor camino entre z_1 y z_3 , pasando por z_2 y $d_H(z_1, z_3)$ es el ínfimo de todos los caminos entre z_1 y z_3 .

Proposición 3.2

La distancia de dos puntos pertenecientes al eje imaginario es igual al logaritmo del cociente (mayor que 1) entre sus partes imaginarias.

Sean $z_1 = ia$, $z_2 = ib$, $0 < a < b$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow H^2$, $\gamma(t) = it$, tomamos el segmento de recta que une esos puntos y calculamos su longitud.

$$\gamma(t) = it \Rightarrow \gamma'(t) = i \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log(b) - \log(a) = \log(b/a)$$

Ahora, si tomando cualquier otra curva con extremos en z_1 y z_2

$\alpha : [t_1, t_2] \rightarrow H^2$, $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$ | $x(t_1) = x(t_2) = 0$, $y(t_1) = a$, $y(t_2) = b$, se cumple que su longitud es mayor o igual a la de γ , como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)}}{y(t)} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \\ &= \log(y(t_2)) - \log(y(t_1)) = \log(b) - \log(a) = \log(b/a) \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces, que la distancia hiperbólica entre z_1 y z_2 es $\log(b/a)$

Observamos que la curva $\gamma(t) = it$ realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos, o sea que, existe la curva cuya longitud minimiza la distancia entre sus extremos. Una curva con esa particularidad es una *geodésica*.

El recorrido de una geodésica de este modelo, lo llamaremos *segmento hiperbólico*. Una *recta hiperbólica* es un segmento hiperbólico que no está contenido propiamente en ningún otro.

La curva $\gamma : (a, b) \rightarrow H^2, \gamma(t) = it$ es una geodésica y la recta hiperbólica correspondiente es el eje imaginario positivo, cuya ecuación es, $x=0, y>0$ y que llamaremos L_0

Además, si f es una isometría y γ es una geodésica, entonces $f \circ \gamma$ también será una geodésica.

Podemos, entonces, con una geodésica, determinar todas las geodésicas si conocemos todas las isometrías del modelo y de esta forma obtendremos las rectas del modelo.

3.2 Isometrías en H^2

Las isometrías en H^2 son funciones biyectivas de H^2 en sí mismo que preserva la distancia hiperbólica. Es decir, $d_H(f(z), f(w)) = d_H(z, w), \forall z, w \in H^2$

Proposición 3.3

Las transformaciones de Möbius con coeficientes reales tales que $ad - bc = 1$ son isometrías en H^2

En la proposición 2.7, del capítulo anterior, demostramos que las transformaciones de Möbius con coeficientes reales y $ad - bc = 1$ dejan invariante a H^2 . Por otro lado, vimos en la proposición 2.2, que todas las transformaciones de Möbius se pueden descomponer como producto de traslaciones, homotecias e inversiones y en el caso de transformaciones con coeficientes reales tales que $ad - bc = 1$, se pueden descomponer como producto de traslaciones: $T(z) = z + b, b \in \mathbb{R}$, homotecias: $H(z) = az, a \in \mathbb{R}^+$ e inversiones simétricas:

$$J(z) = -\frac{1}{z}$$

Por lo tanto, basta probar que las traslaciones, homotecias e inversiones simétricas con las

características mencionadas, son isometrías en H^2

En la traslación: $T(x, y) = (x + a, y)$

Si $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow H^2$ es una curva, ya vimos que calculamos su longitud, usando la siguiente expresión:

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

Además, si $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow T(\gamma(t)) = (x(t) + a, y(t))$ y

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow T(\gamma(t)) = (x(t) + a, y(t)) \Rightarrow T'(\gamma(t)) = (x'(t), y'(t))$$

Por lo tanto,

$$l(T(\gamma)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt$$

de donde $l(\gamma) = l(T(\gamma))$ y concluimos que la traslación es una isometría.

En la homotecia: $H(x, y) = (ax, ay)$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow H(\gamma(t)) = (ax(t), ay(t)) \Rightarrow H'(\gamma(t)) = (ax'(t), ay'(t)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} l(H(\gamma)) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(ax'(t))^2 + (ay'(t))^2}}{ay(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{ay(t)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt, \text{ por lo tanto, se cumple también } l(\gamma) = l(H(\gamma)) \text{ y} \end{aligned}$$

concluimos que la homotecia también es una isometría.

En la inversión simétrica: $J(x, y) = \frac{-1}{(x, y)} = \frac{(-x, y)}{x^2 + y^2}$

$$\gamma(t) = (x, y) \Rightarrow J(\gamma(t)) = \frac{(-x, y)}{x^2 + y^2} \Rightarrow J'(\gamma(t)) = \frac{(x'(y^2 - x^2) - y'(2xy), x'(2xy) + y'(y^2 - x^2))}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$l(J(\gamma)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\frac{(x'(y^2 - x^2) - y'(2xy))^2 + (x'(2xy) + y'(y^2 - x^2))^2}{(x^2 + y^2)^4}}}{\frac{y}{x^2 + y^2}} dt$$

haciendo cuentas, $l(J(\gamma)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{y} dt$, por lo tanto, se cumple también

$l(\gamma) = l(J(\gamma))$ y concluimos que la inversión simétrica también es una isometría en H^2 .

Las transformaciones de Möbius con coeficientes reales y $ad - bc = 1$ son isometrías en H^2 y llamaremos G_D al subgrupo que forman junto con la composición.

3.3 Rectas hiperbólicas

En el apartado anterior demostramos que el conjunto de las transformaciones de Möbius con coeficientes reales y $ad - bc = 1$ es el grupo de isometrías directas de H^2 , ahora determinaremos, como dijimos al final del 3.1, todas las rectas hiperbólicas como las imágenes de L_0 en todas las isometrías de este grupo, ya que L_0

Vimos en el capítulo 2, que las transformaciones de Möbius dejan invariante la familia de circunferencias y rectas (proposición 2.3) y preservan ángulos (proposición 2.4), por lo que, siendo L_0 una semirrecta perpendicular al eje real, se concluye que las rectas hiperbólicas son arcos de circunferencias ortogonales al eje real y semirrectas perpendiculares al eje real.

Pero, ¿todas las rectas y circunferencias ortogonales al eje real contendrán rectas hiperbólicas?

La respuesta a esta pregunta la encontraremos en la siguiente proposición, que además nos ayudará a determinar una expresión general para la distancia hiperbólica.

Proposición 3.4

Dados dos puntos distintos, z_1 y z_2 del plano H^2 , existe $f \in G_D$ tal que $f(z_1) = ia$ y $f(z_2) = ib$, donde a y b son dos números reales positivos cualesquiera.

Sea L la única recta o circunferencia euclidiana, ortogonal al eje real a la cual pertenecen z_1 y z_2

Si L es una recta que corta al eje real en α , la transformación que nos sirve es la traslación: $f : H^2 \rightarrow H^2, f(z) = z - \alpha$

Si L es una circunferencia que corta al eje real en α y β , vamos a determinar la transformación en varios pasos.

Primero llevamos L a L' , una circunferencia que pasa por el origen, con la traslación

$$f_1 : H^2 \rightarrow H^2, f_1(z) = z - \alpha$$

Luego, llevamos L' a L'' , una recta que no pasa por el origen, con la inversión simétrica:

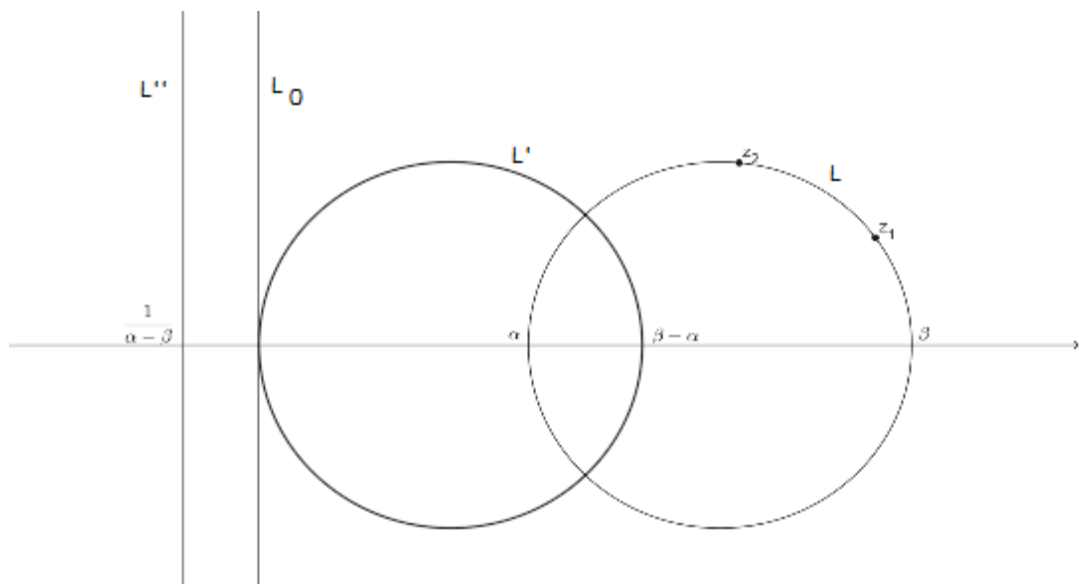
$$f_2 : H^2 \rightarrow H^2, f_2(z) = -\frac{1}{z}$$

Finalmente, llevamos L'' al eje real con la traslación $f_3 : H^2 \rightarrow H^2, f_3(z) = z + \frac{1}{\beta - \alpha}$

En suma, la transformación buscada es la composición de las tres anteriores, que resulta:

$$f : H^2 \rightarrow H^2, f(z) = -\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha}$$

La siguiente figura muestra las transformaciones realizadas para pasar de L a L_0 :



En esta transformación, $f(z_1) = ia, f(z_2) = ib, f(\alpha) = \infty, f(\beta) = 0$

Dados dos puntos cualesquiera de H^2 , entonces, siempre existe y es única la recta o circunferencia euclidiana perpendicular al eje real a la cual pertenecen los puntos dados, y por lo demostrado en la proposición 3.3, la intersección de ésta con H^2 es una recta hiperbólica.

Hemos verificado que se cumple el axioma 1 de la geometría euclidiana: “dos puntos determinan una recta”.

Además, la proposición 3.3 nos sirve para determinar la distancia hiperbólica entre dos puntos cualesquiera, ya que podemos encontrar en una isometría, sus correspondientes que pertenecen a L_0 y ya calculamos, en la proposición 3.2, la distancia de dos puntos del eje imaginario. $d_H(z_1, z_2) = d_H(f(z_1), f(z_2)) = d_H(ia, ib) = |\log(b/a)|$

Observamos además que $\frac{b}{a} = \frac{ib-0}{ia-0} = (ia, \infty, ib, 0)$ y por lo visto en la proposición 2.6, las transformaciones de Möbius preservan las razones dobles:

$$(ia, \infty, ib, 0) = (z_1, \alpha, z_2, \beta)$$

y entonces, $d_H(z_1, z_2) = |\log(z_1, \alpha, z_2, \beta)|$ y $(z_1, \alpha, z_2, \beta) = \frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta}$, por lo tanto

$$d_H(z_1, z_2) = \left| \log \left| \frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta} \right| \right|$$

3. 4 Las simetrías

Las transformaciones del grupo G_D son isometrías pero no son todas las isometrías de H^2

La función $S : H^2 \rightarrow H^2, S(z) = -\bar{z}$ es una simetría respecto al eje imaginario y se puede

probar que es una isometría en H^2 ya que $(-\bar{z}_1, -\alpha, -\bar{z}_2, -\beta) = (z_1, \alpha, z_2, \beta)$

Si consideramos una recta hiperbólica cualquiera, L y la transformación $f \in G_D$ tal que

$f(L)$ sea el eje imaginario, entonces, la función $S_L = f^{-1} \circ S \circ f$ es una isometría que fija

todos los puntos de la recta L y por lo tanto es la simetría respecto a la recta L

Proposición 3.5

Toda transformación de G_D es una composición de simetrías

Para demostrar esta proposición, recurriremos una vez más a la proposición 2.2. Basta entonces con probar que toda traslación, homotecia e inversión simétrica del grupo es una composición de simetrías.

Si $T(z) = z + b$, entonces $T(z)$ es la composición de las simetrías: $z \mapsto -\bar{z}$ y $z \mapsto -\bar{z} + a$.

Si $H(z) = az, a > 0$, entonces $H(z)$ es la composición de las simetrías: $z \mapsto \frac{1}{z}$ y $z \mapsto \frac{a}{z}$.

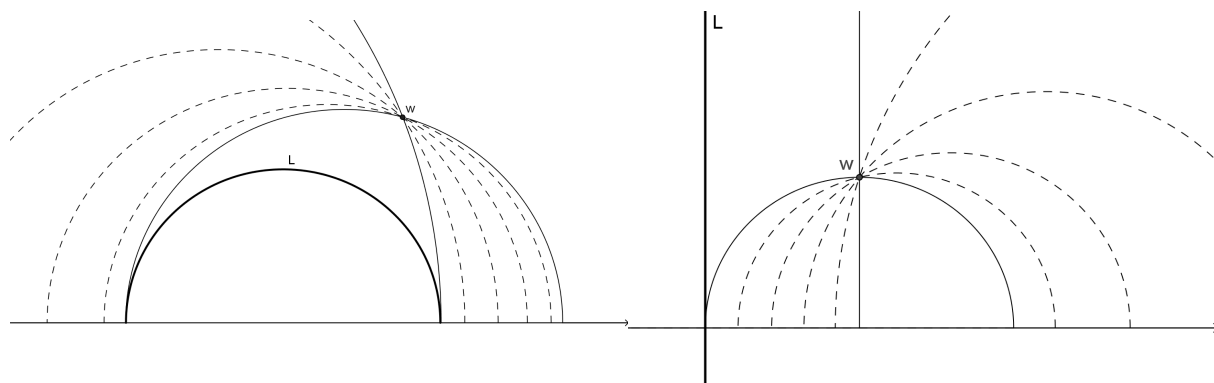
Si $I(z) = -\frac{1}{z}$, entonces $I(z)$ es la composición de las simetrías: $z \mapsto -\bar{z}$ y $z \mapsto \frac{1}{z}$.

3.5 Ángulo de paralelismo

En la geometría euclidiana, dos rectas del mismo plano son paralelas si no son secantes. Pero en esta geometría conviene diferenciar dos tipos de rectas no secantes.

Llamaremos *rectas hiperbólicas paralelas* a aquellas que son tangentes en un punto del eje real. Recordemos que los puntos del eje real no pertenecen a H^2 y por lo tanto estas rectas no tienen puntos en común. Dadas una recta y un punto, existen pues, dos rectas paralelas a L por w . El resto de las rectas hiperbólicas que pasan por w y no cortan a L le llamaremos *no secantes*.

Podemos ver en las siguientes figuras que por un punto w existen dos rectas hiperbólicas paralelas a una dada e infinitas no secantes a ella.



Proposición 3.6

Sean L una recta hiperbólica y w un punto de H^2 . Entonces, existe y es única la recta hiperbólica que pasa por w y es perpendicular a L

Si $L = L_0$, la recta hiperbólica buscada es la semicircunferencia centrada en el origen que pasa por w , que evidentemente es la única. La llamaremos L_w

Si L es otra, consideramos la transformación $f \in G_D$ encontrada en la proposición 3.3, que

lleva L a L_0 . Se cumple que $f(L)$ es perpendicular a $L_{f(w)}$ y por lo tanto L es

perpendicular a la recta hiperbólica $f^{-1}(L_{f(w)})$

Sean L una recta hiperbólica, w un punto que no le pertenece, T la perpendicular a L por w y P una de las paralelas a L por w .

El ángulo θ que forman T con P se llama *ángulo de paralelismo*. Cualquier otra recta hiperbólica por w no secante a L formará con T un ángulo mayor que éste.



Mientras que en la geometría euclidiana el ángulo de paralelismo es siempre $\pi/2$, en la hiperbólica este varía y depende de la distancia entre w y el punto de intersección de L y T , la que podemos decir que es la distancia del punto w a la recta L .

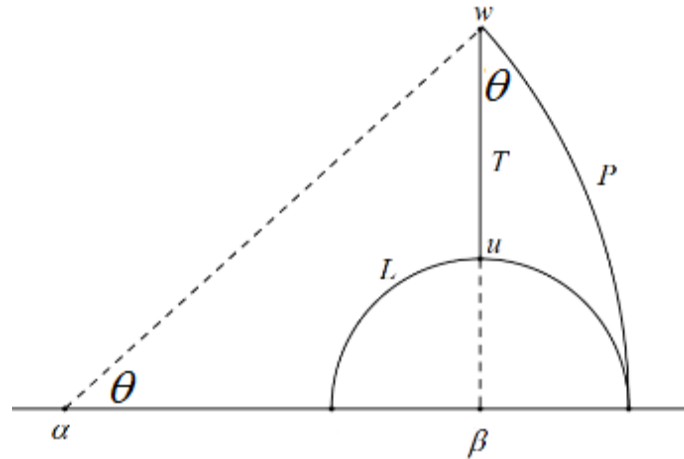
Observemos que si esa distancia tiende a 0, la recta P tiende a L y el ángulo de paralelismo tiende a $\pi/2$.

La siguiente proposición formaliza esta idea.

Proposición 3.7

Sean una recta hiperbólica L , P una de sus paralelas por w y T su perpendicular por w , que la corta en el punto u .

θ es el ángulo de paralelismo que determinan T y P . Se cumple que $\sin \theta = \frac{1}{\cosh(d_H(w,u))}$



Tomaremos una posición particular que no quita generalidad dado que ya vimos que cualquier recta hiperbólica se corresponde con otra en una isometría. La posición particular que nos resulta más cómoda es la que T coincide con L_0 (eje imaginario positivo), ya que trabajaremos con la distancia hiperbólica de dos de sus puntos.

En ese caso, $w=is$ y $u=it$, donde s y t son reales positivos, $t < s$.

Consideremos P como un arco euclidiano de centro α y radio r

En el triángulo euclidiano de vértices α, w, β , observemos que el ángulo de vértice α tiene sus lados respectivamente perpendiculares a los lados de θ y por lo tanto, es igual a θ .

Por Pitágoras en ese triángulo:

$$r^2 = s^2 + (r-t)^2 \Rightarrow s^2 + t^2 = 2rt$$

En ese mismo triángulo, tenemos que: $\sin \theta = \frac{s}{r}$

$$\text{Y como } \frac{s}{r} = \frac{2st}{2rt} = \frac{2st}{s^2+t^2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2st}{s^2+t^2} \quad (1)$$

Ahora planteamos la distancia hiperbólica entre w y u , que por ser puntos del eje imaginario,

$$d_H(w,u) = \log(s/t)$$

$$\text{Utilizando coseno hiperbólico: } \cosh(d_H(w,u)) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) = \frac{s^2+t^2}{2st} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $\boxed{\sin \theta \cdot \cosh(d_H(w, u)) = 1}$ una expresión que muestra que el ángulo de paralelismo depende directamente de la distancia de w a la recta L y que si ésta tiende a 0, el ángulo de paralelismo tiende a $\pi/2$, ya que el coseno hiperbólico de 0 es 1 y el seno de $\pi/2$ es 1

3.6 Triángulos hiperbólicos

Tres puntos de H^2 determinan un triángulo hiperbólico. Ampliaremos la definición de triángulo al caso que alguno de esos puntos pertenezcan al eje real.

Proposición 3.8

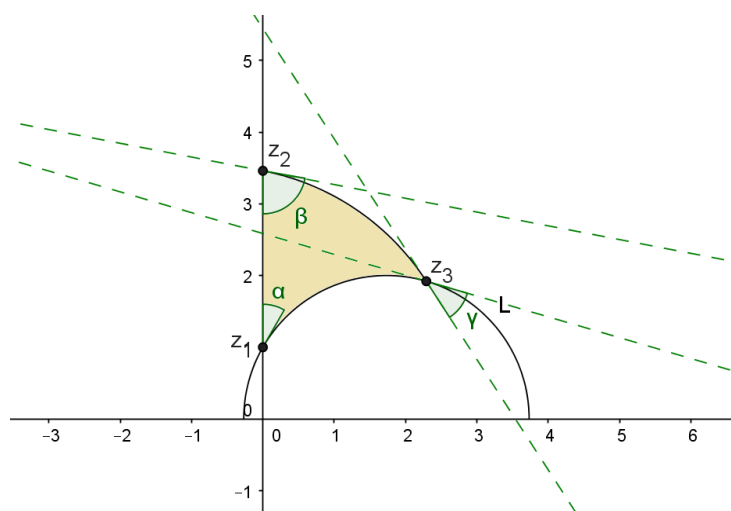
En la geometría hiperbólica los triángulos quedan determinados por sus ángulos.

Justificaremos esta proposición en forma descriptiva, mediante la construcción de un triángulo a partir de sus ángulos.

Supongamos que queremos construir un triángulo cuyos ángulos son α, β, γ .

Tomamos en primer lugar, como uno de sus vértices, el punto $z_1 = i$ y uno de sus lados sobre el eje imaginario.

Trazamos una recta hiperbólica L por z_1 tal que, con el eje imaginario forme un ángulo α .



Si tomamos otro punto cualquiera z_2 sobre el eje imaginario, y trazamos por él, la recta

hiperbólica que forme un ángulo β con dicho eje, quedará determinado el punto z_3 en L y también el ángulo que forma con ella.

Al variar z_2 sobre el eje imaginario, manteniendo el ángulo β , podemos verificar que existe un solo punto tal que el ángulo que forma en z_3 es el γ dado.

Con esto vemos que el triángulo hiperbólico queda determinado por sus ángulos y se desprende de este hecho que su área debería depender de la medida de éstos.

Proposición 3.9

El área de un triángulo es igual a la diferencia entre π y la suma de sus ángulos.

Sea T un triángulo hiperbólico. Nos proponemos calcular su área, $A(T)$.

El área es un concepto métrico que tiene que ser coherente con la métrica hiperbólica definida en 3.1. Por ese motivo, utilizaremos la siguiente expresión para calcular el área:

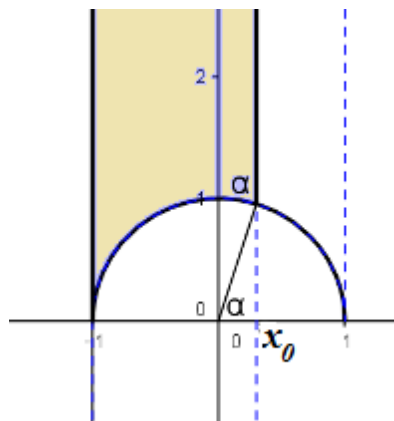
$$A(T) = \iint_T \frac{1}{y^2} dy dx$$

El proceso del cálculo consiste en considerar en primer lugar, casos particulares. En todos los casos, los triángulos están dados por la medida de sus ángulos.

Se eligió una posición particular que facilita los cálculos y no quita generalidad, ya que todos los triángulos con ángulos respectivamente iguales son iguales según la métrica hiperbólica.

Primer caso

En primer lugar, se considera un triángulo cuyos ángulos son: $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = 0$



Se puede observar que $x_0 = \cos \alpha$

$$A(T) = \int_{-1}^{x_0} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{-1}^{\cos\alpha} \left[\frac{-1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} dx = \int_{-1}^{\cos\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$[-\arccos x]_{-1}^{\cos\alpha} = -\alpha + \pi$$

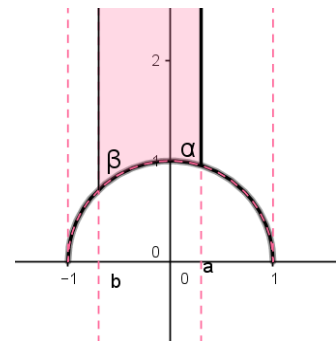
Por lo tanto, $A(T) = \pi - \alpha$

Segundo caso

Ahora se considera un triángulo cuyos ángulos son:

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$ como en la siguiente figura:

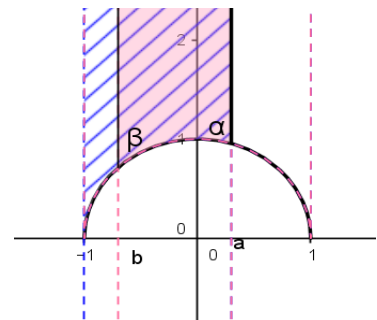
En este caso, podemos considerar el área del triángulo como la diferencia de las áreas de dos triángulos del caso anterior.



T_1 es el triángulo de ángulos $\alpha, 0, 0$

T_2 es el triángulo de ángulos $\pi - \beta, 0, 0$

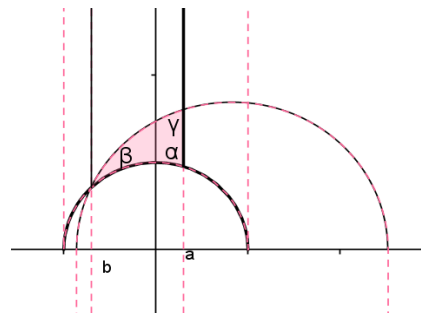
$$\left. \begin{array}{l} A(T_1) = \pi - \alpha \\ A(T_2) = \pi - (\pi - \beta) = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow A(T) = \pi - \alpha - \beta$$



Tercer caso

Por último, llegamos al caso general.

Se considera un triángulo cuyos ángulos son: $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ como en la siguiente figura:



Otra vez, se puede expresar el área de este triángulo como la diferencia de áreas de dos triángulos del segundo caso:

T_1 es el triángulo de ángulos $\alpha, \beta + \beta', 0$

T_2 es el triángulo de ángulos $\pi - \gamma, \beta', 0$

$$\left. \begin{array}{l} A(T_1) = \pi - \alpha - (\beta + \beta') \\ A(T_2) = \pi - (\pi - \gamma) - \beta' = \gamma - \beta' \end{array} \right\} \Rightarrow A(T) = \pi - \alpha - \beta - \beta' - (\gamma - \beta') = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

Por lo tanto: $A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

CAPÍTULO 4

EL DISCO DE POINCARÉ

En el capítulo anterior hemos estudiado isometrías y rectas hiperbólicas del modelo del semiplano y ahora buscaremos aplicar esos resultados al modelo del disco.

4.1 Del semiplano al disco

El otro modelo de Poincaré consiste en representar el plano hiperbólico con el círculo abierto centrado en el origen de coordenadas y radio 1, que denotaremos D^2

Existe una transformación de Möbius que lleva H^2 al interior del disco unitario D^2 . Para determinarla, busquemos en primer lugar su inversa. Ésta debe llevar la circunferencia unitaria al eje real y como una transformación queda determinada por tres pares de puntos correspondiente, busquemos la que lleva la terna $(1, i, -1)$ a $(0, 1, \infty)$, según la función determinada en la proposición 2.6

$$\phi^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1} = \frac{-iz+i}{z+1}$$

Al invertirla, encontramos $\phi(z) = \frac{-z+i}{z+i}$.

Para demostrar que ϕ es la función que mapea H^2 en D^2 debemos probar que la parte imaginaria de z es positiva si y solo si el módulo de su imagen es menor que 1.

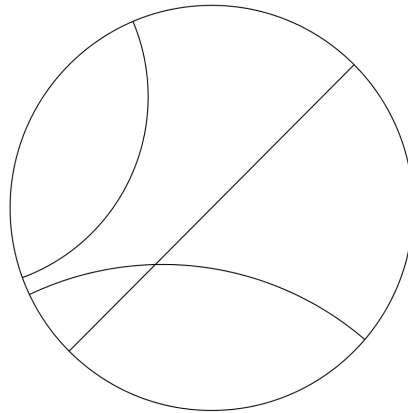
$$|\phi(z)|^2 = \left| \frac{-z+i}{z+i} \right|^2 = \frac{|-z+i|^2}{|z+i|^2} = \frac{x^2 + (1-y)^2}{x^2 + (1+y)^2} < 1 \Leftrightarrow y > 0, \text{ por lo tanto, } \operatorname{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow |\phi(z)| < 1$$

La primera pregunta que nos surge es cómo son las rectas hiperbólicas de este modelo.

La respuesta es sencilla ya que sabemos que las transformaciones de Möbius llevan rectas y circunferencias a rectas y circunferencias, por lo que las rectas hiperbólicas del disco seguirán siendo partes de rectas y circunferencias. Además, sabiendo que las Möbius son transformaciones conformes y que en H^2 las rectas hiperbólicas son perpendiculares al eje real, en este modelo deben ser perpendiculares a la imagen del eje real que es el borde del disco.

Concluimos entonces, que las rectas hiperbólicas son arcos de circunferencias ortogonales a

la circunferencia unitaria o diámetros abiertos de la misma.



En segundo lugar nos preguntamos que pasa con la métrica hiperbólica.

Vimos que en H^2 se cumple que $d_H(z_1, z_2) = |\log(z_1, \alpha, z_2, \beta)|$ y como las razones dobles se conservan en las transformaciones de Möbius, decimos que:

si z_1 y z_2 son dos puntos del disco y α y β son los puntos euclidianos donde la recta hiperbólica que determinan, corta al borde del disco, la distancia hiperbólica entre los puntos dados, también se calcula como $d_H(z_1, z_2) = |\log(z_1, \alpha, z_2, \beta)|$

4.2 Isometrías en D^2 .

Nos proponemos a buscar isometrías en el disco y para comenzar, buscamos transformaciones de Möbius que preserven el disco.

Proposición 4.1

Si $f : H^2 \rightarrow H^2$ es una isometría de H^2 , entonces $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ es una isometría de D^2 .

Es claro que g preserva el disco y como las transformaciones de Möbius conservan las relaciones dobles, la distancia hiperbólica se mantiene resultando g una isometría de D^2 .

En efecto, sean z_1 y z_2 dos puntos de D^2 y w_1 y w_2 sus respectivas imágenes en g

$$\begin{aligned}
d_H(z_1, z_2) &= |\log(z_1, \alpha, z_2, \beta)| = |\log(\phi^{-1}(z_1), \phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(z_2), \phi^{-1}(\beta))| = \\
&|\log(g(\phi^{-1}(z_1)), g(\phi^{-1}(\alpha)), g(\phi^{-1}(z_2)), g(\phi^{-1}(\beta)))| = \\
&|\log(\phi(g(\phi^{-1}(z_1))), \phi(g(\phi^{-1}(\alpha))), \phi(g(\phi^{-1}(z_2))), \phi(g(\phi^{-1}(\beta))))| = d_H(w_1, w_2)
\end{aligned}$$

Evidenciando que g es isometría en D^2 .

CAPÍTULO 5

TESELACIONES EN EL DISCO HIPERBÓLICO

Una teselación regular del plano consiste en cubrir todo el plano con polígonos regulares. Mientras que el plano euclidiano existen sólo tres teselaciones regulares (con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares), en el plano hiperbólico es posible construir infinitas teselaciones regulares. Estas están determinadas por dos variables: p , el número de lados del polígono regular y q , el número de polígonos que concurren a un vértice.

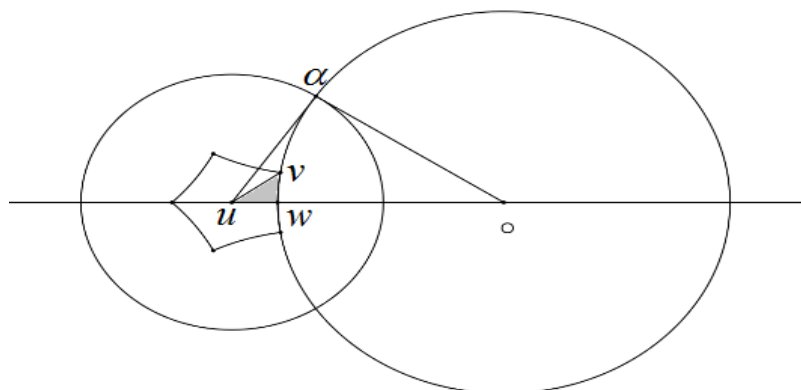
5.1 Construcción de una teselación hiperbólica.

Dados dos números enteros positivos p y q tales que $(p-2)(q-2) > 4$, hay en el plano hiperbólico un grupo $[p, q]$ generado por las simetrías respecto a los lados de un triángulo cuyos ángulos son π/p , π/q y $\pi/2$ (triángulo uvw de la figura).

Observemos que debe cumplirse que la suma de los ángulos sea menor que π , por lo tanto,

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} < \frac{\pi}{2} \text{ que equivale a } (p-2)(q-2) > 4$$

Para construir una teselación regular, comenzamos por construir un polígono regular, centrado en el centro del disco hiperbólico. Este polígono recibe el nombre de región fundamental, ya que una vez construido, por medio de isometrías, se construye toda la teselación.



Para construir el polígono central analizamos la figura adjunta: El triángulo hiperbólico uvw

de la figura, cumple que $\hat{u} = \pi/p$, $\hat{v} = \pi/q$, $\hat{w} = \pi/2$.

Tomamos $\alpha o = r$, $uo = d$, $s = \sin(\pi / p)$ y $c = \cos(\pi / q)$.

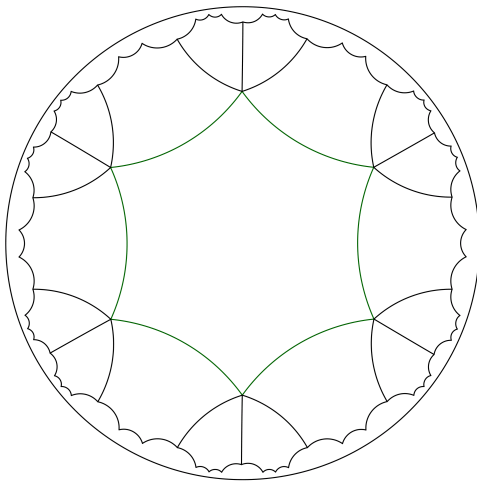
Aplicamos el teorema del seno al triángulo euclidiano uvo donde $\hat{u}vo = \hat{v} + \frac{\pi}{2}$, obteniendo:

$\frac{d}{\cos \hat{v}} = \frac{r}{\sin \hat{u}}$ y el de Pitágoras al triángulo euclidiano αuo rectángulo en α : $d^2 - r^2 = 1$ se

llega a $d = \frac{1}{\sqrt{1 - (s/c)^2}}$ y $r = \frac{1}{\sqrt{(c/s)^2 - 1}}$

5.2 Ejemplos de teselaciones en el disco:

En las siguientes figuras podemos ver parte de una teselación regular del disco. Una es una teselación con polígonos de 6 lados, que concurren 5 en cada vértice y la otra con polígonos de 3 lados que concurren 7 a cada vértice.



BIBLIOGRAFÍA

Coxeter, H (1997). *The trigonometry of hiperbolic tessellations*. Canada Math. Bull. 40 (2), 158-168. Recuperado de <http://cms.math.ca/cmb/v40/p158>

Kisbye, N. *El plano de Poincaré*. Universidad Nacional de Córdoba. Recuperado de <http://www.famaf.unc.edu.ar/series/pdf/pdfCMat/CMat35-1.pdf>

Potrie, R, Sambarino, A (2009). *Análisis Complejo*. Facultad de Ciencias. Uruguay. Recuperado de <https://coloquiooleis.files.wordpress.com/2009/06/complejo1.pdf>

Santaló, L. (1961). *Geometrías no euclidianas*. Buenos Aires: EUDEBA

Stillwell J. (2005). *The four pillars of geometry*. New York, USA: Springer

Toth, G. (2002). *Glimpses of Algebra and Geometry*. New York: Hamilton Printing Co.