

TRABAJO MONOGRÁFICO

---

Flujos de Anosov y grupo  
fundamental en 3-variedades

Un teorema de Margulis-Plante-Thurston

---

Por: Santiago Martinchich Rodríguez

Orientador: Rafael Potrie Altieri

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

Junio de 2015

## **Agradecimientos**

A Rafael por su excelente guía, paciencia y dedicación, y por haberme propuesto el tema central de esta monografía.

A mis padres, hermanos y familia, por darme todo y por el apoyo incondicional que siempre me han brindado.

A Sylvia Borbonet y Nacho Arbeleche, por brindarme desde chico, junto a tantos otros gurises, la oportunidad de desarrollar nuestras capacidades y aprender a pensar jugando.

A los compañeros, amigos, estudiantes y docentes de la facultad, miembros del CMAT e IMERL con los que compartí la carrera durante todos estos años.

A mis amigas y amigos de la vida, por todo y por bancarme la cabeza más de una vez.

Gracias a todos.

## Resumen

En la presente monografía se desarrollan los prerequisites necesarios y la demostración del siguiente teorema:

**Teorema (Margulis-Plante-Thurston).** *Si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada, entonces el grupo fundamental de  $M$  tiene crecimiento exponencial.*

El mismo fue probado por G. A. Margulis en el apéndice de [AS]. La demostración que aquí se realiza es la que hacen J. F. Plante y W. P. Thurston en [PlTh].

## Abstract

In this monograph we present the background material and proof of the following theorem:

**Theorem (Margulis-Plante-Thurston).** *If  $\varphi_t : M \rightarrow M$  is an Anosov flow in a closed 3-manifold  $M$ , then the fundamental group of  $M$  has exponential growth.*

This result was first proved by G. A. Margulis in the appendix of [AS]. The proof that we give is the one that J. F. Plante and W. P. Thurston made in [PlTh].

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Flujos de Anosov</b>	<b>10</b>
2.1. Definiciones previas . . . . .	10
2.2. Definición de flujo de Anosov, contexto genérico e independencia de la métrica . . . . .	11
2.3. Teorema de la variedad estable local . . . . .	13
2.4. Ejemplos de flujos de Anosov . . . . .	16
2.4.1. Suspensión de difeomorfismos de Anosov en superficies .	16
2.4.2. Flujo geodésico en superficies de curvatura constante negativa . . . . .	18
2.4.3. Otros ejemplos . . . . .	23
<b>3. Foliaciones y teorema de la variedad estable para flujos de Anosov</b>	<b>24</b>
3.1. Foliaciones . . . . .	24
3.2. Teorema de la variedad estable para flujos de Anosov . . . . .	27
<b>4. Holonomía y teorema de Haefliger</b>	<b>37</b>
4.1. Holonomía . . . . .	37
4.2. Teorema de Haefliger y consecuencias . . . . .	45
4.3. Demostración del teorema de Haefliger . . . . .	48
4.3.1. Resumen de la prueba . . . . .	49
4.3.2. Disco en posición general . . . . .	50
4.3.3. Poincaré-Bendixson y obtención de un ciclo límite minimal	59
<b>5. Grupo fundamental y crecimiento exponencial</b>	<b>67</b>
5.1. Grupo Fundamental . . . . .	67
5.2. Crecimiento de grupos . . . . .	71
5.3. Crecimiento del grupo fundamental . . . . .	72
5.4. Ejemplos de grupos con distintos tipos de crecimiento . . . . .	74
<b>6. Teorema de Margulis-Plante-Thurston</b>	<b>79</b>
6.1. Preliminares . . . . .	79
6.2. Demostración del teorema . . . . .	81
<b>A. Teorema de la variedad estable local</b>	<b>86</b>

## 1. Introducción

Los *sistemas de Anosov* constituyen un ejemplo paradigmático de la teoría de sistemas dinámicos hiperbólicos. Tanto en su versión discreta: *difeomorfismos de Anosov*, como en su versión continua: *flujos de Anosov*, los sistemas de Anosov se destacan por poseer una rica dinámica, ser estructuralmente estables [A] y ser ergódicos siempre que preserven una forma de volumen y sean de clase  $C^2$  [AS].

Nos referimos con sistema de Anosov a todo difeomorfismo o flujo diferenciable en una variedad riemanniana  $M$  para el cual el espacio tangente  $T_x M$  en cada punto  $x$  se descompone como suma directa de dos subespacios

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

para el caso de difeomorfismos, o como suma directa de tres subespacios

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$$

para el caso de flujos; que varían continuamente con  $x$  y son  $Df$ -invariantes (y  $E^c(x)$  es unidimensional y está generado por la dirección del flujo para el caso de flujos de Anosov), de forma tal que  $Df$  contrae exponencialmente los vectores de  $E^s(x)$  y  $E^u(x)$  para el futuro y pasado, respectivamente. La definición precisa de flujo de Anosov puede encontrarse en la sección 2.2 (ver también [KH] o [V2]).

La cuestión de qué variedades admiten sistemas de Anosov y la clasificación de los mismos es todavía una pregunta abierta tanto para difeomorfismos como para flujos. Sin embargo, es natural esperar que una estructura geométrica invariante (como la que queda determinada en el tangente por un sistema de Anosov) imponga restricciones topológicas a las variedades que la admiten. Tal es el caso para difeomorfismos de Anosov en superficies cerradas (la menor dimensión que puede admitir un difeomorfismo de Anosov), para los cuales la respuesta sí es conocida:

**Teorema (Franks [F]).** *Si  $f : S \rightarrow S$  es un difeomorfismo de Anosov en  $S$  superficie cerrada, entonces  $S$  es el toro  $\mathbb{T}^2$  y  $f$  es topológicamente conjugado a un automorfismo lineal hiperbólico.*

En contraste, para flujos de Anosov en variedades cerradas de dimensión 3 (la menor dimensión que puede admitir un flujo de Anosov) la realidad es

bien distinta. Al día de hoy existen infinitas variedades que se sabe admiten flujos de Anosov, infinitas que se sabe no admiten e infinitas que no se sabe si admiten o no. Aun así, las restricciones topológicas aparecen y el teorema central que se desarrolla en esta monografía es muestra de ello, puesto que brinda una condición topológica necesaria para la existencia de un flujo de Anosov en una 3-variedad cerrada:

**Teorema (Margulis-Plante-Thurston).** *Si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada, entonces el grupo fundamental de  $M$  tiene crecimiento exponencial.*

En las secciones 5.1, 5.2 y 5.3 el lector encontrará la definición de grupo fundamental y de su tipo de crecimiento.

En particular, el teorema de Margulis-Plante-Thurston prueba que no pueden existir flujos de Anosov en la esfera  $S^3$ , en el toro  $\mathbb{T}^3$  o en la clase infinita de 3-variedades que forman los espacios lente  $L(p, q)$ .

Por otro lado, los ejemplos clásicos de flujos de Anosov en 3-variedades nos determinan una clase infinita de 3-variedades que sí admiten flujos de Anosov. A saber, estos dos ejemplos fundamentales son:

- La suspensión de un difeomorfismo de Anosov en una superficie cerrada.
- El flujo geodésico en superficies de curvatura constante negativa.

Posteriormente a los trabajos de Margulis, Plante y Thurston se desarrollaron diversas extensiones al resultado obtenido. Destacamos el trabajo de M. Paternain que prueba en [Pa] que la misma tesis se cumple para todo *flujo expansivo* en una 3-variedad cerrada. Puesto que todo flujo de Anosov es en particular expansivo, este resultado es estrictamente más general.

En el final de la sección 2.4 el lector encontrará referencias a otros resultados relacionados con la topología de 3-variedades que admiten flujos de Anosov.

Los contenidos del presente trabajo se estructuran de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se definen con precisión los flujos de Anosov en 3-variedades, se estudian algunas de sus propiedades locales y globales más relevantes y se desarrollan los dos ejemplos clásicos anteriormente citados.

En la primera parte del Capítulo 3 se define la noción de foliación de una variedad y se estudian algunos ejemplos concretos de ellas. La segunda

parte del Capítulo 3 está dedicada a la prueba del teorema de la variedad estable para flujos de Anosov en dimensión 3. En particular, este teorema revela la existencia de foliaciones centro-estables y centro-inestables (con esto nos referimos a la partición por subvariedades de dimensión 2 que se genera en  $M$  al integrar los campos de planos  $E^s(x) \oplus E^c(x)$  y  $E^c(x) \oplus E^u(x)$ ) que poseen propiedades hasta cierto punto bien entendidas.

En el camino para demostrar el teorema de Margulis-Plante-Thurston será crucial un argumento propio de la teoría de foliaciones debido A. Haefliger [Hae] que implicará, en nuestro escenario, que no puede existir una curva continua, cerrada y homotópicamente nula que sea transversal en todo punto a las hojas de la foliación centro-estable o centro-inestable. Una porción significativa de la monografía y todo el Capítulo 4 están dedicados a los preliminares y prueba de este resultado.

Haefliger probó el teorema que lleva su nombre bajo hipótesis de regularidad de la foliación que desafortunadamente no son necesariamente satisfechas por la foliación centro-estable o centro-inestable de un flujo de Anosov. Es por eso que tenemos que desviarnos un poco de la prueba que se realiza en [CLN] y usar un resultado de V. V. Solodov [Sol] para presentar una demostración que sí funciona en nuestro contexto.

En el Capítulo 5, y de forma completamente independientemente a los capítulos anteriores, se define el tipo de crecimiento del grupo fundamental de una variedad y se ven ejemplos de 3-variedades que cumplen uno u otro tipo de crecimiento.

Todos los resultados convergen en el Capítulo 6 en la prueba del teorema de Margulis-Plante-Thurston que se realiza de acuerdo a [PTh].

Finalmente en el Apéndice se desarrolla con más detalle la prueba del teorema de la variedad estable local para flujos de Anosov visto previamente en el Capítulo 2.

Existe una cierta analogía entre los argumentos que prueban el teorema de Margulis-Plante-Thurston y los que prueban la siguiente proposición útil en la clasificación de los difeomorfismos de Anosov en superficies:

**Proposición.** *Si  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es un difeomorfismo de Anosov, entonces  $f$  no es isotópico a la identidad.*

Como introducción a las ideas que se desarrollarán posteriormente a lo

largo de la monografía, damos a continuación un bosquejo de la prueba de esta proposición y luego comentamos las similitudes que presenta con la prueba del teorema de Margulis-Plante-Thurston:

*Idea de la prueba.* Supongamos, por contradicción, que existe  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  difeomorfismo de Anosov isotópico a la identidad.

Sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  el cubrimiento de  $\mathbb{T}^2$  definido como  $\pi(x, y) = (x \bmod 1, y \bmod 1)$ . Sea  $f_t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la isotopía entre  $f_0 = id$  y  $f_1 = f$ , y sea  $\tilde{f}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la isotopía levantada a  $\mathbb{R}^2$  entre  $\tilde{f}_0 = id$  y  $\tilde{f}_t = \tilde{f}$ . Luego  $f_t = \pi \circ \tilde{f}_t$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Si restringimos  $\tilde{f}$ , que es continua, al dominio fundamental compacto  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , es claro entonces que  $d(\tilde{f}(x, y), (x, y)) \leq K$  para todo  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  y cierta constante  $K > 0$ . Luego, dado que  $\pi \circ \tilde{f}_t((x, y) + (n, m)) = \pi \circ \tilde{f}_t(x, y)$  para todo  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  y que  $\tilde{f}_0 = id$ , obtenemos  $\tilde{f}_t((x, y) + (n, m)) = \tilde{f}_t(x, y) + (n, m)$  y por lo tanto  $d(\tilde{f}(x, y), (x, y)) \leq K$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Luego si  $p$  y  $q$  son dos puntos cualesquiera de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $d(\tilde{f}(p), \tilde{f}(q)) \leq d(\tilde{f}(p), p) + d(p, q) + d(\tilde{f}(q), q)$ , es decir,  $d(\tilde{f}(p), \tilde{f}(q)) \leq 2K + d(p, q)$ . Razonando inductivamente obtenemos que  $d(\tilde{f}^n(p), \tilde{f}^n(q)) \leq 2Kn + d(p, q)$ .

Obtenemos de esta forma que si  $A$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ , entonces para todo  $n$  entero positivo se cumple que

$$\text{diám}(\tilde{f}^n(A)) \leq 2Kn + \text{diám}(A) \quad (1)$$

Por otro lado, podemos “levantar” a  $\mathbb{R}^2$  el subfibrado  $E^u$  a  $\tilde{E}^u$  y considerar en  $\mathbb{R}^2$  un flujo tangente en todo punto a  $\tilde{E}^u$ . Luego si  $A$  es un segmento de órbita de este flujo y  $x$  un punto de  $A$ , entonces dado que  $\tilde{E}^u$  es  $D\tilde{f}$ -invariante y que  $D\tilde{f}$  expande exponencialmente en la dirección de  $\tilde{E}^u$ , entonces tenemos que  $\tilde{f}^n(A)$  continua siendo una curva tangente a  $\tilde{E}^u$  y que

$$\text{long}(\tilde{f}^n(A)) > \frac{\text{long}(A)}{C} e^{n\lambda} \quad (2)$$

para todo  $n$  entero positivo, con  $C > 0, \lambda > 0$  las constantes con respecto a las que  $f$  es difeomorfismo de Anosov (ver sección 2.4.1 para una definición precisa de difeomorfismo de Anosov en una superficie).

El argumento sigue ahora haciendo contrastar el hecho de que  $\tilde{f}^n(A)$  es una curva que para el futuro crece su largo de forma exponencial (2) con el hecho de que su diámetro crece polinomialmente (1), y luego haciendo un argumento de tipo Poincaré-Bendixson.



Efectivamente,  $\text{Vol}(B(\tilde{f}^n(x), \text{diám}(\tilde{f}^n(A)))) \leq \pi(2Kn + \text{diám}(A))^2$  y luego haciendo tender  $n$  a infinito tenemos que  $\tilde{f}^n(A)$  es una curva cuyo largo crece exponencialmente con  $n$  que está contenida en una bola de volumen que crece polinomialmente con  $n$ . Necesariamente  $\tilde{f}^n(A)$  tiende a autoacumularse.

Tomando  $\epsilon > 0$  de forma tal que todo par de puntos que distan a menos de  $\epsilon$  quedan contenidos en una “cajita foliada” con forma de producto local por curvas integrales de  $\tilde{E}^u$  y  $\tilde{E}^s$  (levantado de  $E^s$ ), entonces para  $n$  suficientemente grande podemos asegurar que existe una curva integral  $\xi$  de  $\tilde{E}^s$  contenida completamente en un tal “cajita foliada” y tal que  $\tilde{f}^n(A)$  corta transversalmente a  $\xi$  en dos puntos distintos. Puesto que en tal caso el flujo tangente a  $\tilde{E}^u$  queda transversal a  $\xi$  entonces un argumento de tipo Poincaré-Bendixson implica que existe una singularidad de  $\tilde{E}^u$ . Dado que  $E^u$  no tiene singularidades, entonces  $\tilde{E}^u$  tampoco puede tener y llegamos así a una contradicción.

□

La prueba del teorema de Margulis-Plante-Thurston es similar en espíritu a la que acabamos de presentar. La principal diferencia radica en que en dimensión 3 no es posible utilizar directamente el teorema de Poincaré-Bendixson. Veremos a lo largo de la monografía cómo el teorema de Haefliger es el indicado para ocupar ese lugar.

## 2. Flujos de Anosov

En el presente capítulo definimos la noción de *flujo de Anosov* en una 3-variedad y comentamos brevemente algunos de los primeros resultados destacados sobre flujos de Anosov debidos a D. V. Anosov [A]. Posteriormente enunciamos y damos una idea de la prueba del *teorema de la variedad estable local para flujos de Anosov*. Desarrollamos luego dos ejemplos fundamentales de flujos de Anosov en 3-variedades: la *suspensión de un difeomorfismo de Anosov en un superficie cerrada* y el *flujo geodésico en el tangente unitario de superficies cerradas de curvatura constante negativa*. Por último, referimos al lector a distintos trabajos que presentan una variada gama de otros ejemplos. Citamos como referencia para este capítulo [KH], [Po] y [V2].

### 2.1. Definiciones previas

Veamos algunas definiciones previas a la definición de flujo de Anosov.

Sea  $M$  variedad riemanniana de dimensión 3. Para  $r \geq 0$  llamamos *flujo de clase  $C^r$  en  $M$*  a todo mapa  $\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  de clase  $C^r$  tal que  $\varphi(x, 0) = x$  y

$$\varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(t, x), s)$$

para todos  $t, s \in \mathbb{R}$  y  $x \in M$ . En tal caso se suele denotar  $\varphi_t(x)$  a  $\varphi(x, t)$ , denominar  $\varphi_t$  al flujo y escribirlo  $\varphi_t : M \rightarrow M$  flujo de clase  $C^r$ .

Denotamos por  $TM$  al fibrado tangente de  $M$ . Decimos que  $S$  es un *subfibrado continuo de  $TM$  de dimensión  $k$*  si  $S$  es un mapa que le asocia a cada punto  $x$  de  $M$  un subespacio  $S(x) \subset T_x M$  de dimensión  $k$  que varía continuamente con  $x$ . Es decir, que para todo  $x \in M$  existe  $U$  entorno de  $x$  y  $X_S^1, \dots, X_S^k$  campos continuos en  $U$ , y linealmente independientes en cada tangente, tales que  $S(y) = \langle X_S^1(y), \dots, X_S^k(y) \rangle \subset T_y M$  para todo  $y \in U$ .

Si  $S$  y  $S'$  son dos subfibrados continuos de  $TM$  tales que  $S(x) \cap S'(x) = \{0\} \subset T_x M$  para todo  $x \in M$ , entonces definimos la *suma de directa de Whitney* de los dos subfibrados,  $S \oplus S'$ , como  $(S \oplus S')(x) = S(x) \oplus S'(x)$ . Observar que  $S \oplus S'$  así construido es también un subfibrado continuo de  $TM$ .

## 2.2. Definición de flujo de Anosov, contexto genérico e independencia de la métrica

Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de clase  $C^1$  en  $M$  una 3-variedad riemanniana. Decimos que  $\varphi_t$  es un *flujo de Anosov* si existe una descomposición continua y  $D\varphi_t$ -invariante del fibrado tangente de  $M$  en tres subfibrados unidimensionales,  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ , de forma tal que el *fibrado central*  $E^c$  es tangente a las órbitas del flujo y los *fibrados estable*  $E^s$  e *inestable*  $E^u$  son uniformemente contraídos de forma exponencial por  $D\varphi_t$  hacia el futuro y pasado, respectivamente. Más precisamente:

**Definición 2.2.1 (Flujo de Anosov).** Un flujo  $\varphi_t : M \rightarrow M$  de clase  $C^1$  es un *flujo de Anosov* si:

1. Existen  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  subfibrados unidimensionales continuos de  $TM$  tales que  $D(\varphi_t)_x(E^s(x)) = E^s(\varphi_t(x))$ ,  $D(\varphi_t)_x(E^u(x)) = E^u(\varphi_t(x))$  y  $\langle \dot{\varphi}_t(x) \rangle = E^c(\varphi_t(x))$  para todo  $x \in M$  y  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Existen constantes  $C > 0$ ,  $\lambda > 0$  tales que

$$\begin{aligned} \|D(\varphi_t)_x(v_s)\| &\leq Ce^{-\lambda t}\|v_s\| \\ \|D(\varphi_{-t})_x(v_u)\| &\leq Ce^{-\lambda t}\|v_u\| \end{aligned}$$

para todo  $x \in M$ ,  $v_s \in E^s(x)$ ,  $v_u \in E^u(x)$  y  $t > 0$ .

◇

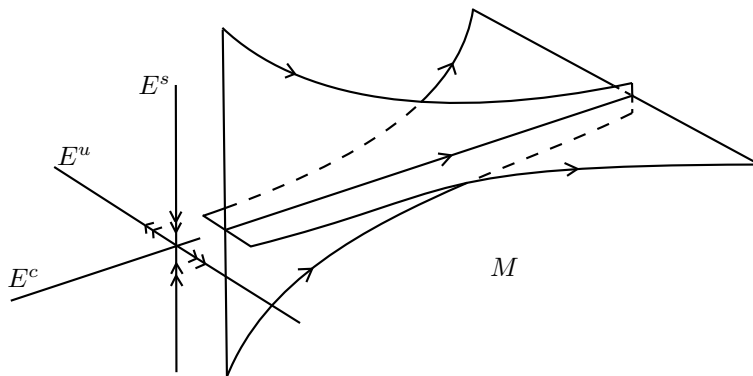


Figura 2.1: Aspecto local de un flujo de Anosov

Dos ejemplos clásicos de flujos de Anosov en 3-variedades son la suspensión de una difeomorfismo de Anosov en una superficie y el flujo geodésico en

superficies de curvatura constante negativa. Ambos ejemplos se desarrollarán en la sección 2.4 del presente capítulo.

Flujos y campos en una variedad están íntimamente ligados. Efectivamente si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es un flujo de clase  $C^r$  con  $r \geq 1$ , entonces  $\dot{\varphi}_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  es un campo de clase  $C^{r-1}$  en  $M$ . Recíprocamente, si  $X$  es un campo de clase  $C^r$  entonces al integrarlo se obtiene un flujo de clase  $C^r$  (ver diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales, [Sot, pág. 215]).

Denotemos  $\chi^r(M)$  al espacio de Banach de los campos de clase  $C^r$  en  $M$  dotado de la norma  $C^r$ . Decimos que  $X \in \chi^r(M)$  es  $C^r$ -estructuralmente estable si existe un entorno  $\mathcal{U} \subset \chi^r(M)$  de  $X$  tal que si  $Y \in \mathcal{U}$  es otro campo cualquiera en dicho entorno, entonces los flujos  $\varphi_t^X$  y  $\varphi_t^Y$ , que se obtienen integrando a  $X$  e  $Y$  respectivamente, son topológicamente equivalentes. Es decir, existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  que lleva las órbitas de  $\varphi_t^X$  en las de  $\varphi_t^Y$ .

Destacamos entonces el siguiente teorema debido a D. V. Anosov [A].

**Teorema 2.2.1 (Anosov).** *Sea  $X \in \chi^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , un campo que define un flujo de Anosov  $\varphi_t^X$  en  $M$  variedad riemanniana cerrada. Entonces  $X$  es  $C^r$ -estructuralmente estable. Además, el conjunto de los campos que determinan flujos de Anosov en la variedad  $M$  es abierto, en la topología inducida por la norma  $C^r$ , del espacio de Banach  $\chi^r(M)$ .*

Se define el conjunto no errante para un flujo  $\varphi_t$  como  $\Omega(\varphi_t) = \{x \in M : \forall t_0 > 0 \text{ y } \forall U \text{ entorno de } x \exists t > t_0 \text{ tal que } \varphi_{t_0}(U) \cap U \neq \emptyset\}$ . En [A] Anosov prueba además el siguiente resultado que también destacamos.

**Teorema 2.2.2 (Anosov).** *Sea  $\varphi_t$  un flujo de Anosov en  $M$  una variedad cerrada. Si el conjunto no errante  $\Omega(\varphi_t)$  es toda la variedad  $M$ , entonces las órbitas periódicas de  $\varphi_t$  son densas en  $M$ . Esto ocurre, en particular, si el flujo posee una medida invariante cuyo soporte es toda la variedad.*

Veamos a continuación que si la variedad  $M$  es cerrada entonces ser flujo de Anosov en  $M$  es independiente de la métrica riemanniana que se considere.

**Proposición 2.2.3.** *Si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada, entonces  $\varphi_t$  es un flujo de Anosov con respecto a cualquier métrica riemanniana que se considere en  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $\langle, \rangle_1$  la métrica en  $M$  con respecto a la que  $\varphi_t$  es flujo de Anosov y  $\langle, \rangle_2$  la otra métrica.

Puesto que en cada tangente  $T_pM$  las métricas son equivalentes y que las métricas varían continuamente con  $p$ , entonces para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $M$  y constantes  $C_1^U, C_2^U > 0$  tales que

$$C_1^U \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \frac{1}{C_2^U} \|v\|_2$$

para todo  $v \in T_qM$  con  $q \in U$ , donde  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  denotan las normas en el tangente inducidas por  $\langle, \rangle_1$  y  $\langle, \rangle_2$ , respectivamente.

Luego por compacidad de  $M$  existen constantes globales  $C_1, C_2 > 0$  tales que

$$\frac{1}{C_1} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C_2 \|v\|_2$$

para todo  $v \in T_pM$  y todo  $p \in M$ .

Luego si  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  denotan las constantes que hacen a  $\varphi_t$  flujo de Anosov con respecto a  $\langle, \rangle_1$  tenemos que

$$\|D(\varphi_t)_x(v_s)\|_2 \leq C_1 \|D(\varphi_t)_x(v_s)\|_1 \leq C_1 C e^{-\lambda t} \|v_s\|_1 \leq C_2 C_1 C e^{-\lambda t} \|v_s\|_2$$

para todo  $x \in M$ ,  $v_s \in E^s(x)$  y  $t > 0$ . Análogamente para el pasado para  $v_u \in E^u(x)$  y deducimos que  $\varphi_t$  es flujo de Anosov con respecto a  $\langle, \rangle_2$  con constantes  $C_2 C_1 C > 0$  y  $\lambda > 0$ . □

### 2.3. Teorema de la variedad estable local

Si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad, decimos que  $\eta : [0, 1] \rightarrow M$  es una *curva integral de  $E^s$*  o *curva tangente a  $E^s$*  si

$$\dot{\eta}(t) \in E^s(\eta(t))$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Análogamente se definen las curvas integrales de  $E^u$ .

Veamos que las curvas tangentes a  $E^s$  (resp.  $E^u$ ) permanecen tangentes a  $E^s$  (resp.  $E^u$ ) cuando son fluidas por  $\varphi_t$  y decrecen su longitud exponencialmente cuando  $t$  tiende  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ). Para una curva  $\eta$  denotamos  $\ell(\eta)$  a su longitud.

**Proposición 2.3.1.** *Si  $\eta : [0, 1] \rightarrow M$  es una curva integral de  $E^s$  (resp.  $E^u$ ) entonces:*

1.  $\varphi_t \circ \eta : [0, 1] \rightarrow M$  también es una curva integral de  $E^s$  (resp.  $E^u$ ) para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\ell(\varphi_t \circ \eta) \leq Ce^{-\lambda t} \ell(\eta)$  (resp.  $\ell(\varphi_{-t} \circ \eta) \leq Ce^{-\lambda t} \ell(\eta)$ ) para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Dado que el subfibrado  $E^s$  es  $D\varphi_t$ -invariante tenemos entonces que  $\frac{\partial(\varphi_t \circ \eta)}{\partial s}(s) = D(\varphi_t)_{\eta(s)}(\dot{\eta}(s)) \in E^s(\varphi_t \circ \eta(s))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y todo  $s \in [0, 1]$ . Luego  $\varphi_t \circ \eta$  queda curva integral de  $E^s$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y además

$$\ell(\varphi_t \circ \eta) = \int_0^1 \|D\varphi_t(\dot{\eta}(s))\| ds \leq \int_0^1 Ce^{-\lambda t} \|\dot{\eta}(s)\| ds = Ce^{-\lambda t} \ell(\eta).$$

Análogamente para  $\varphi_{-t} \circ \eta$  si  $\eta$  es curva integral de  $E^u$ .

□

Observar que los subfibrados continuos  $E^s$  y  $E^u$  inducen campos locales continuos en  $M$  y que, en virtud del teorema de existencia de Peano, pueden ser localmente integrados. Es decir, para todo  $x$  en  $M$  existe al menos una curva que pasa por  $x$  y es tangente cada subfibrado. Veamos que, de hecho, localmente solo puede existir una tal curva:

**Teorema 2.3.2 (Variedad estable local).** *Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada. Entonces existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  en  $M$  existe una única (a menos de su opuesta) curva  $\eta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  diferenciable tal que  $\eta(0) = x$ ,  $\|\dot{\eta}(t)\| = 1$  y  $\dot{\eta}(t) \in E^s(\eta(t))$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .*

Para una demostración en detalle de la prueba, usando en particular el teorema de Hadamard-Perron, citamos como referencia [KH, sección 17.4].

Damos a continuación una idea diferente de prueba (adaptada a partir de una idea extraída de [Po, pág 18]) que no usa el referido teorema y luego en el apéndice (ver Apéndice A) hacemos un desarrollo más detallado de la misma.

*Idea resumida de la prueba.* Supongamos, por contradicción, que  $E^s$  no es localmente únicamente integrable. Existe entonces  $x$  en  $M$  y  $\eta_1$  y  $\eta_2$  curvas tangentes a  $E^s$  tales que  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = x$  con  $\eta_1$  distinta de  $\eta_2$ . Podemos pensar que  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se separan exactamente en el punto  $x$ .

Tomamos ahora un punto  $y$  en la imagen de  $\eta_1$ , suficientemente cerca de  $x$  como para que al considerar una curva  $\nu$  que pase por  $y$  y sea tangente a  $E^u$  e iterar esta curva por  $\varphi_t$  (sigue siendo tangente a  $E^u$  por Proposición 2.3.1)

entonces alguna de estas curvas iteradas intersece a  $\eta_2$  en un punto  $z$ . Luego  $y$  y  $z$  están conectados por la concatenación de dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$  (posiblemente alguna de ellas constante) tales que  $\alpha$  es tangente a  $E^c$  y  $\beta$  es tangente a  $E^u$  (ver Figura 2.2).

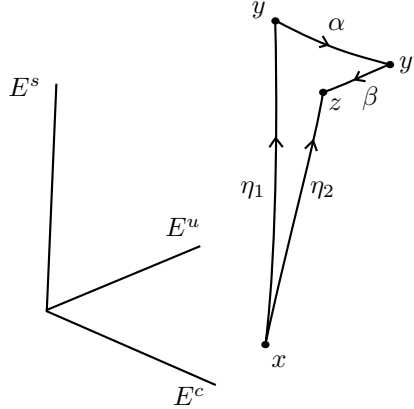


Figura 2.2

Por un lado, para el futuro  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se contraen exponencialmente y por lo tanto  $x$ ,  $y$  y  $z$  se acercan indefinidamente para el futuro. Por otro lado, la curva  $\alpha$  no puede decrecer su longitud indefinidamente y la curva  $\beta$  expande su longitud indefinidamente para el futuro. Manteniéndonos a escala suficientemente pequeña como para que los subfibrados  $E^c$ ,  $E^s$  y  $E^u$  sean suficientemente transversales y formando un ángulo entre ellos “casi constante” entonces esto nos da una contradicción.

Análogamente, para probar que el subfibrado  $E^u$  es localmente únicamente integrable se razona con el flujo  $\varphi_{-t}$ .

□

En el contexto del teorema anterior, denotamos  $W_\delta^{ss}(x)$  a  $\eta(-\delta, \delta)$  y la denominamos  $\delta$ -variedad estable fuerte local de  $x$ . Análogamente para  $W_\delta^{uu}(x)$  la  $\delta$ -variedad inestable fuerte local de  $x$ .

Observar que si  $y$  es un punto de  $W_\delta^{ss}(x)$ , entonces  $y = \eta(t_0)$  para cierto  $t_0 \in (-\delta, \delta)$  con  $\eta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tangente a  $E^s$  tal que  $\eta(0) = x$ . Luego por la Proposición 2.3.1 tenemos que  $\ell(\varphi_t \circ \eta) \leq Ce^{-\lambda t} \ell(\eta)$  para todo  $t > 0$ , siendo  $C, \lambda > 0$  las constantes de la definición de flujo de Anosov. Por lo tanto  $x$  e  $y$  se acercan indefinidamente para el futuro. Análogamente para  $y$  en  $W_\delta^{uu}(x)$  para el pasado. Es decir

$$W_\delta^{ss}(x) \subset \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\}$$

$$W_\delta^{uu}(x) \subset \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}.$$

En el capítulo 3 caracterizaremos completamente a los conjuntos  $\{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\}$  y  $\{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}$  como variedades inmersas en  $M$ , las denominadas *variedad estable fuerte* y *variedad inestable fuerte* de  $x$ .

## 2.4. Ejemplos de flujos de Anosov

### 2.4.1. Suspensión de difeomorfismos de Anosov en superficies

Sea  $S$  superficie riemanniana cerrada. Decimos que  $f : S \rightarrow S$  es un *difeomorfismo de Anosov* si existen subfibrados unidimensionales continuos y  $Df$ -invariantes,  $E^s$  y  $E^u$ , y constantes  $C > 0$ ,  $\lambda > 0$ , tales que

$$\|D(f^n)_x(v_s)\| \leq Ce^{-\lambda n} \|v_s\|$$

$$\|D(f^{-n})_x(v_u)\| \leq Ce^{-\lambda n} \|v_u\|$$

para todo  $x \in S$ ,  $v_s \in E^s(x)$ ,  $v_u \in E^u(x)$  y  $n > 0$ .

Si  $f$  es un difeomorfismo de Anosov en una superficie cerrada  $S$ , entonces necesariamente  $S$  es el toro  $\mathbb{T}^2$  y la dinámica de  $f$  es topológicamente conjugada a la de un automorfismo lineal hiperbólico de  $\mathbb{T}^2$  (ver [KH, pág. 587]).

Construiremos ahora la suspensión de  $f$  identificando adecuadamente los bordes de  $S \times [0, 1]$  de forma tal que las soluciones del campo constante  $(0, 0, 1)$  en  $T(S \times [0, 1]) \simeq TS \times T[0, 1]$  tengan mapa de primer retorno a  $S \times \{0\}$  idéntico a  $f$ . En cierta forma la suspensión de  $f$  será la versión continua de  $f$ , de modo tal que el tiempo 1 de la suspensión se comporte como  $f$  en cada sección  $S \times \{t\}$ . Probaremos luego que esta construcción nos define un flujo de Anosov en la 3-variedad  $S_f$  que se obtiene como resultado del pegado.

En  $S \times [0, 1]$  identificamos (cocientamos)  $(x, 1)$  con  $(f(x), 0)$ . Obtenemos de esta forma la variedad  $S_f$  a la que dotamos de la siguiente estructura diferenciable: Las parametrizaciones a puntos  $[(p, t)]$  con  $0 < t < 1$  se hacen de la forma  $\psi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_f$  tal que  $\psi(y, s) = [(\phi(y), s)]$  con  $\phi : U \rightarrow S$  del atlas de  $S$  tal que  $p \in \phi(U)$  y  $\epsilon < \min\{t, 1-t\}$ . Las parametrizaciones a puntos de la forma  $[(p, 1)] = [(f(p), 0)]$  se hacen de la forma  $\psi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_f$  con  $\phi : U \rightarrow S$  del atlas de  $S$  tal que  $p \in \phi(U)$ , con  $\epsilon < \frac{1}{2}$  y tal que  $\psi(y, s) = [(\phi(y), 1+s)]$  si  $s \leq 0$  y  $\psi(y, s) = [(f(\phi(y)), s)]$  si  $s \geq 0$ . Es directo



por cómo quedan los cambios de cartas ver que un atlas así construido dota a  $S_f$  de estructura de 3-variedad diferenciable.

Como ya dijimos, podemos ahora identificar  $T_{[(p,t)]}S_f$  con  $T_pS \times T_t\mathbb{R}$  y considerar el flujo  $\varphi_t : S_f \rightarrow S_f$  que se obtiene integrando el campo  $(0, 0, 1)$ . Decimos que  $\varphi_t$  es la *suspensión de  $f$* .

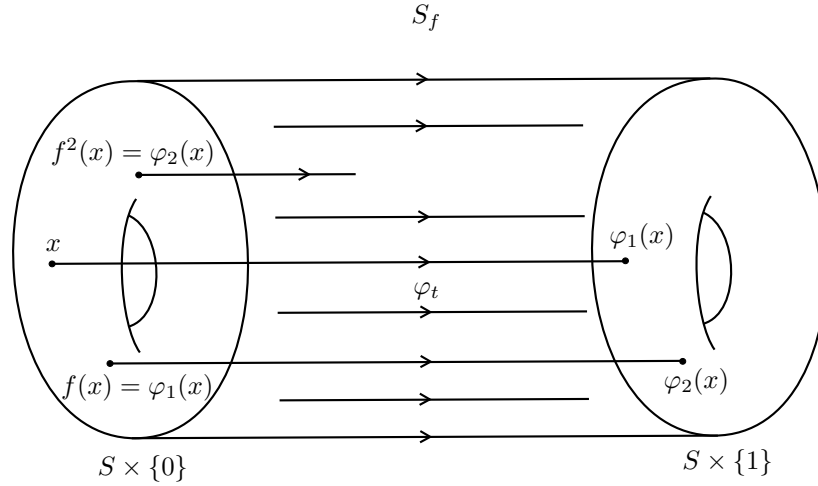


Figura 2.3: Suspensión de un difeomorfismo de Anosov en  $S$

Podemos fijar una métrica en  $S_f$  de la siguiente forma: Fijemos primero  $\{e_1(x), e_2(x)\}$  base ortonormal de  $T_xS$  que varíe diferenciablemente en función de  $x$ . En  $U_1 = \{[(x, s)] : x \in S, s \in (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})\}$  fijamos la métrica que hace que  $\{e_1, e_2, (0, 0, 1)\}$  sea una base ortonormal, y en  $U_2 = \{[(x, s)] : x \in S, s \in [0, \frac{2}{6}] \text{ o } s \in [\frac{4}{6}, 1]\}$  la que hace que o bien  $\{(e_1, e_2, (0, 0, 1))\}$  o bien  $\{(Df^{-1}(e_1), Df^{-1}(e_2), (0, 0, 1))\}$  sean bases ortonormales de  $T_{[(p,t)]}S_f$ , según si  $t \in [0, \frac{2}{6}]$  o  $t \in [\frac{4}{6}, 1]$ , respectivamente. Consideramos  $\{\rho_1, \rho_2\}$  partición de la unidad subordinada a  $\{U_1, U_2\}$  y “pegamos” ambas métricas según esta partición.

Luego el tiempo 1 de  $\varphi_t$  en  $S \times \{0\}$  es igual a  $f$  puesto que la métrica de  $S_f$  restringida a  $S \times \{0\}$  es exactamente igual a la de  $S$ . Luego los subfibrados estable e inestable  $E^s$  y  $E^u$  de  $f$  en  $TS$  los podemos ver como subespacios  $D\varphi_1$ -invariantes que varían continuamente en  $T(S \times \{0\})$ . Veamos que podemos extenderlos a todo  $TS_f$ . Efectivamente, podemos definir  $E^s$ ,  $E^u$  y también  $E^c$  en  $TS_f$  de la siguiente forma:  $E^s(\varphi_t[(p, 0)]) = D\varphi_t E^s([(p, 0)])$ ,  $E^u(\varphi_t[(p, 0)]) = D\varphi_t E^u([(p, 0)])$  y  $E^c = \langle (0, 0, 1) \rangle$ . Luego  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  son subfibrados continuos de  $TS_f$  invariantes por  $D\varphi_t$ .

Observar que  $\|(D\varphi_t)_x(v)\|$  está acotado y es no nulo para todo  $x \in S_f$ , para todo  $v$  de norma 1 y todo  $t \in [0, 1]$ , puesto que  $((x, v), t) \mapsto D(\varphi_t)_x(v)$  es una función continua no nula en  $T^1S_f \times [0, 1]$  compacto, donde  $T^1S_f$  denota el tangente unitario a  $S_f$ . Supongamos  $\|(D\varphi_t)_x(v)\| \leq k$  en  $T^1S_f \times [0, 1]$ .

Veamos que  $\varphi_t$  contrae y expande exponencialmente a lo largo de  $E^s$  y  $E^u$  para el futuro y pasado, respectivamente. Sea  $x \in S_f$  y  $v \in E^s(x)$ . Sea  $0 \leq t_0 < 1$  tal que  $\varphi_{t_0}(x) \in S \times \{0\}$ . Luego  $D(\varphi_{t_0})_x(v) \in E^s(\varphi_{t_0}(x))$  y luego para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  tenemos que

$$\|D(\varphi_{t_0+n})_x(v)\| \leq Ce^{-\lambda n} \|D(\varphi_{t_0})_x(v)\| \leq Ce^{-\lambda n} k \|v\|,$$

donde usamos en la primer desigualdad que  $f$  es Anosov en  $S$ . Luego escribiendo  $t = t_0 + n + t_1$  con  $0 \leq t_0 < 1$ ,  $0 \leq t_1 < 1$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$  tenemos que

$$\|D(\varphi_t)_x(v)\| \leq Ce^{-\lambda n} k^2 \|v\| \leq C'e^{-\lambda t} \|v\|$$

para todo  $t > 0$ , eligiendo adecuadamente la constante  $C' > 0$ . Análogamente,  $E^u$  contrae exponencialmente para el pasado.

Hemos probado entonces en los párrafos precedentes el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $f : S \rightarrow S$  un difeomorfismo de Anosov en una superficie cerrada  $S$ . Entonces la suspensión  $\varphi_t$  de  $f$  es un flujo de Anosov en la 3-variedad  $S_f$ .*

Comentamos que es natural deducir propiedades de  $\varphi_t$  en  $S_f$  a partir de propiedades conocidas de  $f$  en  $S$ .

En particular, dado que  $f : S \rightarrow S$  es topológicamente conjugado a un automorfismo lineal del toro, entonces los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $S$  y  $f$  es topológicamente transitivo (ver [KH, sección 1.8]). Luego  $\varphi_t : S_f \rightarrow S_f$  también tiene órbitas periódicas densas y es topológicamente transitivo.

## 2.4.2. Flujo geodésico en superficies de curvatura constante negativa

### Flujo geodésico en $\mathbb{H}^2$

Sea  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  el semiplano superior abierto con la estructura de variedad diferenciable heredada de  $\mathbb{C}$ . Dotamos a  $\mathbb{H}^2$  de la *métrica hiperbólica* o *métrica de Poincaré*  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}^2}$ :

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{H}^2} := \frac{\langle v, w \rangle_{\text{euclidea}}}{(\text{Im}(z))^2}$$

para todo  $z \in \mathbb{H}$  y  $v, w \in T_z\mathbb{H}^2$ . Denominamos a  $\mathbb{H}^2$  con la métrica hiperbólica el *plano hiperbólico*.

Enunciamos previamente algunos resultados que usaremos sobre el plano hiperbólico cuyas demostraciones pueden encontrarse en [KH, sección 5.4]

**Proposición 2.4.2.** *El plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  tiene curvatura constante  $-1$ .*

**Proposición 2.4.3.** *Las isometrías de  $\mathbb{H}^2$  son exactamente el grupo de transformaciones (con el producto dado por la composición) generado por las transformaciones de Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc > 0$ , junto con la simetría axial  $z \mapsto -\bar{z}$ .*

**Proposición 2.4.4.** *Dados dos puntos  $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$ , y dos vectores unitarios  $v_1 \in T_{p_1}\mathbb{H}^2$  y  $v_2 \in T_{p_2}\mathbb{H}^2$ , existe una única transformación de Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc > 0$  tal que  $T(p_1) = p_2$  y  $DT_{p_1}(v_1) = v_2$ .*

Veamos en una primera etapa que el flujo geodésico en el plano hiperbólico es un flujo de Anosov con respecto a una cierta métrica “natural”.

Denotemos por  $T^1\mathbb{H}^2$  al tangente unitario a  $\mathbb{H}^2$ , es decir,

$$T^1\mathbb{H}^2 = \{(p, v) : p \in \mathbb{H}^2 \text{ y } v \in T_p\mathbb{H}^2 \text{ con } \|v\| = 1\}.$$

Observar que, dado que  $\mathbb{H}^2$  es simplemente conexo, entonces  $T^1\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{H}^2 \times S^1$ . Tenemos pues que  $T_{(p,v)}(T^1\mathbb{H}^2) \simeq T_p\mathbb{H}^2 \times T_vS^1$ .

Sabemos que para cada  $(p, v) \in T^1\mathbb{H}^2$  existe una única geodésica  $t \mapsto \eta_t(p)$  tal que  $\eta_0(p) = p$  y  $\dot{\eta}_0(p) = v$ . Denominamos al flujo  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2} = (\eta_t, \dot{\eta}_t) : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^2$  el *flujo geodésico* en  $\mathbb{H}^2$ .

Para toda  $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  isometría de  $\mathbb{H}^2$  podemos considerar la transformación  $\Psi_T : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^2$  definida como  $\Psi_T(p, v) = (T(p), DT_p(v))$ .

Fijamos en  $T^1\mathbb{H}^2$  la siguiente métrica: En  $T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)$  fijamos  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset T_i\mathbb{H}^2 \times T_iS^1$  como base ortonormal, y luego para cada  $(p, v) \in T^1\mathbb{H}^2$  consideramos la isometría  $T$  de  $\mathbb{H}^2$  tal que  $\Psi_T(i, i) = (p, v)$  (existe y es única a menos de precomponer con  $z \mapsto -\bar{z}$  por Proposiciones 2.4.4 y 2.4.4) y fijamos  $\{D\Psi_T(1, 0, 0), D\Psi_T(0, 1, 0), D\Psi_T(0, 0, 1)\}$  como base ortonormal de  $T_{(p,v)}(T^1\mathbb{H}^2)$ , es decir,

$$\langle u, u' \rangle_{T_{(p,v)}(T^1\mathbb{H}^2)} = \langle D\Psi_T^{-1}(u), D\Psi_T^{-1}(u') \rangle_{T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)}$$

para todo  $u, u' \in T_{(p,v)}(T^1\mathbb{H}^2)$ . Dado que  $\langle D\Psi_T^{-1}(u), D\Psi_T^{-1}(u') \rangle_{T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)} = \langle D\Psi_{z \mapsto -\bar{z} \circ T}^{-1}(u), D\Psi_{z \mapsto -\bar{z} \circ T}^{-1}(u') \rangle_{T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)}$  entonces la métrica anterior está efectivamente bien definida independiente de cuál isometría  $T$  se considere.

Luego si  $T$  es una isometría cualquiera de  $\mathbb{H}^2$  y  $(p_2, v_2) = \Psi_T(p_1, v_1)$  con  $(p_1, v_1), (p_2, v_2) \in T^1\mathbb{H}^2$  entonces existen únicas (a menos de precomponer con  $z \mapsto -\bar{z}$ ) isometrías  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathbb{H}^2$  tales que  $\Psi_{T_1}(i, i) = (p_1, v_1)$  y  $\Psi_{T_2}(i, i) = (p_2, v_2)$  y luego, por unicidad,  $T_2 = T \circ T_1$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle u, u' \rangle_{T_{(p_1, v_1)}(T^1\mathbb{H}^2)} &= \langle D\Psi_{T_1}^{-1}(u), D\Psi_{T_1}^{-1}(u') \rangle_{T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)} \\ &= \langle D\Psi_T^{-1}(D\Psi_{T_2}^{-1}(u)), D\Psi_T^{-1}(D\Psi_{T_2}^{-1}(u')) \rangle_{T_{(i,i)}(T^1\mathbb{H}^2)} \\ &= \langle D\Psi_{T_2}^{-1}(u), D\Psi_{T_2}^{-1}(u') \rangle_{T_{(p_2, v_2)}(T^1\mathbb{H}^2)} \end{aligned}$$

para todo  $u, u'$  en  $T_{(p_1, v_1)}(T^1\mathbb{H}^2)$ . Es decir,  $\Psi_T$  es una isometría de  $T^1\mathbb{H}^2$  para toda  $T$  isometría de  $\mathbb{H}^2$ .

Luego a partir de la Proposición 2.4.4 tenemos que las isometrías de la forma  $\Psi_T$  con  $T$  isometría de  $\mathbb{H}^2$  actúan transitivamente en  $T^1\mathbb{H}^2$ . Aprovecharemos este hecho para que, luego de estudiar explícitamente el comportamiento asintótico con respecto al flujo geodésico  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$  de ciertas curvas que contienen al punto  $(i, i) \in T^1\mathbb{H}^2$ , poder extender luego los resultados obtenidos a curvas que pasan por todo punto de  $T^1\mathbb{H}^2$ .

Efectivamente, veamos primero que los puntos de

$$W^{ss}(i, i) := \{(p, i) \in T^1\mathbb{H}^2 : p \in (\mathbb{R} + i)\}$$

se acercan exponencialmente para el futuro al ser fluidos por  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$ . Es una cuenta directa ver que para todo  $s \in \mathbb{R}$  la geodésica con punto inicial  $s+i \in \mathbb{H}^2$  y vector inicial  $i$  es explícitamente  $t \mapsto (s+e^t i, e^t i)$ , es decir,  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}(s+i, i) = (s+e^t i, e^t i)$  para todo  $(s+i, i) \in W^{ss}(i, i)$ . Luego, dado que  $(r+e^t i, i) = D\Psi_{(z \mapsto z+r) \circ (z \mapsto e^t z)}(i, i)$  para todo  $r \in [0, s]$ , entonces el largo de la curva  $\gamma : [0, s] \rightarrow T^1\mathbb{H}^2$  tal que  $\gamma(r) = (r+e^t i, i)$  para  $s \neq 0$  es

$$\ell(\gamma) = \int_0^s \|\dot{\gamma}(r)\|_{\gamma(r)} dr = \int_0^s \|(1, 0, 0)\|_{\gamma(r)} dr = \int_0^s \|(e^{-t}, 0, 0)\|_{(i, i)} dr = e^{-t} s,$$

es decir, el flujo  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$  contrae exponencialmente para el futuro a  $W^{ss}(i, i)$ .

Luego por ser  $\Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}}$  isometría de  $T^1\mathbb{H}^2$  también se acercan exponencialmente para el futuro los iterados por  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$  de  $\Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}}(W^{ss}(i, i))$ . Puesto que

$\Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}}(i, i) = (i, -i)$  y que  $\varphi_{-t}^{\mathbb{H}^2}(i, i) = \varphi_t^{\mathbb{H}^2}(i, -i) = \Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}} \circ \varphi_t^{\mathbb{H}^2}(i, i)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces los puntos de

$$W^{uu}(i, i) := \{(p, -v) : (p, v) \in \Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}}(W^{ss}(i, i))\}$$

de acercan exponencialmente para el pasado al ser fluidos por  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$ .

Observar que  $W^{ss}(i, i)$  y  $W^{uu}(i, i)$  son subvariedades diferenciables de dimensión 1 de  $T^1\mathbb{H}^2$  que se proyectan respectivamente por  $\pi_1(p, v) := p$  a los *horociclos*  $\mathbb{R} + i$  y  $\partial B(i/2, 1/2)$  (llamamos *horociclos* a las circunferencias tangentes a  $\partial\mathbb{H}^2$  o rectas horizontales en  $\mathbb{H}^2$ ).

Luego, puesto que por la Proposición 2.4.4 para cada punto  $(p, v)$  de  $T^1\mathbb{H}^2$  existe una única Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc > 0$  tal que  $\Psi_T(i, i) = (p, v)$ , y que en tal caso  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}(p, v) = \Psi_T \circ \varphi_t^{\mathbb{H}^2}(i, i)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  por ser  $\Psi_T$  isometría, entonces los puntos de

$$W^{ss}(p, v) := \Psi_T(W^{ss}(i, i)) \text{ y}$$

$$W^{uu}(p, v) := \Psi_T(W^{uu}(i, i))$$

se acercan exponencialmente para el futuro y pasado, respectivamente (ver Figura 2.4).

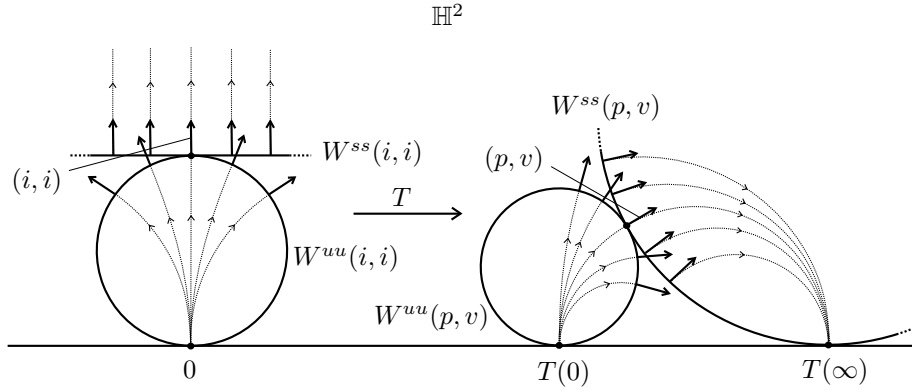


Figura 2.4

Parametrizando  $W^{ss}(i, i)$  como  $\alpha(t) = (t + i, i)$  y  $W^{uu}(i, i)$  como  $\beta(t) = \Psi_{z \mapsto 1/\bar{z}}(t + i, i)$  podemos definir

$$E^s(p, v) = \left\langle \frac{\partial(\Psi_T \circ \alpha)}{\partial t}(0), \right\rangle,$$

$$E^u(p, v) = \left\langle \frac{\partial(\Psi_T \circ \beta)}{\partial t}(0), \right\rangle,$$

siendo  $T$  la única Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc > 0$  de  $\mathbb{H}^2$  tal que  $\Psi_T(i, i) = (p, v)$ .

Luego es directo observar que  $E^s$  y  $E^u$  son subfibrados unidimensionales  $D\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$ -invariantes sobre los que  $D\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$  contrae para el futuro y pasado, respectivamente. Hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.5.** *El flujo geodésico del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  es un flujo de Anosov en el tangente unitario  $T^1\mathbb{H}^2$ .*

### Flujo geodésico en $S$ superficie orientable compacta de curvatura contante negativa

Sea  $S$  una superficie orientable compacta de género  $g \geq 2$  con curvatura constante  $-1$ . Usaremos ahora el siguiente resultado (ver [dC, pág. 165]).

**Proposición 2.4.6.** *Existe  $\pi^S : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  cubrimiento localmente isométrico.*

Dado que las transformaciones de recubrimiento de  $\pi^S$  deben necesariamente ser isometrías de  $\mathbb{H}^2$ , entonces  $\pi^S$  induce un cubrimiento localmente isométrico  $\pi^{T^1S} : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1S$  tal que las transformaciones de recubrimiento son las isometrías de la forma  $\Psi_T$  con  $T$  transformación de recubrimiento de  $\pi^S$ .

De esta forma podemos “bajar” por  $\pi^{T^1S}$  el flujo geodésico  $\varphi_t^{\mathbb{H}^2}$  en  $T^1\mathbb{H}^2$  y “llegar” exactamente al flujo geodésico  $\varphi_t^S$  en  $T^1S$ .

Dado que los subfibrados  $E^s$  y  $E^u$  son invariantes por las isometrías de la forma  $\Psi_T$  con  $T$  isometría de  $\mathbb{H}^2$  entonces también bajan a  $T^1S$  por  $\pi^{T^1S}$  a dos subfibrados continuos de  $T^1S$  e invariantes por  $D\varphi_t^S$ .

Las propiedades de contracción exponencial para el futuro y pasado se mantienen en cada subfibrado ya que  $\pi^{T^1S}$  es isometría local y por lo tanto obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.7.** *El flujo geodésico en una superficie cerrada  $S$  de curvatura constante negativa es un flujo de Anosov en el tangente unitario  $T^1S$  de  $S$ .*

Destacamos que estos flujos (flujos geodésicos en superficies cerradas de curvatura constante negativa) se sabe que preservan una forma de volumen natural y son ergódicos con respecto a ella (ver, por ejemplo, [AS]).

Luego, como consecuencias del Teorema 2.2.2, lo anterior implica que las órbitas periódicas de estos flujos son densas en  $T^1S$ , es decir: Si  $S$  es una superficie cerrada de curvatura constante negativa, entonces para todo punto-vector  $(p, v) \in T^1S$  existe un punto-vector  $(p', v') \in T^1S$  tan cerca como se quiera de  $(p, v)$  tal que la geodésica en  $S$  que parte de  $p'$  con velocidad inicial  $v'$  es una geodésica cerrada.

### 2.4.3. Otros ejemplos

Existe una variada gama de ejemplos de flujos de Anosov en 3-variedad más allá de los dos vistos anteriormente.

Por ejemplo en [FW] J. Franks y R. Williams construyen los primeros ejemplos no transitivos (es decir, tales que el conjunto no errante  $\Omega(\varphi_t)$  no es todo  $M$ ). Este resultado contrasta significativamente con uno de A. Verjovsky [V2] que afirma que todo flujo de Anosov de codimensión 1 (en 3-variedades todo flujo de Anosov es de codimensión 1) en una variedad cerrada de dimensión mayor que 3 es necesariamente transitivo.

Otros ejemplos fueron dados por M. Handel y W. P. Thurston [HT], S. Goodman [Go], C. Bonnati y R. Langevin [BL] y T. Barbot [Ba].

Recientemente, nuevos ejemplos con propiedades muy particulares fueron contruidos por Beguin, Bonatti y Yu en [BBY].

En particular, permanece abierta y es objeto de investigación actual la determinación de qué 3-variedades admiten o no flujos de Anosov.

### 3. Foliaciones y teorema de la variedad estable para flujos de Anosov

En el presente capítulo definiremos la noción de *foliación* de una variedad. Posteriormente demostraremos el *teorema de la variedad estable para flujos de Anosov en 3-variedades* así como otros resultados relacionados. Obtendremos de esta forma un primer panorama del comportamiento global de los flujos de Anosov en 3-variedades.

#### 3.1. Foliaciones

Citamos como referencia para esta sección [CLN].

**Definición 3.1.1 (Foliación).** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con atlas  $\Lambda$  y sea  $r \geq 0$ . Una *foliación de dimensión  $k$  y clase  $C^r$* , o *foliación de codimensión  $s = n - k$  y clase  $C^r$* , es un atlas  $\mathcal{F}$  de  $M$  que es maximal con respecto a las siguientes propiedades:

1. Los cambios de cartas  $\Psi^{-1} \circ \psi$  son de clase  $C^r$  para cualesquiera  $\psi \in \mathcal{F}$  y  $\Psi \in \Lambda$ .
2. Las cartas de  $\mathcal{F}$  son de la forma  $\psi : U_1 \times U_2 \rightarrow M$ , donde  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$  y  $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$  son discos abiertos.
3. Si  $\psi : U_1 \times U_2 \rightarrow M$  y  $\phi : V_1 \times V_2 \rightarrow M$  son dos cartas de  $\mathcal{F}$  tales que  $\psi(U_1 \times U_2) \cap \phi(V_1 \times V_2) \neq \emptyset$ , entonces el cambio de coordenadas  $\phi^{-1} \circ \psi$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$ , u homeomorfismo en el caso  $r = 0$ , de la forma  $(\phi^{-1} \circ \psi)(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$  para todo  $(x, y) \in \psi^{-1}(\psi(U_1 \times U_2) \cap \phi(V_1 \times V_2)) \subset U_1 \times U_2$ .

◇

Dada una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  y  $\psi : U_1 \times U_2 \rightarrow M$  una carta de  $\mathcal{F}$ , denominamos a  $\psi$  *mapa distinguido de  $\mathcal{F}$*  y *entorno distinguido de  $\mathcal{F}$*  a  $\psi(U_1 \times U_2)$ .

Los conjuntos de la forma  $\psi(U_1 \times \{c\})$  con  $c \in U_2$  son llamados *placas de  $\psi(U)$*  o *placas de  $\mathcal{F}$* . Observar que, fijado  $c \in U_2$ , el mapa  $\psi|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow M$  es un encaje  $C^r$  y que, por lo tanto, las placas constituyen  $k$ -subvariedades conexas de clase  $C^r$  en  $M$ , siendo  $k$  la dimensión de la foliación.



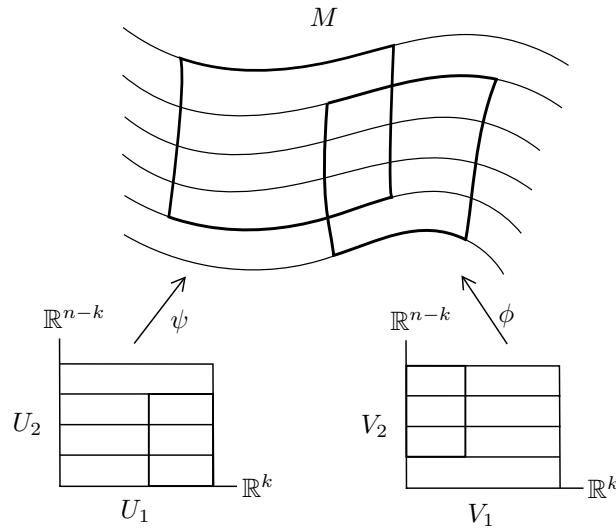


Figura 3.1: Aspecto local de una foliación en  $M$

Es más, observar que si  $\alpha$  y  $\beta$  son placas de  $\psi(U)$ , entonces o bien  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  o bien  $\alpha = \beta$ .

Llamamos *camino de placas de  $\mathcal{F}$*  a una secuencia finita de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  de  $\mathcal{F}$  tales que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j = 1, \dots, l-1$ . Dado que  $M$  está cubierto por placas de  $\mathcal{F}$ , podemos definir en  $M$  la siguiente clase de equivalencia: “ $p$  está en relación con  $q$ ” si y sólo si existe un camino de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  tales que  $p \in \alpha_1$  y  $q \in \alpha_l$ . Llamamos *hojas de  $\mathcal{F}$*  a las clases de equivalencia de esta relación.

**Ejemplo 3.1.1.** *Foliaciones definidas por sumersiones.*

Sea  $f : M^n \rightarrow N^m$  una sumersión de clase  $C^r$  con  $r \geq 1$ . A partir de la forma local de las sumersiones tenemos que, dado  $p \in M$  y  $q = f(p) \in N$ , existen parametrizaciones  $\phi : U \rightarrow M$  y  $\psi : V \rightarrow N$ , con  $p \in \phi(U)$  y  $q \in \psi(V)$ , tales que  $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ ,  $U_2 \subset V$  y  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$  coincide con la proyección  $(x, y) \mapsto y$ .

Luego es claro que las parametrizaciones  $\{(\phi, U)\}$  así construidas forman un atlas que define una foliación de clase  $C^r$  y codimensión  $m$  en  $M$ . Las hojas de esta foliación son las componentes conexas de los conjuntos de nivel  $f^{-1}(c)$  con  $c \in N$ .

**Ejemplo 3.1.2.** *Foliación de Reeb en  $D^2 \times S^1$ .*

Usando el ejemplo anterior, consideremos explícitamente la sumersión  $f : D^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  definida como  $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3 - e^{\frac{1}{1-r^2}}}$  si

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$  y  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  si  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ . Luego la foliación inducida por  $f$  en el interior de  $D^2 \times \mathbb{R}$  tiene por hojas a los gráficos de las funciones  $x_3 = e^{\frac{1}{1-r^2}} + b$  con  $b \in \mathbb{R}$ . Es más, extendiendo  $f$  adecuadamente al exterior de  $D^2 \times \mathbb{R}$  es posible extender esta foliación a  $\mathbb{R}^3$  de forma tal que  $\partial D^2 \times \mathbb{R}$  es una hoja cilíndrica de esta foliación, al igual que todas las hojas del exterior de  $D^2 \times \mathbb{R}$ .

En  $D^2 \times \mathbb{R}$  identificamos ahora los puntos  $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$  si y sólo si  $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$  y  $(x_3 - y_3) \in \mathbb{Z}$ . La variedad cociente  $(D^2 \times \mathbb{R})/\sim$  es luego difeomorfa a  $D^2 \times S^1$  y, dado que la foliación definida anteriormente en  $D^2 \times \mathbb{R}$  es invariante por traslaciones en el sentido del eje  $x_3$  (es decir, estas traslaciones llevan hojas en hojas), entonces se induce una foliación  $\mathcal{F}$  de clase  $C^\infty$  en  $D^2 \times S^1$ . Observar que podemos considerar  $\partial D^2 \times S^1$  como una (única) hoja compacta de esta foliación, y que las restantes hojas del interior de  $D^2 \times S^1$  son todas homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y acumulan sólo en el borde de  $D^2 \times S^1$ . Denominamos a  $\mathcal{F}$  *foliación de Reeb de  $D^2 \times S^1$* .

En la Figura 3.2 se representa una porción de hoja interna de la foliación de Reeb en  $D^2 \times S^1$  y una sección de la foliación a lo largo de un corte transversal a las hojas.

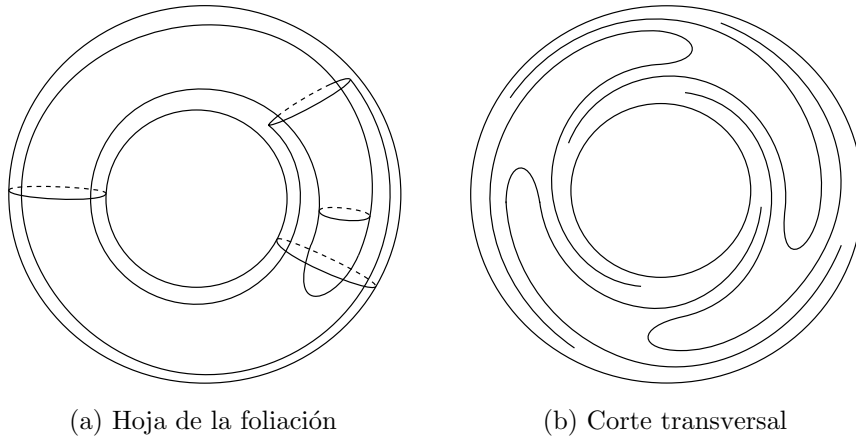


Figura 3.2: Foliación de Reeb en  $D^2 \times S^1$

**Ejemplo 3.1.3.** *Foliación de Reeb en  $S^3$ .*

La foliación de Reeb en  $S^3$  será una foliación de clase  $C^\infty$  y codimensión 1 en la 3-esfera  $S^3$ . Para construirla usaremos que podemos descomponer a  $S^3$  como unión de dos toros sólidos cuya intersección (y borde de ambos toros sólidos) es

un 2-toro, y luego usaremos el ejemplo anterior. Efectivamente, si consideramos la esfera  $S^3$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  como  $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$ , entonces no es difícil ver que el toro sólido  $T_1$  definido por las ecuaciones  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$  y  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}$  y el toro sólido complementario  $T_2$  definido por  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$  y  $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$  cumplen que su unión es todo  $S^3$ , que la intersección entre ellos es el 2-toro que es borde de ambos y que, dentro de dicho 2-toro borde, los meridianos de  $\partial T_1$  se identifican con los paralelos de  $\partial T_2$  y viceversa.

Luego usando la foliación construida en el ejemplo anterior, obtenemos la *foliación de Reeb* en  $S^3$  uniendo una foliación de Reeb de  $T_1$  con una de  $T_2$ . De esta forma obtenemos una foliación de codimensión 1 y clase  $C^\infty$  en  $S^3$  que posee una única hoja compacta que es homeomorfa a un 2-toro,  $\partial T_1 = \partial T_2$ , y tal que las restantes hojas son todas homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y acumulan todas en la hoja compacta de la foliación.

### 3.2. Teorema de la variedad estable para flujos de Anosov

Los enunciados de la presente sección fueron extraídos de [V2].

#### **Teorema 3.2.1 (Teorema de la variedad estable para flujos de Anosov).**

*Sea  $\varphi_t$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada. Entonces existen dos foliaciones  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{uu}$  de dimensión 1, y dos foliaciones  $\mathcal{F}^{cs}$  y  $\mathcal{F}^{cu}$  de dimensión 2, tales que:*

1. *Ambas foliaciones  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{uu}$  son invariantes por el flujo  $\varphi_t$ , es decir, para todo  $x \in M$  y  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que*

$$\varphi_t(W^{ss}(x)) = W^{ss}(\varphi_t(x)) \quad \text{y} \quad \varphi_t(W^{uu}(x)) = W^{uu}(\varphi_t(x)),$$

*donde  $W^{ss}(x)$  y  $W^{uu}(x)$  denotan las hojas de  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{uu}$  que contienen a  $x$ .*

2. *Las variedades  $W^{ss}(x)$  y  $W^{uu}(x)$  son imágenes de inmersiones inyectivas de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  en  $M$  y son tangentes a los subfibrados  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente. Además, ambas se obtienen explícitamente como*

$$W^{ss}(x) = \bigcup_{t>0} \varphi_{-t}(W_\delta^{ss}(\varphi_t(x))) \quad \text{y} \quad W^{uu}(x) = \bigcup_{t>0} \varphi_t(W_\delta^{ss}(\varphi_{-t}(x))).$$

3. *Las hojas  $W^{cs}(x)$  de  $\mathcal{F}^{cs}$  y  $W^{cu}(x)$  de  $\mathcal{F}^{cu}$  son de clase  $C^1$  y tangentes a los subfibrados  $E^s \oplus E^c$  y  $E^c \oplus E^u$ , respectivamente. Se encuentran descritas explícitamente como*

$$W^{cs}(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\varphi_t(x)) \quad \text{y} \quad W^{cu}(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(\varphi_t(x)).$$

*Ambas son, por lo tanto, invariantes por el flujo  $\varphi_t$ . Además, son siempre imágenes de inmersiones inyectivas de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $M$  o de  $S^1 \times \mathbb{R}$  en  $M$ . Esto último ocurre si y sólo si la hoja contiene exactamente una órbita periódica y, en tal caso, la clase de homotopía de esta órbita periódica genera el grupo fundamental de la hoja que la contiene.*

*Demostración.* Probaremos el teorema para las foliaciones  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{cs}$ . Para  $\mathcal{F}^{uu}$  y  $\mathcal{F}^{cu}$  los argumentos son análogos.

### Construcción de las foliaciones $\mathcal{F}^{ss}$ y $\mathcal{F}^{cs}$

A partir del teorema de la variedad estable local (Teorema 2.3.2), sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  en  $M$  existe una única (a menos de su opuesta) curva  $t \mapsto \eta_t(x)$  con  $t$  variando en  $(-\delta, \delta)$  y tal que  $\eta_0(x) = x$ ,  $\|\dot{\eta}_t(x)\| = 1$  y  $\dot{\eta}_t(x) \in E^s(\eta_t(x))$  para todo  $t$  en  $(-\delta, \delta)$ . Análogamente definimos  $t \mapsto \nu_t(x)$  tangente a  $E^u$  definida también en  $(-\delta, \delta)$ .

Observemos ahora que, a partir de la continuidad de la solución general con respecto a las condiciones iniciales (ver [Sot, pág. 34]), tenemos que  $\eta_t(x)$  y  $\nu_t(x)$  varían de forma continua con respecto a  $x$  y  $t$  por ser soluciones de dos campos unitarios continuos en un entorno de  $x$ .

Consideremos entonces el mapa  $\Psi_x(r, s, t) = \varphi_r \circ \eta_s \circ \nu_t(x)$ , bien definido en  $(-\delta, \delta)^3$  para  $\delta > 0$  suficientemente chico pero uniforme en  $M$ .

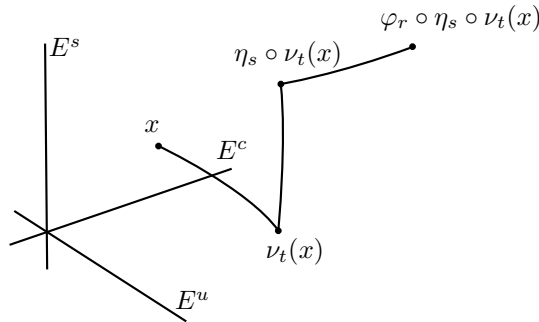


Figura 3.3

Observar que  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  varían continuamente en  $M$  compacto y que por lo tanto podemos acotar por debajo por una constante positiva global el ángulo

mínimo que se forma entre dos cualesquiera de los subfibrados. Luego podemos asegurar que existe un radio de entorno  $R > 0$  uniforme en  $M$  para el cual dos curvas cualesquiera tangentes a dos subfibrados distintos e incluidas en una bola de radio menor que  $R$  se cortan a lo sumo en un punto. Consideremos a partir de ahora  $\delta$  suficientemente chico como para que  $\Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  quede contenido en un tal entorno para todo  $x$  en  $M$ . Esta consideración será útil para ciertos argumentos posteriores.

Veamos que  $\Psi_x$  es inyectivo. Si  $\varphi_r \circ \eta_s \circ \nu_t(x) = \varphi_{r'} \circ \eta_{s'} \circ \nu_{t'}(x)$  entonces  $\eta_s \circ \nu_t(x) = \varphi_{r'-r} \circ \eta_{s'} \circ \nu_{t'}(x)$ . Luego, puesto que  $h \mapsto \varphi_{r'-r} \circ \eta_h \circ \nu_{t'}(x)$  y  $h \mapsto \eta_h \circ \nu_t(x)$  son curvas tangentes a  $E^s$  (la primera por Proposición 2.3.1) que coinciden en un punto, entonces por integrabilidad local única de  $E^s$  coinciden en la intersección de sus imágenes y, por lo tanto, cortan a  $\{\nu_h(x) : h \in (-\delta, \delta)\}$  en el mismo punto por lo visto en párrafo anterior. Luego  $\nu_t(x) = \nu_{t'}(x)$ , de donde necesariamente  $t = t'$  y, por un razonamiento similar,  $r = r'$ . De esto último se deduce finalmente  $s = s'$  y la inyectividad queda probada.

Puesto que entonces  $\Psi_x$  es continua e inyectiva, por el teorema de invariancia del dominio [M, Teorema 36.5] tenemos que  $\Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  es abierto y  $\Psi_x$  un homeomorfismo sobre su imagen.

**Lema 3.2.2.** *Existe  $\delta' > 0$  tal que para cualesquiera dos entornos  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  y  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  que cumplan que  $(\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cap \Psi_y((-\delta', \delta')^3)) \neq \emptyset$  existe algún  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$  tal que  $(\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cup \Psi_y((-\delta', \delta')^3)) \subset \Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ .*

*Prueba.* Sea  $\rho > 0$  número de Lebesgue del cubrimiento  $\{\Psi_x((-\delta, \delta)^3)\}_{x \in M}$  de  $M$ . Dado que las curvas  $t \mapsto \eta_t(x)$  y  $t \mapsto \nu_t(x)$  tiene velocidad 1, y que el flujo  $\varphi_t$  tiene velocidad acotada (por estar definido en el compacto  $M$ ), entonces podemos asegurar que existe  $\delta' > 0$  tal que el diámetro de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  es menor que  $\rho/2$  para todo  $x$  en  $M$ . Luego la tesis se sigue inmediatamente. ■

Luego, tomando  $\delta'$  como en el lema anterior, los mapas  $\{\Psi_x|_{(-\delta', \delta')^3}\}_{x \in M}$  forman un atlas de  $M$  que, como veremos, nos definirá simultáneamente las foliaciones  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{cs}$ .

A cada  $\Psi_x(\{d\} \times (-\delta', \delta') \times \{c\}) = \{\varphi_d \circ \eta_s \circ \nu_c(x) : s \in (-\delta', \delta'), \text{ con } (d, c) \in (-\delta', \delta')^2\}$  lo denominamos 1-placa de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$ . Análogamente, a cada  $\Psi_x((-\delta', \delta')^2 \times \{c\}) = \{\varphi_r \circ \eta_s \circ \nu_c(x) : (r, s) \in (-\delta', \delta')^2\}$ , con  $c \in (-\delta', \delta')$ ,

lo denominamos 2-placa de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$ . Definimos las 1-placas y 2-placas de  $\Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  de manera análoga.

Observar que en cada entorno  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  las 2-placas se obtienen haciendo fluir por  $\varphi_t$  entre  $(-\delta, \delta)$  las 1-placas que contienen a los puntos de la forma  $\nu_c(x)$  con  $c \in (-\delta, \delta)$ . Observar también que, puesto que  $s \mapsto \varphi_d \circ \eta_s \circ \nu_c(x)$  es tangente a  $E^s$ , entonces las 1-placas son tangentes a  $E^s$  y, consecuentemente, las 2-placas son tangentes a  $E^s \oplus E^c$ .

Veamos ahora que efectivamente el atlas  $\{\Psi_x|_{(-\delta', \delta')^3}\}_{x \in M}$  es una foliación de clase  $C^0$  de  $M$ . Sean  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  y  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  tales que  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cap \Psi_y((-\delta', \delta')^3) \neq \emptyset$ . Entonces por el Lema 3.2.2 existe algún  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$  tal que  $(\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cup \Psi_y((-\delta', \delta')^3)) \subset \Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ .

Observar luego que por la integrabilidad única de  $E^s$  toda curva tangente a  $E^s$  incluida en  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$  está incluida en alguna 1-placa de  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ . Luego si  $x_0$  y  $x_1$  son dos puntos de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cap \Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  incluidos en la misma 1-placa de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$ , entonces a lo largo de la 1-placa los une una curva tangente a  $E^s$  incluida en  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \subset \Psi_z((-\delta, \delta)^3)$  y por lo tanto  $x_0$  y  $x_1$  están en la misma 1-placa de  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ . Eventualmente achicando el  $\delta$  original (pero observar que puede hacerse previo a la elección de  $\delta'$  y también de forma uniforme en  $M$ ) y usando la continuidad de  $E^s$ , podemos asegurar ahora que sólo existe una componente conexa en la intersección entre esta 1-placa y  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$ . Luego  $x_0$  y  $x_1$  pertenecen necesariamente a la misma 1-placa de  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  y probamos entonces que el cambio de coordenadas  $\Psi_y^{-1} \circ \Psi_x$  es un homeomorfismo de la forma  $\Psi_y^{-1} \circ \Psi_x(r, s, t) = (g_1(r, t), g_2(r, s, t), g_3(r, t))$ , es decir, construimos  $\mathcal{F}^{ss}$  foliación de clase  $C^0$  de dimensión 1.

Análogamente, sean  $x_0$  y  $x_1$  dos puntos de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3) \cap \Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  en la misma 2-placa de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$ . Luego  $x_1$  se encuentra en alguna 1-placa de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  que se obtiene haciendo fluir dentro de  $\Psi_x((-\delta', \delta')^3)$  por el flujo  $\varphi_t$  la 1-placa por  $x_0$ . Puesto que esta última 1-placa se encuentra contenida en una 1-placa de  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ , por lo visto en el párrafo anterior, entonces haciendo fluir esta 1-placa por  $\varphi_t$  dentro de  $\Psi_z((-\delta', \delta')^3)$  llegamos también al punto  $x_1$ , es decir,  $x_0$  y  $x_1$  se encuentran en la misma 2-placa de  $\Psi_z((-\delta, \delta)^3)$ . En vistas de la continuidad de  $E^s \oplus E^c$  y eventualmente achicando el  $\delta$  (también de forma uniforme y previo a la elección de  $\delta'$ ) podemos entonces asegurar que la intersección de esta 2-placa con  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  tiene una única componente conexa. Luego  $x_0$  y  $x_1$  pertenecen necesariamente a la misma

2-placa de  $\Psi_y((-\delta', \delta')^3)$  y probamos entonces que el cambio de coordenadas  $\Psi_y^{-1} \circ \Psi_x$  es también un homeomorfismo de la forma  $\Psi_y^{-1} \circ \Psi_x(r, s, t) = (g_1(r, s, t), g_2(r, s, t), g_3(t))$ . De esta forma hemos construido  $\mathcal{F}^{cs}$  foliación de clase  $C^0$  de dimensión 2.

### Hojas de $\mathcal{F}^{ss}$

Observar que por cada  $x$  en  $M$  podemos considerar la “única curva”  $\eta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tangente a  $E^s$  con  $\|\dot{\eta}(t)\| = 1$  y  $\eta(0) = x$ , y extenderla a  $\eta : (-\frac{3\delta}{2}, \frac{3\delta}{2}) \rightarrow M$  simplemente agregándole el recorrido de las “únicas curvas” por  $\eta(-\frac{\delta}{2})$  y  $\eta(\frac{\delta}{2})$ . Siguiendo esta extensión naturalmente, obtenemos inductivamente  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow M$  tangente a  $E^s$  con  $\|\dot{\eta}(t)\| = 1$  y  $\eta(0) = x$ .

Supongamos que  $\eta$  no es inyectiva, es decir, que es una curva cerrada. Luego al ser fluida para el futuro por  $\varphi_t$  continuaría siendo tangente a  $E^s$  y decrecería el diámetro de su imagen a 0 por la Proposición 2.3.1. Tomando  $t_0$  tal que  $\text{diám}(\varphi_{t_0} \circ \eta)$  quede menor al número de Lebesgue de un cubrimiento de  $M$  por cartas foliadas de  $\mathcal{F}^{ss}$  llegamos a una contradicción ya que  $\varphi_t \circ \eta(\cdot)$  no podría ser una curva cerrada. Luego  $\eta$  es inyectiva y, puesto que  $E^s$  varía continuamente, entonces también  $\eta$  es de clase  $C^1$ .

Observar que si  $y \in \eta(\mathbb{R})$  entonces toda placa de  $\mathcal{F}^{ss}$  que contiene a  $y$  queda contenida en  $\eta(\mathbb{R})$  por ser tangente a  $E^s$  y como consecuencia de la integrabilidad única. Luego la hoja de  $\mathcal{F}^{ss}$  que contiene a  $x$  es exactamente  $\eta(\mathbb{R})$  y es, por lo tanto, la imagen de una inmersión inyectiva de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  en  $M$ . Esto prueba la primera parte del punto 2. del teorema.

Siguiendo con el argumento, si  $y \in W^{ss}(x) = \eta(\mathbb{R})$ , entonces  $y = \eta(t_0)$  para cierto  $t_0 \in \mathbb{R}$  que suponemos, sin pérdida de generalidad, mayor que 0. Luego  $\eta|_{[0, t_0]}$  es una curva tangente a  $E^s$  que une  $x$  con  $y$ . Consecuentemente  $\varphi_t \circ \eta|_{[0, t_0]}$  sigue siendo tangente a  $E^s$  y decrece su longitud a 0 si  $t \rightarrow +\infty$  por Proposición 2.3.1. Luego eventualmente  $\varphi_t \circ \eta|_{[0, t_0]}([0, t_0])$  queda contenido en  $W_\delta^{ss}(\varphi_t(x))$  para  $t$  suficientemente grande y por lo tanto tenemos que  $y \in \varphi_{-t}(W_\delta^{ss}(\varphi_t(x)))$  para dicho  $t > 0$ . Luego probamos que

$$W^{ss}(x) \subset \bigcup_{t>0} \varphi_{-t}(W_\delta^{ss}(\varphi_t(x))).$$

La inclusión recíproca es directa usando integrabilidad única y que  $E^s$  es  $D\varphi_t$ -invariante. Con esto queda completamente probado el punto 2.

Es claro ahora que si  $W^{ss}(x) = \eta(\mathbb{R})$  con  $\eta$  tangente a  $E^s$ , entonces para todo  $t$  tenemos que  $\varphi_t \circ \eta(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow M$  es tangente a  $E^s$  por  $\varphi_t(x)$ , y por lo tanto

$$W^{ss}(\varphi_t(x)) = \varphi_t(\eta(\mathbb{R})) = \varphi_t(W^{ss}(x)),$$

es decir, la foliación  $\mathcal{F}^{ss}$  es invariante por el flujo  $\varphi_t$ . Esto prueba el punto 1. del teorema.

### Hojas de $\mathcal{F}^{cs}$

Puesto que las placas de  $\mathcal{F}^{cs}$  quedan tangentes a  $E^s \oplus E^c$ , entonces las hojas también son tangentes a  $E^s \oplus E^c$ . Luego si  $x$  e  $y$  son puntos en  $M$  tales que  $y \in W^{cs}(x)$ , entonces hay un camino de placas (finitas) que une  $x$  con  $y$ . Luego podemos considerar una curva que una  $x$  con  $y$  a lo largo de estas placas, y que sea por tanto tangente a  $E^s \oplus E^c$ , que además sea de la forma  $\alpha_1 * \beta_1 * \alpha_2 * \dots * \beta_{n-1} * \alpha_n * \beta_n$ , con  $\alpha_i$  tangente a  $E^s$ ,  $\beta_i$  tangente a  $E^c$  y  $*$  la concatenación de curvas.

Sin pérdida de generalidad, llamamos  $[0, b_i]$  al dominio de  $\beta_i$  considerando que  $\beta_i$  es tal que  $\beta_i(t) = \varphi_t(\beta_i(0))$ . Es claro que si consideramos a  $W^{ss}(x) = \eta(\mathbb{R})$  como en el párrafo anterior, entonces  $\beta_1(b_1) \in \varphi_{b_1}(W^{ss}(x))$ . Luego  $\beta_2(b_2) \in \varphi_{b_1+b_2}(W^{ss}(x))$  y, procediendo inductivamente, obtenemos que  $y = \beta_n(b_n) \in \varphi_{b_1+b_2+\dots+b_n}(W^{ss}(x))$ . Luego probamos que  $W^{cs}(x) \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\varphi_t(x))$  y la inclusión recíproca es inmediata.

De esta forma el mapa  $\Phi(s, t) = \varphi_t(\eta(s))$  es una inmersión de  $\mathbb{R}^2$  en  $M$  tal que su imagen es la hoja  $W^{cs}(x)$ . Puesto que  $W^{ss}(\varphi_t(x)) = \varphi_t(W^{ss}(x))$  y que dadas dos hojas cualesquiera de  $\mathcal{F}^{ss}$  estas o son la misma o tienen intersección vacía, entonces  $\Phi$  no es inyectiva si y sólo si  $W^{ss}(\varphi_{t_0}(x)) = W^{ss}(x)$  para algún  $t_0 > 0$ .

Supongamos que estamos en el caso en que  $\Phi$  no es inyectiva. Tomando  $t_0 = \min\{t > 0 : W^{ss}(\varphi_t(x)) = W^{ss}(x)\}$ , y si fuera necesario tomando un múltiplo entero  $nt_0$  de  $t_0$ , se cumple que  $\varphi_{nt_0}$  contrae a la hoja  $W^{ss}(x)$  en sí misma por la Proposición 2.3.1.

Luego existe en  $W^{ss}(x)$  un único punto  $z$  fijo por  $\varphi_{nt_0}$ . Sabemos que  $\varphi_{t_0}(z) \in W^{ss}(x)$  y  $\varphi_{nt_0}(z) = z$ . Luego  $\varphi_{t_0}(z) = \varphi_{t_0}(\varphi_{nt_0}(z)) = \varphi_{nt_0}(\varphi_{t_0}(z))$ , de donde  $\varphi_{t_0}(z)$  es también fijo de  $\varphi_{nt_0}$ . Deducimos entonces  $\varphi_{t_0}(z) = z$  por unicidad del punto fijo.

Luego el período de  $z$  es exactamente  $t_0$  y este es el único punto en  $W^{ss}(x)$



que es periódico para el flujo  $\varphi_t$ . Tenemos entonces que  $W^{ss}(\varphi_{nt_0}(x)) = W^{ss}(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto podemos ver  $\Phi$  desde  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$  a  $M$ . Es claro entonces que la órbita periódica de  $z$  genera el grupo fundamental (ver Capítulo 5 para una definición precisa de grupo fundamental) de  $W^{cs}(x) = \Phi(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z}))$ , que  $\Phi$  restringida a  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$  es inyectiva y que, por variar  $E^s \oplus E^c$  de forma continua, es  $W^{cs}(x)$  la imagen de una inmersión inyectiva de clase  $C^1$  de  $\mathbb{R} \times S^1$  en  $M$ .

Lo anterior concluye el caso en que  $\Phi$  no es originalmente inyectiva. En caso de que desde un principio  $\Phi$  sí fuera inyectiva tendríamos que  $W^{cs}(x)$  sería exactamente la imagen inyectiva de  $\mathbb{R}^2$  por el mapa  $\Phi$  de clase  $C^1$ . Con esto quedan contempladas todas las posibles topologías intrínsecas de hojas de  $\mathcal{F}^{cs}$ . La parte 3. del teorema queda por tanto probada.  $\square$

En el contexto del teorema anterior, denominamos a  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{uu}$  *foliaciones fuertemente estable e inestable*, respectivamente. Denominamos a  $\mathcal{F}^{cs}$  y  $\mathcal{F}^{cu}$  *foliaciones centro-estable y centro-inestable*, respectivamente. Las hojas  $W^{ss}(x)$  y  $W^{uu}(x)$  se denominan *variedad estable fuerte de  $x$*  y *variedad inestable fuerte de  $x$* , respectivamente, y las hojas  $W^{cs}(x)$  y  $W^{cu}(x)$  se denominan respectivamente *variedad centro-estable de  $x$*  y *variedad centro-inestable de  $x$* .

Observar que así construidas las foliaciones centro-estable y centro-inestable quedan de clase  $C^0$  con hojas de clase  $C^1$ , pero en realidad se puede probar que si el flujo proviene de un campo de clase  $C^2$  (en particular si es un flujo  $C^\infty$ ) entonces las foliaciones centro-estable y centro-inestable son de clase  $C^1$  (ver [HP]).

Observar que de la demostración del teorema anterior no sólo deducimos las dos posibles topologías intrínsecas de las hojas centro-estables y centro-inestables (planos o cilindros), sino que también quedan determinadas las dinámicas internas dentro de cada hoja.

Efectivamente, si  $F$  es una hoja de  $\mathcal{F}^{cs}$  y elegimos  $x$  un punto cualquiera de  $F$  tenemos entonces que  $F = W^{cs}(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\varphi_t(x)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(W^{ss}(x))$ . Luego, dado que  $\varphi_t$  contrae exponencialmente para el futuro las hojas de  $\mathcal{F}^{ss}$ , si  $y \in F$  entonces  $y = \varphi_{t_0}(x)$  para cierto  $t_0$  y luego la órbita de  $y$  se acerca exponencialmente para el futuro a la órbita de  $\varphi_{t_0}(x)$ . Para el caso en que  $F$  es una hoja plana nada más puede decirse.

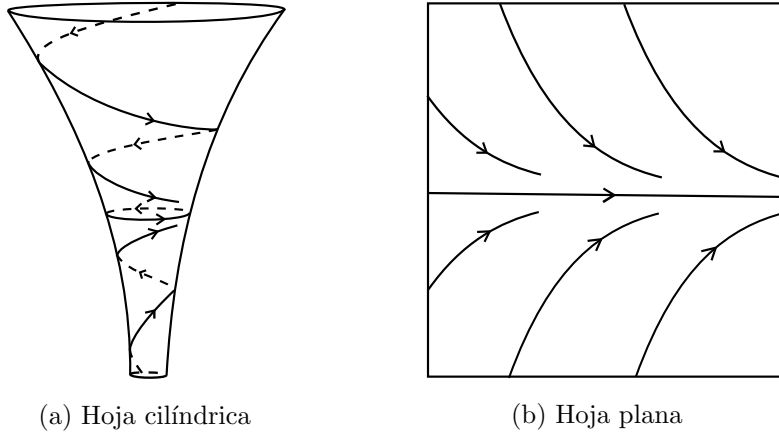


Figura 3.4: Dinámica interna dentro de una hoja centro-estable

Para el caso en que  $F$  es una hoja cilíndrica podemos considerar que  $x$  es un punto en la única órbita periódica contenida en  $F$  y deducir entonces que la órbita de todo punto tiende asintóticamente para el futuro esta órbita periódica de  $F$ . Análogamente para el pasado para las hojas centro-inestables.

Veamos a continuación una caracterización clásica de las variedades estable e inestable fuerte.

**Teorema 3.2.3.** *Las variedades  $W^{ss}(x)$  y  $W^{uu}(x)$  se caracterizan de la siguiente forma:*

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\},$$

$$W^{uu}(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\},$$

donde  $d$  es la distancia inducida por la métrica de  $M$ .

*Demostración.* Veamos la demostración para  $W^{ss}(x)$ . Para  $W^{uu}(x)$  los argumentos son análogos.

Si  $y \in W^{ss}(x)$ , entonces  $x$  e  $y$  se encuentran en una misma hoja de la foliación estable fuerte que es tangente a  $E^s$ . Luego existe  $\eta : [0, 1] \rightarrow M$  tangente a  $E^s$  tal que  $\eta(0) = x$  y  $\eta(1) = y$ . Por la Proposición 2.3.1 del Capítulo 2 sabemos que entonces  $\ell(\varphi_t \circ \eta) \leq Ce^{-\lambda t} \ell(\eta)$  para todo  $t > 0$ , y por lo tanto  $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Luego  $W^{ss}(x) \subset \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\}$ .

Recíprocamente, sea  $y \in M$  tal que  $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Veamos que  $y \in W^{ss}(x)$ .

Utilizaremos la notación de la demostración del Teorema 3.2.1. Sabemos que para todo  $x \in M$  existe un mapa distinguido  $\Psi_x : (-\delta, \delta)^3 \rightarrow M$  de las foliaciones centro-estable  $\mathcal{F}^{cs}$  y estable fuerte  $\mathcal{F}^{ss}$  a la vez, tal que las placas de  $\mathcal{F}^{cs}$  en  $\Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  (a las que a partir de ahora llamamos 2-placas) son de la forma  $\Psi_x((-\delta, \delta)^2 \times \{c\})$  para todo  $c \in (-\delta, \delta)$ , las placas de  $\mathcal{F}^{ss}$  en  $\Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  (las llamamos 1-placas) son de la forma  $\Psi_x((-\delta, \delta) \times \{(d, c)\})$  para todo  $(d, c) \in (-\delta, \delta)^2$  y tal que  $t \mapsto \Psi_x(0, 0, t)$  es tangente a  $E^u$ . Observar también que por cómo fue construido el mapa  $\Psi_x$  podemos afirmar que existe un  $\epsilon > 0$  uniforme en  $M$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset \Psi_x((-\delta, \delta)^3)$  para todo  $x \in M$ .

Luego tomando  $t_0 > 0$  tal que  $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0$  podemos afirmar que  $\varphi_t(y) \in \Psi_{\varphi_t(x)}((-\delta, \delta)^3)$  para todo  $t \geq t_0$ .

Supongamos que  $\varphi_{t_0}(x)$  y  $\varphi_{t_0}(y)$  se encuentran en dos 2-placas distintas de  $\mathcal{F}^{cs}$  en  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}((-\delta, \delta)^3)$ . Sea  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}((-\delta, \delta)^2 \times \{c\})$  la 2-placa que contiene a  $\varphi_{t_0}(y)$  con  $c \neq 0$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $c > 0$ . Sea  $\nu$  la curva  $t \mapsto \Psi_{\varphi_{t_0}(x)}(0, 0, t)$  definida en  $[0, c]$ , que es tangente a  $E^u$  como fue observado anteriormente y que tiene en un extremo a  $\varphi_{t_0}(x)$  y en el otro a  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}(0, 0, c)$  que es un punto de la 2-placa  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}((-\delta, \delta)^2 \times \{c\})$  que contiene a  $\varphi_{t_0}(y)$ . Luego por un lado  $\varphi_t(\nu(c))$  tiene que pertenecer a  $\Psi_{\varphi_{t_0+t}(x)}((-\delta, \delta)^3)$  para todo  $t > 0$  puesto que  $\varphi_{t_0+t}(y)$  lo hace y que  $\varphi_t \circ \nu(\cdot)$  continua siendo tangente a  $E^u$ , pero por otro lado no puede porque expande su longitud exponencialmente en la dirección de  $E^u$  para el futuro.

Luego  $\varphi_{t_0}(x)$  y  $\varphi_{t_0}(y)$  se encuentran en la misma 2-placa de  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}((-\delta, \delta)^3)$ .

Supongamos ahora que  $\varphi_{t_0}(x)$  y  $\varphi_{t_0}(y)$  no se encuentran en la misma 1-placa de  $\mathcal{F}^{ss}$  en  $\Psi_{\varphi_{t_0}(x)}((-\delta, \delta)^3)$ . Luego podemos unir  $\varphi_{t_0}(x)$  con  $\varphi_{t_0}(y)$  por una curva (dentro de la 2-placa que las contiene) que es concatenación de una curva  $\beta$  tangente a  $E^s$  con otra que es un segmento de órbita de  $\varphi_t$  a la que llamamos  $\alpha$ . Observar que podemos tomar  $\varphi_{t_0}(y)$  suficientemente cerca de  $\varphi_{t_0}(x)$  como para que la expansión máxima que le puede dar  $\varphi_t$  a  $\alpha$  al iterarla para el futuro deja a ambos extremos de  $\alpha$  dentro de una misma 2-placa de  $\Psi_{\varphi_{t_0+t}(x)}((-\delta, \delta)^3)$  (el tiempo que le lleva a  $\varphi_t$  recorrer  $\alpha$  por la norma máxima del campo que determina el flujo  $\varphi_t$  determina la máxima expansión posible) para todo  $t > 0$ . Luego para el futuro  $\varphi_t(y)$  se acerca al extremo de  $\alpha$  que no es  $\varphi_{t_0}(x)$  y esto no puede ser puesto que en tal caso  $\varphi_t(x)$  y  $\varphi_t(y)$  no se acercarían indefinidamente para el futuro.

Luego  $\varphi_{t_0}(y)$  tiene que estar en la misma 1-placa de  $\mathcal{F}^{ss}$  que  $\varphi_{t_0}(x)$ , es

decir,  $\varphi_{t_0}(y) \in W^{ss}(\varphi_{t_0}(x)) = \varphi_{t_0}(W^{ss}(x))$ . Luego  $y \in W^{ss}(x)$  y el recíproco queda por tanto probado.

□

## 4. Holonomía y teorema de Haefliger

El objetivo principal de este capítulo es probar el *teorema de Haefliger* para foliaciones de codimensión 1. A partir del mismo podremos deducir que no existen curvas continuas, homotópicamente nulas y transversales a la foliación centro-estable o centro-inestable de un flujo de Anosov (ver Corolario 4.2.2). El teorema fue probado por A. Haefliger para foliaciones clase  $C^2$  (ver [Hae]) en la línea de demostrar el Corolario 4.2.3. Posteriormente J. Franks lo probó para foliaciones de clase  $C^1$  (ver [F]), lo cual sería técnicamente suficiente para deducir el Corolario 4.2.2 puesto que las foliaciones centrales son, bajo hipótesis muy generales, de clase  $C^1$  (ver [HP]). Sin embargo, en este capítulo desarrollaremos la prueba de V. V. Solodov (ver [Sol]) que vale para foliaciones de clase  $C^0$ , es decir, para foliaciones con el mismo tipo de regularidad que obtuvimos para las foliaciones centrales en el Teorema 3.2.1.

A lo largo del presente capítulo se asumirá que el lector está familiarizado con los conceptos de homotopía de curvas, grupo fundamental y otras nociones relacionadas. Las definiciones precisas de estos conceptos pueden ser encontradas en el Capítulo 5.

### 4.1. Holonomía

Durante la presente sección  $\mathcal{F}$  será una foliación de codimensión  $s$  en  $M$  variedad diferenciable. El objetivo de esta sección será definir y estudiar la noción de holonomía de una hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$ , es decir, caracterizar en cierta forma cómo acumulan en  $F$  las hojas de  $\mathcal{F}$  cercanas a  $F$ . Finalmente estudiaremos, en particular, la holonomía de las hojas centrales de un flujo de Anosov en una 3-variedad. Citamos como referencia para esta sección [CLN]

#### Secciones transversales a $\mathcal{F}$

Sea  $D^s$  el disco  $s$ -dimensional. Decimos que  $\Sigma$  es una *sección topológicamente transversal a  $\mathcal{F}$  de dimensión  $s$*  si

$$\Sigma = g(D^s)$$

con  $g : D^s \rightarrow M$  un encaje topológico transversal a  $\mathcal{F}$ . Es decir,  $g : D^s \rightarrow M$  es un homeomorfismo sobre su imagen que cumple que para todo  $x \in \Sigma$  existe un entorno  $U$  de  $g^{-1}(x)$  en  $D^s$  y un entorno distinguido  $V$  de  $\mathcal{F}$  con  $x \in V$  y

mapa distinguido  $\Psi : \Psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^s \rightarrow V$ , tales que

$$\pi \circ \Psi^{-1} \circ g|_U$$

es un homeomorfismo sobre su imagen, donde  $\pi : \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  tal que  $\pi(v, w) = w$  denota la proyección sobre las últimas  $s$  coordenadas en  $\mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^s$ .

Es directo, a partir de cómo se comportan los cambios de cartas entre mapas distinguidos de una foliación, probar que la definición de sección topológicamente transversal no depende del entorno distinguido de  $x$  que se tome. De ahora en más asumiremos que todas las secciones topológicamente transversales que se consideren serán de dimensión  $s$  y las denominaremos simplemente secciones transversales.

### Mapa de holonomía asociado a una curva

Sea  $F$  una hoja de  $\mathcal{F}$  y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$  una curva continua que une  $p_0 = \gamma(0)$  con  $p_1 = \gamma(1)$ . Sean  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$  pequeñas secciones transversales a  $\mathcal{F}$  con  $p_0 \in \Sigma_0$  y  $p_1 \in \Sigma_1$ . Definiremos alrededor de  $p_0$  un mapa local entre  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$  “siguiendo” la intersección entre las hojas de  $\mathcal{F}$  y ciertas secciones transversales a  $\gamma$  desde  $p_0$  hasta  $p_1$  (ver Figura 4.1).

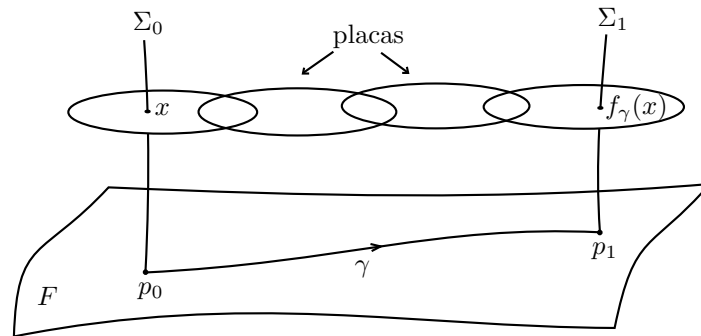


Figura 4.1

Fijando una métrica en  $M$ , podemos considerar  $\rho > 0$  número de Lebesgue del cubrimiento de  $M$  formado por los entornos distinguidos del atlas de  $\mathcal{F}$ . De esta forma, considerando el cubrimiento de  $M$  (y por lo tanto de  $\gamma([0, 1])$ ) que forman los entornos distinguidos de diámetro menor o igual que  $\frac{\rho}{2}$  es posible cubrir  $\gamma([0, 1])$  por una sucesión finita  $U_0, U_1, \dots, U_k$  de entornos distinguidos

de  $\mathcal{F}$  de forma tal que:

- a) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $U_i \cup U_j$  está contenido en algún entorno distinguido del atlas de  $\mathcal{F}$ .
- b) Existe una partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{k+1} = 1\}$  de  $[0, 1]$  tal que  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

Llamamos a  $\{U_i\}_{i=0}^k$  *cadena de entornos de  $\mathcal{F}$  subordinada a  $\gamma$* .

Para cada  $0 < i < k + 1$  fijamos ahora  $\Sigma(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$  una sección transversal a  $\mathcal{F}$  tal que  $\gamma(t_i) \in \Sigma(t_i)$  y fijamos  $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$  y  $\Sigma(t_{k+1}) = \Sigma_1$ . Luego, para cada  $x$  en  $\Sigma(t_i)$  suficientemente cerca de  $\gamma(t_i)$ , la placa de  $U_i$  que contiene a  $x$  corta a  $\Sigma(t_{i+1})$  en un único punto (por la transversalidad de las secciones) al que llamamos  $f_i(x)$ .

De esta forma tenemos definidos mapas  $f_i : D_i \rightarrow \Sigma(t_{i+1})$  con  $D_i$  disco abierto en  $\Sigma(t_i)$  tal que  $\gamma(t_i) \in D_i$ , para todo  $0 \leq i \leq k$ . Luego es claro que la composición

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

está bien definida en un entorno abierto de  $p_0$  en  $\Sigma_0$  y que tiene por codominio a la sección  $\Sigma_1$ . Llamamos a  $f_\gamma$  el *mapa de holonomía asociado a  $\gamma$* .

**Lema 4.1.1.** *El mapa  $f_\gamma$  es independiente de las secciones  $\{\Sigma(t_i)\}_{i=1}^k$  y de la cadena de entornos subordinados a  $\gamma$  elegidos. Es decir, si  $f_\gamma$  y  $\hat{f}_\gamma$  son dos mapas de holonomía asociados a la misma curva  $\gamma$ , entonces  $f_\gamma$  y  $\hat{f}_\gamma$  coinciden en la intersección de ambos dominios.*

*Demostración.* Fijemos primero la cadena subordinada a  $\gamma$  y supongamos que  $\{\Sigma(t_i)\}_{i=0}^k$  y  $\{\Pi(t_i)\}_{i=0}^k$  son dos colecciones de secciones transversales a  $\mathcal{F}$  como fueron construidas anteriormente en función de la cadena subordinada a  $\gamma$  y tales que  $\gamma(t_i) \in \Sigma(t_i) \cap \Pi(t_i)$  para cada  $i = 0, \dots, k$ .

Dado  $x$  en  $\Sigma(t_i)$  cercano a  $\gamma(t_i)$  podemos definir  $\beta(t_i)$  en  $\Pi(t_i)$  como la intersección de  $\Pi(t_i)$  con la placa de  $U_i$  que contiene a  $x$ . Tenemos de esta forma definido un homeomorfismo  $\beta_i : \hat{\Sigma}_i \rightarrow \hat{\Pi}_i$  entre abiertos  $\hat{\Sigma}_i \subset \Sigma_i$  y  $\hat{\Pi}_i \subset \Pi_i$  que contienen ambos a  $\gamma(t_i)$ .

Sean también  $f_i : D_i \rightarrow \Sigma(t_{i+1})$  y  $g_i : B_i \rightarrow \Pi(t_{i+1})$  definidos como anteriormente.

Dado que existe  $V$  entorno distinguido del atlas de  $\mathcal{F}$  tal que  $(U_i \cup U_{i+1}) \subset V$ , cada placa de  $V$  intersecta a cada disco transversal en, a lo sumo, un punto. Luego, para cada  $i = 0, \dots, k$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} D_i \cap \hat{\Sigma}_i & \xrightarrow{f_i} & \hat{\Sigma}_{i+1} \\ \beta_i \downarrow & & \downarrow \beta_{i+1} \\ B_i \cap \hat{\Pi}_i & \xrightarrow{g_i} & \hat{\Pi}_{i+1} \end{array}$$

Luego, restringiendo adecuadamente los mapas  $f_i$ ,  $g_i$  y  $\beta_i$  a dominios más pequeños, obtenemos que

$$\begin{aligned} f_\gamma &= f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0 \\ &= \beta_{k+1}^{-1} \circ g_k \circ \beta_k \circ \beta_k^{-1} \circ \dots \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_1 \circ g_0 \circ \beta_0 \\ &= g_\gamma \end{aligned}$$

dado que los mapas  $\beta_0$  y  $\beta_{k+1}$ , cada uno con la misma sección transversal como dominio y codominio, no son otra cosa que el mapa identidad.

De esta forma probamos que el mapa  $f_\gamma$  es independiente de las secciones que se elijan. Mediante un argumento análogo es posible probar que  $f_\gamma$  es independiente de la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{k+1} = 1\}$  que se elija.

Consideremos ahora  $\{U_i\}_{i=0}^k$  y  $\{U'_i\}_{i=0}^{k'}$  dos cadenas distintas subordinadas a  $\gamma$ .

Si para todo  $i$  en  $\{0, \dots, k'\}$  tenemos que  $U'_i \subset U_{j_i}$  para algún  $j_i$  en  $\{0, \dots, k\}$ , entonces es claro que los mapas correspondientes a cada cadena  $f_\gamma$  y  $f'_\gamma$  coinciden en la intersección de sus dominios.

En caso de que lo anterior no ocurra, consideremos  $\{U_i \cap U'_j\}_{\substack{1 \leq j \leq k' \\ 1 \leq i \leq k}}$  cubrimiento por abiertos de  $\gamma([0, 1])$ . Observar que, usando el número de Lebesgue del cubrimiento, podemos refinarlo a un cubrimiento de  $\gamma([0, 1])$  que sea además una cadena subordinada a  $\gamma$ . Es decir, que podemos construir una cadena  $\{U''_i\}_{i=0}^{k''}$  subordinada a  $\gamma$  tal que para todo  $i \in \{0, \dots, k''\}$  se cumple que  $U''_i \subset (U_{j_i} \cap U_{l_i})$  para algunos  $j_i \in \{0, \dots, k\}$  y  $l_i \in \{0, \dots, k'\}$ . Luego esto implica que el mapa correspondiente  $f''_\gamma$  cumple que  $f''_\gamma = f_\gamma$  y  $f''_\gamma = f'_\gamma$  en la intersección de sus dominios. Luego  $f_\gamma = f'_\gamma$  en la intersección de sus dominios y esto concluye la prueba del lema. □



### Germen de holonomía

Sea  $\gamma$  curva continua en  $F$  hoja de  $\mathcal{F}$ . El mapa de holonomía  $f_\gamma$  caracteriza cómo se comportan las hojas cercanas a  $F$  a lo largo de la curva  $\gamma$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada,  $f_\gamma$  nos muestra el primer retorno en la dirección de  $\gamma$  de las hojas cercanas a  $F$ . Es crucial observar que si  $\gamma'$  se obtiene a partir de  $\gamma$  mediante una pequeña homotopía que deja fijo al punto  $\gamma(0)$ , entonces ambas curvas están subordinadas a una misma cadena de entornos y por lo tanto los mapas  $f_\gamma$  y  $f_{\gamma'}$  coinciden en un entorno de  $\gamma(0)$  en  $\Sigma_0$ , con  $\Sigma_0$  igual sección transversal de salida y llegada para ambos mapas.

Esto nos lleva a poder caracterizar la holonomía (retorno) en función de la clase de homotopía de la curva  $\gamma$  pero a menos de coincidir (para  $\gamma$  y  $\gamma'$  en una misma clase de homotopía con punto base  $\gamma(0)$ ) en un entorno de  $\gamma(0) = \gamma'(0)$  que puede ser arbitrariamente chico. Esto nos conduce, lo haremos en detalle a continuación, a definir un *germen de holonomía* para la clase de homotopía de  $\gamma$  en  $F$ . Finalmente será posible caracterizar cómo acumulan en  $F$  las hojas de  $\mathcal{F}$  cercanas a  $F$  estudiando, por ejemplo, la holonomía a lo largo de un conjunto de curvas que generen el grupo fundamental de la hoja  $F$ .

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $x \in X$ . Consideremos el conjunto de mapas  $\{f : V \rightarrow Y \text{ tal que } V \subset X, V \text{ entorno de } x\}$  con la relación de equivalencia  $R$ :

$$fRg \text{ si y sólo si existe } W \text{ entorno de } x \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Llamamos *germen de  $f$  en  $x$* , y lo denotamos  $\text{germ}(f)$ , a la clase de equivalencia del mapa  $f$ . Observar que si  $X = Y$  entonces el conjunto  $G(X, x)$  de gérmenes de homeomorfismos locales que dejan fijo  $x$  posee estructura de grupo con la multiplicación dada por

$$\text{germ}(f) \cdot \text{germ}(g) = \text{germ}(f \circ g),$$

donde el dominio de  $f \circ g$  es la intersección entre el dominio de  $g$  y la preimagen por  $g$  del dominio de  $f$ .

Luego, si  $\gamma$  es una curva cerrada continua contenida en  $F$  hoja de  $\mathcal{F}$  con mapa de holonomía  $f_\gamma$  definido en una sección  $\Sigma_0$  con  $\gamma(0) \in \Sigma_0$ , entonces denominamos *germen de holonomía de  $\gamma$*  a la clase  $\text{germ}(f_\gamma)$ . Como dijimos anteriormente, esta clase de equivalencia será la misma para todas las curvas cerradas homotópicas a  $\gamma$  dentro de  $F$  por homotopías que dejan fijo a  $\gamma(0)$ .

### Grupo fundamental y grupo de holonomía de una hoja

Si  $\gamma$  curva continua en  $F$ , definimos  $\gamma^{-1}$  su *curva inversa* (que posee el mismo recorrido que  $\gamma$  pero lo realiza en sentido inverso) como la curva  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ . Es directo de la definición de mapa de holonomía que entonces  $f_{\gamma^{-1}} = (f_\gamma)^{-1}$  en la intersección de los dominios en que ambos mapas queden bien definidos.

Llegamos pues al siguiente teorema, que en particular sintetiza lo elaborado en párrafos anteriores.

**Teorema 4.1.2.** Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$  curvas continuas contenidas en una hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  tales que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$  y  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = p_1$ . Sean  $\Sigma_0, \Sigma_1$  secciones transversales a  $\mathcal{F}$  con  $p_0 \in \Sigma_0$  y  $p_1 \in \Sigma_1$ . Sean  $f_{\gamma_1} : D_1 \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$  y  $f_{\gamma_2} : D_2 \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$  los mapas de holonomía asociados a  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , y sean  $\text{germ}(f_{\gamma_1})$  y  $\text{germ}(f_{\gamma_2})$  los gérmenes de holonomía en  $p_0$  de  $f_{\gamma_1}$  y  $f_{\gamma_2}$ , respectivamente. Luego

1. Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homotópicas a extremos fijos dentro de  $F$  entonces  $\text{germ}(f_{\gamma_1}) = \text{germ}(f_{\gamma_2})$ .
2. Si  $p_0 = p_1$  y  $\Sigma_0 = \Sigma_1$  entonces la transformación  $\gamma \mapsto \text{germ}(f_{\gamma^{-1}})$  induce un homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi(\bar{\gamma}) = \text{germ}(f_{\gamma^{-1}})$$

entre el grupo fundamental de  $F$  con punto base  $p_0$  y el grupo de gérmenes de homeomorfismos de  $\Sigma_0$  que dejan  $p_0$  fijo.

*Demostración.* Sea  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F$  una homotopía entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , es decir,  $H$  continua,  $H(s, 0) = \gamma_0(s)$ ,  $H(s, 1) = \gamma_1(s)$ ,  $H(0, t) = p_0$  y  $H(1, t) = p_1$  para todos  $s, t \in [0, 1]$ .

Para cada curva  $\gamma_t = H(\cdot, t) : [0, 1] \rightarrow F$  existe una cadena de entornos de  $\mathcal{F}$  subordinada a  $\gamma_t$ . Por continuidad, cada una de estas cadenas es subordinada a cada  $\gamma_{t'}$  con  $t'$  suficientemente cerca de  $t$ . Consecuentemente existe una colección de cadenas  $\{C_i\}_{i=1}^m$  y una partición de  $[0, 1]$ :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  tal que para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $C_i$  es una cadena subordinada a todas las curvas  $\gamma_t$  con  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ . Puesto que el mapa de holonomía queda fijado en un entorno de  $p_0$  en función de la cadena de entornos, entonces se deduce que  $f_{\gamma_{t_{i-1}}}$  y  $f_{\gamma_{t_i}}$

coinciden en un entorno de  $p_0$  en  $\Sigma_0$ . Por lo tanto  $\text{germ}(f_{\gamma_{t_{i-1}}}) = \text{germ}(f_{\gamma_{t_i}})$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , y luego  $\text{germ}(f_{\gamma_1}) = \text{germ}(f_{\gamma_2})$ .

De esta forma, si  $p_0 = p_1$ , el mapa  $\bar{\gamma} \xrightarrow{\Psi} \text{germ}(f_\gamma)$  queda bien definido puesto que además si  $\gamma$  y  $\gamma'$  son homotópicas entonces claramente  $\gamma^{-1}$  y  $\gamma'^{-1}$  también lo son. Luego observar que si  $C_\gamma$  y  $C_\rho$  son dos cadenas subordinadas a  $\gamma$  y  $\rho$  curvas continuas cerradas con punto inicial y final  $p_0$ , entonces uniendo los entornos que forman ambas cadenas se obtiene una cadena subordinada a la curva producto  $\gamma^{-1} * \rho$  y, consecuentemente, se obtiene que

$$\Psi(\bar{\gamma} \cdot \bar{\rho}) = \text{germ}(f_{\gamma^{-1} * \rho^{-1}}) = \text{germ}(f_{\gamma^{-1}}) \cdot \text{germ}(f_{\rho^{-1}}) = \Psi(\bar{\gamma}) \cdot \Psi(\bar{\rho}),$$

y por lo tanto  $\Psi$  es un homomorfismo entre los grupos  $\pi_1(F, p_0)$  y  $G(\Sigma_0, p_0)$ .  $\square$

Teniendo definido un mapa de holonomía  $f_\gamma : \Sigma_0 \subset U_0 \rightarrow \Sigma_1 \subset U_1$  con  $\Sigma_0, \Sigma_1$  secciones transversales continuas contenidas respectivamente en  $U_1, U_2$  entornos distinguidos de  $\mathcal{F}$  con  $p_0 = \gamma(0) \in \Sigma_0$  y  $p_1 = \gamma(1) \in \Sigma_1$ , si consideramos  $\Lambda_0 \subset U_0$  y  $\Lambda_1 \subset U_1$  secciones transversales distintas, entonces es claro que las proyecciones a lo largo de las placas de  $U_0$  y  $U_1$  definen homeomorfismos  $h_0 : \Lambda_0 \rightarrow \Sigma_0$  y  $h_1 : \Lambda_1 \rightarrow \Sigma_1$ , eventualmente achicando las secciones  $\Lambda_0, \Lambda_1$ . Luego el mapa de holonomía  $g_\gamma : \Lambda'_0 \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$  satisface que  $g_\gamma = h_1^{-1} \circ f_\gamma \circ h_0(x)$  para todo  $x \in \Lambda'_0$ . En particular, si  $\gamma$  es una curva cerrada,  $\Sigma_0 = \Sigma_1$  y  $\Lambda_0 = \Lambda_1$ , entonces  $g_\gamma$  y  $f_\gamma$  son homeomorfismos conjugados, es decir,  $g_\gamma = h^{-1} \circ f_\gamma \circ h$  con  $h = h_1 = h_2$ .

Llamamos *grupo de holonomía de  $F$  en  $p_0$*  a

$$\text{Hol}(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$$

subgrupo de  $G(\Sigma_0, p_0)$ . Luego si  $p_0, p_1 \in F$ , cualquier curva continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow F$  con  $\alpha(0) = p_0$  y  $\alpha(1) = p_1$  induce un isomorfismo  $\alpha^* : \text{Hol}(F, p_0) \rightarrow \text{Hol}(F, p_1)$  mediante

$$\alpha^*(\text{germ}(\gamma)) = \text{germ}(\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}).$$

De esta forma podemos hablar del *grupo de holonomía de  $F$* ,  $\text{Hol}(F)$ , como cualquier grupo isomorfo a  $\text{Hol}(F, p_0)$ .

### Holonomía de las hojas centrales de un flujo de Anosov

Veamos ahora qué podemos decir sobre la holonomía de las hojas centro-estables y centro-inestables de un flujo de Anosov en una 3-variedad. El resultado que obtendremos será crucial para probar el teorema central de esta monografía.

Consideremos  $\mathcal{F}$  foliación de codimensión 1 en  $M$ . Decimos que una hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  tiene *holonomía trivial* si  $\text{Hol}(F)$  es el grupo trivial. Es decir, si para toda curva cerrada  $\gamma$  en  $F$  le corresponde un mapa de holonomía que es la identidad en alguna sección transversal a  $\gamma$  y  $\mathcal{F}$ .

Decimos que  $\gamma$  curva cerrada en  $F$  tiene *holonomía contractiva* si el mapa de holonomía  $f_\gamma$  es un homeomorfismo local contractivo en alguna sección  $J$  transversal a  $\gamma$ . Puesto que dos mapas de holonomía asociados a una misma curva pero definidos en secciones transversales distintas son conjugados por un homeomorfismo, entonces que una curva  $\gamma$  tenga holonomía contractiva no depende de la sección transversal que se considere. Análogamente definimos que una curva cerrada tenga *holonomía expansiva*.

Recordar del teorema de la variedad estable que las hojas de las foliaciones centrales de un flujo de Anosov en una 3-variedad son topológicamente inmersiones en  $M$  de planos o cilindros. En este último caso, recordar que el grupo fundamental de la hoja queda generado por una única órbita periódica del flujo contenida dentro de la hoja. Observar que de esta forma el flujo induce una orientación a todas las curvas no homotópicamente nulas dentro de la hoja.

Tenemos pues la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada. Sea  $F$  una hoja de  $\mathcal{F}^{cu}$  la foliación centro-inestable (resp.  $\mathcal{F}^{cs}$  foliación centro-estable). Luego:*

1. *Si  $F$  es una hoja plana entonces la holonomía en  $F$  es trivial.*
2. *Si  $F$  es una hoja cilíndrica y  $\gamma$  es una curva cerrada en  $F$ , no homotópicamente nula en  $F$  y orientada en el sentido de  $\varphi_t$ , entonces la holonomía de  $\gamma$  es contractiva (resp. expansiva).*

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es una hoja plana. Luego toda curva cerrada  $\gamma$  en  $F$  es homotópicamente nula en  $F$  y por lo tanto el mapa de holonomía correspondiente a  $\gamma$  es trivial (es la identidad en cualquier sección transversal a  $\gamma$  y  $\mathcal{F}^{cu}$ ).

Supongamos que  $F$  es una hoja cilíndrica y que  $\gamma$  es una curva cerrada en  $F$ , no homotópicamente nula en  $F$  y orientada en el sentido de  $\varphi_t$ .

Puesto que alcanza con probar que la holonomía es contractiva para cualquier curva homotópica a  $\gamma$ , entonces podemos considerar que  $\gamma$  es exactamente una reparametrización de  $N > 0$  veces la concatenación de la curva cerrada periódica de  $\varphi_t$  que genera el grupo fundamental de la hoja  $F$ .

Luego si tomamos  $p \in \gamma([0, 1])$ , tenemos que  $p$  es un punto periódico para  $\varphi_t$  de período, digamos,  $T > 0$ .

Puesto que también tenemos libertad para elegir la sección transversal en la que definir el mapa de holonomía de  $\gamma$  (alcanza con probar que es contractivo en alguna sección transversal), elijamos una sección que sea tangente a  $E^s$  por  $p$ . Es decir, consideremos  $\eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  curva tangente a  $E^s$  con  $\eta(0) = p$ , y fijemos  $J = \eta((-\epsilon, \epsilon))$ .

Luego  $f_\gamma(\eta(s)) = \varphi_T(\eta(s))$  para todo  $s \in J' \subset J$ , con  $J'$  entorno de  $\eta(0)$ . Finalmente, como  $\|(\varphi_t \circ \eta)(s)\| \leq \|\dot{\eta}(s)\|$  para todo  $t$  suficientemente grande y todo  $s$  en  $J'$  (por la contracción uniforme en la dirección de  $E^s$  del flujo de Anosov  $\varphi_t$ ), entonces existe  $n > 0$  tal que  $(f_\gamma|_{J'})^n$  es una contracción, y por lo tanto  $f_\gamma|_{J'}$  también lo es.

Análogamente si  $F$  hoja de  $\mathcal{F}^{cs}$  foliación centro-estable.

□

## 4.2. Teorema de Haefliger y consecuencias

Enunciaremos en la presente sección el teorema de Haefliger para foliaciones de codimensión 1 y dejaremos la prueba para la sección siguiente. Los enunciados de esta sección, a excepción del Corolario 4.2.2, fueron extraídos de [CLN].

En particular el Corolario 4.2.2 es la razón de ser de nuestra atención al teorema de Haefliger puesto que dicho corolario será una pieza clave a la hora de probar el teorema de Margulis-Plante-Thurston en el Capítulo 6.

Durante esta sección,  $\mathcal{F}$  será una foliación de codimensión 1 en  $M$  variedad diferenciable.

Decimos que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  continua es una *curva transversal* a  $\mathcal{F}$  si para todo  $\gamma(s) \in \gamma((0, 1))$  existe  $\Psi : \Psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow V$  mapa distinguido de  $\mathcal{F}$  con  $\gamma(s) \in V$  y  $(s - \epsilon, s + \epsilon)$  entorno de  $s$  tales que

$$\pi \circ \Psi^{-1} \circ \gamma|_{(s-\epsilon, s+\epsilon)}$$

es un homeomorfismo local, donde  $\pi$  denota la proyección sobre la última coordenada en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

Observar que, por cómo se comportan los cambios de cartas en una foliación, si  $\gamma$  es transversal a  $\mathcal{F}$  en un punto  $\gamma(s)$  con respecto a un determinado mapa distinguido, entonces es transversal a  $\mathcal{F}$  en  $\gamma(s)$  con respecto a cualquier mapa distinguido que contenga en su imagen a  $\gamma(s)$ .

Estamos pues en condiciones de enunciar el teorema de Haefliger.

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Haefliger).** *Sea  $\mathcal{F}$  foliación de codimensión 1 en  $M$  variedad diferenciable. Si existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  curva continua, cerrada, homotópicamente nula y transversal en todo punto a  $\mathcal{F}$ , entonces existe una hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  y una curva cerrada  $\Gamma$  en  $F$  cuyo germen de holonomía en un segmento  $J$  transversal a  $\mathcal{F}$ , con  $p = J \cap \Gamma$ , es la identidad en una de las componentes conexas de  $J \setminus \{p\}$ , pero difiere de la identidad en cualquier entorno abierto de  $p$  en  $J$ .*

Si bien el teorema es interesante en sí para la teoría de foliaciones (ver corolario 4.2.3, por ejemplo), como ya dijimos nuestro interés radica en el siguiente corolario que es una consecuencia directa de combinar la tesis del teorema de Haefliger con el resultado de la Proposición 4.1.3 de la sección anterior.

**Corolario 4.2.2.** *Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada. Entonces no puede existir una curva  $\gamma$  continua, cerrada, homotópicamente nula y transversal en todo punto a la foliación centro-inestable  $\mathcal{F}^{cu}$  o a la foliación centro-estable  $\mathcal{F}^{cs}$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que existe  $\gamma$  continua, cerrada, homotópicamente nula y transversal a  $\mathcal{F}^{cu}$ . Por teorema de Haefliger existe una hoja  $F$  de  $\mathcal{F}^{cu}$  y una curva  $\Gamma$  en  $F$  cuyo germen de holonomía en un segmento  $J$  transversal a  $\mathcal{F}$ , con  $p = J \cap \Gamma$ , es la identidad en una de las componentes conexas de  $J \setminus \{p\}$ , pero difiere de la identidad en cualquier entorno abierto de  $p$  en  $J$ . Esto último implica, en particular, que la curva  $\Gamma$  no es homotópicamente nula en  $F$ . Luego  $F$  debe ser una hoja cilíndrica (no puede ser plana), y por lo tanto por la Proposición 4.1.3 la holonomía de  $\Gamma$  debería ser contractiva o expansiva en ambas componentes conexas de  $J \setminus \{p\}$ , lo cual nos da una contradicción.

□

Recordar del Capítulo 3 la construcción de la foliación de Reeb en  $S^3$ . La misma constituía una foliación de codimensión 1 y clase  $C^\infty$  en  $S^3$ . Destacamos entonces el siguiente corolario del teorema de Haefliger.

**Corolario 4.2.3.** *No existen foliaciones analíticas de codimensión 1 en  $S^3$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que existe  $\mathcal{F}$  foliación analítica de codimensión 1 en  $S^3$ .

Observar que a partir de cómo definimos el mapa de holonomía asociado a una curva, si tomamos secciones transversales analíticas a lo largo de una curva  $\Gamma$  analítica contenida en un hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  entonces el mapa de holonomía asociado a  $\Gamma$  también queda analítico.

Veamos que el corolario quedaría probado si probamos que necesariamente existe una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^3$  cerrada y transversal a  $\mathcal{F}$ .

Efectivamente, si existe una tal  $\gamma$ , por ser  $S^3$  simplemente conexo debe ser  $\gamma$  homotópicamente nula. Luego por teorema de Haefliger existe alguna hoja  $F$  y alguna curva  $\Gamma \subset F$  cerrada cuyo germen de holonomía en un segmento  $J$  transversal a  $\mathcal{F}$ , con  $p = J \cap \Gamma$ , es la identidad en una de las componentes conexas de  $J \setminus \{p\}$ , pero difiere de la identidad en cualquier entorno abierto de  $p$  en  $J$ . Dado que la holonomía sobre una curva no depende del segmento transversal elegido ni del representante en la clase de homotopía de la curva, podemos suponer que  $J$  y  $\Gamma$  son analíticos. De esta forma llegamos a una contradicción puesto que si el mapa de holonomía analítico  $f_\Gamma : J \rightarrow J$  fuera la identidad en una de las componentes conexas de  $J \setminus \{p\}$  entonces  $f_\Gamma$  debería ser la identidad en un entorno de  $p$  en  $J$ .

Queda por ver que siempre existe una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^3$  cerrada y transversal a  $\mathcal{F}$  si  $\mathcal{F}$  es una foliación analítica de codimensión 1 en  $S^3$ .

Fijemos una métrica riemanniana en  $S^3$ . Puesto que  $S^3$  es simplemente conexo, todo campo de planos en  $S^3$  es orientable. Es decir, existen campos continuos  $e_1$  y  $e_2$  en  $M$  tales que para todo  $x$  en  $M$  se cumple que  $\{e_1(x), e_2(x)\}$  es base ortonormal de  $T_x F \subset T_x S^3$ , siendo  $F$  la hoja de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $x$ . Dado que  $S^3$  es orientable (por ser simplemente conexo), entonces podemos fijar una orientación en  $S^3$  y luego considerar  $X(x) \in T_x S^3$  tal que  $\{e_1(x), e_2(x), X(x)\}$  sea una base ortonormal positiva de  $T_x S^3$ . De esta forma  $X$  forma un campo continuo en  $S^3$ , sin singularidades y transversal en todo punto a  $\mathcal{F}$ .

Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^3$  una curva integral de  $X$ . Veamos que  $\alpha$  interseca más de

una vez a alguna hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  en un mismo entorno distinguido de  $\mathcal{F}$ . Basta tomar  $x_0$  un punto de acumulación de  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y observar que, dado un entorno distinguido  $U$  de  $x_0$ , necesariamente existen  $\alpha(n_{k_1})$  y  $\alpha(n_{k_2})$  en  $U$  tales que  $n_{k_1}$  y  $n_{k_2}$  son distintos, están distanciados entre sí tanto como se quiera, y los segmentos de  $\alpha(\mathbb{R}) \cap U$  que contienen a  $\alpha(n_{k_1})$  y  $\alpha(n_{k_2})$  intersectan necesariamente a la placa de  $U$  que contiene a  $x_0$  en dos puntos  $\alpha(t_1)$  y  $\alpha(t_2)$ . Luego tomando  $|n_{k_2} - n_{k_1}|$  suficientemente grande podemos asegurar que  $t_1 \neq t_2$ .

Si  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  alcanza con tomar  $\gamma$  una reparametrización de  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$ .

Si  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ , puesto que  $\alpha(t_1)$  y  $\alpha(t_2)$  quedan contenidos en un mismo entorno distinguido  $U$  de  $\mathcal{F}$  entonces es claro que podemos reducir ligeramente el dominio de  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$  a  $[t'_1, t'_2] \subset [t_1, t_2]$  de forma tal que  $\alpha([t_1, t'_1] \cup [t'_2, t_2]) \subset U$  y de poder unir estos nuevos extremos,  $\alpha(t'_1)$  y  $\alpha(t'_2)$ , por una curva  $\delta$  interior a  $U$  y transversal a  $\mathcal{F}$  (ver Figura 4.2). Tomando  $\gamma$  una reparametrización de  $\alpha|_{[t'_1, t'_2]} * \delta$  obtenemos la curva buscada y esto finaliza la prueba del corolario.

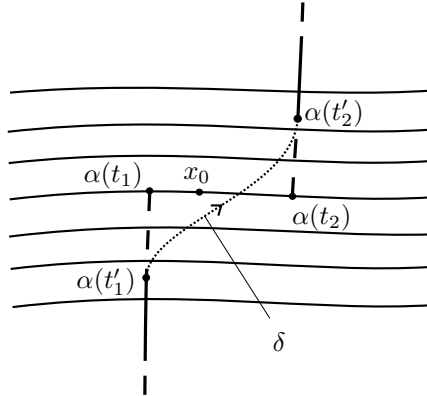


Figura 4.2

□

### 4.3. Demostración del teorema de Haefliger

La prueba del Lema 4.3.1 fue extraída de [Sol] y los restantes argumentos fueron extraídos de [CLN].



### 4.3.1. Resumen de la prueba

Veamos un resumen de lo que será la prueba. Partimos de que tenemos  $\mathcal{F}$  foliación de codimensión 1 en  $M$  y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  curva continua, cerrada, homotópicamente nula y transversal en todo punto a  $\mathcal{F}$ .

Observar que bajo estas condiciones, a la homotopía que anula a  $\gamma$  la podemos ver como un mapa continuo  $f : D \rightarrow M$  tal que  $f|_{\partial D} = \gamma$ , con  $D$  el disco de dimensión 2. En tal caso  $f(D)$  constituye un 2-disco  $C^0$ -inmerso en  $M$  con el borde transversal a  $\mathcal{F}$ .

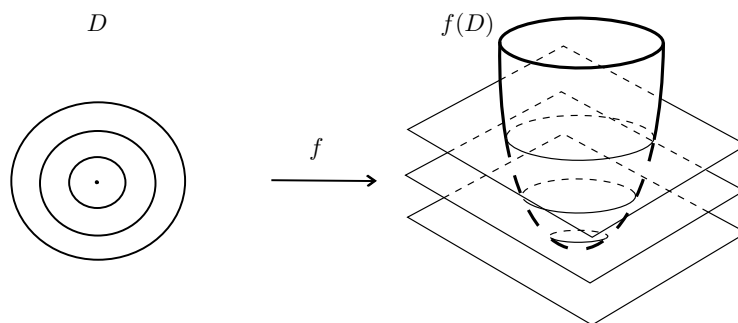
La prueba se estructura ahora en dos etapas.

El objetivo de la primera es ver que podemos considerar el disco  $f(D)$  en posición general con respecto  $\mathcal{F}$ . Es decir, de forma tal que los únicos (y finitos) puntos en que  $f(D)$  no sea transversal a  $\mathcal{F}$  se vean localmente en un entorno distinguido de  $\mathcal{F}$  como los gráficos de los mapas  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  o  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . Es decir, que la forma en la que el disco  $f(D)$  esté inmerso entre las hojas de  $\mathcal{F}$  en un entorno de cada “tangencia” sea topológicamente equivalente a cómo están inmersos en un entorno de 0 en  $\mathbb{R}^3$  los gráficos de  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  o  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  con respecto a las hojas  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ .

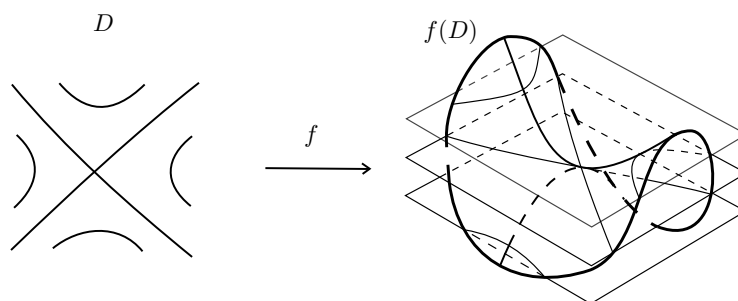
Teniendo el disco  $f(D)$  en posición general, las preimágenes por  $f$  de las hojas de  $\mathcal{F}$  inducen en  $D$  una foliación  $f^*(D)$  con finitas singularidades. Estas singularidades serán o bien de tipo centro (curvas de nivel de  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  en un entorno de  $(0, 0)$ ) o bien de tipo silla (curvas de nivel de  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  en un entorno de  $(0, 0)$ ). Además, la transversalidad de  $f$  en  $\partial D$  se traduce en que la foliación  $f^*(D)$  sea transversal a  $\partial D$  en  $\partial D$ .

Será posible entonces orientar globalmente en  $D$  las hojas de  $f^*(D)$  de forma tal que las hojas de  $f^*(D)$  sean las órbitas de un flujo continuo  $\phi_t$  en  $D$  que además sea entrante a  $D$  en todo punto de  $\partial D$ .

La segunda etapa de la prueba consiste en, mediante un argumento de tipo Poincaré-Bendixson, encontrar en  $D$  un ciclo límite minimal para el flujo  $\phi_t$ , donde previamente definimos adecuadamente un orden de inclusión dentro de la familia de los ciclos límite posibles. Es decir, la idea será obtener en  $f^*(D)$  una hoja cerrada (o un ciclo cerrado compuesto por una concatenación de sucesivas hojas y singularidades) que sea acumulado de un lado por las órbitas del flujo  $\phi_t$  pero que del otro no lo pueda ser (porque en tal caso se generaría un ciclo límite menor). Luego esa curva cerrada o ciclo se corresponderá en  $\mathcal{F}$



(a) Tangencia de tipo centro



(b) Tangencia de tipo silla

Figura 4.3

con una curva cerrada incluida en alguna hoja  $F$  para la cual la holonomía será trivial de un lado y del otro no, concluyendo la prueba.

#### 4.3.2. Disco en posición general

Sea  $D$  el disco de dimensión 2. Partimos de que existe  $f : D \rightarrow M$  continua tal que  $f|_{\partial D} = \gamma$  es transversal a  $\mathcal{F}$ .

Veremos en el Lema 4.3.1 que podemos perturbar ligeramente a  $f(D)$  y ponerlo en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$  sin perder la transversalidad a  $\mathcal{F}$  en el borde.

Veamos primero a qué nos referimos precisamente con “posición general” con respecto a  $\mathcal{F}$ .

Dado  $g : D \rightarrow M$  un mapa continuo, decimos que  $g(D)$  es un *disco en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$*  si

- a) El mapa  $g$  es transversal a  $\mathcal{F}$  en todos salvo en un cantidad finita  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de puntos de  $D$ .
- b) Los puntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  se encuentran todos en hojas distintas de  $\mathcal{F}$ .
- c) Para cada uno de estos puntos  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$  existe un entorno  $U_i$  de  $p_i$  y un entorno distinguido  $V_i$  de  $\mathcal{F}$  con mapa distinguido  $\Psi_i : \Psi_i^{-1}(V_i) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow V_i$  y  $g(U_i) \subset V_i$ , tales que  $\pi \circ \Psi_i^{-1} \circ g|_{U_i}$  es topológicamente equivalente en un entorno de  $(0, 0)$  al mapa

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

o al mapa

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2,$$

donde  $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota la proyección sobre la última coordenada. Es decir, si existe  $W_i$  entorno de  $(0, 0)$  y  $h : W_i \rightarrow U_i$  homeomorfismo tal que o bien  $(\pi \circ \Psi_i^{-1} \circ g|_{U_i} \circ h)(x, y) = x^2 + y^2$  o bien  $(\pi \circ \Psi_i^{-1} \circ g|_{U_i} \circ h)(x, y) = x^2 - y^2$ .

Si estamos en el primer caso del ítem c),  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , decimos que  $p_i$  es un *punto tipo centro* y si estamos en el segundo caso,  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ , decimos que  $p_i$  se trata de un *punto tipo silla*.

Observar que si  $g(D)$  es un disco en posición general respecto a  $\mathcal{F}$ , la partición que se genera en  $D$  tomando las preimágenes por  $g$  de las hojas de  $\mathcal{F}$  se corresponde con una foliación con finitas singularidades en  $D$ , donde en un entorno de cada singularidad las hojas poseen topológicamente la misma disposición que las curvas de nivel en un entorno de  $(0, 0)$  de  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  en el caso de centros (ver Figura 4.3a) y de  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  en el caso de puntos silla (ver Figura 4.3b).

Luego en las hipótesis del teorema de Haefliger tenemos el siguiente lema.

**Lema 4.3.1 (Disco en posición general).** *Existe  $g : D \rightarrow M$  continuo y  $C^0$ -cerca de  $f$  tal que  $g(D)$  queda en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$  y  $g|_{\partial D}$  continua siendo transversal a  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Consideramos una triangulación de  $D$  suficientemente fina como para que la imagen por  $g$  de cada 2-simplejo (triángulo relleno) quede

contenida en algún entorno distinguido  $V$  de  $\mathcal{F}$ . Lo hacemos de forma tal que  $\partial D$  forme parte del 1-esqueleto de la triangulación.

Construiremos  $g$  en etapas a lo largo del esqueleto de la triangulación. Sea  $D^0$  el 0-esqueleto de la triangulación. Consideremos un mapa  $f'$  cercano a  $f$  y definido por el momento sólo en  $D^0$  de forma tal que:

1. Para cada terna de puntos  $\Delta_1^0, \Delta_2^0, \Delta_3^0 \in D^0$  que sean vértices de un mismo 2-simplejo se cumple que  $f'(\Delta_1^0)$ ,  $f'(\Delta_2^0)$  y  $f'(\Delta_3^0)$  se encuentran en el mismo entorno distinguido  $U$  de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $f(\Delta_1^0)$ ,  $f(\Delta_2^0)$  y  $f(\Delta_3^0)$ .
2. Los puntos  $f'(\Delta_1^0)$  y  $f'(\Delta_2^0)$  no se encuentran en la misma hoja de  $\mathcal{F}$  si  $\Delta_1^0$  y  $\Delta_2^0$  son dos puntos distintos cualesquiera de  $D^0$ .
3. Para cada 1-simplejo  $\Delta^1$  tal que  $\Delta^1 \subset \partial D$ , si denominamos  $\Delta_1^0$  y  $\Delta_2^0$  a sus extremos, entonces se cumple que el orden de los pares de puntos

$$(\pi \circ \Psi^{-1} \circ f)(\Delta_1^0), (\pi \circ \Psi^{-1} \circ f)(\Delta_2^0) \quad \text{y}$$

$$(\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(\Delta_1^0), (\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(\Delta_2^0)$$

es el mismo en  $\mathbb{R}$ , donde  $\Psi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \Psi(U) \subset M$  denota el mapa del atlas de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $f(\Delta_1^0)$ ,  $f(\Delta_2^0)$ ,  $f'(\Delta_1^0)$  y  $f'(\Delta_2^0)$ , y  $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota la proyección sobre la última coordenada.

Extendemos el mapa  $f'$  al 1-esqueleto  $D^1$  de  $D$  de la siguiente forma: Para cada 1-simplejo  $\Delta^1 \in D^1$  con extremos  $\Delta_1^0$  y  $\Delta_2^0$  fijamos un mapa  $\Psi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \Psi(U) \subset M$  del atlas de  $\mathcal{F}$  tal que  $f'(\Delta_1^0)$  y  $f'(\Delta_2^0)$  pertenezcan a  $\Psi(U)$  y si  $\Delta^1 \subset \partial D$  elegimos el mismo mapa  $\Psi$  del anterior punto 3. Definimos ahora  $f'$  en  $\Delta^1$  a través de un homeomorfismo que lo transforme en el segmento recto que une  $\Psi^{-1}(f'(\Delta_1^0))$  con  $\Psi^{-1}(f'(\Delta_2^0))$  en  $U$  y luego “subiéndolo” a  $M$  por el mapa  $\Psi$ . Observar que a partir de cómo definimos  $f'$  en  $D^0$ ,  $f'$  queda transversal a  $\mathcal{F}$  en cada 1-simplejo y, en particular, en  $\partial D$ .

Veamos cómo definir  $f'$  en cada 2-simplejo  $\Delta^2$  del 2-esqueleto  $D^2$ : Fijamos otra vez un mapa del atlas de  $\mathcal{F}$ ,  $\Psi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \Psi(U) \subset M$ , tal que  $f(\Delta^2) \subset \Psi(U)$  y tal que la imagen por  $f'$  de los vértices de  $\Delta^2$  quede contenida también en  $\Psi(U)$ . Luego, por encontrarse estas imágenes contenidas

en distintas hojas de  $\mathcal{F}$ , podemos denominar  $\Delta_0^2$ ,  $\Delta_1^2$  y  $\Delta_2^2$  a los vértices de  $\Delta^2$  de forma tal que

$$(\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(\Delta_1^0) < (\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(\Delta_2^0) < (\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(\Delta_3^0).$$

con  $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre la última coordenada.

Llamemos  $\Delta_1^1$  al lado de  $\Delta^2$  que une a  $\Delta_1^0$  con  $\Delta_3^0$  y llamemos  $\Delta_2^1$  y  $\Delta_3^1$  a los restantes lados. Luego a cada punto  $x \in \Delta_1^1$  le corresponde un único  $y \in \Delta_2^1 \cup \Delta_3^1$  tal que

$$(\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(x) = (\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(y).$$

Definimos ahora el mapa  $f'$  en el segmento  $[x, y] \subset \Delta^2$  tal que la composición  $\Psi^{-1} \circ f'$  transforme homeomórficamente  $[x, y]$  en el segmento

$$[(\Psi^{-1} \circ f')(x), (\Psi^{-1} \circ f')(y)] \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{(\pi \circ \Psi^{-1} \circ f')(x)\}.$$

De esta forma tenemos definido el mapa  $f'$  en todo  $D$  y podemos asegurar que el mismo es transversal a  $\mathcal{F}$  en todo punto de  $D$  excepto quizás en algún punto de  $D^0$ .

Llamemos  $f'^*(\mathcal{F})$  a la foliación con singularidades en  $D$  que induce  $f' : D \rightarrow M$  al considerar la partición de  $D$  que generan las preimágenes de las hojas de  $\mathcal{F}$ . Observar que las finitas singularidades  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de esta foliación se dan en puntos de  $D^0$  y que en el interior de cada 2-simplejo las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  son exactamente segmentos rectos que parten desde la unión de dos lados de dicho 2-simplejo y finalizan en el lado restante.

**Afirmación 4.3.2.** *Podemos orientar las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  en  $D$ .*

*Prueba.* Sea  $x \in D$ . Podemos considerar un entorno  $U$  de  $x$  tal que  $f'(U)$  está incluido en  $\Psi(V)$  con  $\Psi : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow M$  mapa distinguido de  $\mathcal{F}$ . Luego las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  en  $U$  son las curvas de nivel de la función  $\pi \circ \Psi^{-1} \circ f'$  con  $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre la última coordenada.

Por cómo construimos  $f'$ , es claro que de un lado de cada hoja de  $f'^*(\mathcal{F})$  en  $U$  las hojas corresponden a curvas de nivel de valor menor y del otro lado a valor mayor para la función  $\pi \circ \Psi^{-1} \circ f'$ . Luego podemos orientar cada hoja eligiendo, por ejemplo, que las hojas en las que  $\pi \circ \Psi_i^{-1} \circ f'$  es menor queden a las “izquierda” de la hoja que orientamos. De esta forma podemos orientar las

hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  en  $U$ . Eligiendo que  $\pi \circ \Psi^{-1} \circ f'$  decrezca hacia la “derecha” obtenemos la orientación opuesta.

Podemos entonces cubrir  $D$  compacto por finitos entornos  $U_1, \dots, U_k$  en los que las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  pueden ser orientadas de dos formas posibles. A partir de distinguir como dos puntos distintos a cada punto con una u otra orientación, es posible formar  $p : D^* \rightarrow D$  cubrimiento doble de  $D$ . Puesto que  $D$  es simplemente conexo, el cubrimiento  $p$  que es 2 a 1 debe estar compuesto por dos componentes conexas, cada una correspondiente a una de las dos formas de orientar globalmente en  $D$  las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$ . Luego las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  son globalmente orientables en  $D$ . ■

Construiremos ahora el mapa  $g$  modificando en un entorno de  $D^0$  al mapa  $f'$ .

Veamos pues en una primera etapa cómo pueden estar dispuestas las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  en un entorno de cada singularidad.

Sea  $\Delta^0 \in D^0$ . Sea  $Z(\Delta^0)$  la unión de todos los vértices que se conectan con  $\Delta^0$  por algún 1-simplejo de la triangulación. Sean  $\Delta_1^1, \dots, \Delta_k^1$  los 1-simplejos que contienen a  $\Delta^0$  numerados en orden alrededor de  $\Delta^0$  y tales que  $\Delta_i^1, \Delta_{i+1}^1 \subset \Delta_i^2$  y  $\Delta_k^1, \Delta_1^1 \subset \Delta_k^2$ , donde  $\Delta_1^2, \dots, \Delta_k^2$  denotan los 2-simplejos que contienen a  $\Delta^0$ . Sean  $A_1, \dots, A_k$  puntos con  $A_i \in \Delta_i^1$  tales que  $\{A_1, \dots, A_k, \Delta^0\}$  se encuentra contenido en un mismo entorno distinguido de  $\mathcal{F}$  y tales que los segmentos rectos que unen  $A_i$  con  $A_{i+1}$  y  $A_k$  con  $A_1$  (rectos vistos desde el entorno distinguido) sean todos transversales a  $\mathcal{F}$ .

Si  $\Delta^2$  es un 2-simplejo que contiene a  $\Delta^0$  y  $\ell$  es una hoja en  $\Delta^2$  que contiene a  $\Delta^0$  decimos que  $\ell$  es una *separatriz* que nace en  $\Delta^0$ . Observar que a lo sumo existe una separatriz por cada 2-simplejo que contiene a  $\Delta^0$ .

**Afirmación 4.3.3.** *Existe un número par  $m$  de separatrices que nacen de  $\Delta^0$ . Además:*

1. Si  $m = 0$  la foliación  $f'^*(\mathcal{F})$  es topológicamente equivalente a un centro en un entorno de  $\Delta^0$ .
2. Si  $m = 2$  la foliación  $f'^*(\mathcal{F})$  es una foliación sin singularidades en un entorno de  $\Delta^0$ .

3. Si  $m = 4$  la foliación  $f'^*(\mathcal{F})$  es topológicamente equivalente a una silla en un entorno de  $\Delta^0$ .

*Prueba* Orientamos las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$ . Supongamos que  $\Delta_i^2$  contiene una separatriz  $\ell_i$ . Haciendo fluir esta separatriz por el flujo que forma la orientación de las hojas, supongamos sin pérdida de generalidad que fluye hacia  $\Delta^0$ .

Veamos que el flujo es saliente en la siguiente separatriz, ordenando estas entorno de  $\Delta^0$ . Por continuidad, hojas que parten suficientemente cerca de  $\ell_i$  salen de  $\Delta_i^2$  y, prolongándolas según la orientación fijada, entran y salen de  $\Delta_{i+1}^2, \Delta_{i+2}^2$ , etc.. (o  $\Delta_{i-1}^2, \Delta_{i-2}^2$ , etc.. según de que lado de  $\ell_i$  partan) hasta llegar a un 2-simplejo  $\Delta_j$  que sí contenga una separatriz, es decir, al 2-simplejo que contiene a la separatriz contigua. Luego en ese 2-simplejo la prolongación de la hoja sale por el lado opuesto a  $\Delta^0$  y esto implica que la separatriz que está contenida ese 2-simplejo es saliente (ver Figura 4.4). De esta forma probamos que las separatrices por  $\Delta^0$  alternan saliente con entrantes y son, por tanto, un número par de separatrices.

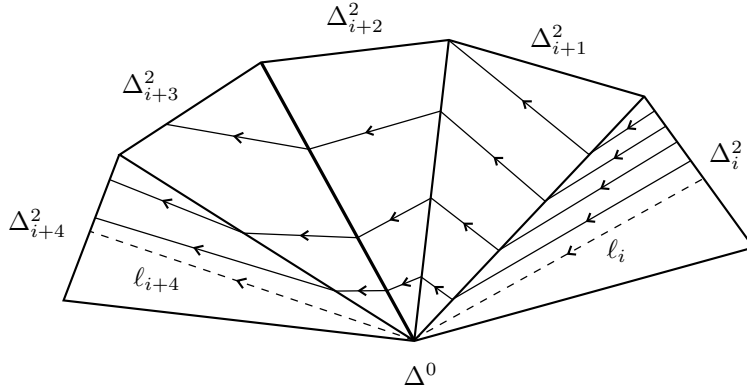


Figura 4.4

Supongamos ahora que  $m = 0$ , es decir, que no hay separatrices partiendo de  $\Delta^0$ . Sea  $B_k$  un punto en el 1-simplejo  $\Delta_k^1$  tal que todas las hojas que intersectan al segmento  $[\Delta^0, B_k]$  intersectan también al segmento  $[\Delta^0, A_1]$ . Consideramos luego un punto  $B_{k-1}$  en  $\Delta_{k-1}^1$  tal que todas las hojas que intersectan a  $[\Delta^0, B_{k-1}]$  también intersectan a  $[\Delta^0, B_k]$ . Realizando sucesivamente este proceso  $k$  veces obtenemos un segmento  $[\Delta^0, B_1]$  tal que todas las hojas que lo intersectan dan una vuelta entorno de  $\Delta^0$  (cortando sucesivamente a los 1-simplejos  $\Delta_2^1, \Delta_3^1, \dots, \Delta_k^1$ ) e intersectan finalmente a  $\Delta_1^1$ .

Veamos que cada una de estas hojas que parten de  $[\Delta^0, B_1]$  vuelven al mismo punto luego de dar la vuelta. Efectivamente observar que si realizamos esta construcción en un entorno suficientemente cercano de  $\Delta^0$  como para que la imagen por  $f'$  de tal entorno quede contenida en un entorno distinguido de  $\mathcal{F}$ , entonces el segmento  $f'([\Delta^0, B_1])$  sería transversal a las placas de dicho entorno distinguido, y es claro que un tal segmento transversal solo puede intersectar a cada placa en un único punto. Luego como la imagen por  $f'$  de cada porción de hoja que parte de  $[\Delta^0, B_1]$  y vuelve a  $[\Delta^0, B_1]$  está contenida en una única placa (por ser las hojas de  $f'^*(\mathcal{F})$  componentes conexas de las preimágenes por  $f'$  de las hojas de  $\mathcal{F}$ ), entonces luego de dar la vuelta cada hoja debería volver al mismo punto de  $[\Delta^0, B_1]$ . Luego para el caso  $m = 0$ , en un entorno de  $\Delta^0$  la foliación con singularidades  $f'^*(\mathcal{F})$  es topológicamente conjugada a un centro.

Los dos restantes casos ( $m = 2$  y  $m = 4$ ) se prueban de forma análoga basados en la siguiente observación: si  $\ell' \subset \Delta_s^2$  y  $\ell'' \subset \Delta_t^2$  son dos separatrices contiguas, supongamos  $s < t$ , se puede probar análogamente al caso  $m = 0$  que existen puntos  $S \in \Delta_{s+1}^1$  y  $T \in \Delta_t^1$  contenidos en una misma hoja de  $f'^*(\mathcal{F})$  que los une a través de los 2-simplejos  $\Delta_{s+1}^2, \Delta_{s+2}^2, \dots, \Delta_{t-1}^2$  que los separan, tales que toda hoja que intersecta al segmento  $[\Delta^0, S]$  intersecta también a  $[\Delta^0, T]$  y recíprocamente.

Luego existe un encaje topológico  $q([0, 1] \times [0, 1])$  tal que cada hoja que une  $[\Delta^0, S]$  con  $[\Delta^0, T]$  queda contenida en  $q([0, 1] \times \{t\})$  para cierto  $t \in (0, 1]$ , la unión de las separatrices  $\ell' \cup \ell''$  contiene a  $q([0, 1] \times \{0\})$  y los puntos  $T$  y  $S$  quedan contenidos en  $q([0, 1] \times \{1\})$ . Reuniendo cada uno de estos encajes entre cada par de separatrices contiguas deducimos la tesis de lema para los casos  $m = 2$  y  $m = 4$ .

■

Para terminar de construir el mapa  $g$  en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$ , sea  $\Delta^0 \in D^0$  tal que el número  $m$  de separatrices desde  $\Delta^0$  sea mayor que 4 y veamos que podemos modificar ligeramente  $f'$  en un entorno de  $\Delta^0$  de forma tal de “dividir” la singularidad  $\Delta^0$  en dos singularidades, una de ellas siendo de tipo silla y la otra presentando  $m - 2$  separatrices.

Sean  $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \ell_{i_3}, \ell_{i_4}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq k$ , cuatro separatrices consecutivas que nacen de  $\Delta^0$ , contenidas respectivamente en los 2-simplejos



$\Delta_{i_1}^2, \Delta_{i_3}^2, \Delta_{i_3}^2$  y  $\Delta_{i_4}^2$ . Sea  $L$  la hoja de  $\mathcal{F}$  que contiene a las cuatro imágenes  $f'(\ell_{i_j}), j = 1, \dots, 4$ . Observar que la imagen por  $f'$  de la parte de la estrella (con respecto al complejo simplicial) centrada en  $\Delta^0$  que se encuentra entre  $\ell_{i_1}$  y  $\ell_{i_2}$  queda de un lado de la hoja  $L$ , la de la parte que se encuentra entre  $\ell_{i_2}$  y  $\ell_{i_3}$  queda del otro lado y la de la parte entre  $\ell_{i_3}$  y  $\ell_{i_4}$  del otro (el primero).

Sean los puntos  $A_1, \dots, A_k$  con  $A_i \in \Delta_i^1$  como fueron construidos previo a la Afirmación 4.3.3. Sean  $A'_{i_2+1}, \dots, A'_{i_3}$  puntos tales que  $A'_j \in (\Delta^0, A_j)$ , para cada  $i_2 < j \leq i_3$ .

Fijamos  $J$  tal que  $i_2 < J \leq i_3$ . Dividimos en dos los 2-simplejos  $\Delta_{i_2}^2, \Delta_{i_3}^2$  por dos líneas rectas  $A_{i_2}A'_{i_2+1}$  y  $A'_{i_3}A_{i_3+1}$ . Dividimos en tres a los 2-simplejos  $\Delta_j^2$ , con  $i_2 < j < J$ , por las rectas  $A_jA'_{j+1}$  y  $A'_jA'_{j+1}$ ; y a los 2-simplejos  $\Delta_j^2$ , con  $J \leq j < i_3$ , por las rectas  $A'_jA_{j+1}$  y  $A'_jA'_{j+1}$  (Ver Figura 4.5).

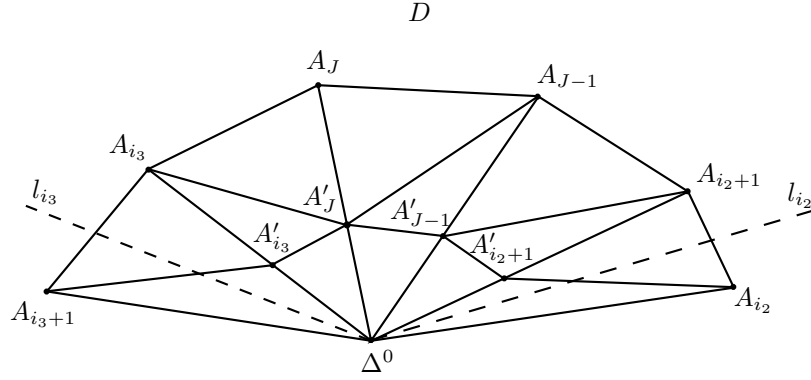


Figura 4.5

Definiremos a continuación a  $g$  modificando el valor de  $f'$  en los puntos  $A'_j$ , con  $i_2 < j \leq i_3$ .

Podemos suponer que toda esta construcción se llevó a cabo en un entorno de  $\Delta^0$  cuya imagen por  $f'$  queda contenida en  $\Psi(U)$  entorno distinguido de  $\mathcal{F}$  con  $\Psi: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow M$  mapa del atlas de  $\mathcal{F}$ .

Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que en el entorno  $\Psi(U)$  la imagen por  $f'$  de la región comprendida entre  $\ell_{i_2}$  y  $\ell_{i_3}$  queda contenida en las placas superiores a la que contiene a  $f'(\Delta^0)$  (las que por  $\pi$  van a altura más alta). Definiremos  $g$  en esta región de forma que su imagen quede contenida en las placas inferiores a la de  $f'(\Delta^0)$ , eliminando de esta forma las separatrices  $\ell_{i_2}$  y  $\ell_{i_3}$ .

Simplemente hacemos decrecer la  $n$ -ésima coordenada en  $\Psi(U)$  de los

puntos  $f'(A'_j)$  y definimos así un nuevo mapa  $g$  en  $D^0$  (que coincide con  $f'$  en los restantes puntos de  $D^0$ ) de forma tal que ahora quede

$$\pi(\Psi^{-1}(g(A_{i_2}))) < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_{i_2+1}))) < \dots < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_{J-1}))) < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_J))),$$

$$\pi(\Psi^{-1}(g(A_{i_3+1}))) < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_{i_3}))) < \dots < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_{J+1}))) < \pi(\Psi^{-1}(g(A'_J))),$$

pero

$$\pi(\Psi^{-1}(g(A'_J))) < \pi(\Psi^{-1}(g(\Delta^0))).$$

Luego el mapa  $g$  se extiende a los nuevos 2-simplejos análogamente a cómo definimos el mapa  $f'$  anteriormente y de esta forma las separatrices  $\ell_{i_2}$  y  $\ell_{i_3}$  son eliminadas (no se forman en  $g^*(\mathcal{F})$ ) y se forma una singularidad de tipo silla en el punto  $A'_J$  mientras el resto de los puntos permanecen no singulares (ver Figura 4.6).

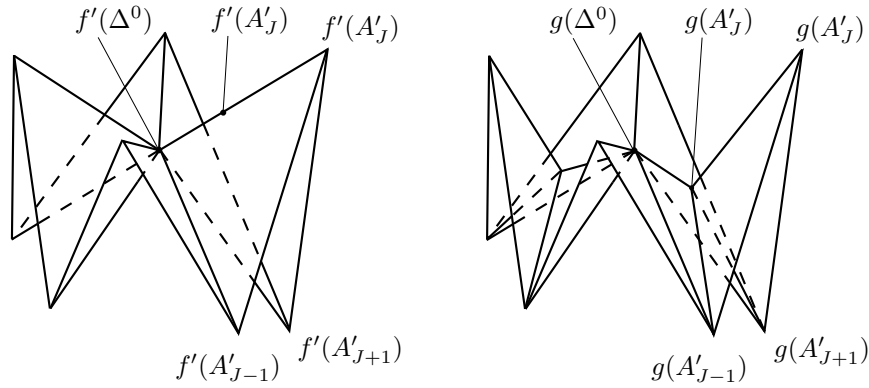


Figura 4.6

Realizando este proceso  $(m-4)/2$  veces obtenemos el mapa  $g$  definido en un entorno de  $\Delta^0$ , de forma tal que  $g^*(\mathcal{F})$  tiene sólo singularidades de tipo silla en  $\Delta^0$  y en  $(m-4)/2$  puntos dentro de tal entorno.

Redefiniendo  $g$  de forma análoga en pequeños entornos de los restantes puntos de  $D^0$  que presenten más de 4 separatrices, y a menos de finalmente realizar una pequeña perturbación de  $g$  que permita asegurar que las finitas singularidades de  $g^*(\mathcal{F})$  van todas a hojas distintas de  $\mathcal{F}$ , obtenemos entonces  $g : D \rightarrow M$  con  $g|_{\partial D}$  transversal a  $\mathcal{F}$  y  $g$  en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$ . De esta forma finaliza la prueba de lema.

□

### 4.3.3. Poincaré-Bendixson y obtención de un ciclo límite minimal

A partir de la subsección anterior tenemos construido un mapa  $g : D \rightarrow M$  continuo tal que  $g(D)$  queda en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$  y  $g|_{\partial D}$  es transversal a  $\mathcal{F}$ .

Análogamente a cómo lo hiciéramos con  $f'$  el mapa  $g$  induce en  $D$  una foliación con finitas singularidades,  $g^*(\mathcal{F})$ , cuyas hojas no triviales pueden ser globalmente orientadas en  $D$  (ver Afirmación 4.3.2). La transversalidad de  $g|_{\partial D}$  con respecto a  $\mathcal{F}$  implica que en  $\partial D$  la hojas de  $g^*(\mathcal{F})$  son todas entrantes o saliente a  $D$ , según qué orientación se elija.

Orientando las hojas de forma entrante en  $\partial D$  tenemos que existe entonces un flujo continuo  $\phi_t$  en  $D$  tal que los recorridos de cada una de sus órbitas regulares son exactamente las hojas de  $g^*(\mathcal{F})$  recorridas en el sentido de la orientación fijada, y las singularidades de  $\phi_t$  son exactamente las singularidades (centros o sillas) de  $g^*(\mathcal{F})$ .

Observar que, dado que  $g(D)$  se encuentra en posición general con respecto a  $\mathcal{F}$ , entonces las imágenes por  $g$  de las finitas singularidades de  $g^*(\mathcal{F})$  se encuentran en hojas distintas de  $\mathcal{F}$ . De esta forma podemos entonces asegurar que no existe conexión entre singularidades distintas, es decir, que no existe una separatriz de alguna singularidad de tipo silla tal que su alfa y omega límite sean dos singularidades distintas. Este detalle será necesario en argumentos posteriores.

Haremos uso de los resultados del teorema de Poincaré-Bendixson que enunciamos a continuación y cuya demostración puede encontrarse en [Sot, pág. 248]. Dado que las órbitas de  $\phi_t$  son lineales a trozos con finitas singularidades de tipo centro o silla, entonces por todo punto regular del flujo  $\phi_t$  existe una sección topológicamente transversal al mismo y por lo tanto la demostración que se realiza en [Sot] aplica en este caso.

**Teorema 4.3.4 (Poincaré-Bendixson).** *Sea  $\psi_t(p)$  la órbita futura de un punto  $p$  para un flujo  $\psi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $\{\psi_t(p)\}_{t \geq 0}$  está acotado y que  $\psi_t$  tiene un número finito de singularidades en  $\omega(p) = \{x \in D : x = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x)\}$  el omega límite de  $p$ . Entonces se cumple alguna de las siguientes alternativas:*

- (a) *Si  $\omega(p)$  contiene sólo puntos regulares, entonces  $\omega(p)$  es una órbita periódica.*

(b) Si  $\omega(p)$  contiene puntos regulares y singulares, entonces  $\omega(p)$  está compuesto por un conjunto de órbitas y puntos singulares tales que cada una de estas órbitas tiende a alguno de los puntos singulares cuando  $t$  tiende a  $\pm\infty$ , y cada uno de los puntos singulares es alfa y omega límite de alguna de las órbitas.

(c) Si  $\omega(p)$  no contiene puntos regulares, entonces  $\omega(p)$  es un punto singular.

Luego trabajando con el flujo  $\phi_t$  en  $D$  tenemos que, por Poincaré-Bendixson, para todo punto  $p$  en  $\gamma$  órbita de  $\phi_t$  se cumple que  $\omega(p) = \omega(\gamma)$  puede sólo ser una singularidad, una órbita periódica o un grafo de  $\phi_t$ . Un grafo de  $\phi_t$  es un conexo  $\Gamma \subset D$  que es la unión de finitos puntos silla y separatrices de puntos sillas, tal que si  $q$  es un punto silla de  $\Gamma$ , entonces al menos una separatriz saliente y una entrante en  $q$  están incluidas en  $\Gamma$ .

Análogamente  $\alpha(p) = \alpha(\gamma)$  puede sólo ser una singularidad, una órbita periódica, un grafo de  $\phi_t$  o  $\alpha(p) = \emptyset$  en caso de que la órbita pasada de  $p$  intesecte a  $\partial D$ .

Diremos que  $\Gamma \subset D$  es un ciclo límite de  $\phi_t$  si existe una órbita  $\gamma$  de  $\phi_t$  tal que  $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$ ,  $\omega(\gamma) = \Gamma$  o  $\alpha(\gamma) = \Gamma$  y  $\Gamma$  no es sólo una singularidad de  $\phi_t$ . Luego por Poincaré-Bendixson un ciclo límite  $\Gamma$  sólo puede ser una órbita periódica o un grafo de  $\phi_t$ . Observar que en tal caso  $D \setminus \Gamma$  contiene al menos dos componentes conexas, una de las cuales contiene a  $\partial D$ . Dado que asumimos que no existen conexiones entre singularidades distintas, la Figura 4.7 ilustra, a menos de homeomorfismo, los tres posibles tipos de grafos que pueden ser ciclos límite.

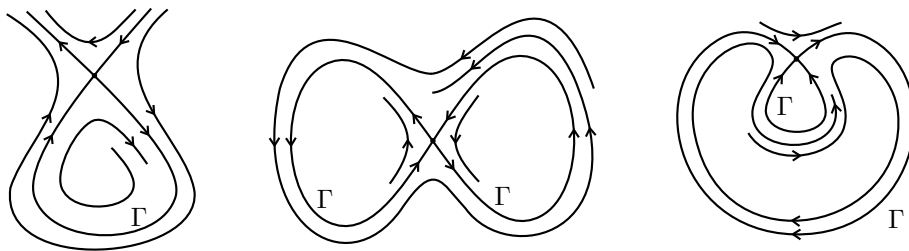


Figura 4.7: A menos de homeomorfismo, los tres tipos de grafos que pueden ser ciclos límite

Para cada  $\Gamma$  órbita periódica o grafo de  $\phi_t$  denotamos  $R(\Gamma)$  a la unión de

las clausuras de las componentes conexas de  $D \setminus \Gamma$  que no contienen a  $\partial D$ . Observar que si  $\Gamma$  es un ciclo límite, puesto que  $\Gamma$  es invariante por  $\phi_t$ , entonces también lo es  $R(\Gamma)$ .

**Lema 4.3.5.** *Sea  $\{\Gamma_n\}_n$  una sucesión decreciente de ciclos límites y  $\Gamma_\infty$  el borde del conjunto  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$ . Entonces  $\Gamma_\infty$  es una órbita periódica o un grafo de  $\phi_t$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos los elementos de la sucesión  $\{\Gamma_n\}_n$  son distintos. Y, dado que existen sólo finitas singularidades de  $g^*(\mathcal{F})$ , entonces existen sólo finitos grafos de  $\phi_t$  y por lo tanto también podemos suponer que todos los  $\Gamma_n$  son órbitas periódicas. Observar entonces que en estas condiciones  $\Gamma_\infty$  es un conjunto en el que acumulan órbitas periódicas de  $\phi_t$ .

Observar que entonces para cada  $n$  el conjunto  $R(\Gamma_n)$  es invariante por  $\phi_t$ , homeomorfo a un disco cerrado y tal que  $R(\Gamma_{n+1}) \subsetneq R(\Gamma_n)$ . Se sigue luego que  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$  es no vacío, cerrado e invariante por  $\phi_t$ .

Veamos que  $\Gamma_\infty = \partial(\bigcap_n R(\Gamma_n))$  es también invariante por  $\phi_t$ . Supongamos por contradicción que no lo es. Luego existen  $x_0$  en  $\Gamma_\infty = \bigcap_n R(\Gamma_n)$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $\phi_{t_0}(x_0) \notin \Gamma_\infty$ . Luego, dado que  $x_0$  está en  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$  que es invariante por  $\phi_t$ , entonces  $\phi_{t_0}(x_0)$  está incluido en el interior de  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$ . Por un lado, por continuidad, existe entonces un entorno  $U$  de  $x_0$  tal que  $\phi_{t_0}(U) \subset \bigcap_n R(\Gamma_n)$ . Por otro lado, dado que  $x_0 \in \partial(\bigcap_n R(\Gamma_n))$ , entonces  $U$  contiene algún punto de algún  $\Gamma_n$ , y por lo tanto este punto es necesariamente periódico de  $\phi_t$  y su órbita no está contenida en  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$ . Contradicción.

Además,  $\Gamma_\infty$  debe contener algún punto no singular de  $\phi_t$  puesto que  $\Gamma_\infty$  no puede contener centros (los centros no pueden estar acumulados por ciclos límite) y si contuviera a algún punto silla  $p$ , puesto que este punto sería acumulado por órbitas periódicas, entonces también estarían incluidos en  $\Gamma_\infty$  una separatriz entrante y una saliente en  $p$ .

Supongamos que  $\Gamma_\infty$  no es una órbita periódica de  $\phi_t$  y veamos que en tal caso  $\Gamma_\infty$  debe ser un grafo de  $\phi_t$ .

Sea  $p \in \Gamma_\infty$  un punto regular de  $\phi_t$  y supongamos que  $\omega(p)$  no es un punto silla contenido en  $\Gamma_\infty$ . Puesto que  $\omega(p)$  es conexo y no puede contener centros, si  $\omega(p)$  no es un punto silla entonces contiene algún punto  $q$  no singular de  $\phi_t$ . El argumento continúa ahora análogo al de la demostración

de Poincaré-Bendixson: Sea  $\xi$  una pequeña sección transversal a las órbitas de  $\phi_t$  tal que  $q \in \xi$ . Estamos suponiendo que  $\Gamma_\infty$  no es una órbita periódica, luego  $\mathcal{O}(p)$  intersecta a  $\xi$  en una sucesión monótona de puntos  $p_n = \phi_{t_n}(p)$  en  $\xi$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  y  $\lim_n p_n = q$ . Fijemos un  $p_{n_0}$  cualquiera dentro de los  $\{p_n\}_n$  y sea  $\eta$  la curva cerrada en  $D$  que se forma como la unión del segmento  $[p_{n_0}, p_{n_0+1}]$  y el segmento de órbita  $\{\phi_t(p) : t_{n_0} \leq t \leq t_{n_0+1}\}$ . Observar que cualquier órbita que intersecta a  $[p_{n_0}, p_{n_0+1}]$  entra en la componente conexa de  $D \setminus \eta$  que contiene a  $q$  y no vuelve a salir. Lo mismo con cualquier órbita que intersecta a  $[p_{n_0-1}, p_{n_0}]$  puesto que estas intersectan también a  $[p_{n_0}, p_{n_0+1}]$ . Luego  $p_{n_0}$  (que es un punto de la órbita de  $p$  y por lo tanto pertenece a  $\Gamma_\infty$ ) no puede ser acumulado por órbitas de  $\phi_t$  y esto es una contradicción.

Luego  $\omega(p)$  es necesariamente un punto silla y, análogamente,  $\alpha(p)$  lo es. Como ya observamos, por ser  $\Gamma_\infty$  acumulación de órbitas periódicas, si  $\Gamma_\infty$  contiene un punto silla  $p$  también contiene una separatriz entrante y una saliente por  $p$ .

Luego si  $\Gamma_\infty$  no es una órbita periódica es un conjunto invariante por  $\phi_t$  tal que el omega y alfa límite de todos sus puntos regulares es alguna de las finitas singularidades tipo silla de  $\phi_t$ , estando en tal caso estas singularidad contenidas también en  $\Gamma_\infty$  y conteniendo  $\Gamma_\infty$  al menos a dos separatrices de estas singularidades. En tales condiciones  $\Gamma_\infty$  es necesariamente un grafo de  $\phi_t$  y el lema queda por tanto probado. □

Sea  $\Sigma$  el conjunto de ciclos límite de  $\phi_t$  al que le agregamos todas las órbitas periódicas y grafos de  $\phi_t$  que se obtienen como borde  $\Gamma_\infty$  de intersecciones decrecientes  $\bigcap_n R(\Gamma_n)$  de interiores cerrados de ciclos límite como se obtienen a partir del lema anterior.

Definimos en  $\Sigma$  un orden parcial  $\leq$  mediante:  $\Gamma_1 \geq \Gamma_2$  si y sólo si  $R(\Gamma_1) \subset R(\Gamma_2)$ .

Sea  $\{\Upsilon_i\}_i$  una cadena (subconjunto totalmente ordenando) en  $\Sigma$ . Luego para todo  $\Upsilon_{i_0}$  en  $\{\Upsilon_i\}_i$ , o bien  $\Upsilon_{i_0}$  es cota superior de  $\{\Upsilon_i\}_i$ , o bien existe  $\Upsilon_{j_0}$  en  $\{\Upsilon_i\}_i$  tal que  $R(\Upsilon_{j_0}) \subsetneq R(\Upsilon_{i_0})$ .

En este último caso, puesto que  $\Upsilon_{j_0}$  es un ciclo límite o está acumulado por ciclos límite, entonces podemos asegurar que existe  $\Gamma$  ciclo límite tal que  $R(\Gamma) \subset R(\Upsilon_{i_0})$ .

Observar que existen a lo sumo numerables ciclos límite puesto que a cada ciclo límite  $\Gamma$  se le puede asociar un abierto de puntos de  $D$  que tienden a futuro a  $\Gamma$  y, como  $D$  posee una base numerable de su topología, sólo pueden existir numerables de estos abiertos.

Luego existe  $\{\Gamma_n\}_n$  sucesión de ciclos límite tales que  $\bigcap_n R(\Gamma_n) = \bigcap_i R(\Upsilon_i)$  y por lo tanto, por el lema anterior,  $\partial(\bigcap_i R(\Upsilon_i)) \in \Sigma$  y es claramente cota superior de  $\{\Upsilon_i\}_i$ .

Luego por Lema de Zorn existe  $\Gamma$  elemento maximal de  $\Sigma$ . Es  $\Gamma$  entonces una órbita periódica o un grafo cerrado tal que la región  $R(\Gamma)$  que encierra no contiene ciclos límites, es decir, tal que para todo  $p \in R(\Gamma)$  se cumple que  $\mathcal{O}(p)$  es una singularidad, una órbita periódica o está contenida en un grafo de  $\phi_t$ .

Sea  $\delta$  un pequeño segmento transversal a  $g^*(\mathcal{F})$  que corta a  $\Gamma$  en un punto  $p$  tal que  $p$  no sea un punto singular de  $g^*(\mathcal{F})$ .

### Caso 1: $\Gamma$ órbita periódica de $\phi_t$

Supongamos primero que  $\Gamma$  es una órbita periódica. En tal caso es posible definir, como hicieramos en la Sección 4.1 del presente capítulo, un mapa de holonomía  $f_\Gamma : \delta_1 \rightarrow \delta$  con  $\delta_1 \subset \delta$  segmento tal que  $p \in \delta_1$ .

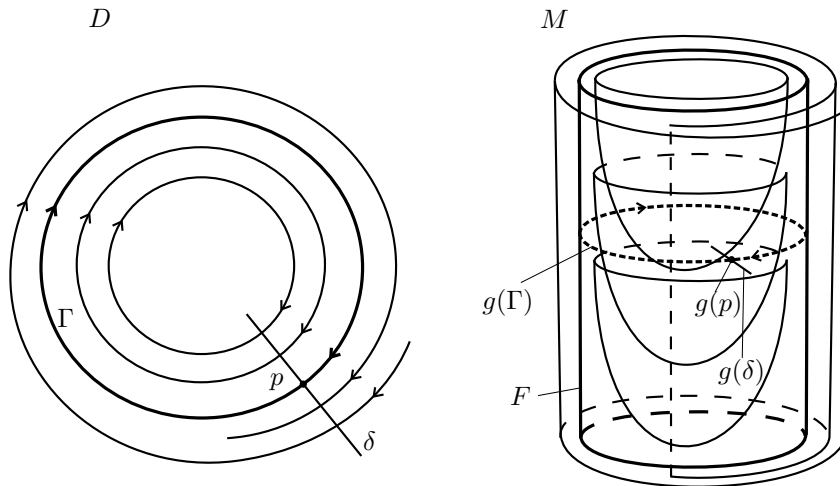


Figura 4.8: Caso  $\Gamma$  órbita periódica

Por un lado, se cumple que  $f_\Gamma$  es la identidad en  $\delta \cap R(\Gamma)$ , puesto que si no lo fuera existiría un punto  $q \in \delta \cap R(\Gamma)$  tal que el primer retorno de  $q$  a  $\delta$  sería distinto de  $q$  y en tal caso el  $\omega$  o  $\alpha$  límite de  $q$  “espiralaría” hacia adentro de  $R(\Gamma)$  formando un ciclo límite.

Por otro lado, el mapa de holonomía  $f_\Gamma$  no puede ser la identidad en ningún entorno de  $p$  en  $\delta$  puesto que si lo fuera entonces  $\Gamma$  no estaría en  $\Sigma$ .

Observar que  $g(\Gamma)$  es una curva cerrada en  $F$  la hoja de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $g(p)$  y que el mapa de holonomía  $f_{g(\Gamma)}$  correspondiente dicha curva cerrada en la sección transversal  $g(\delta)$  está dado por

$$f_{g(\Gamma)}(x) = g \circ f_\Gamma \circ (g|_\delta)^{-1}(x).$$

Luego  $f_{g(\Gamma)}$  es la identidad en una de la componentes conexas de  $g(\delta) \setminus g(p)$  pero difiere de la identidad en cualquier entorno de la otra componente que contenga a  $g(p)$ . Esto prueba el teorema para el caso en que  $\Gamma$  es una órbita periódica de  $\phi_t$ .

### **Caso 2: $\Gamma$ grafo de $\phi_t$**

Supongamos ahora la segunda posibilidad, esto es, que  $\Gamma$  es un grafo de  $\phi_t$ .

Sea  $s$  el punto silla de  $g^*(\mathcal{F})$  contenido en  $\Gamma$ . Observar que existe sólo un punto silla en  $\Gamma$  por no existir conexión entre sillas diferentes. Luego, puesto que cualquier órbita regular en  $\Gamma$  tiene a  $s$  por omega y alfa límite, entonces  $\Gamma$  contiene una o dos órbitas regulares. Observar que si  $\Gamma$  contiene una órbita regular, las otras dos separatrices que nacen en  $s$  deben estar contenidas en  $R(\Gamma)$  puesto que si no  $\Gamma$  no podría ser un elemento maximal de  $\Sigma$  (observar que es imposible que  $\Gamma$  sea un grafo como el de la primer imagen de la Figura 4.7 ya que contendría un ciclo límite para el pasado o futuro en  $R(\Gamma)$ ). Como el recorrido de estas separatrices no puede acumular en ningún lugar dentro de  $R(\Gamma)$ , puesto que también se generaría un ciclo límite, entonces ambas separatrices se conectan una con la otra y en definitiva forman parte de una misma hoja de  $g^*(\mathcal{F})$ .

Resumiendo, las separatrices de  $s$  están dos a dos conectadas, forman dos curvas cerradas  $\gamma_1 \cup \{s\}$  y  $\gamma_2 \cup \{s\}$ , y se dan dos situaciones posibles: o bien  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{s\}$ , o bien  $\Gamma = \gamma_1 \cup \{s\}$  (ver Figura 4.9).

Observar que en ambos casos el mapa  $f_\Gamma$  puede ser definido en un segmento abierto  $\delta_1 \subset \delta \setminus (\delta \cap R(\Gamma))$ , que se extiende de forma continua a  $p$  y que en tal caso, debido a que  $\Gamma$  es maximal en  $\Sigma$ , entonces  $f_\Gamma$  es distinto de la identidad en cualquier entorno de  $p$  en  $\delta_1$ . Luego el mapa de holonomía  $f_{g(\Gamma)}(x) = g \circ f_\Gamma \circ (g|_{\delta_1})^{-1}(x)$  correspondiente a la curva  $g(\Gamma)$  contenida en cierta hoja  $F$  de  $\mathcal{F}$  no es la identidad en ningún entorno de  $g(p)$  en  $g(\delta_1)$ . De esta forma obtenemos la primer parte de la tesis del teorema.



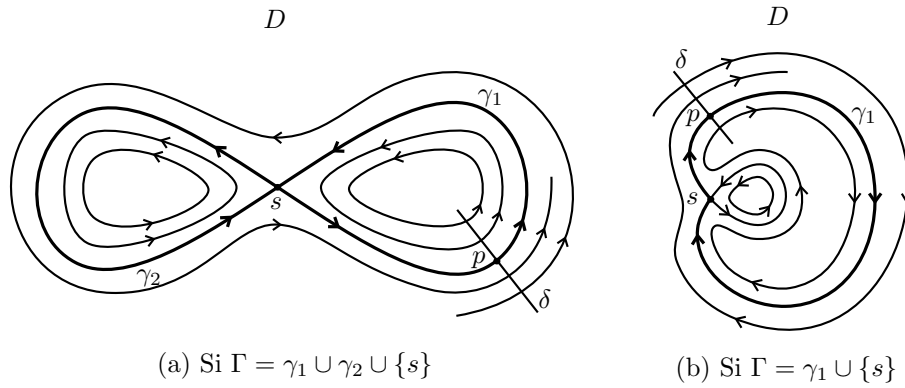


Figura 4.9: Caso  $\Gamma$  grafo de  $\phi_t$

Alcanza con ver ahora que  $f_{g(\Gamma)}$  es la identidad en un entorno de  $g(p)$  en  $g(\delta_2)$  para  $\delta_2 = \delta \cap R(\Gamma)$ .

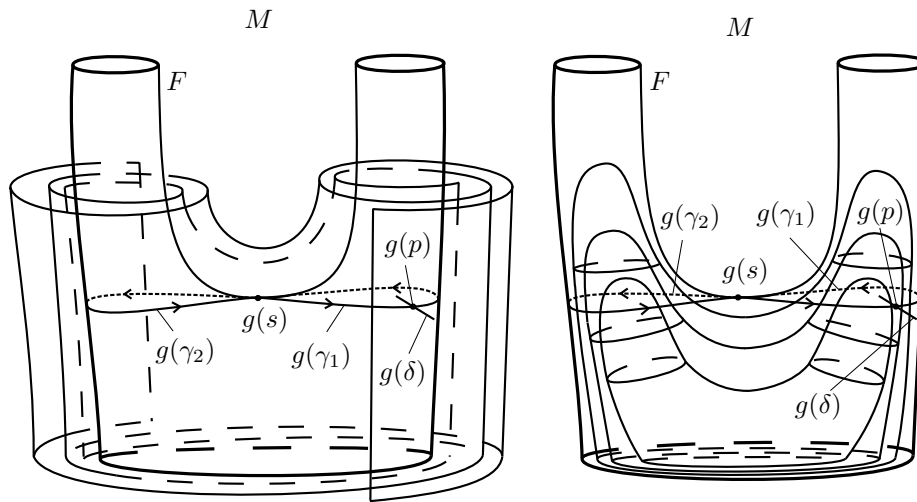


Figura 4.10: Caso  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{s\}$  visto en  $M$

Efectivamente consideremos, por ejemplo, el caso  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{s\}$  (ver primera imagen de Figura 4.9 y Figura 4.10). Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\delta \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ . Sea  $\delta'$  un segmento transversal a  $g^*(\mathcal{F})$  tal que  $\delta' \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ , y sean  $\delta_2 = \delta \cap R(\Gamma)$ ,  $\delta'_2 = \delta' \cap R(\Gamma)$  y  $\delta'_1 = \delta' \setminus \delta'_2$ . Podemos entonces definir mapas de holonomía unilaterales  $f_{\gamma_1} : \delta_2 \rightarrow \delta_2$  y  $f_{\gamma_2} : \delta'_2 \rightarrow \delta'_1$ . Luego, puesto que las órbitas en el interior de  $R(\Gamma)$  en un entorno de  $\Gamma$  son cerradas, tenemos que  $f_{\gamma_1}(x) = x$  si  $x \in \delta_2$  y  $f_{\gamma_2}(x) = x$  si  $x \in \delta'_2$ . Luego, pasando a  $M$ , tenemos los mapas de holonomía  $f_{g(\gamma_1) \cup \{s\}}$  y  $f_{g(\gamma_2) \cup \{s\}}$  definidos en segmentos abiertos de  $g(\delta)$  y  $g(\delta')$  que contienen a  $g(p) = g(\delta \cap \gamma_1)$  y

$g(\delta' \cap \gamma_2)$ , respectivamente. Tenemos entonces que  $f_{g(\gamma_1) \cup \{s\}}(x) = x$  si  $x \in g(\delta_2)$  y  $f_{g(\gamma_2) \cup \{s\}}(x) = x$  si  $x \in g(\delta'_2)$ , y, puesto que el mapa de holonomía  $f_{g(\Gamma)}$  en  $g(\Gamma)$  es conjugado a la composición de los correspondientes a  $g(\gamma_1 \cup \{s\})$  y  $g(\gamma_2 \cup \{s\})$ , entonces probamos que  $f_{g(\Gamma)}|_{g(\delta_2)}$  es efectivamente la identidad en un entorno de  $g(p)$  en  $g(\delta) \setminus g(\delta_1)$ .

El caso  $\Gamma = \gamma_1 \cup \{s\}$  se prueba de forma análoga.

De esta forma quedan contemplados los casos en que el ciclo límite  $\Gamma$  es una órbita periódica o un grafo de  $\phi_t$  y esto finaliza la prueba del teorema de Haefliger.

## 5. Grupo fundamental y crecimiento exponencial

En el presente capítulo definiremos el *grupo fundamental* de una variedad y probaremos que toda variedad diferenciable cerrada conexa tiene grupo fundamental finitamente generado. Posteriormente definiremos *crecimiento exponencial* para grupos finitamente generados y veremos cómo el crecimiento del grupo fundamental posee cierto sentido geométrico dentro de la variedad. Finalmente veremos ejemplos de grupos con distintos tipos de crecimiento.

### 5.1. Grupo Fundamental

Sea  $M$  variedad riemanniana conexa. Denominamos *camino en  $M$*  a toda curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  continua. Llamamos *homotopía de caminos* a toda familia de curvas  $\alpha_t : [0, 1] \rightarrow M$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , tal que los extremos  $\alpha_t(0) = x_0$  y  $\alpha_t(1) = x_1$  son fijos, y el mapa asociado  $\Pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  definido como  $\Pi(s, t) = \alpha_t(s)$  es continuo. En tal caso decimos que  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son *homotópicos a extremos fijos* y lo denotamos  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ .

**Proposición 5.1.1.** *La relación “ser homotópicos a extremos fijos” es una relación de equivalencia en el espacio de caminos.*

*Demostración.* Claramente  $\alpha \simeq \alpha$  tomando la homotopía  $\alpha_t = \alpha$ . La propiedad simétrica es también sencilla ya que si  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$  vía  $\alpha_t$ , entonces  $\alpha_1 \simeq \alpha_0$  vía la homotopía  $\alpha_{1-t}$ . Para ver la transitividad, sean  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$  vía  $\alpha_t$  y, considerando  $\alpha_1 = \beta_0$ , sea  $\beta_0 \simeq \beta_1$  vía  $\beta_t$ . Luego  $\alpha_0 \simeq \beta_1$  vía la homotopía  $\gamma_t$  que es igual a  $\alpha_{2t}$  para  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  y  $\beta_{2t-1}$  para  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ .

□

Dados dos caminos  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$  tales que  $\alpha(1) = \beta(0)$  podemos definir su *producto*,  $\alpha * \beta$ , como el camino que recorre primero  $\alpha$  y luego  $\beta$ , ambos al doble de velocidad. Explícitamente:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observar que este producto respeta las clases, es decir, que si  $\alpha_0 \simeq \alpha_1$  y  $\beta_0 \simeq \beta_1$ , vía homotopías  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ , y  $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$  de forma tal que  $\alpha_0 * \beta_0$  está bien definido, entonces  $\alpha_t * \beta_t$  también está bien definido y constituye una homotopía entre  $\alpha_0 * \beta_0$  y  $\alpha_1 * \beta_1$ .

Llamaremos *loops* a los caminos  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  que posean igual punto inicial y final,  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ , y en tal caso llamaremos a  $x_0$  *punto base* del loop  $\alpha$ .

**Definición 5.1.1. (Grupo Fundamental)** Fijado un punto base  $x_0$  en  $M$ , denominamos *grupo fundamental de  $M$  con punto base  $x_0$* , y lo escribimos  $\pi_1(M, x_0)$ , al conjunto de clases de equivalencia  $\bar{\alpha}$  de loops con punto base  $x_0$ , munido con la operación  $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha * \beta}$ .

◇

Remitimos al lector a [Hat1] para una prueba de que efectivamente el grupo fundamental así definido es un grupo y que, a menos de isomorfismo, el grupo fundamental no depende del punto base que se elija.

**Definición 5.1.2.** Decimos que un grupo  $G$  es *finitamente generado* si existe  $S = \{g_1, \dots, g_N\} \subset G$  tal que todo elemento de  $G$  se puede escribir como producto de finitos elementos de  $S$  y de sus inversos. Decimos que  $S$  es un *generador simétrico* si siempre que  $g \in S$  entonces  $g^{-1} \in S$ .

◇

Veamos que el grupo fundamental de toda variedad cerrada conexa es finitamente generado.

**Lema 5.1.2.** *Sea  $M$  variedad riemanniana cerrada. Existe  $L > 0$  tal que entre todo par de caminos de largo menor o igual que  $L$  que compartan el mismo extremo inicial y final existe una homotopía a extremos fijos que transforma uno en el otro. En particular, todo loop de largo menor o igual que  $L$  es homotópicamente trivial.*

*Demostración.* Todo punto  $x$  de  $M$  tiene un entorno  $B_x$  homeomorfo a una bola euclídea. Tomando  $L > 0$  número de Lebesgue del cubrimiento  $\{B_x\}_{x \in M}$  obtenemos que toda curva de diámetro menor o igual que  $L$  está incluida en alguna bola  $B_x$  y de ahí se deduce directamente la tesis ya que la concatenación de dos caminos de largo menor o igual que  $L$  con iguales extremos inicial y final tiene diámetro menor o igual que  $L$ .

□

**Lema 5.1.3.** *Sea  $M$  variedad riemanniana cerrada,  $x_0$  punto base en  $M$  y  $K > 0$  fijo. Existen finitos elementos de  $\pi_1(M, x_0)$  con representante de largo menor o igual que  $K$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que existen infinitos de estos loops  $\{\alpha_i\}_{i \in \Lambda}$ .

Sea  $L > 0$  como en el lema anterior. Podemos entonces reparametrizar cada uno de estos loops a velocidad constante y particionar el intervalo  $[0, 1]$  en tiempos  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = 1$  de forma tal que para todo loop  $\alpha_i$ , las curvas  $\alpha_i|_{[t_{j-1}, t_j]}$  tengan largo menor que  $\frac{L}{2}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Observar que  $\{(\alpha_i(t_0), \alpha_i(t_1), \dots, \alpha_i(t_n))\}_{i \in \Lambda} \subset M^n$  acumula en algún punto y que por lo tanto existen dos loops distintos  $\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}$  tales que la distancia entre  $\alpha_{i_0}(t_j)$  y  $\alpha_{i_1}(t_j)$  es menor que  $\frac{L}{2}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .

Veamos que estos dos loops con punto base en  $x_0$  deben ser homotópicos. Consideremos entre  $\alpha_{i_0}(t_j)$  y  $\alpha_{i_1}(t_j)$  una curva  $\beta_j$  de largo menor o igual que  $\frac{L}{2}$  que los una (ver Figura 5.1).

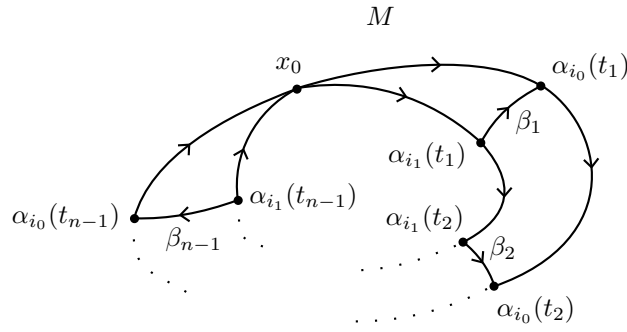


Figura 5.1

Luego, por pasos y en virtud del lema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i_1} &= \alpha_{i_1}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_1}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \beta_1 * \alpha_{i_1}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\vdots \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_0}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \beta_{n-1} * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_0}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_0}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &= \alpha_{i_0}
 \end{aligned}$$

Esto lleva a una contradicción y por lo tanto el lema queda probado.  $\square$

**Teorema 5.1.4.** *Toda variedad diferenciable cerrada tiene grupo fundamental finitamente generado.*

*Demostración.* Fijemos una métrica riemanniana en  $M$ . Observar que la distancia  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  inducida por la métrica es una función real continua definida en  $M \times M$  compacto y que por lo tanto existe  $D$  valor máximo de  $d$  al que llamamos *diámetro de  $M$* .

Sea  $x_0$  en  $M$  punto base. En virtud del lema 5.1.3 podemos afirmar que los loops con punto base  $x_0$  y largo menor o igual que  $3D$  representan sólo a un conjunto finito  $S$  de elementos de  $\pi_1(M, x_0)$ . Veamos que  $S$  es un generador de  $\pi_1(M, x_0)$ .

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  un loop cualquiera con punto base  $x_0$ . Particionemos  $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_n$  en finitas curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : [0, 1] \rightarrow M$  de largo cada una menor que  $D$ . Podemos entonces considerar, para cada punto  $\alpha_i(1)$  en el recorrido de  $\alpha$ , una curva  $\beta_i$  de largo menor o igual que  $D$  que una  $x_0$  con  $\alpha_i(1)$  (si esto no fuera posible, entonces  $D$  no sería el diámetro de  $M$ ) (ver Figura 5.2).

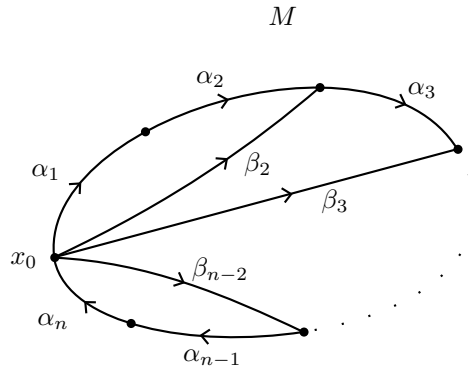


Figura 5.2

Luego tenemos que

$$\alpha \simeq (\alpha_1 * \alpha_2 * \beta_2^{-1}) * (\beta_2 * \alpha_3 * \beta_3^{-1}) * \dots * (\beta_{n-3} * \alpha_{n-2} * \beta_{n-2}^{-1}) * (\beta_{n-2} * \alpha_{n-1} * \alpha_n)$$

y esto concluye el teorema al quedar  $\bar{\alpha}$  descompuesta como producto de finitas clases de  $\pi_1(M, x_0)$  representadas por loops de largo menor que  $3D$ .

□

## 5.2. Crecimiento de grupos

Dado  $G$  un grupo finitamente generado y  $S = \{g_1, \dots, g_N\}$  un generador simétrico finito del mismo, definimos la *norma de palabras*  $\|\cdot\|_S$  en  $G$  como

$$\|g\|_S = \min\{k \in \mathbb{N} : g_{i_1} \dots g_{i_k} = g \text{ con } g_{i_j} \in S\}$$

si  $g \neq e$ , y  $\|e\|_S = 0$ , siendo  $e$  el neutro de  $G$ .

Podemos definir ahora la función  $\Gamma(n, S)$  que cuenta todos los elementos de  $G$  que pueden ser generados por  $S$  como palabras de largo menor o igual que  $n$ , explícitamente

$$\Gamma(n, S) = \#\{g \in G : \|g\|_S \leq n\}.$$

Es decir,  $\Gamma(n, S)$  cuenta la cantidad de puntos distintos en la bola de centro  $e$  y radio  $n$  para la norma  $\|\cdot\|_S$ .

Observar que  $\Gamma(n, S)$  es una función creciente con  $n$ . Nos interesa ahora estudiar qué tipo de crecimiento puede tener en función de  $n$ . Decimos que  $G$  tiene *crecimiento exponencial respecto a  $S$*  si existen constantes  $A, a > 0$  tales que

$$\Gamma(n, S) \geq Ae^{an}$$

para todo  $n \geq 1$ .

Veamos que si  $S$  y  $S'$  son dos generadores simétricos finitos distintos de  $G$  entonces ambas normas  $\|\cdot\|_S$  y  $\|\cdot\|_{S'}$  son equivalentes. Como consecuencia obtendremos que tener crecimiento exponencial es independiente del generador finito que se considere.

**Proposición 5.2.1.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos generadores simétricos finitos distintos de  $G$ . Entonces existen constantes  $C_1, C_2 > 0$  tales que*

$$\frac{1}{C_1} \|g\|_S \leq \|g\|_{S'} \leq C_2 \|g\|_S$$

para todo  $g$  en  $G$ .

*Demostración.* Sean  $S = \{g_1, \dots, g_N\}$  y  $S' = \{g'_1, \dots, g'_M\}$ . Luego  $g_i = \prod_{j=1}^{m_i} g'_{i_j}$  para cada  $1 \leq i \leq N$ . Tomamos  $C_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \{m_i\}$  y luego, si  $g$  es un elemento cualquiera de  $G$ , entonces  $g = \prod_{k=1}^{\|g\|_S} g_{i_k} = \prod_{k=1}^{\|g\|_S} \prod_{j=1}^{m_{i_k}} g'_{i_{k_j}}$  para ciertos  $g_{i_j}$  en  $S$  y  $g'_{i_{k_j}}$  en  $S'$ . Luego  $\|g\|_{S'} \leq C_2 \|g\|_S$ . Análogamente para probar que existe  $C_1 > 0$  tal que  $\|g\|_S \leq C_1 \|g\|_{S'}$ .

□

Luego, si  $\|g\|_S \leq n$  para cierto  $g$  en  $G$ , entonces  $\|g\|_{S'} \leq C_2\|g\|_S \leq C_2n$  con  $C_2$  constante independiente de  $n$ . Por lo tanto  $\Gamma(n, S) \leq \Gamma(C_2n, S')$  y, si  $\Gamma(n, S) \geq Ae^{an}$  para ciertas  $A, a > 0$ , entonces  $\Gamma(n, S') \geq Ae^{\frac{a}{C_2}n}$ . Tenemos pues el siguiente corolario.

**Corolario 5.2.2.** *Si  $G$  tiene crecimiento exponencial respecto a un generador simétrico finito  $S$ , entonces  $G$  tiene crecimiento exponencial respecto a cualquier generador simétrico finito  $S'$ .*

Luego, si este es el caso, diremos simplemente que  $G$  tiene *crecimiento exponencial*.

Es interesante observar que crecimiento exponencial es el mayor orden de crecimiento que se puede esperar para un grupo finitamente generado. Esto es debido a que si  $S$  es un generador simétrico finito de  $G$ , entonces claramente  $\Gamma(S, n) \leq (\#S)^n \leq e^{\log(\#S)n}$  para todo  $n \geq 1$ .

Análogamente a cómo definimos crecimiento exponencial podemos definir crecimiento polinomial para un grupo finitamente generado. Por varios años permaneció abierta la pregunta sobre la existencia de grupos con crecimiento intermedio, es decir, con crecimiento suprapolinomial pero subexponencial. En 1984 Grigorchuk probó que el ahora denominado *grupo de Grigorchuk* que él había construido efectivamente posee crecimiento intermedio (ver [Gr]).

### 5.3. Crecimiento del grupo fundamental

Sea  $M$  variedad riemanniana y  $x_0 \in M$  punto base.

Consideremos la función  $P(x_0, r)$  que cuenta todas las clases de homotopía de loops con punto base  $x_0$  que poseen representante de largo menor o igual que  $r$ . Veamos ahora cómo el crecimiento del grupo fundamental de una variedad riemanniana adquiere un sentido geométrico comparando las funciones  $\Gamma$  y  $P$ .

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $S$  generador simétrico finito de  $\pi_1(M, x_0)$ . Entonces existen constantes  $k_1, k_2 > 0$  tales que*

$$P(x_0, \frac{1}{k_1}r) \leq \Gamma(r, S) \leq P(x_0, k_2r)$$

para todo  $r > 0$ .

*Demostración.* Sea  $g \in \pi_1(M, x_0)$  tal que  $\|g\|_S \leq r$ . Veamos que existen  $\alpha$  loop con punto base  $x_0$  y  $k_2 > 0$  que no depende de  $g$  tales que  $\bar{\alpha} = g$  y  $\ell(\alpha) \leq k_2r$ .



Supongamos que  $S = \{g_1, \dots, g_N\}$  y que, para cada  $g_i$  en  $S$ , elegimos  $\alpha_i$  representante de dicha clase de homotopía. Puesto que  $S$  generador de  $G$ , sabemos que existen  $g_{i_1}, \dots, g_{i_{\|g\|_S}}$  elementos de  $S$  tales que  $g = g_{i_1} \cdot \dots \cdot g_{i_{\|g\|_S}}$ . Luego  $\alpha \simeq \alpha_{i_1} * \dots * \alpha_{i_{\|g\|_S}}$  y, tomando  $k_2 = \max_{1 \leq k \leq N} \|g_k\|_S$ , deducimos que  $\ell(\alpha) \leq k_2 \|g\|_S \leq k_2 r$ .

Recíprocamente, sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  loop con punto base  $x_0$  tal que  $\ell(\alpha) \leq r$ . Veamos que existe  $k_1 > 0$  independiente de  $\alpha$  tal que  $\|\bar{\alpha}\|_S \leq k_1 r$ .

Sea  $D > 0$  el diámetro de  $M$ . La idea ahora es descomponer  $\alpha$  como producto de finitos loops de largo menor o igual que  $3D$  de la misma forma en que lo hiciéramos en la demostración del Teorema 5.1.4.

Sea  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 1\}$  una partición de  $[0, 1]$  de forma tal que  $\ell(\alpha_i|_{[t_{j-1}, t_j]}) \leq D$  para todo  $j = 1, \dots, n$  y  $n < \frac{r}{D} + 1$ . Observar que para cada punto  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 2, \dots, n-2$ , necesariamente existe una curva  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow M$  que une  $x_0 = \beta_i(0)$  con  $\alpha(t_i) = \beta_i(1)$  y de largo menor o igual que  $D$  (sino fuera posible entonces  $D$  no sería el diámetro). Luego

$$\alpha = (\alpha_1 * \alpha_2 * \beta_2^{-1}) * (\beta_2 * \alpha_3 * \beta_3^{-1}) * \dots * (\beta_{n-3} * \alpha_{n-2} * \beta_{n-2}^{-1}) * (\beta_{n-2} * \alpha_{n-1} * \alpha_n)$$

y, de esta forma,  $\alpha$  queda descompuesto como producto de  $n-2$  loops de largo menor o igual que  $3D$  y punto base  $x_0$ . Puesto que por Lema 5.1.3 existen finitos posibles loops de este tipo, llamémosles  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_M\}$ , entonces podemos considerar  $C = \max_{1 \leq k \leq M} \|\gamma_k\|_S$  y luego deducir que  $\|\bar{\alpha}\|_S \leq (n-2)C \leq k_1 r$  tomando  $k_1 = \frac{C}{D} > 0$  y usando que  $n < \frac{r}{D} + 1$  por cómo habíamos particionado a  $\alpha$ .

□

Diremos que  $P(x_0, r)$  tiene *crecimiento exponencial* si  $P(x_0, r) \geq Be^{br}$  para ciertas constantes  $B, b > 0$  y para todo  $r > 0$ .

Luego del teorema anterior se deduce ahora el siguiente corolario.

**Corolario 5.3.2.**  $P(x_0, r)$  tiene crecimiento exponencial si y sólo si  $\pi_1(M, x_0)$  lo tiene.

*Demostración.* Sea  $S$  generador simétrico finito de  $\pi_1(M, x_0)$  y  $k_1, k_2 > 0$  como en el teorema anterior.

Supongamos que  $P(x_0, r) \geq Be^{br}$  para todo  $r > 0$ . Luego tenemos que  $\Gamma(n, S) \geq P(x_0, \frac{n}{k_1}) \geq Be^{\frac{b}{k_1}n}$  para todo  $n > 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\Gamma(n, S) \geq Ae^{an}$ . Luego tenemos que  $P(x_0, r) \geq \Gamma(\frac{r}{k_2}, S) = \Gamma([\frac{r}{k_2}], S) \geq Ae^{a[\frac{r}{k_2}]} \geq (Ae^{-a})e^{\frac{a}{k_2}r}$  para todo  $r > 0$ . □

Luego el crecimiento exponencial del grupo fundamental se traduce en la variedad como el crecimiento exponencial en la cantidad de clases de homotopía de loops distintas como función del largo máximo permitido para cada loop.

Destacamos también que el crecimiento del grupo fundamental de una variedad riemanniana está estrechamente relacionado con el crecimiento de volumen, con respecto al radio  $r$ , de la bola  $B(0, r)$  en el cubrimiento universal de la variedad (la denominada *entropía volumétrica*). Esta última, a su vez, está relacionada con la *entropía topológica* del flujo geodésico de la variedad. De hecho, a partir de los teoremas de Manning y Dinaburg, si el grupo fundamental de la variedad tiene crecimiento exponencial, entonces la entropía volumétrica, y como consecuencia también la entropía topológica del flujo geodésico, son positivas. Para una exposición en detalle de estos resultados recomendamos leer la monografía de B. Yemini [Y].

#### 5.4. Ejemplos de grupos con distintos tipos de crecimiento

Definamos primero el grafo de Cayley de un grupo que será útil a la hora de analizar su tipo de crecimiento.

Dado  $G$  un grupo finitamente generado con generador simétrico  $S$ , definimos su *grafo de Cayley*  $\Gamma(G, S)$  como el grafo coloreado dirigido construido de la siguiente forma:

- A cada elemento  $g \in G$  se le asigna un vértice de  $\Gamma(G, S)$ . Es decir, los vértices  $V(\Gamma(G, S))$  están identificados con los elementos de  $G$ .
- A cada generador  $s \in S$  se le asigna un color  $c_s$ .
- Para cada  $g \in G$  y  $s \in S$ , los vértices que corresponden a los elementos  $g$  y  $gs$  se unen por una arista dirigida de color  $c_s$ . Es decir, las aristas  $E(\Gamma(G, S))$  consisten en todo los pares ordenados  $(g, gs)$  de color  $c_s$  con  $g \in G$  y  $s \in S$ .

El grafo de Cayley es muy ilustrativo a la hora de determinar el crecimiento de un grupo finitamente generado  $G$  puesto que determinar el tipo

de crecimiento de  $G$  es estimar el crecimiento en función de  $n$  de los puntos que se encuentran en  $B(e, n)$  para la métrica de las palabras, y esto último es equivalente a contar la cantidad de vértices en el grafo de Cayley de  $G$  que se encuentran a distancia (medida en cantidad de aristas) menor o igual que  $n$  del vértice  $e$ .

**Ejemplo 5.4.1.** *Grupo libre en  $n$  generadores.*

Veamos que el grupo libre en  $n$  generadores tiene crecimiento exponencial.

Dado un conjunto finito de símbolos  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  consideramos para cada elemento  $a_i$  en  $S$  un nuevo símbolo  $a_i^{-1}$  (el inverso de  $a_i$ ). Consideramos ahora todas las palabras que se pueden formar como concatenación de elementos de  $S$  y de sus inversos. Si en una de estas palabras un símbolo  $s$  se encuentra adyacente a su inverso entonces podemos simplificar la palabra omitiendo el par  $s, s^{-1}$ . Por ejemplo la palabra  $ab^3a^{-1}ac^{-1}bb^{-1}$  se simplifica en un primer paso a  $ab^3c^{-1}bb^{-1}$  y luego a  $ab^3c^{-1}$ .

A una palabra que ya no se puede simplificar la denominamos *reducida*. Luego el *grupo libre*  $F_S$  se define como el grupo de todas las palabras reducidas sobre  $S$  con la operación dada por la concatenación de palabras (seguida de reducción si es necesario). Se considera el neutro del grupo a la palabra vacía.

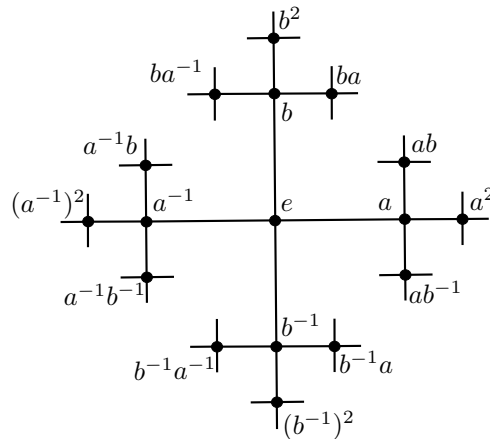


Figura 5.3: Grafo de Cayley del grupo libre en 2 generadores  $F_{\{a,b\}}$

Tenemos entonces que  $F_S$  es finitamente generado con generador simétrico  $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$ . Considerando en  $F_S$  la métrica de las palabras, tenemos que a cada elemento de  $B(e, k - 1) \setminus B(e, k - 2)$  se le pueden concatenar  $(2n - 1)$  símbolos que generan una nueva palabra reducida de largo  $k$  y un

símbolo que genera una reducida de largo  $k - 2$  para todo  $k > 2$ . Luego  $\#B(e, k) - \#B(e, k - 1) = (2n - 1)(\#B(e, k - 1) - \#B(e, k - 2)) = \dots = (2n - 1)^{k-2}2n$  para  $k > 1$  y, dado que  $B(e, 1) = \{e, a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$  tiene  $2n + 1$  elementos, entonces

$$\begin{aligned} \#B(e, k) &= (2n - 1)^{k-1}2n + (2n - 1)^{k-2}2n + \dots + (2n - 1)2n + 2n + 1 \\ &= \frac{n}{n - 1}(2n - 1)^k - 1 \geq \frac{n}{n - 1}e^{\log(2n-1)k} \end{aligned}$$

y por lo tanto  $F_S$  tiene crecimiento exponencial.

**Ejemplo 5.4.2.** *Grupo fundamental del toro  $\mathbb{T}^n$ .*

Veamos que el grupo fundamental del toro  $\mathbb{T}^n$  no tiene crecimiento exponencial.

El grupo fundamental de  $\mathbb{T}^n$  es (ver [Hat1]):

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n \simeq \{a_1, \dots, a_n \mid aba^{-1}b^{-1} = e \text{ para todo } a, b \in \{a_1, \dots, a_n\}\}$$

Podemos entonces considerar a  $\pi_1(\mathbb{T}^n)$  generado por el generador simétrico  $S = \{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$  y luego, dado que los elementos de  $S$  conmutan, entonces en la métrica de las palabras tenemos que

$$B(e, k) = \{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} : |k_1| + \dots + |k_n| \leq k\},$$

de donde acotando holgadamente tenemos que

$$k \leq \#B(e, k) \leq (2k + 1)^n$$

y por lo tanto  $\pi_1(\mathbb{T}^n)$  no tiene crecimiento exponencial.

De hecho, argumentos combinatorios más precisos nos permiten deducir que  $\pi_1(\mathbb{T}^n)$  crece polinomialmente con orden  $n$ .

**Ejemplo 5.4.3.** *Grupo fundamental de la superficie orientable cerrada de género  $g \geq 2$ .*

Sea  $\Sigma_g$  la superficie orientable cerrada de género  $g \geq 2$ . Veamos que  $\pi_1(\Sigma_g)$  tiene crecimiento exponencial.

El grupo fundamental de  $\Sigma_g$  es (ver [Hat1]):

$$\pi_1(\Sigma_g) = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e\}$$

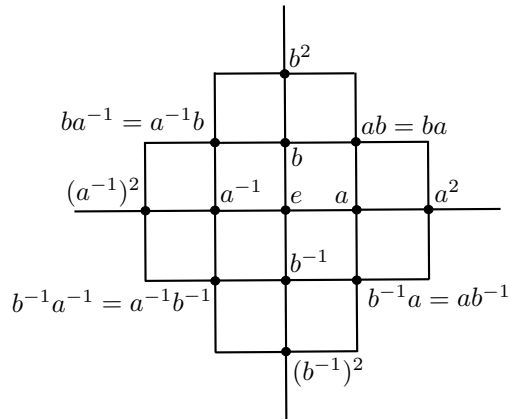


Figura 5.4: Grafo de Cayley de  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ . Observar que hay  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) + \dots + 5 + 3 + 1 = 2k^2 + 2k + 1$  elementos distintos en  $B(e, k)$ , es decir,  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$  tiene crecimiento polinomial.

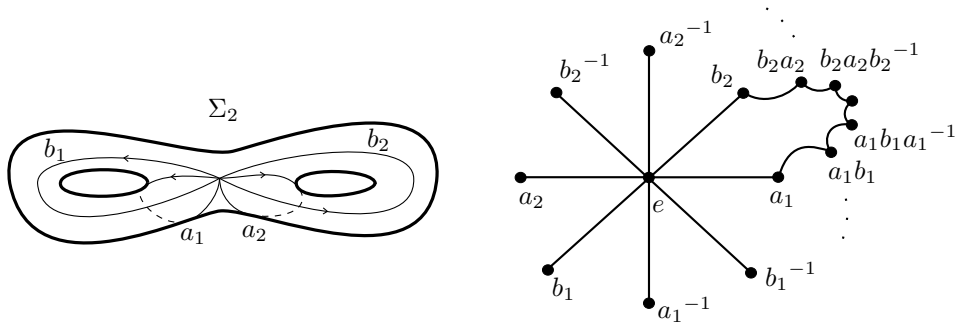


Figura 5.5: Generadores y grafo de Cayley asociados al  $\pi_1$  del bitoro.

Luego, por ejemplo, el subgrupo  $H$  de  $\pi_1(\Sigma_g)$  generado por  $\{a_1, b_1\}$  es isomorfo al grupo libre en 2 generadores. Luego para el generador simétrico finito  $S = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g^{-1}, b_g^{-1}\}$  tenemos que  $B(e, k)$  con la métrica de las palabras contiene al menos  $e^{\log(3)k}$  elementos distintos (por lo visto en el Ejemplo 5.4.1) y por lo tanto  $\pi_1(\Sigma_g)$  posee necesariamente crecimiento exponencial.

**Ejemplo 5.4.4.** *Grupo fundamental de  $\Sigma_g \times S^1$ .*

A partir del ejemplo anterior podemos ahora construir una 3-variedad cerrada con grupo fundamental de crecimiento exponencial haciendo producto cartesiano de  $\Sigma_g$  con  $S^1$ .

Efectivamente tenemos que  $\Sigma_g \times S^1$  con  $g \geq 2$  es una 3-variedad cerrada tal que  $\pi_1(\Sigma_g \times S^1) = \pi_1(\Sigma_g) \times \pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\Sigma_g) \times \mathbb{Z}$  (ver [Hat1]) y por lo tanto si  $S$  es un generador simétrico finito de  $\pi_1(\Sigma_g)$  entonces  $\{(s, 0) : s \in S\} \cup \{(e, 1), (e, -1)\}$  es un generador simétrico finito de  $\pi_1(\Sigma_g \times S^1)$ , y luego en la métrica de las palabras con este generador la cantidad de elementos en  $B(e, k)$  crece exponencialmente ya que por el ejemplo anterior crecen exponencialmente con  $k$  los de la forma  $(g, 0)$  en  $B(e, k)$ .

Destacamos que por resultados debidos a E. Ghys (ver [Gh]) se sabe que  $\Sigma_g \times S^1$  no admite flujos de Anosov.

**Ejemplo 5.4.5.** *Toro  $\mathbb{T}^3$  suma conexa toro  $\mathbb{T}^3$ .*

La suma conexa  $M \# N$  entre dos 3-variedades  $M$  y  $N$  se define como la variedad que se obtiene identificando los bordes de dos bolas rellenas, una en cada variedad, de forma tal que la nueva variedad que se obtiene no contiene a los interiores de dichas bolas, sino que se pasa del exterior de una al exterior de la otra por medio del borde (ver [Hat2] para una definición precisa de suma conexa).

De forma similar a cómo encontramos en  $\Sigma_g$  con  $g \geq 2$  un subgrupo libre del grupo fundamental de  $\Sigma_g$  es posible encontrar en  $\pi_1(\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3)$  un subgrupo libre en dos generadores considerando las clases correspondientes a una curva no trivial en cada  $\mathbb{T}^3$  desde un punto base común. Luego  $\pi_1(\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3)$  tiene crecimiento exponencial.

Lo interesante ahora es que, a partir del teorema de la variedad estable para flujos de Anosov (Teorema 3.2.1), si suponemos que  $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$  admite un flujo de Anosov, entonces por un lado existe en  $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$  una foliación por superficies cuyas hojas son todas topológicamente planos o cilindros. Pero por otro lado, dado que  $\pi_2(\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3)$  es no trivial puesto que el borde de las bolas por las que se construye la suma conexa no puede ser homotópicamente nulo, entonces por teorema de Novikov (ver [Sol]) toda foliación por superficies de  $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$  debería tener una hoja compacta. Luego  $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$  no puede admitir flujos de Anosov.

Tenemos entonces que  $\Sigma_g \times S^1$  con  $g \geq 2$  y  $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$  son ejemplos de 3-variedades cerradas con crecimiento exponencial del grupo fundamental que no admiten flujos de Anosov. Esto prueba, en particular, que no es cierto el recíproco del teorema de Margulis-Plante-Thurston.

## 6. Teorema de Margulis-Plante-Thurston

En el presente capítulo demostraremos el siguiente teorema.

**Teorema 6.0.1 (Margulis-Plante-Thurston).** *Si  $\varphi_t : M \rightarrow M$  es un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada, entonces  $\pi_1(M)$  tiene crecimiento exponencial.*

Este teorema fue probado por G. A. Margulis en el apéndice de [AS] pero la prueba que aquí desarrollaremos y que funciona prácticamente de forma idéntica para flujos de Anosov de codimensión 1 en dimensión de  $M$  arbitraria (esto es, cuando al menos uno de los subfibrados estable o inestable es unidimensional) es la que realizan J. P. Plante y W. P. Thurston en [PITh].

Veamos a continuación en la primer sección de este capítulo unos resultados preliminares que necesitaremos luego en la sección siguiente para la demostración del teorema.

### 6.1. Preliminares

En principio pretendemos considerar un flujo global tangente al fibrado estable  $E^s$ . Si bien, como vimos en el Capítulo 2, un flujo de este tipo existe localmente, a priori no es posible afirmar que exista en toda la variedad debido a que puede resultar imposible extender continua y globalmente cualquiera de los campos locales que generan el fibrado estable. Sin embargo, es posible construir un cubrimiento doble de la variedad para el cual sí sea posible considerar un flujo de este tipo y probar que alcanza demostrar el teorema para este cubrimiento doble.

**Lema 6.1.1.** *Si no existe un flujo global en  $M$  tangente al fibrado estable, entonces existe  $M^*$  cubrimiento 2 a 1 de  $M$  tal que si levantamos el flujo  $\varphi_t$  a  $M^*$  obtenemos un flujo de Anosov  $\bar{\varphi}_t$  para el cual sí existe un flujo global tangente al fibrado estable y, en tal caso, se cumple que  $\pi_1(M)$  tiene crecimiento exponencial si y sólo si  $\pi_1(M^*)$  lo tiene.*

*Demostración.* Observemos que para cada  $x$  en  $M$  el subespacio estable  $E^s(x)$  puede ser generado por exactamente dos vectores unitarios tangentes a  $M$ , cada uno opuesto del otro, a los que denominamos  $v_x^+$  y  $v_x^-$ . Sabemos también que existe, para cada  $x$  en  $M$ , un entorno  $U_x$  de  $x$  en el cual es posible considerar

un campo unitario  $X_s^x$ , tangente al fibrado estable y únicamente integrable. Observar que su campo opuesto,  $-X_s^x$ , es también unitario, tangente al fibrado estable y únicamente integrable.

La idea ahora es diferenciar en dos entornos distintos una forma de orientar localmente el fibrado estable (inducida por el campo  $X_s^x$ ), de la otra forma (inducida por el campo  $-X_s^x$ ).

Sea  $M^* = \bigsqcup_{x \in M, i \in \{+, -\}} (x, v_x^i)$ . Para cada parametrización  $\psi : \psi^{-1}(U_x) \rightarrow M$  del atlas de  $M$  construimos dos parametrizaciones  $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2 : \psi^{-1}(U_x) \rightarrow M^*$ , definidas naturalmente como  $\bar{\psi}_1(y) = (\psi(y), X_s^x(y))$  y  $\bar{\psi}_2(y) = (\psi(y), -X_s^x(y))$ . Dotamos a  $M^*$  de la topología que hace que las parametrizaciones  $\bar{\psi}_i, i \in \{1, 2\}$ , sean homeomorfismos. Veamos cómo se comportan los cambios de cartas: Si  $\bar{\psi}_i : \psi^{-1}(U_x) \rightarrow M^*$  y  $\bar{\psi}'_i : \psi'^{-1}(U_{x'}) \rightarrow M^*$  son dos parametrizaciones de  $M^*$  con imágenes no disjuntas, entonces  $U_x$  y  $U_{x'}$  tienen intersección no disjunta en  $M$  y luego el cambio  $\bar{\psi}'_i^{-1} \circ \bar{\psi}_i = \psi'^{-1} \circ \psi$  es un difeomorfismo. De esta forma,  $M^*$  queda dotada de una estructura de variedad diferenciable y la proyección  $\pi : M^* \rightarrow M$  definida como  $\pi(x, v_x^i) = x$  constituye un cubrimiento diferenciable 2 a 1 de  $M^*$  a  $M$ .

A través de la estructura de difeomorfismo local de  $\pi$  es posible levantar naturalmente a  $M^*$  la métrica de  $M$ , el flujo  $\varphi_t$  y los subfibrados  $E^c$ ,  $E^s$  y  $E^u$ . De esta forma, tenemos ahora en  $M^*$  un flujo  $\bar{\varphi}_t$  de Anosov y, por como construimos  $M^*$ , ahora sí es posible integrar a un flujo global el fibrado  $E^s$ , explícitamente integrando el campo global continuo  $X((x, v_x^i)) = \pi^*(v_x^i)$ .

Es directo ahora observar que  $M^*$  es conexa si y sólo si  $E^s$  no es globalmente orientable. Luego si este es el caso, alcanza con probar el teorema para el flujo  $\bar{\varphi}_t$  en  $M^*$  ya que como  $\pi : M^* \rightarrow M$  es un cubrimiento 2 a 1, entonces  $\pi_1(M^*)$  se inyecta en  $\pi_1(M)$  como subgrupo de índice 2 (ver [Hat1, pág. 61]), y luego completando un generador de esta inyección  $\pi_*(\pi_1(M^*))$  a un generador de  $\pi_1(M)$  (agregando sólo un elemento) obtenemos que  $\pi_1(M^*)$  tiene crecimiento exponencial si y sólo  $\pi_1(M)$  lo tiene.

□

En virtud del lema anterior, podemos suponer que existe  $\eta_t$  flujo global tangente al fibrado estable.

Recordar que  $N \subset M$  es un *conjunto minimal* del flujo  $\eta_t$  si es compacto, invariante y no contiene propiamente ningún otro conjunto compacto e inva-



riante. Necesitaremos hacer uso también del siguiente lema en la prueba del teorema.

**Lema 6.1.2.** *Existe  $N \subset M$  conjunto minimal del flujo  $\eta_t$ .*

*Demostración.* Sea  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  una base numerable de la topología de  $M$ . Para cada abierto  $U_n$  definimos  $\mathcal{O}(U_n) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \eta_t(U_n)$  la órbita por  $\eta_t$  de  $U_n$ . Definimos inductivamente los conjuntos  $M_n$  como  $M_0 = M$  y  $M_n = M_{n-1} \setminus \mathcal{O}(U_n)$  si  $\mathcal{O}(U_n)$  no contiene a  $M_{n-1}$  o  $M_n = M_{n-1}$  en caso contrario. Obtenemos que  $M_n \subset M_{n-1}$  y  $M_n$  es compacto,  $\eta_t$ -invariante y no vacío para todo  $n \geq 1$ .

Sea entonces  $N = \bigcap_{n \geq 1} M_n$ .  $N$  queda claramente compacto,  $\eta_t$ -invariante y no vacío. Afirmamos que  $N$  es un conjunto minimal para  $\eta_t$ . Efectivamente, si no lo fuese, existiría  $L \subsetneq N$  compacto, invariante y no vacío. Pero en tal caso existiría un abierto  $U_{n_0}$  de la base numerable  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  tal que  $U_{n_0} \cap N \neq \emptyset$  pero  $U_{n_0} \cap L = \emptyset$ . Como  $N \setminus L$  sería también  $\eta_t$ -invariante, entonces  $N \setminus \mathcal{O}(U_{n_0})$  sería no vacío y quedaría contenido estrictamente en  $N$ , contradiciendo de qué forma fue definido  $N$ .

□

## 6.2. Demostración del teorema

Sea  $\eta_t$  flujo global en  $M$  tangente en todo punto al subfibrado  $E^s$ . Sea  $x_0$  en  $N$  minimal del flujo  $\eta_t$ . Ambos existen por lo visto en la sección anterior.

Consideremos por  $x_0$  un pequeño 2-disco encajado  $D$  tangente al fibrado  $E^c \oplus E^u$ .

Podemos construirlo explícitamente considerando un mapa distinguido  $\Psi : U \rightarrow M$  del atlas de la foliación centro-inestable  $\mathcal{F}^{cu}$  tal que  $x_0 \in \Psi(U)$  y luego tomando  $D$  la placa de  $\Psi(U)$  que contiene a  $x_0$ . Ver demostración del Teorema 3.2.1 para más detalles sobre como se construye un tal mapa  $\Psi$ .

Observar que podemos asumir, y lo hacemos a partir de ahora, que  $\eta_t$  tiene velocidad 1 en todo punto. La razón de esto es que ahora el largo de cada segmento de órbita de  $\eta_t$  será exactamente el tiempo que le lleva a  $\eta_t$  en ir de un extremo al otro del segmento.

Sea  $E$  el abierto que se obtiene haciendo fluir por  $\eta_t$  al disco  $D$  entre tiempos  $(-\epsilon, \epsilon)$  para  $\epsilon$  pequeño. Considerando ahora la órbita futura de  $x_0$  por  $\eta_t$  observar que esta vuelve infinitas veces sobre el abierto  $E$  (por estar  $x_0$  en  $N$  minimal del flujo y ser, por lo tanto, un punto recurrente de  $\eta_t$ ) y que,

entonces, también corta infinitas veces a  $D$  (dado que  $E$  está definida como una “caja de flujo” de  $\eta_t$ ). De esta forma podemos definir tiempos  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , como los sucesivos tiempos en que la órbita de  $x_0$  vuelve a cortar a  $D$  (más precisamente definiendo  $t_n$  inductivamente a partir de  $t_{n-1}$  como el mínimo  $t > t_{n-1}$  tal que  $\eta_t(x_0) \in D$ ).

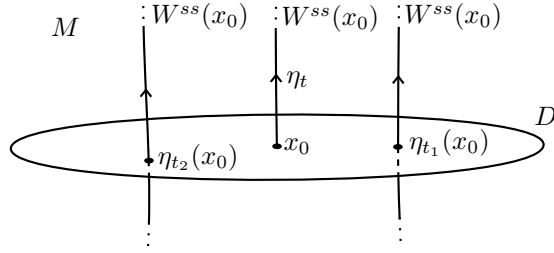


Figura 6.1

Veamos a continuación que los tiempos entre cada corte y el siguiente están uniformemente acotados.

**Lema 6.2.1.** *Existe  $T > 0$  tal que  $t_n - t_{n-1} < T$  para todo  $n > 0$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que existe  $\{t_{n_k}\}$  subsucesión de  $\{t_n\}$  tal que  $t_{n_k} - t_{n_k-1} \xrightarrow{k} +\infty$ .

En tal caso, sea  $y$  de acumulación de  $\eta_{t_{n_k-1}}(x_0)$ . Puesto que  $y \in N$ , con  $N$  minimal del flujo  $\eta_t$ , entonces existe un tiempo  $S > 2\epsilon$  en el que  $\eta_S(y)$  vuelve a estar en  $E$ . Luego, por continuidad de  $\eta_S$ , existe un entorno  $U$  de  $y$  tal que  $\eta_S(U) \subset E$ . Se deduce que entonces para infinitos  $k$  se cumple que  $\eta_{t_{n_k-1}}(x_0) \in U$  y, como consecuencia, que  $t_{n_k} - t_{n_k-1} \leq S + \epsilon$  para cada uno de estos  $k$ . Contradicción.

□

Definamos ahora curvas cerradas  $\gamma_n = \alpha_n * \beta_n$ , donde  $\alpha_n$  une  $x_0$  con  $\eta_{t_n}(x_0)$  siguiendo la  $\eta_t$ -órbita de  $x_0$ , y  $\beta_n$  es una curva incluida en  $D$  que une  $\eta_{t_n}(x_0)$  con  $x_0$ . Es claro, y lo asumimos a partir de este momento, que podemos suponer que el largo de las curvas  $\beta_n$  está acotado por una constante independiente de  $n$ .

De esta forma las clases de homotopía de los loops  $\gamma_n$  con punto base  $x_0$  caracterizan, en cierta forma global, de qué modo vuelve sobre sí misma la

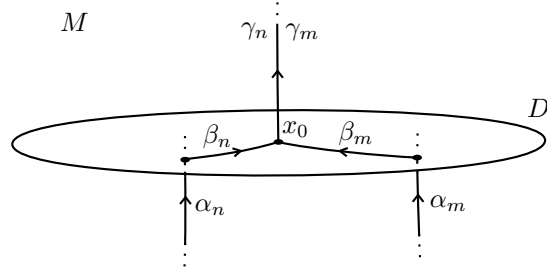


Figura 6.2

variedad estable fuerte de  $x_0$ . El siguiente lema ilustra la riqueza con la que este fenómeno se suscita.

**Lema 6.2.2.**  $\gamma_n \simeq \gamma_m$  si y sólo si  $n = m$ .

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que  $\gamma_n \simeq \gamma_m$  para ciertos  $n > m$ . Veamos que a partir de esta suposición se genera una curva cerrada, homotópicamente nula y transversal a la foliación centro-inestable; contradiciendo el Corolario 4.2.2 del teorema de Haefliger visto en el Capítulo 4.

Efectivamente, si  $\gamma_n \simeq \gamma_m$  con  $n > m$ , entonces  $\gamma_m^{-1} * \gamma_n \simeq \beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq 0$  y, puesto que el camino  $\alpha_m^{-1} * \alpha_n$  es homotópico a extremos fijos al camino  $\alpha_{(n,m)}$  que va desde  $\eta_{t_m}(x_0)$  a  $\eta_{t_n}(x_0)$  siguiendo la órbita de  $\eta_t$ , entonces tenemos que  $\beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq \beta_m^{-1} * \alpha_{(n,m)} * \beta_n$ .

Luego  $\beta_m^{-1} * \alpha_{(n,m)} * \beta_n$  es un loop homotópicamente nulo, y es claro que podemos perturbarlo ligeramente en un entorno de  $x_0$  para que sea transversal en todo punto a la foliación centro-inestable (ver Figura 4.2 del Capítulo 4). Construimos de esta forma una curva cerrada, homotópicamente nula y transversal a la foliación centro-inestable. Contradicción. □

Fijemos de ahora en más  $\sigma = \sup_{x \in M} \|\dot{\varphi}_t(x)\|$ .

Sabemos que, dado que  $\varphi_t$  es un flujo de Anosov, existen constantes  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que  $\|D(\varphi_t)_x(v_s)\| \leq Ce^{-\lambda t} \|v_s\|$  para todos  $t > 0$ ,  $x$  en  $M$  y  $v_s$  en  $E^s(x)$ . Como vimos en el Capítulo 2, esto implica que las curvas integrales del fibrado estable, a menos de la constante  $C$ , decrecen su longitud exponencialmente si son fluidas por  $\varphi_t$  hacia el futuro. Usaremos este hecho para probar el siguiente lema.

**Lema 6.2.3.** Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  una órbita del flujo  $\eta_t$ . Entonces existe  $\alpha'$  homotópica a extremos fijos a  $\alpha$  tal que

$$\ell(\alpha') \leq C + 2\frac{\sigma}{\lambda} \log(\ell(\alpha)).$$

*Demostración.* Para cada  $x$  en  $M$  y  $t \neq 0$ , sea  $\delta_{x,t} : [0, 1] \rightarrow M$  la curva definida como  $\delta_{x,t}(s) = \varphi_{ts}(x)$ , que une  $x$  con  $\varphi_t(x)$  a lo largo de su  $\varphi_t$ -órbita.

Consideramos ahora para cada  $t$  la curva  $\varphi_t \circ \alpha$  que por lo visto en el Capítulo 2 continua siendo curva integral del fibrado  $E^s$  y cumple que  $\ell(\varphi_t \circ \eta) \leq Ce^{-\lambda t} \ell(\eta)$  para todo  $t > 0$ . Luego

$$\alpha \simeq \delta_{\alpha(0),t} * (\varphi_t \circ \alpha) * \delta_{\alpha(1),t}^{-1} \quad (3)$$

para cada  $t > 0$  (ver Figura 6.3).

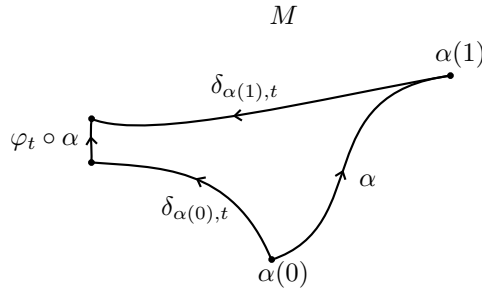


Figura 6.3

Denominando  $\alpha'$  a la curva de la derecha en (3) y eligiendo  $t = \frac{\log(\ell(\alpha))}{\lambda}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \ell(\alpha') &\leq \sigma \frac{\log(\ell(\alpha))}{\lambda} + C\ell(\alpha)e^{-\lambda \frac{\log(\ell(\alpha))}{\lambda}} + \sigma \frac{\log(\ell(\alpha))}{\lambda} \\ &\leq C + 2\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \log(\ell(\alpha)). \end{aligned}$$

□

Recordar que llamamos  $P(x_0, r)$  a la cantidad de clases de homotopía distintas de loops de largo menor o igual que  $r$  con punto base  $x_0$ . Por lo visto en el Capítulo 5 la tesis del teorema es equivalente a probar que  $P(x_0, r)$  crece de forma exponencial con  $r$ .

Dado que cada  $\alpha_n$  tiene velocidad 1, entonces  $\ell(\alpha_n) \leq t_n$  y luego a partir del Lema 6.2.1 tenemos que para cada  $n > 0$  se cumple que

$$\ell(\alpha_n) \leq nT.$$

Luego, en virtud del Lema 6.2.3, existe  $\alpha'_n$  homotópica a extremos fijos a  $\alpha_n$  tal que

$$\ell(\alpha'_n) \leq C + \frac{2\sigma}{\lambda} \log(nT).$$

Definiendo ahora para cada  $n$  la curva  $\gamma'_n = \alpha'_n * \beta_n$  tenemos que  $\gamma'_n$  es un loop con punto base  $x_0$ , homotópico a  $\gamma_n$  y tal que

$$\ell(\gamma'_n) \leq B + \frac{2\sigma}{\lambda} \log(nT)$$

para cierta constante  $B > 0$  (dado que el largo de las curvas  $\beta_n$  está acotado independientemente de  $n$ ). Luego

$$\ell(\gamma'_{\lfloor Ae^{\frac{\lambda}{2\sigma}n} \rfloor}) \leq n$$

siendo  $A = \frac{1}{T}e^{-B\frac{\lambda}{2\sigma}} > 0$  y, dado que por Lema 6.2.2 los loops  $\gamma_n$ , y por lo tanto los  $\gamma'_n$  homotópicos a ellos, representan todos elementos distintos de  $\pi_1(M, x_0)$ , entonces para todo  $n > 0$  se cumple que

$$P(x_0, n) \geq \lfloor Ae^{\frac{\lambda}{2\sigma}n} \rfloor \geq A'e^{\frac{\lambda}{2\sigma}(n-1)}$$

para cierta constante  $A' > 0$ .

Dado que  $P(x_0, r)$  crece con  $r$  lo anterior implica que

$$P(x_0, r) \geq A'e^{\frac{\lambda}{2\sigma}r}$$

para todo  $r > 0$  y esto finaliza la demostración del teorema.

## A. Teorema de la variedad estable local

En este apéndice desarrollamos con más detalle la idea de la prueba del teorema de la variedad estable local para flujos de Anosov vista en la sección 2.3.

**Teorema A.0.4 (Variedad estable local).** *Sea  $\varphi_t : M \rightarrow M$  un flujo de Anosov en  $M$  una 3-variedad riemanniana cerrada. Entonces existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  en  $M$  existe una única (a menos de su opuesta) curva  $\eta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  diferenciable tal que  $\eta(0) = x$ ,  $\|\dot{\eta}(t)\| = 1$  y  $\dot{\eta}(t) \in E^s(\eta(t))$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .*

*Idea desarrollada de la prueba.*

Sea  $x \in M$ . Sea  $X_s$  un campo local unitario continuo que genera a  $E^s$  en un entorno  $U$  de  $x$ . Por teorema de existencia de Peano (ver [Sot]), existe  $\delta > 0$  y  $\eta_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  diferenciable con  $\eta_1(0) = x$  tal que  $\eta_1$  solución del campo  $X_s$  por  $x$  en  $U$ .

En la demostración de Peano (ver [Sot, pág. 16]) el  $\delta$  se obtiene en función de la norma máxima del campo que se integra y del radio del entorno en el cual el campo esté definido. Luego, puesto que  $M$  es compacta, podemos considerar que para todo  $x$  en  $M$  la curva  $\eta_1$  está definida en  $(-\delta, \delta)$  para un mismo  $\delta$  que no depende de  $x$ .

Supongamos que existe  $\eta_2 : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  solución diferente con  $\eta_2(0) = x$  y lleguemos a una contradicción.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\eta_1|_{[0, \delta)} \neq \eta_2|_{[0, \delta)}$ . Sea  $0 \leq t_0 < \delta$  el máximo de los  $t \in [0, \delta)$  tal que  $\eta_1|_{[0, t]} = \eta_2|_{[0, t]}$ . Podemos suponer  $t_0 = 0$ , de lo contrario considerar  $\eta_1(t_0)$  en el rol de  $x$  y la prueba es la misma a partir de ahí. Intuitivamente, las curvas  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se separan exactamente en  $x$ . De hecho, si existiera  $0 < \delta' \leq \delta$  tal que  $\eta_1([0, \delta')) = \eta_2([0, \delta'))$ , dado que  $X_s \neq 0$  en todo punto entonces  $\eta_2|_{[0, \delta')}^{-1} \circ \eta_1|_{[0, \delta')}$  sería un difeomorfismo con derivada constante 1 y como consecuencia sería  $\eta_1|_{[0, \delta')} = \eta_2|_{[0, \delta')}$ , lo que estamos suponiendo que no ocurre.

Luego, sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que existe  $y \in \eta_1([0, \delta'))$  tal que  $y \notin \eta_2([0, \delta'))$ . Dado que esto vale para todo  $0 < \delta' \leq \delta$  entonces, para llegar a la contradicción, podemos considerar que  $y$  se encuentra tan cerca de  $x$  como sea necesario.

**Lema A.0.5.** Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $y \in \eta_1([0, \delta'])$ ,  $y \notin \eta_2([0, \delta'])$ , una curva  $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$  tangente a  $E^c$  y una curva  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  tangente a  $E^u$  (alguna de ellas puede ser constante) tales que  $y = \alpha(0)$ ,  $\alpha(t) = \varphi_t(y)$  para todo  $t \in [0, t_0]$ ,  $y' = \alpha(t_0) = \beta(0)$ ,  $z = \beta(1) \in \eta_2([0, \delta'])$  y tales que  $x, y, y', z, \alpha([0, t_0])$  y  $\beta([0, 1])$  quedan todos contenidos en  $B(x, \epsilon)$  (ver Figura A.1).

*Prueba.* Consideremos ahora un campo unitario continuo  $X_u$  que genera  $E^u$  localmente en un entorno de  $x$ . Por Peano nuevamente sabemos que existe una curva  $\nu : (-\xi, \xi) \rightarrow M$  tangente a  $E^u$  tal que  $\nu(0) = y$ . Por Proposición 2.3.1 podemos ahora hacer fluir esta nueva curva por el flujo  $\varphi_t$  entre tiempos  $(-\xi', \xi')$  y obtener de esta forma una familia de curvas  $\varphi_t \circ \nu : (-\xi, \xi) \rightarrow M$  tangentes a  $E^u$ .

Luego por la transversalidad y continuidad de  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$ , tomando  $y$  suficientemente cerca de  $x$  podemos asegurar que existe  $t_0$  tal que  $(\varphi_{t_0} \circ \nu)(-\xi, \xi) \cap \eta_2(-\delta, \delta) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in \varphi_{t_0} \circ \nu((-\xi, \xi) \cap \eta_2((-\delta, \delta)))$ .

Asumamos sin pérdida de generalidad que  $t_0 > 0$ . Definimos luego  $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$  tal que  $\alpha(t) = \varphi_t(y)$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  como una reparametrización la porción de la curva  $s \mapsto \varphi_{t_0} \circ \nu(s)$  que va desde  $y' = \alpha(t_0)$  a  $z$ .

Luego tomando  $y$  suficientemente cerca de  $x$  se cumple la tesis del lema. ■

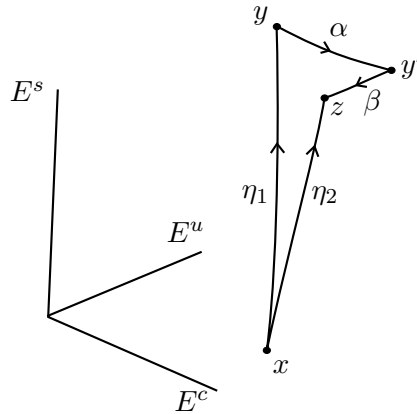


Figura A.1

Veamos a continuación otros lemas que usaremos. Sea  $\sigma_1 = \max_x \|\dot{\varphi}_t\|$  y  $\sigma_2 = \min_x \|\dot{\varphi}_t\|$

**Lema A.0.6.** Si  $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$  para cierto  $t_0 > 0$  es tal que  $\alpha(t) = \varphi_t(x)$  para todo  $t \in [0, t_0]$ , entonces  $\ell(\varphi_t \circ \alpha) \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ell(\alpha)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Prueba.* Continuidad de  $\|\dot{\varphi}_t\|$  en  $M$  compacto. ■

**Lema A.0.7.** Existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que toda curva  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  que sea tangente a  $E^u$  y cumpla que  $\beta([0, 1]) \subset B(x, \epsilon_1)$  para algún  $x \in M$  es tal que  $d(\varphi_t(\beta(0)), \varphi_t(\beta(1))) > 500 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \epsilon_1$  para cierto  $t > 0$ .

*Prueba.* Continuidad de  $E^u$  y Proposición 2.3.1 en  $M$  compacto. ■

**Lema A.0.8.** Existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que para todo  $x \in M$ , si  $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$  para cierto  $t_0 > 0$  es tal que  $\alpha(t) = \varphi_t(x)$  para todo  $t \in [0, t_0]$  y  $\alpha([0, t_0]) \subset B(x, \epsilon_2)$  entonces  $d(x, \varphi_{t_0}(x)) > \frac{1}{2} \ell(\alpha)$ .

*Prueba.* Continuidad de  $E^c$  y de  $\|\dot{\varphi}_t\|$  en  $M$  compacto. ■

**Lema A.0.9.** Existe  $\epsilon_3 > 0$  tal que para todo  $x \in M$ , si  $\beta : [a, b] \rightarrow M$  es tangente a  $E^u$  y  $\beta([a, b]) \subset B(x, \epsilon_3)$  entonces  $d(\beta(a), \beta(b)) > \frac{1}{2} \ell(\beta)$ .

*Prueba.* Continuidad de  $E^u$  en  $M$  compacto. ■

Sea  $\epsilon = \frac{1}{4(C+1)} \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  donde  $C > 0$  es la constante del flujo de Anosov  $\varphi_t$ . Consideramos para este  $\epsilon$  la construcción del Lema A.0.5.

Si  $\beta$  es constante, entonces  $y' = z$  y tenemos que por un lado  $y$  y  $z$  están unidos por una curva  $\alpha$  que es un segmento de órbita del flujo  $\varphi_t$ , y por otro cada uno de ellos está unido a  $x$  por, respectivamente, las curvas  $\eta_1$  y  $\eta_2$  tangentes a  $E^s$ . Luego por un lado para el futuro  $\varphi_t(y)$  y  $\varphi_t(z)$  se acercan indefinidamente para el futuro, pero por otro  $\varphi_t(\alpha)$  los sigue uniendo y, usando los Lemas A.0.6 y A.0.8, tenemos que  $d(\varphi_t(y), \varphi_t(z))$  no puede tender a 0. Contradicción.

Si el caso es que  $\beta$  no es constante, entonces  $y$  y  $z$  están unidos a  $x$  por, respectivamente, las curvas  $\eta_1$  y  $\eta_2$  tangentes a  $E^s$ . Luego por Proposición 2.3.1 y Lema A.0.9 tenemos que para todo  $t > 0$



$$\begin{aligned}\ell(\varphi_t \circ \eta_1) &\leq C e^{-\lambda t} \ell(\eta_1) < C e^{-\lambda t} 2d(x, y) < C e^{-\lambda t} 2\epsilon < \min\left\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2}\right\} \text{ y} \\ \ell(\varphi_t \circ \eta_2) &\leq C e^{-\lambda t} \ell(\eta_2) < C e^{-\lambda t} 2d(x, z) < C e^{-\lambda t} 2\epsilon < \min\left\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Y luego por un lado

$$d(\varphi_t(y), \varphi_t(z)) < \epsilon_1 \quad (1)$$

para todo  $t > 0$ , pero por otro lado por Lema A.0.7 (dado que  $y'$  y  $z$  están a distancia menor que  $\epsilon_1$ ) entonces existe  $t_1 > 0$  tal que

$$d(\varphi_{t_1}(y'), \varphi_{t_1}(z)) > 500 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \epsilon_1 \quad (2)$$

y puesto que por Lemas A.0.6 y A.0.8 tenemos que

$$d(\varphi_{t_1}(y), \varphi_{t_1}(y')) < \frac{1}{2} \ell(\varphi_{t_1} \circ \alpha) \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ell(\alpha) < \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} \frac{1}{2} d(y, y') < \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} \frac{1}{2} \epsilon_1 \quad (3)$$

entonces aplicando desigualdad triangular con (1), (2) y (3) llegamos a una contradicción.

Análogamente para probar que el subfibrado  $E^u$  es localmente únicamente integrable razonando para el flujo  $\varphi_{-t}$ .

□

## Referencias

- [A] D. V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **90** (1967), 1–235;
- [AS] D. V. Anosov y Ya. G. Sinai, Some smooth ergodic systems, *Uspekhi Math. Nauk* **22** (1967), 107-172; *Russian Math. Surveys* **22** (1967), 103-168.
- [Ba] T. Barbot, Generalizations of the Bonatti-Langevin example of Anosov flow and their classification up to topological equivalence, *Comm. Anal. Geom.* (4) **6** (1998), 749-798.
- [BBY] F. Beguin, C. Bonatti y B. Yu, Building Anosov Flows in 3-manifolds, *Preprint* arXiv: 1408.3951.
- [BL] C. Bonatti y R. Langevin, Un exemple de flot d’Anosov transitif transverse à une tore et non conjugué à une suspension, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **14** (1994), 633–643.
- [CLN] C. Camacho y A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1985). Traducido del portugués por Sue E. Goodman.
- [dC] M. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser Boston (1992).
- [F] J. Franks, Anosov diffeomorphisms, *Proceedings of Symposia in Pure Math. Nauk* **22** (1970), 61–93.
- [FW] J. Franks, R. Williams, Anomalous Anosov flows, *Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979)*, *Lecture Notes in Math., Springer, Berlin* **819** (1980), 158-174.
- [Gh] E. Ghys, Flots d’Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **4** (1984), 67-80.
- [Go] S. Goodman, Dehn surgery on Anosov flows Geometric Dynamics, *Lecture Notes in Math., Springer, Berlin* **1007** (1983), 300-307.
- [Gr] R. I. Grigorchuk, Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya.* **48** (1984), 939–985.

- [Hae] A. Haefliger, Variétés feuilletées, *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa* (3) **16** (1962), 367-397
- [HT] M. Handel, W. P. Thurston, Anosov flows on new 3-manifolds, *Inventiones Mathematicae* **59** (1980), 95-103.
- [Hat1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [Hat2] A. Hatcher, *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, disponible en [www.math.cornell.edu/~hatcher](http://www.math.cornell.edu/~hatcher) (2007).
- [HP] Hirsch M., Pugh C., Stable manifolds and hyperbolic sets, *Proc. Symp. in Pure Math. Global Analysis AMS* **14** (1970), 133-164.
- [KH] A. Katok y B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).
- [M] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).
- [Pa] M. Paternain, Expansive Flows and the Fundamental Group, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **24-N2** (1993), 179-199.
- [PlTh] J. F. Plante y W. P. Thurston, Anosov flows and the fundamental group, *Topology* **11** (1972), 147-150.
- [Po] R. Potrie, *Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms in 3-dimensional manifolds*, disponible en [www.cmat.edu.uy/~rpotrie](http://www.cmat.edu.uy/~rpotrie) (2013).
- [Sol] V.V. Solodov, Components of topological foliations, *Math USSR Sbornik* **47** (1984), 329-343.
- [Sot] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, CNPq IMPA (1979).
- [V1] A. Verjovsky, Codimension one Anosov flows, *Bol. Soc. Math. Mex.* **19** (1974), 49-77.
- [V2] A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov*, XII Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú (1999).
- [Y] B. Yemini, Entropía Topológica del Flujo Geodésico, *Monografía de Licenciatura CMAT* (2013).