

TRABAJO MONOGRÁFICO

Rigidez Geométrica en Superficies por el Espectro Mercado de Longitudes

Por: Ignacio Correa
Orientador: Rafael Potrie



**UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY**

Licenciatura en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Crees que estás escapando y
tropiezas contigo mismo. El rodeo
más largo es el camino más corto
a casa.

James Joyce, *Ulises*

Agradecimientos

No me voy a poner a agradecer a nadie en particular porque es mucho trabajo. Así que agradezco a todos aquellos que hayan aportado a mi formación tanto académica como humana. A todos menos al Gordo. A él sí lo quiero agradecer en particular por motivos obvios.

Resumen

Un resultado conocido nos dice que en una superficie cerrada de curvatura negativa cualquier curva cerrada no homotópicamente trivial es homotópica a una única geodésica cerrada. Esto nos permite definir el *espectro marcado de longitudes* como la función que a cada clase de homotopía libre le asigna el largo de su representante geodésico.

En esta monografía demostraremos que si dos superficies homeomorfas tienen el mismo espectro marcado de longitudes entonces son isométricas. Este resultado fue probado por Otal [Ota90] e independientemente por Croke [Cro90] en 1990. La demostración que presentaremos está basada en la prueba de Otal.

Abstract

A well known result says that in a closed surface of negative curvature every closed non-nullhomotopic curve is homotopic to a unique closed geodesic. This allows us to define the *marked length spectrum* as the function that maps each free homotopy class to the length of its geodesic representative.

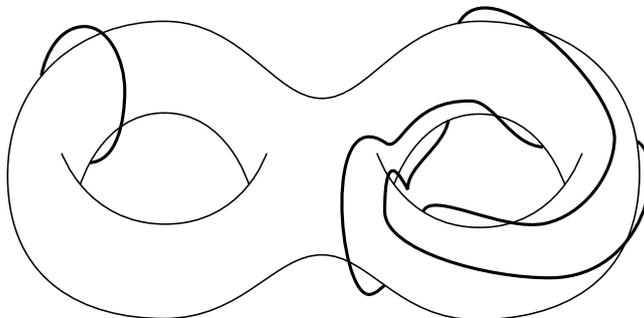
In this monograph we are going to prove that if two homeomorphic surfaces have the same marked length spectrum then they are isometric. This result was proved by Otal [Ota90] and independently by Croke in [Cro90] in 1990. The demonstration given here is based on Otal's proof.

Índice

1	Prólogo	1
2	Preliminares	3
2.1	La Geometría de \tilde{S}	3
a	Geodésicas y flujo geodésico	3
b	Geodésicas en \tilde{S}	3
2.2	El Borde por Rayos Geodésicos	5
a	La foliación \mathcal{W}^+	5
b	La topología de $\partial\tilde{S}$	6
c	El lema de Morse	7
2.3	El Espacio de Geodésicas	8
a	Definición y topología	8
b	Cartas geodésicas	9
2.4	Estructuras Sobre T^1S	9
a	Descomposición Horizontal-Vertical y métrica de Sasaki	9
b	Forma y volumen de Liouville	10
c	Caracterizaciones de la forma y el volumen de Liouville	12
2.5	Dinámica del Flujo geodésico	12
a	Flujos de Anosov	13
b	El flujo geodésico como flujo de Anosov	14
c	Ergodicidad del flujo geodésico	15
3	Parte I: El Espectro de Longitudes Determina el Flujo Geodésico	16
3.1	Conjugación de Órbitas Entre Superficies de Curvatura Negativa	16
a	El lema de Švarc-Milnor	17
b	Demostración del Teorema 3.2	18
3.2	La Conjugación de Flujos	19
4	Parte II: El Flujo Geodésico Determina la Corriente de Liouville	21
a	La corriente de Liouville	21
b	Caracterización dinámica de la corriente de Liouville	22
c	Caracterización geométrica de la corriente de Liouville	24
5	Parte III: La Corriente de Liouville determina la Geometría	25
a	Función de ángulo deformado puntual	25
b	Función de ángulo deformado medio	26
c	El efecto de ángulos deformados en funciones continuas	27
d	Los ángulos se preservan	28
e	Demostración del Teorema de Otal	29
6	Epílogo	30
a	Rigidez del Espectro de Longitudes en Dimensión Mayor	30
b	El Espectro del Laplaciano: ¿Se puede escuchar la forma de un tambor?	31
c	Métricas de Anosov	31

d	La Función Zeta de Ruelle	32
A	El Plano Hiperbólico	33
B	Regularidad de Conjugaciones de Órbitas	34

1 Prólogo



¿Podemos determinar la geometría de una superficie usando solo bandas elásticas?

Esta pregunta fue formulada por Burns y Katok en el año 1985 en el artículo [BK85]. Seamos más precisos con la formulación de dicha pregunta.

Sea M variedad cerrada con una métrica riemanniana g y sea \mathcal{C} el conjunto de sus clases de homotopía libre. Si M tiene todas sus curvaturas seccionales negativas entonces hay una única “banda elástica” en cada clase de homotopía, es decir, dada $c \in \mathcal{C}$, existe una única geodésica cerrada γ tal que $[\gamma] = c$. Esto se puede hacer tomando límite, por Arzalà-Ascoli, en curvas cerradas en c cuyos largos converjan a $\inf_{\gamma \in c} \ell(\gamma)$; la unicidad se deduce por propiedades de separación de geodésicas en el levantamiento universal que discutiremos en 2.1. Ver [BH99] por más detalles.

Definimos así el *espectro marcado de longitudes* $\ell_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ la función que le asigna a c el largo de su representante geodésico.

La pregunta entonces se vuelve: ¿Si g y g' son métricas riemannianas sobre M con todas sus curvaturas seccionales negativas y tenemos que $\ell_g = \ell_{g'}$ entonces (M, g) y (M, g') son isométricas?

En toda su generalidad esta pregunta sigue abierta hoy en día, pero ya en 1990 tuvo una respuesta positiva para superficies demostrada por Otal en [Ota90] y también de forma independiente unos meses después por Croke en [Cro90] (donde usa ideas diferentes a las de Otal y demuestra un resultado un poco más general).

Teorema 1.1 (Otal). *Sean (S, g) y (S, g') superficies riemannianas cerradas con curvatura negativa. Si $\ell_g = \ell_{g'}$ entonces (S, g) y (S, g') son isométricas.*

En el 2012 Amie Wilkinson revisita esta demostración en [Wil12], cambiando algunos argumentos por otros más dinámicos y geométricos pero preservando el espíritu de la demostración de Otal.

En este trabajo, basado en las notas de Wilkinson, pretendo exponer de la forma mas amena y clara posible esta demostración tratando de conservar la belleza y elegancia que se esconde detrás de ella.

En la primera sección de este texto se da una introducción, bastante superficial, de las herramientas que se manejarán durante la demostración. Nuestro ejemplo general para entender estos conceptos será el plano hiperbólico (la superficie de curvatura negativa más sencilla), sobre el cual damos una breve introducción en el apéndice A para el lector no familiarizado con el mismo.

La prueba en sí misma está dividida en tres grandes bloques. Primero demostramos que el espectro de largo determina el flujo geodésico, hecho relativamente conocido y que es verdad en dimensión arbitraria. Luego pasamos por una estructura intermedia, la corriente de Liouville, la cual cargará tanto con información dinámica (que nos permitirá ver inmediatamente que la corriente de Liouville queda determinada por el flujo geodésico) como con información geométrica. Por último usaremos la conjugación de flujos, y el hecho de que la misma preserva la corriente de Liouville, para construir la isometría entre las superficies.

Al final del trabajo se incluye un epílogo donde se hace un resumen de resultados relacionados con el teorema de Otal para dar un contexto más amplio sobre este teorema.

2 Preliminares

En esta sección se dará una introducción, más bien informal, de los elementos básicos que se manejarán a lo largo del texto. Algunas proposiciones serán demostradas mientras que otras podrán ser consideradas como “axiomas” a efectos de este trabajo (aunque, por supuesto, dichas afirmaciones están debidamente referenciadas).

De todas formas se darán por sabido ciertos conocimientos básicos de geometría riemanniana y de topología algebraica. Referencias más que suficientes como introducción a estos temas pueden ser [dC92] y [Hat02].

Las construcciones aquí presentadas se harán dentro del marco de las hipótesis del teorema de Otal, de forma que se sobreentenderá que S es una superficie cerrada, orientable y de curvatura negativa. También consideraremos, eventualmente, una superficie S' homeomorfa a S pero con una estructura riemanniana diferente (también de curvatura negativa).

Muchas de estas construcciones se pueden hacer con mayor generalidad y se invita al lector interesado a revisar las respectivas referencias.

2.1 La Geometría de \tilde{S}

a Geodésicas y flujo geodésico

Llamaremos geodésicas a las curvas γ sobre S sin aceleración (relativa a la geometría de la superficie): $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Así las geodésicas están definidas por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, por lo cual quedan determinadas dado un punto y una velocidad inicial. Llamaremos así γ_v a la geodésica con condición inicial $\dot{\gamma}_v(0) = v$ (cuando hablamos de un $v \in TS$ se sobreentenderá que v viene asociado con un punto base x , aunque, cuando sea necesario, nos referiremos a los puntos de TS por sus dos coordenadas: (x, v)).

Como la velocidad a lo largo de una geodésica es constante nos interesaremos solo en las geodésicas γ_v con $\|v\| = 1$. Podemos entonces definir el flujo geodésico sobre el tangente unitario $\phi^t : T^1S \rightarrow T^1S$ dado por dicha ecuación diferencial. Esto es $\phi^t(v) = (\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t))$. Como S es compacta el flujo geodésico está definido para todo tiempo.

b Geodésicas en \tilde{S}

Sea \tilde{S} el levantamiento universal de S . Podemos “pull-backear” la métrica de S a \tilde{S} dándonos un flujo geodésico $\tilde{\phi}^t : T^1\tilde{S} \rightarrow T^1\tilde{S}$ que a su vez levanta al flujo ϕ^t en S (así haremos el abuso de notación de llamar a $\tilde{\phi}^t$ también ϕ^t). Con esta construcción tenemos que la curvatura en \tilde{S} está acotada superiormente por $-\kappa < 0$ y ϕ^t está definida para todo tiempo.

Trataremos de comprender, en cierto sentido, el “dibujo” que hacen las geodésicas sobre \tilde{S} .

Proposición 2.1. *Dados $x, y \in \tilde{S}$ diferentes existe un único $v \in T_x^1\tilde{S}$ tal que $\gamma_v(t) = x$ para algún $t > 0$.*

Además, en estas condiciones, resulta que $d(x, y) = t$

Esto nos dice que puedo unir puntos cualesquiera por segmentos geodésicos de una forma única y además que las geodésicas son globalmente minimizantes

(claramente esto último no es necesariamente verdad en S). Conceptualmente la demostración consiste en “jugar al golf geodésico”, apuntando en la dirección que (localmente) optimice la distancia a y .

Dada esta proposición podemos pensar en triángulos geodésicos. Se puede probar mediante campos de Jacobi (que son definidos en base a la curvatura y nos dan información sobre que tan rápido se “despegan” pares de geodésicas) que los triángulos en un espacio de curvatura menor son más “finos” que los de un espacio de curvatura mayor, ver [BBI01].

Proposición 2.2 (Criterio de comparación de triángulos). *Sea $\triangle xyz \subset \tilde{S}$ triángulo geodésico donde la curvatura de \tilde{S} está acotada superiormente por $\kappa \leq 0$. Sea $\triangle x'y'z' \in \mathbb{M}_\kappa$ triángulo geodésicos con lados iguales a $\triangle xyz$.*

Sean sean $a \in \overline{xy}$, $b \in \overline{xz}$, $a' \in \overline{x'y'}$ y $b' \in \overline{x'z'}$ tales que $d(x, a) = d(x', a')$ y $d(x, b) = d(x', b')$. Entonces $d(a, b) \leq d(a', b')$

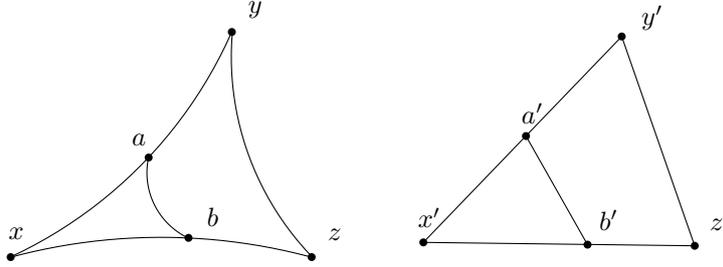


Figura 1: Criterio de comparación de triángulos.

Donde \mathbb{M}_κ es una homotecia del plano hiperbólico con curvatura κ en el caso $\kappa < 0$ y es \mathbb{R}^2 con la métrica usual en el caso $\kappa = 0$.

Hablemos ahora del comportamiento asintótico de las geodésicas. En primer lugar dos geodésicas que parten de un mismo punto con direcciones diferentes están forzadas a diverger. Mientras que, en contraste, dos geodésicas que no divergan están forzadas a, en cierto sentido, converger.

Proposición 2.3. *Dados γ_1 y γ_2 geodésicas en \tilde{S} la función $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ es convexa en t , luego si $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ es no acotado entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = +\infty$.*

En particular si $v, w \in T_x^1 S$, $v \neq w$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) = +\infty$.

Proposición 2.4. *Sean γ_1 y γ_2 geodésicas de \tilde{S} .*

Si $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ está acotado para $t > 0$ entonces existe t_0 tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t + t_0)) = 0$ donde además la convergencia es exponencial.

Si además $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ está acotada para $t < 0$ (es decir $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ acotada) entonces $\gamma_1(t) = \gamma_2(t + t_0)$.

En el caso de \mathbb{H}^2 se puede hallar explícitamente el t_0 (ver ejemplo 2.3). El caso general se prueba con argumentos de comparación de triángulo dado que es verdad para el caso hiperbólico.

2.2 El Borde por Rayos Geodésicos

Es natural pensar que estas geodésicas que convergen están convergiendo a un punto. Con esta idea en mente construiremos un borde ideal. La construcción, potencialmente, se puede hacer en espacios más generales. Referencias para esta sección pueden ser [BH99] y [Bal12] donde la construcción se hace en mayor detalle y generalidad.

a La foliación \mathcal{W}^+

La forma natural de formalizar la idea de un punto al cual las geodésicas convergen es mediante a una relación de equivalencia. Diremos que $v \sim w$ si las geodésicas basadas en esos vectores convergen a futuro (en el sentido de la proposición 2.4, que es lo mismo que decir que $d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))$ está acotada para todo $t > 0$).

Llamaremos $\mathcal{W}^+(v)$ a la clase de equivalencia de v . Esta relación de equivalencia genera, de hecho, una foliación en $T^1\tilde{S}$. Definimos entonces el borde de \tilde{S} como $\partial\tilde{S} = \tilde{S}/\mathcal{W}^+$. Diremos entonces que $\gamma(+\infty) = \mathcal{W}^+(\dot{\gamma}(0))$

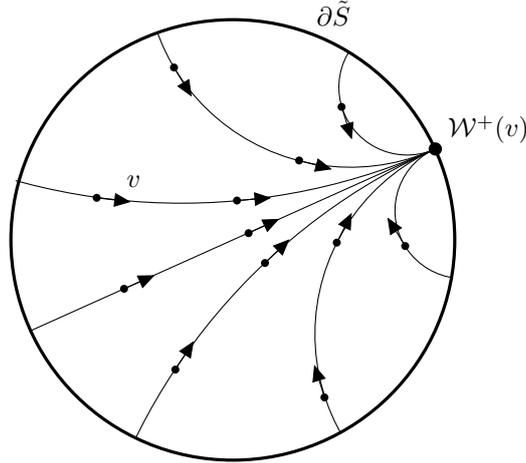


Figura 2: Hoja de la foliación \mathcal{W}^+ vista como un punto en el borde.

De la misma forma podemos definir \mathcal{W}^- la clase de equivalencia de vectores que convergen a pasado. El borde definido como \tilde{S}/\mathcal{W}^- queda trivialmente en biyección a \tilde{S}/\mathcal{W}^+ mediante $\mathcal{W}^+(v) \mapsto \mathcal{W}^-(-v)$ (y cuando veamos la topología que le demos al borde, esta biyección será un homeomorfismo).

Se puede ver que si nos paramos en un punto $x \in \tilde{S}$ entonces $T_x^1\tilde{S}$ está en biyección con $\partial\tilde{S}$ mediante $v \mapsto \gamma_v(+\infty) = \mathcal{W}^+(v)$; es decir, puedo llegar a cualquier punto de $\partial\tilde{S}$ desde cualquier punto de \tilde{S} . Formalmente estamos diciendo que, dados $x \in \tilde{S}$ y γ geodésica, existe $v \in T_x^1\tilde{S}$ tal que $d(\gamma_v(t), \gamma(t))$ está acotada para $t > 0$ (la idea de la demostración sería tomar límite en los $v_t \in T_x^1\tilde{S}$ tales que $\gamma_{v_t}(t') = \gamma(t)$).

b La topología de $\partial\tilde{S}$

Podemos darle a $\partial\tilde{S}$ la topología tal que haga que $v \mapsto \gamma_v(+\infty)$ sea un homeomorfismo, haciendo que $\partial\tilde{S} \cong \mathbb{S}^1$. No es difícil ver que esta topología no depende de x .

Luego podemos extender las topologías de \tilde{S} y $\partial\tilde{S}$ a su unión $\bar{S} = \tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ de la siguiente forma. Dado $\mathcal{W}^+((x, v)) \in \partial\tilde{S}$, consideremos los entornos $I \subset T_x^1\tilde{S}$ de v . Una base de entornos de $\mathcal{W}^+(v)$ serán los $U(T, I) = \{\gamma_w(t) \mid w \in I, t \in (T, +\infty]\}$. Según esta topología, efectivamente $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \gamma(+\infty)$

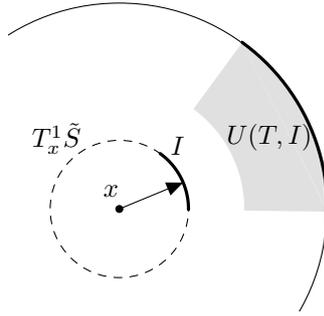


Figura 3: Entorno en la topología de \bar{S}

Como $\pi_1(S)$ actúa por isometrías en \tilde{S} manda hojas de \mathcal{W}^+ en hojas de \mathcal{W}^+ , dandonos una acción sobre $\partial\tilde{S}$. Como $\pi_1(S)$ manda fibras de $T^1\tilde{S}$ homeomórficamente a otras fibras de $T^1\tilde{S}$ resulta que la acción en el borde es por homeomorfismos.

Podemos extender el resultado de la proposición 2.1 a todo \bar{S} .

Proposición 2.5. *Dados $x, y \in \bar{S}$ diferentes existe γ geodésica tal que $\gamma(t_1) = x$ y $\gamma(t_2) = y$ para algún par t_1, t_2 (posiblemente $\pm\infty$).*

Además, si γ' es otra geodésica en esas condiciones, entonces $\gamma(t) = \gamma'(\pm t + t_0)$ para algún t_0 .

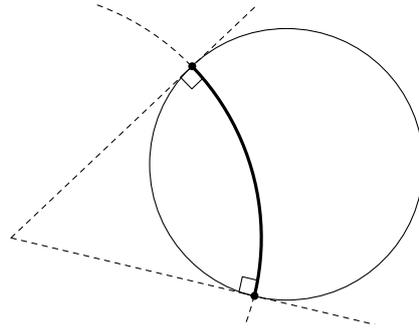


Figura 4: En el caso hiperbólico la proposición 2.5 se vuelve un sencillo problema de geometría euclidéa. Habría que mostrar que dado dos puntos del disco hay una única circunferencia perpendicular al borde que los une. En la figura se muestra la construcción para unir dos puntos del borde.

Ejemplo 2.1. En el caso del modelo del disco de Poincaré $\overline{\mathbb{H}^2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ con la topología usual de \mathbb{C} .

En el caso del modelo del semiplano superior $\overline{\mathbb{H}^2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z \geq 0\} \cup \{\infty\}$. $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sigue actuando en estos espacios como transformaciones de Möbius.

c El lema de Morse

Una pregunta natural en este punto (que además nos será útil responder) es ¿Cuándo un homeo $f : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ se extiende al borde?

Para poder hacer esto necesitaríamos que f mande geodésicas a curvas que estén “bastante” cerca de una geodésica de \tilde{S}' . Para esto necesitamos que f respete métrica a gran escala.

Definición 2.1. Decimos que $f : M \rightarrow M'$ función entre espacios métricos es (λ, ϵ) -quasi-isométrica si

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - \epsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \epsilon.$$

Si además la imagen f es D densa (para todo $x' \in M'$ existe $x \in M$ con $d(x', f(x)) < D$) decimos que es una *quasi-isometría*.

Llamaremos (λ, ϵ) -quasi-geodésica a una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ (λ, ϵ) -quasi-isométrica.

En general no nos importara quienes sean λ y ϵ , solo que existan. Así hablaremos de funciones quasi-isométricas a secas sobre entendiendo que existen tales λ y ϵ .

Teorema 2.6 (Lema de Morse). *Sea \tilde{S} el levantado universal de una superficie cerrada de curvatura negativa. Dados λ y ϵ existe D tal que toda (λ, ϵ) -quasi-geodésica está a distancia Hausdorff menor a D de una geodésica de \tilde{S} .*

Este lema implica que podemos definir $c(\pm\infty)$ de una quasi-geodésica ya que c estará obligada a converger a los mismos puntos de su geodésica cercana. Así si f es quasi-isométrica entonces se puede extender al borde. Pero podemos decir aún más que esto.

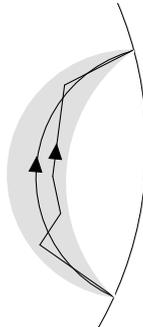


Figura 5: El lema de Morse fuerza a las quasi-geodésicas a converger a puntos únicos en el borde.

Proposición 2.7. *Si $f : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ es una quasi-isometría entre levantados universales de superficies cerradas de curvatura negativa entonces la función inducida $f : \partial\tilde{S} \rightarrow \partial\tilde{S}'$ dada por $\gamma(+\infty) \mapsto f \circ \gamma(+\infty)$ es un homeomorfismo.*

Estas proposiciones están demostradas en [BH99] y son de hecho verdad en espacios donde tenga sentido definir el borde. Para ver en que generalidad se puede hacer esta construcción del borde referimos a [Bal12] donde las construcciones de esta sección se hacen en detalle.

2.3 El Espacio de Geodésicas

a Definición y topología

Pensaremos el *espacio de geodésicas* sobre \tilde{S} como el conjunto de las geodésicas en \tilde{S} modulo reparametrizaciones triviales

$$\mathcal{G}(S) = \{\gamma \text{ geodésica de } \tilde{S}\} / \gamma(t) \sim \gamma(t + t_0).$$

Mientras no consideremos al espacio de geodésicas de S' llamaremos al espacio de geodésicas simplemente \mathcal{G} .

Gracias a la proposición 2.5 podemos ver que una geodésica $\gamma \in \mathcal{G}$ (haciendo abuso de notación) queda definida por los puntos $\gamma(-\infty)$ y $\gamma(+\infty)$ del borde a los que converge a pasado y a futuro (que no pueden ser los mismos). Identificamos entonces las geodésicas de esta manera $\gamma = (\gamma(-\infty), \gamma(+\infty))$.

De esta forma le damos a \mathcal{G} la estructura topológica inducida por esta asociación

$$\mathcal{G} \cong \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \setminus \Delta$$

donde $\Delta = \{(a, a) \in \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}\}$ es la diagonal. Así \mathcal{G} queda homeomorfa a un cilindro abierto, aunque no de forma visual.

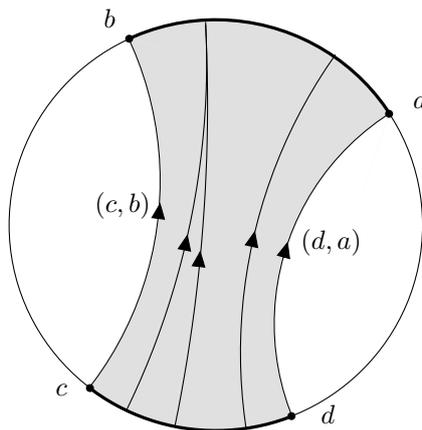


Figura 6: El rectángulo geodésico $[c, d] \times [a, b]$. Consiste en todas las geodésicas que comienzan en el segmento $[c, d]$ y terminan en $[a, b]$.

Vagamente hablando, esta topología es tal que si v y w están “cerca” en $T^1\tilde{S}$ entonces también lo están γ_v y γ_w en \mathcal{G} . A su vez, si γ_1 y γ_2 están “cerca” en \mathcal{G}

entonces también lo están (vistas como subconjuntos de \tilde{S}) según la topología Hausdorff sobre compactos.

Cuando comencemos la demostración del teorema de Otal, nuestro primer paso será construir una conjugación de órbitas (es decir, un homeo que respeta las órbitas de los flujos geodésicos) entre T^1S y T^1S' . Observamos entonces que si tenemos $h : T^1S \rightarrow T^1S'$ una conjugación de órbitas, esta induce de forma natural un homeomorfismo (que también llamaremos h) $h : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$.

b Cartas geodésicas

Equiparemos a este espacio con una estructura diferenciable compatible con esta topología. Dado $v \in T^1\tilde{S}$ sea $\mathcal{G}_v \subset \mathcal{G}$ el conjunto de geodésicas que corta a γ_v positivamente (dicho de otra forma $\mathcal{G}_v = (\gamma_v(+\infty), \gamma_v(-\infty)) \times (\gamma_v(-\infty), \gamma_v(+\infty))$). Daremos en \mathcal{G}_v las siguientes coordenadas locales: $\gamma \mapsto (x, \theta)$ donde x y θ son tales que $\gamma_v(x)$ corta a γ con un ángulo de θ medido en sentido horario. Nos referiremos a estas cartas como *cartas geodésicas*.

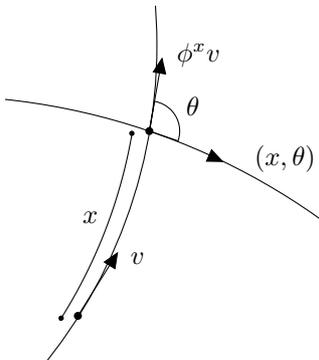


Figura 7: Coordenadas geodésicas basadas en v .

No demostraremos en detalle de que esto define una estructura C^∞ en \mathcal{G} . El hecho clave para ver que el cambio de cartas es C^∞ es que la proyección por el flujo geodésico de vectores basados sobre una geodésica γ_v a una geodésica γ_w es C^∞ ¹.

2.4 Estructuras Sobre T^1S

Damos ahora una breve introducción sobre las estructuras geométricas sobre T^1S que usaremos. Esta sección está basada en los capítulos introductorios de [Pat99].

a Descomposición Horizontal-Vertical y métrica de Sasaki

Descompongamos al espacio tangente del espacio tangente (no unitario) de la siguiente forma: $TTS = H \oplus V$, donde $V_{(x,v)} \cong T_{(x,v)}S$ (al que nos referiremos como *dirección vertical*) consiste en las velocidades correspondientes a dejar un punto base sobre S quieto y mover el vector tangente, y $H_{(x,v)} \cong T_{(x,v)}S$ (que llamaremos *dirección horizontal*) son las velocidades que consisten en moverse

¹Es un hecho conocido, aunque no trivial, que el flujo geodésico es C^∞ .

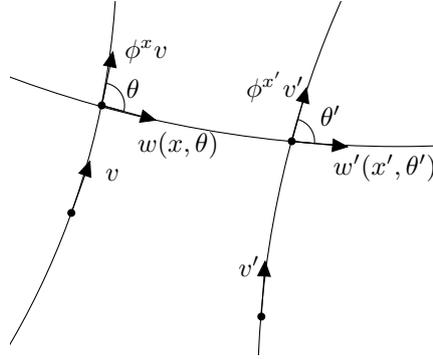


Figura 8: Si parametrizamos los vectores basados γ_v de forma analoga a sus geodésicas, estos varían C^∞ con estas coordenadas. Luego como proyectar a lo largo del flujo geodésico hacia otra geodésica es C^∞ el cambio de cartas también lo es.

sobre la superficie dejando el vector tangente quieto (la idea de dejar el vector tangente “quieto” viene dada por la conexión afin obtenida por la estructura riemanniana).

Formalmente $V = \ker(d\pi)$, siendo π la proyección canónica a la superficie, y $H = \ker(K)$, siendo K el mapa de conexión.

Es decir los vectores tangentes a una curva $(x(t), v(t)) \in TS$ serán $(\dot{x}(t), \nabla_{\dot{x}}v(t))$. Así un vector $\xi \in TTS$ lo identificaremos $\xi = (\xi_H, \xi_V)$.

A su vez podemos definir una estructura riemanniana sobre TS declarando ambas coordenadas como perpendiculares: $\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \langle \xi_H, \eta_H \rangle + \langle \xi_V, \eta_V \rangle$. La métrica así definida se llama *métrica de Sasaki*.

Restringimos a partir de ahora esta descomposición a TT^1S ; observese que esto restringe solo el subespacio V , haciendo que ahora las componentes verticales puedan ser solo las correspondientes a rotaciones en las fibras. Así si $(\xi_H, \xi_V) \in T_{(x,v)}T^1S$ tenemos $\xi_V \perp v$.

Podemos determinar entonces la distancia entre (x, v) y (y, w) de la siguiente forma. Tomamos γ geodésica en S que realiza la distancia d entre x e y . Transportemos paralelamente a v a lo largo de γ obteniendo un vector v' que forma un ángulo ω con w . Entonces

$$d(v, w) = \sqrt{d^2 + \omega^2}.$$

En estas coordenadas el flujo geodésico queda determinado por el campo $G(x, v) = (v, 0)$ ya que por definición, si γ es una geodésica (que se identifica con $(\gamma, \dot{\gamma})$ en T^1S , que es además una geodésica según la métrica de Sasaki), $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$.

b Forma y volumen de Liouville

Definiremos ahora la *forma de contacto de Liouville* como la componente en dirección del flujo, esto es

$$\alpha_{(x,v)}(\xi) = \langle\langle \xi, G(v) \rangle\rangle = \langle \xi_H, v \rangle.$$

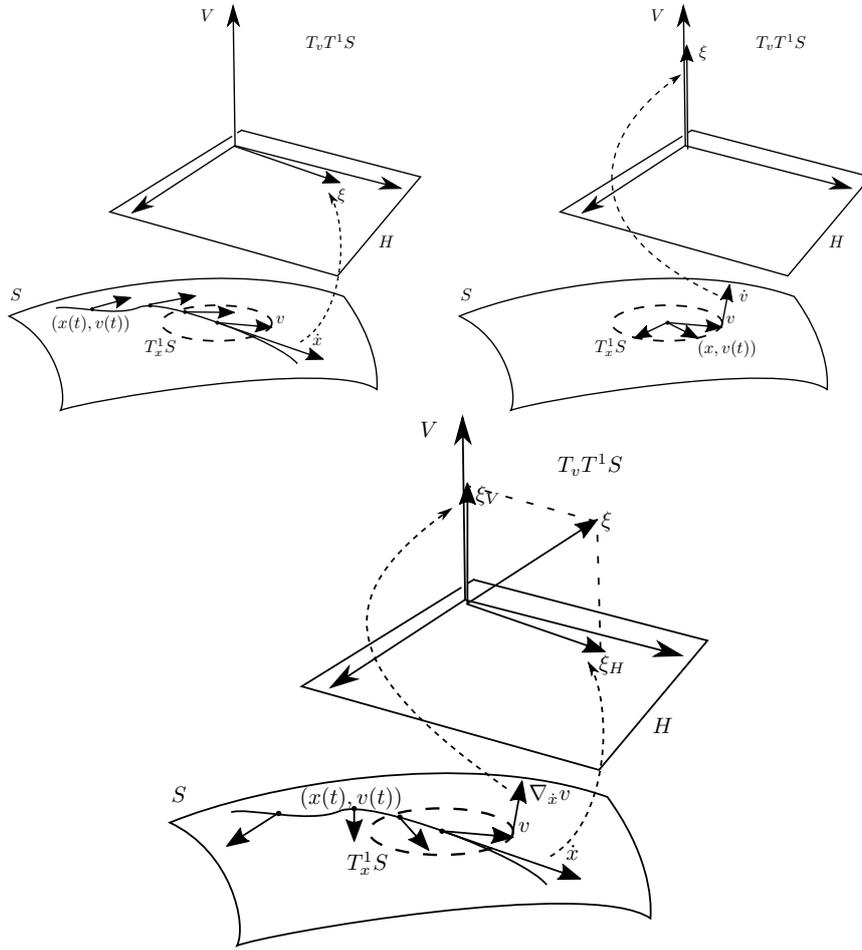


Figura 9: Vectores de $T_v T^1 S$ ilustrados como velocidades de curvas.

Se puede demostrar que, en efecto, esta es una forma de contacto. Esto es lo mismo que decir que $\alpha \wedge d\alpha$ es una forma de volumen, que llamaremos *volumen de Liouville* (veremos este resultado en la proposición 2.8).

Más concretamente podemos calcular $d\alpha$ explícitamente:

$$d\alpha(\xi, \eta) = \langle \xi_V, \eta_H \rangle - \langle \xi_H, \eta_V \rangle.$$

Resulta entonces que el flujo geodésico es el flujo característico de esta forma de contacto, es decir apunta en la dirección de degeneración de $d\alpha$ (esto es $d\alpha(G, \xi) = 0$ para todo $\xi \in TT^1 S$; hecho que es fácil de ver teniendo en cuenta que $\xi_V \perp v$ y es normal según α ($\alpha(G) = 1$). Por ello tanto α como su derivada exterior son invariantes por el flujo geodésico y por ende el volumen de Liouville también lo es.

Integrando el volumen de Liouville obtenemos entonces una medida invariante por el flujo geodésico llamada *medida de Liouville*.

c Caracterizaciones de la forma y el volumen de Liouville

Probaremos el siguiente par de proposiciones que nos serán útiles más adelante además de aportar intuición geométrica sobre el volumen y la forma de Liouville

Proposición 2.8. *El volumen de Liouville es un múltiplo constante de la forma de volumen asociada a la métrica de Sasaki.*

Demostración. Esto es equivalente a decir que evaluar a $\alpha \wedge d\alpha$ sobre una base ortonormal da (a menos del signo) una constante (independiente del plano tangente que observemos).

Elegiremos como base ortonormal sobre $T_{(x,v)}$ a $\{(v, 0), (v^\perp, 0), (0, v^\perp)\}$. Observando que $\alpha((v^\perp, 0)) = \alpha((0, v^\perp)) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha((v, 0), (v^\perp, 0), (0, v^\perp)) &= 3(\alpha((v, 0))d\alpha((v^\perp, 0), (0, v^\perp)) \\ &\quad - \alpha((v, 0))d\alpha((0, v^\perp), (v^\perp, 0))) = 6. \end{aligned}$$

□

Observación 2.9. Se deduce de esta propiedad que el volumen de Liouville es invariante por rotaciones en las fibras de T^1S ya que estas mandan bases ortonormales en bases ortonormales (solo cambian la coordenada vertical preservando su norma).

Las definiciones de direcciones estables e inestables de la siguiente proposición se ven en la sección 2.5.

Proposición 2.10. *La forma de Liouville se caracteriza por valer 1 en la dirección del flujo geodésico y 0 en las direcciones estables e inestables.*

Esta proposición es equivalente a decir que las direcciones estables e inestables son perpendiculares a la dirección del flujo según la métrica de Sasaki.

Demostración. Esto podemos verlo ya que la proyección de las horoesferas basadas en (x, v) (que son justamente las variedades estable e inestables) sobre la base consisten en el límite de esferas geodésicas que pasan por x , haciendo que la coordenada horizontal de sus vectores tangentes sean (en (x, v)) perpendiculares a v ya que él apunta en dirección radial. □

Ejemplo 2.2. En el caso el plano hiperbólico el fibrado tangente queda trivial, de forma que podemos parametrizarlo mediante la siguiente identificación: $T^1\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$. En esta parametrización la métrica de Sasaki consiste solo en agregar la componente de rotación en \mathbb{S}^1

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + d\omega^2.$$

Así el volumen de Liouville en esta parametrización quedará

$$\frac{1}{y^2} dx \wedge dy \wedge d\omega.$$

2.5 Dinámica del Flujo geodésico

La siguiente sección está desarrollada en gran detalle en la monografía de Victoria García [Gar16]. Otra posible referencia para los siguientes temas es [KH95].

a Flujos de Anosov

El flujo geodésico en curvatura negativa pertenece a una familia de flujos de gran riqueza dinámica caracterizados por una expansión/contracción que causa una gran sensibilidad respecto a las condiciones iniciales.

Definición 2.2. Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ un flujo C^1 sobre una variedad riemanniana. Decimos que ϕ^t es un *flujo de Anosov* si TM admite una descomposición $TM = E^c \oplus E^s \oplus E^u$ tal que:

1. La descomposición es continua y ϕ^t -invariante: si $T_x M = E_x^c \oplus E_x^s \oplus E_x^u$ existen, localmente, bases de E_x^j que varían continuamente con x y $D\phi_x^t E_x^j = E_{\phi^t x}^j$ para $j \in \{c, s, u\}$.
2. E^c corresponde a la dirección del flujo: $E_x^c = \langle \dot{\phi}(x) \rangle$.
3. $D\phi^t$ contrae exponencialmente sobre E^s a futuro y sobre E^u a pasado: existen $C > 0$, $\lambda > 0$ tales que

$$\|D\phi^t|_{E_x^s}\| < Ce^{-\lambda t}, \quad \|D\phi^{-t}|_{E_x^u}\| < Ce^{-\lambda t}$$

para todos $x \in M$ y $t > 0$.

A los subespacios E^s y E^u se les llaman *direcciones estables e inestables* y pueden ser integradas de forma de conseguir variedades estables e inestables.

Teorema 2.11 (Variedad Estable). *Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ flujo de Anosov. Entonces para todo $x \in M$ existe $\mathcal{W}^{ss}(x) \subset M$ subvariedad C^1 inmersa tal que $T_x \mathcal{W}^{ss}(x) = E_x^s$. Además*

$$\mathcal{W}^{ss}(x) = \left\{ y \in M \mid d(\phi^t x, \phi^t y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \right\}$$

donde la convergencia es, además, exponencial.

Análogamente se tiene un teorema de la variedad inestable que nos da una variedad $\mathcal{W}^{su}(x)$ donde las distancias se contraen a pasado. A las variedades \mathcal{W}^{ss} y \mathcal{W}^{su} se les llaman *variedades estables e inestables fuertes* (o, a veces, solo variedades estables e inestables y se las denota \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u).

Podemos también definir las *variedades centro-estable y centro-inestables*: $\mathcal{W}^{cs}(x) = \phi^{\mathbb{R}}(\mathcal{W}^{ss}(x))$ (análogamente \mathcal{W}^{cu}). Obsérvese que estas variedades coinciden con las hojas de la foliación definida en la sección 2.2.

Se puede ver además que estas variedades forman foliaciones C^1 en la variedad M .

Otro hecho clave de los flujos de Anosov es la densidad de las órbitas periódicas. En cierto sentido el teorema de Otal gira al rededor de dicha densidad, dado que nos permitirá leer la información del espectro de largo en cualquier lugar de la superficie forzando una rigidez sobre su geometría.

Para enunciar apropiadamente esta densidad daremos la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ un flujo suave sobre una variedad riemanniana y $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable

- Decimos que c es una ϵ -pseudo órbita si $\|\dot{c}(t) - \dot{\phi}^t x\| < \epsilon$ para todo t .

- Decimos que c es δ -sombreada por la órbita de x si existe $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $1 - \delta < s'(t) < 1 + \delta$ para todo t tal que $d(c(s(t)), \phi^t x) < \delta$ para todo t .

Teorema 2.12 (Shadowing Lemma). *Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ flujo de Anosov. Entonces para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ -pseudo órbita es δ -sombreada por una órbita de verdad.*

Además, si δ es suficientemente chico, si la pseudo órbita es periódica entonces la órbita que la sombrea también lo es.

Como consecuencia de este lema podemos “cerrar” las órbitas recurrentes (dado δ existe ϵ tal que si $d(x, \phi^T x) < \epsilon$ entonces la órbita entonces $\phi^t x|_{[0, T]}$ es δ -sombreada por una órbita periódica).

b El flujo geodésico como flujo de Anosov

Teorema 2.13. *Sea S una superficie riemanniana cerrada de curvatura negativa. Entonces su flujo geodésico $\phi^t : T^1 S \rightarrow T^1 S$ es Anosov.*

Donde estamos pensando a $T^1 S$ con la métrica de Sasaki. De todas formas, pese a su definición basada en la métrica, se puede ver que, en el caso compacto, el hecho de que un flujo sea Anosov es en realidad una propiedad topológica. Es decir que un flujo sea de Anosov es invariante por cambios en la métrica de la variedad y por cambios de tiempos en el flujo.

Teniendo en cuenta esta observación podemos dar una idea de la demostración del teorema. No es difícil pasar del ejemplo 2.3 que haremos en breve a una demostración de que el flujo geodésico en superficies hiperbólicas es Anosov. Por otro lado en la sección 3.1 mostraremos una equivalencia topológica entre los flujos geodésicos en curvatura negativa que nos permitirá concluir el teorema.

En el caso del flujo geodésico podemos dar una noción de la “forma” de las variedades estables e inestables en $T^1 \tilde{S}$. Dado $v \in T^1 \tilde{S}$ sea $B_T = \{w \in T^1 \tilde{S} \mid \gamma_w(T) = \gamma_v(T)\}$ (la esfera geodésica de radio T sobre \tilde{S} con sus respectivos vectores apuntando en dirección radial que contiene a v). Entonces B_T converge a $\mathcal{W}^{ss}(v)$ con $T \rightarrow +\infty$ y a $\mathcal{W}^{su}(v)$ con $T \rightarrow -\infty$. Esta convergencia es de hecho C^1 en el sentido de que podemos parametrizar las superficies en cuestión de forma que las parametrizaciones converjan en la topología C^1 sobre compactos (ver [Bal12]). Por este hecho, en este caso llamamos a las variedades estables e inestables *horoesferas*.

Ejemplo 2.3. Veamos en el caso hiperbólico quienes son las variedades estables. En virtud de la transitividad de las isometrías bastará verlas sobre un punto, digamos el (i, i) en el modelo del plano hiperbólico.

Sabemos que el flujo en (i, i) será la geodésica vertical $\phi^t(i, i) = (e^t i, e^t i)$ y por lo tanto converge a ∞ . De forma que las geodésicas que convergen a ella será las demás geodésicas verticales. Veamos entonces que

$$\mathcal{W}^{ss}(i, i) = \{\text{Im}z = 1\} \times \{i\} = \{(r + i, i) \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Dado que $z \mapsto z + r$ es isometría de \mathbb{H}^2 el flujo geodésicos en esos puntos será $\phi^t(r + i, i) = (r + e^t i, e^t i)$. Para ver la contracción exponencial, si $\gamma : [0, r] \rightarrow \mathbb{H}^2$ es $\gamma(s) = (s + e^t i, e^t i)$, vemos que $d((e^t i, e^t i), (r + e^t i, e^t i)) \leq \ell(\gamma)$.

Entonces $\dot{\gamma}(s) = (1, \nabla_1 e^t i) = (1, e^t \nabla_1 i) = (1, e^t \frac{1}{e^t}) = (1, 1)$ y por ello $\|\dot{\gamma}(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{e^t}$ así que $\ell(\gamma) = \int_0^r \frac{\sqrt{2}}{e^t} ds = \frac{\sqrt{2}r}{e^t}$. Finalmente concluimos $d(\phi^t(i, i), \phi^t(r + i, i)) \leq \frac{\sqrt{2}r}{e^t}$ con lo que tenemos la contracción exponencial.

Como las horoesferas que conservaran trivialmente por isometrías notamos que ellas son siempre circuncerencias tangentes al borde. Por otro lado podemos ver que en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ las horoesferas corresponden a las órbitas por multiplicación a derecha del subgrupo $\left\{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

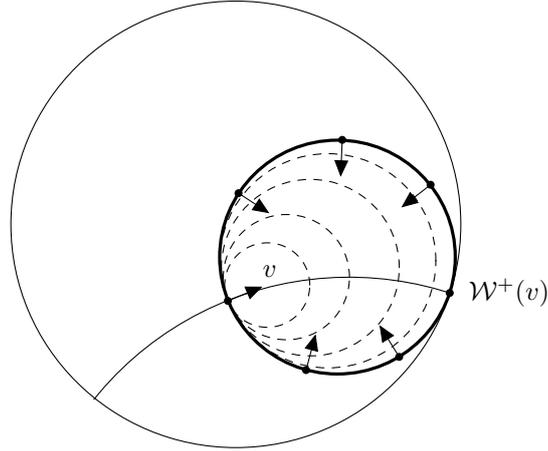


Figura 10: Horoesfera basada en v vista como límite de esferas geodésicas

c Ergodicidad del flujo geodésico

Otra propiedad relevante del flujo geodésico es su ergodicidad respecto a la medida de Liouville que introducimos en la sección 2.4 (la cual tiene la particularidad de ser positiva en abiertos).

A grandes rasgos la ergodicidad quiere decir que la medida solo ve un gran bloque para la dinámica, es decir no distingue piezas invariantes. Una formulación equivalente es que cualquier dato que pueda leer la medida puede ser leído desde casi cualquier órbita (ver teorema de Birkhoff más abajo).

Proposición 2.14. *El flujo geodésico ϕ^t en una superficie S cerrada de curvatura negativa es ergódico respecto a su medida de Liouville λ . Es decir, si $A \subset T^1S$ con $\phi^t(A) = A$ para todo t entonces $\lambda(A) = 0$ o 1 .*

Dos consecuencias de este hecho que gozará el flujo geodésico son las siguientes (el primero es consecuencia del teorema de recurrencia de Poincaré).

Proposición 2.15. *Dado $\phi^t : M \rightarrow M$ flujo sobre una variedad ergódico respecto a una medida λ positiva sobre abiertos entonces λ -c.t.p $x \in M$ tiene órbita densa. En particular ϕ^t es transitivo.*

Teorema 2.16 (Birkhoff). *Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ flujo sobre una variedad ergódico para una medida finita λ . Entonces para toda f integrable y λ -c.t.p. $x \in M$ se tiene*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t x) dt = \frac{1}{\lambda(M)} \int_M f(y) d\lambda(y)$$

3 Parte I: El Espectro de Longitudes Determina el Flujo Geodésico

Enfocándonos ahora en el teorema de Otal. ¿Qué nos dice el espectro de longitudes sobre el flujo geodésico de una superficie? La respuesta (como cabría esperar si tenemos la expectativa de que nos diga todo sobre la geometría) es que nos dice todo:

Teorema 3.1. *Sean S y S' superficies riemannianas cerradas orientables de igual género y curvatura negativa con el mismo espectro marcado de longitudes entonces sus flujos geodésicos son conjugados.*

Este teorema es verdad en dimensión más grande y no es difícil generalizar los argumentos aquí usados para probarlo.

Demostraremos antes que tenemos una conjugación de órbitas, hecho que depende solo de que las superficies tengan curvatura negativa y no de que tengan el mismo espectro de largo. En el apéndice B se ve que podemos asumir que dicha conjugación posee ciertas regularidades que necesitaremos por motivos técnicos a la hora de obtener la conjugación de flujos.

3.1 Conjugación de Órbitas Entre Superficies de Curvatura Negativa

Seamos más específicos en lo que buscamos en una conjugación de órbitas.

Definición 3.1. Sean $\phi^t : M \rightarrow M$ y $\psi^t : M' \rightarrow M'$ flujos sobre variedades riemannianas. Decimos que $h_0 : M \rightarrow M'$ es una *conjugación de órbitas* si es un homeomorfismo que respeta las órbitas de los flujos y que a su vez es un homeomorfismo creciente quasi-isométrico sobre las órbitas.

Esto último quiere decir que existen $\lambda, \epsilon > 0$ tales que si $h(\phi^t x) = \psi^s h(x)$ entonces

$$\frac{1}{\lambda}t - \epsilon \leq s \leq \lambda t + \epsilon. \quad (1)$$

Teorema 3.2. *Sean S y S' superficies riemannianas cerradas orientables de igual género y curvatura negativa. Entonces existe $h_0 : T^1 S \rightarrow T^1 S'$ conjugación de órbitas entre sus flujos geodésicos*

Tomemos $f : S \rightarrow S'$ un homeomorfismo (que podemos asumir que respeta el marcado de las clases de homotopía libre). Nuestro objetivo será, a partir de $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$, construir una conjugación de órbitas π_1 -invariante entre los flujos en los cubrimientos universales.

Este será nuestro esquema de demostración:

- Vía el lema de Švarc-Milnor podemos ver que \tilde{f} es una quasi-isometría.
- Por el lema de Morse \tilde{f} induce un homeo entre el espacio de geodésicas.
- Construimos la conjugación primero mandando (x, v) a la proyección de $\tilde{f}(x)$ a $\tilde{f}(\gamma_v)$ y luego promediando sobre las órbitas.

a El lema de Švarc-Milnor

El lema de Švarc-Milnor nos dice que $\pi_1(S)$ es quasi-isométrico a \tilde{S} vía el mapa $g \mapsto g \cdot x_0$ para algún x_0 fijo.

Exponer los conceptos necesarios para entender el enunciado y poder aplicarlo es en realidad más trabajo del necesario, de forma que demostraremos directamente lo que necesitamos. La demostración es esencialmente la misma que la del lema de Švarc-Milnor, la cual se puede encontrar en [BH99].

Proposición 3.3. *Sea $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ levantado de un homeo $f : S \rightarrow S'$. Entonces \tilde{f} es una quasi-isometría.*

Antes de meternos con las cuentas cabe aclarar cual es la idea. La órbita de un dominio fundamental por el π_1 forma un teselado con una grilla asociada. La idea es que la distancia entre dos puntos estará casi en proporción con el tamaño del camino sobre la grilla que una sus dominios fundamentales.

Así cabría de esperar que λ fuese la proporción de los diámetros entre los dominios fundamentales y ϵ la suma de estos diámetros (no serán estos a los números exactos que llegaremos, pero esta es la idea).

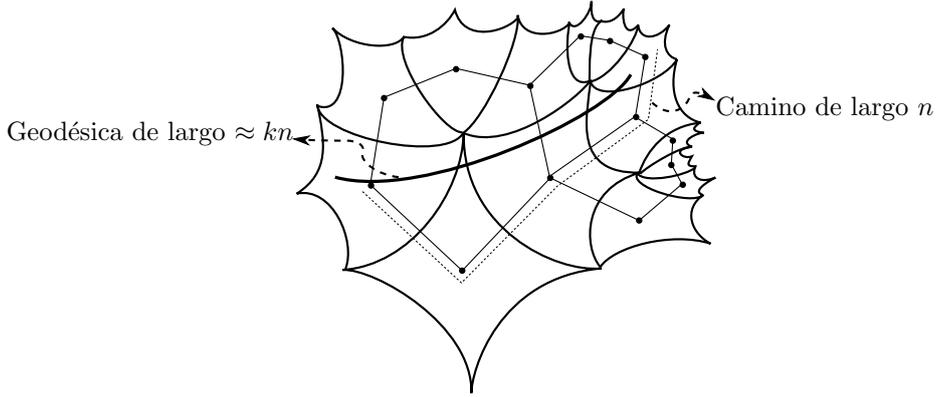


Figura 11: La distancia entre dominios fundamentales tendrá cotas tipo quasi-isometría en relación a la cantidad de elementos de un generador que se necesite para ir de un dominio fundamental al otro.

Demostración. Sea C un dominio fundamental de \tilde{S} y fijemos $x_0 \in C$. Notemos que entonces $\tilde{f}(C)$ es un dominio fundamental para \tilde{S}' . Sea $D = \max\{\text{diam}(C), \text{diam}(\tilde{f}(C))\}$.

Sean $\Gamma = \pi_1(S) = \pi_1(S')$ y $\mathcal{A} = \{g \in \Gamma \mid d(g \cdot x_0, x_0) \leq 3D\}$. No es difícil ver entonces que \mathcal{A} es un generador de Γ .

Inductivamente vemos que podemos llegar a cualquier elemento de $\Gamma \cdot x_0 \cup B(x_0, nD)$ con puntos de $\langle \mathcal{A} \rangle \cdot x_0$. El paso inductivo se concluye de que, dado $g \cdot x_0 \in B(x_0, (n+1)D)$, $B(x_0, nD) \cup B(g \cdot x_0, 3D)$ contiene una bola de radio D , por ello contiene un dominio fundamental y finalmente contiene un elemento de $\langle \mathcal{A} \rangle \cdot x_0$.

Definimos $\ell_{\mathcal{A}}(g) = \min\{n \mid a_1 a_2 \dots a_n = g \text{ con } a_i \in \mathcal{A}\}$. Nuestro objetivo es conseguir cotas superiores e inferiores para $d(x_0, g \cdot x_0)$ y $d(\tilde{f}(x_0), g \cdot \tilde{f}(x_0))$ en función de $\ell_{\mathcal{A}}(g)$.

Si tomamos $\mu = \min\{d(a \cdot y, y) \mid a \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}, y \in \{x_0, \tilde{f}(x_0)\}\}$ y usando desigualdad triangular conseguimos

$$d(x_0, g \cdot x_0) \leq \mu \ell_{\mathcal{A}}(g), \quad d(\tilde{f}(x_0), g \cdot \tilde{f}(x_0)) \leq \mu \ell_{\mathcal{A}}(g). \quad (2)$$

Tomemos γ geodésica (de velocidad 1) que une a x_0 y a $g \cdot x_0$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(nD + r) = g \cdot x_0$ con $0 \leq r < D$. Es fácil ahora construir una sucesiones $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Gamma$ y $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = g \cdot x_0 \in \tilde{S}$ tal que $a_i \cdot x_i = x_{i+1}$ y $d(x_i, \gamma(iD)) < D$.

De este forma concluimos que $\ell_{\mathcal{A}}(g) \leq n + 1 = \frac{1}{D}d(x, g \cdot x) - \frac{r}{D} + 1 \leq \frac{1}{D}d(x, g \cdot x) + 1$. Disponemos a su vez del mismo resultado para \tilde{S}' .

$$\ell_{\mathcal{A}}(g) \leq \frac{1}{D}d(x_0, g \cdot x_0) + 1, \quad \ell_{\mathcal{A}}(g) \leq \frac{1}{D}d(\tilde{f}(x_0), g \cdot \tilde{f}(x_0)) + 1. \quad (3)$$

Juntando ahora (2) y (3) obtenemos

$$\underbrace{\frac{D}{\mu}}_{\frac{1}{\lambda}} d(x_0, g \cdot x_0) - D \leq d(\tilde{f}(x_0), g \cdot \tilde{f}(x_0)) \leq \underbrace{\frac{\mu}{D}}_{\lambda} d(x_0, g \cdot x_0) + \mu$$

y el resultado sigue siendo verdad si cambiamos x_0 por $g_1 \cdot x_0$ y a $g \cdot x_0$ por $g_2 \cdot x_0$ ya que Γ actúa por isometrías.

Ahora si $x, y \in \tilde{S}$ son cualesquiera, y teniendo en cuenta que se puede aproximar a cualquier punto de \tilde{S} y de \tilde{S}' por puntos de $\Gamma \cdot x_0$ y $\Gamma \cdot \tilde{f}(x_0)$ con un error de D (y además los elementos de aproximación pueden tomarse invariantes por \tilde{f}) tenemos

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq d(g_1 \cdot \tilde{f}(x_0), g_2 \cdot \tilde{f}(x_0)) + 2D \leq \lambda d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) + \mu + 2D \\ &\leq \lambda d(x, y) + \underbrace{\mu + (2\lambda + 2)D}_{\epsilon_1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\geq d(g_1 \cdot \tilde{f}(x_0), g_2 \cdot \tilde{f}(x_0)) - 2D \geq \frac{1}{\lambda} d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) - 3D \\ &\geq \lambda d(x, y) - \underbrace{\left(\frac{2}{\lambda} + 3\right)D}_{\epsilon_2} \end{aligned}$$

Tomando el máximo entre ϵ_1 y ϵ_2 se concluye el resultado. \square

b Demostración del Teorema 3.2

Demostración. Por las proposiciones 2.7 y 3.3 \tilde{f} induce un homeomorfismo en el borde y por ello induce un homeomorfismo $\tilde{f} : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$ entre los espacios de geodésicas.

Consideremos $\hat{h} : T^1S \rightarrow T^1S'$ construido de la siguiente forma. Dado $(x, v) \in T^1S$, sea $\gamma' = \tilde{f}(\gamma_v)$. Proyectemos $\tilde{f}(x)$ a γ' de forma normal (digamos que se proyecta a $\gamma'(0)$). Entonces $(x, v) \mapsto (\gamma'(0), \dot{\gamma}'(0))$.

Del hecho de que \tilde{f} es quasi-isometría y de que $\tilde{f} \circ \gamma$ y $\tilde{f}(\gamma)$ esten a distancia de Hausdorff uniformemente acotada (por lemma de Morse: teorema 2.6) se ve que \hat{h} cumple la desigualdad (1) para algún λ, ϵ . También es fácil ver que es π_1 -invariante.

El problema es que \hat{h} no tiene por que ser un homeomorfismo sobre las órbitas.

Sabemos que $\hat{h}(\phi^t v) = \phi^{\alpha(v,t)} \hat{h}(v)$. Promediando $\alpha(v,t)$ en un intervalo apropiado podremos conseguir la inyectividad a lo largo de la órbita. Sabemos, por desigualdad (1), que existe $c > 0$ tal que $\alpha(v, t+c) > \alpha(v, t)$.

Sea $\beta(v) = \frac{1}{c} \int_0^c \alpha(v, t) dt$. Nuestra conjugación de órbitas será $h_0(v) = \psi^{\beta(v)} \hat{h}(v)$. Para ver esto notamos que $h_0(\phi^t v) = \psi^{\beta(\phi^t v)} \hat{h}(\phi^t v) = \phi^{\beta(\phi^t v) + \alpha(v,t)} \hat{h}(v)$, así que la monotonía es equivalente a mostrar $\beta(\phi^t v) + \alpha(v, t) > \beta(v)$ cada vez que $t > 0$.

$$\begin{aligned} \beta(\phi^t v) + \alpha(v, t) - \beta(v) &= \frac{1}{c} \int_0^c \underbrace{\alpha(\phi^t, s) + \alpha(v, t)}_{=\alpha(v, s+t)} ds - \frac{1}{c} \int_0^c \alpha(v, s) ds \\ &= \frac{1}{c} \int_0^c \alpha(v, s) ds - \frac{1}{c} \int_0^t \alpha(v, s) ds > 0 \end{aligned}$$

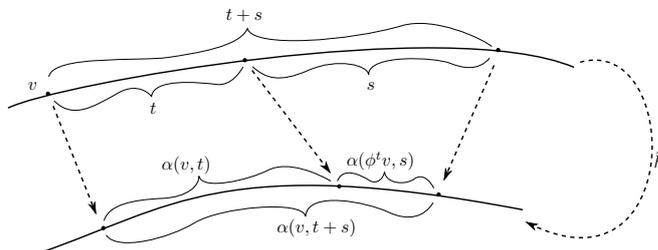


Figura 12: $\alpha(\phi^t v, s) + \alpha(v, t) = \alpha(v, t+s)$

□

3.2 La Conjugación de Flujos

A partir de ahora la demostración será similar a la de [KH95, teorema 19.2.9]. Dicho teorema es exclusivamente dinámico y por ello más general que el teorema 3.1. Así la geometría ya jugo su rol en esta demostración al darnos la hiperbolicidad, transitividad y conjugación de órbitas de los flujos geodésicos. Entonces la conclusión del teorema 3.1 será verdad solo con esas tres hipótesis.

Ahora queremos mejorar esta conjugación de órbitas para hacerla una conjugación de flujos. Hasta ahora tenemos que $h_0(\phi^t v) = \psi^{\alpha(v,t)} h_0(v)$. Para corregir α de forma de obtener una conjugación de flujos buscaremos una solución $\beta : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación cohomológica $\alpha(v, t) - t = \beta(\phi^t v) - \beta(v)$.

¿Cuándo este tipo de ecuaciones admiten soluciones? Una primera restricción es la dada por las periódicas. Si dicha solución existe y $v = \phi^T v$ estamos

obligados a que $\alpha(v, T) - T = 0$. Esta restricción no será problema gracias a que ambas superficies tienen el mismo espectro de longitudes. El teorema de Livschitz nos dice que para flujos de Anosov esta es prácticamente la única restricción para resolver estas ecuaciones.

Teorema 3.4 (Livschitz). *Sea $\phi^t : M \rightarrow M$ un flujo de Anosov sobre una variedad riemanniana cerrada y $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder tal que para todo x con $v = \phi^T x$ se tiene $\int_0^T g(\phi^t x) dt = 0$.*

Entonces existe $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \frac{d}{dt} G(\phi^t x)|_{t=0}$$

El teorema es, en realidad, más general que el aquí enunciado y es verdad también para difeomorfismos. Su demostración se puede encontrar en [KH95, sección 19.2].

Para poder aplicar este teorema necesitaríamos que α (o más bien su derivada en la segunda coordenada) fuera Hölder. Podemos asumir, en efecto, esta regularidad (lema B.1 en el apéndice).

Demostración del teorema 3.1. Por lema B.1 sabemos que $g(v) = \frac{d}{dt} \alpha(v, t)|_{t=0} - 1$ es Hölder. Además, si $v = \phi^T v$,

$$\begin{aligned} \int_0^T g(\phi^t v) dt &= \int_0^T \frac{d}{ds} \alpha(\phi^t v, s)|_{s=0} - 1 dt \\ &= \int_0^T \frac{d}{ds} \alpha(v, s)|_{s=t} - 1 dt \\ &= \alpha(v, T) - T = 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque ψ^t y ϕ^t tienen los mismos periodos en sus órbitas periódicas por tener las superficies el mismo largo de espectro marcado de forma que $\psi^{\alpha(v, T)} h_0(v) = h_0(\phi^T v) = h_0(v)$.

Entonces estamos en condiciones de usar el teorema de Livschitz con lo que obtenemos β tal que $\frac{d}{dt} \alpha(v, t)|_{t=0} - 1 = \frac{d}{dt} \beta(\phi^t v)|_{t=0}$ e, integrando, $\alpha(v, t) - t = \beta(\phi^t v) - \beta(v)$.

Si definimos $h_1 : T^1 S' \rightarrow T^1 S'$ como $h_1(h_0(v)) = \psi^{\beta(v)} h_0(v)$ tenemos entonces $h_1 \circ h_0(\phi^t v) = \psi^{\beta(\phi^t v)} h_0(\phi^t v) = \psi^{\beta(\phi^t v) + \alpha(v, t)} h_0(v) = \psi^{t + \beta(v)} h_0(v) = \psi^t h_1 \circ h_0(v)$ \square

4 Parte II: El Flujo Geodésico Determina la Corriente de Liouville

a La corriente de Liouville

A las medidas de Radón π_1 -invariantes sobre el espacio de geodésicas se les llama *corrientes geodésicas*. Nuestro interés se enfocará en una corriente geodésica en particular que se construye naturalmente a partir del volumen de Liouville llamada *corriente de Liouville*.

Esta corriente será clave en nuestra demostración pues veremos que, en cierto sentido, el espectro marcado de longitudes determina a la corriente de Liouville, que a su vez determina la estructura riemanniana de una superficie.

Definiremos la corriente de Liouville m de la siguiente forma. Sea $\Sigma \subset T^1\tilde{S}$ una superficie compacta orientada transversa (fuera de su borde) al flujo geodésico, llamaremos \mathcal{G}_Σ al conjunto de geodésicas que cortan positivamente a Σ . Entonces

$$m(\mathcal{G}_\Sigma) = \left| \int_\Sigma d\alpha \right|.$$

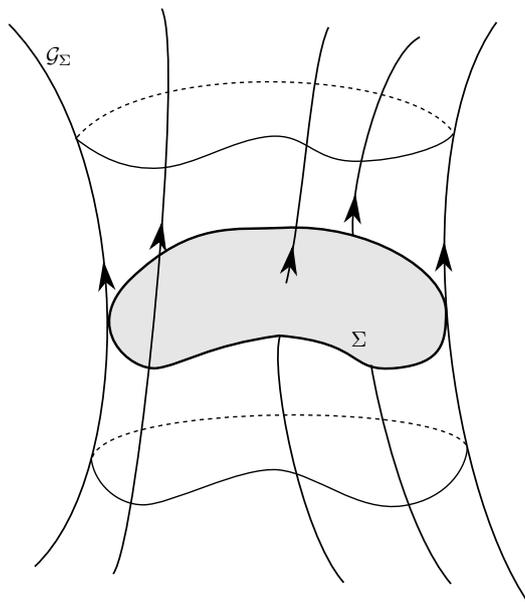


Figura 13: El conjunto \mathcal{G}_Σ visto desde T^1S

No es difícil ver que, en caso de m estar bien definida, esta medida se extenderá a toda la σ -álgebra de Borel y es π_1 -invariante (ya que α está definida a partir de la métrica que es π_1 -invariante).

Para ver que m está bien definida consideremos Σ y Σ' dos superficies transversas (que podemos suponer que no se cortan, por ejemplo haciendo fluir una de las dos un tiempo suficientemente grande por el flujo) tales que $\mathcal{G}_\Sigma = \mathcal{G}_{\Sigma'}$. Estas superficies forman un cilindro geodésico con ellas como tapas y con una superficie Ω como cara lateral (donde Ω contendrá a la dirección del flujo y por

lo tanto $d\alpha$ se anula sobre ella). Usando el teorema de Stokes obtenemos:

$$0 = \int_R dd\alpha = \int_{\Sigma \cup -\Sigma' \cup \Omega} d\alpha = \int_{\Sigma} d\alpha - \int_{\Sigma'} d\alpha$$

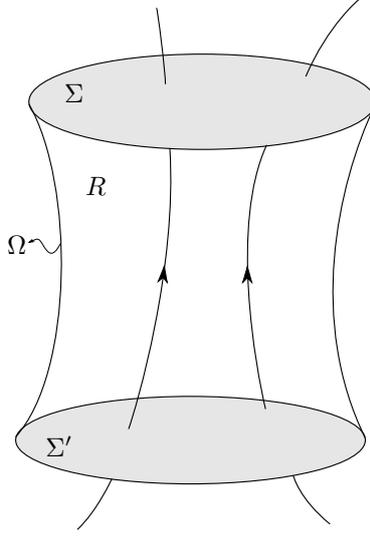


Figura 14: $d\alpha$ integra lo mismo en superficies transversas que cortan al mismo conjunto de geodésicas.

Daremos a continuación dos caracterizaciones de la corriente de Liouville. La primera será dinámica, de forma que nos permitirá ver que la conjugación de flujos h preserva las respectivas corrientes de Liouville. La segunda será más bien geométrica y será necesaria para terminar estableciendo una igualdad geométrica entre las superficies.

b Caracterización dinámica de la corriente de Liouville

Sea $[b_1, b_2] \times [a_1, a_2] \subset \mathcal{G}$ un rectángulo geodésico tel que $[b_1, b_2] \cap [a_1, a_2] = \emptyset$. Sea $v \in (b_1, a_1)$ (es decir, vector sobre la geodésica que comienza en b_1 y termina en a_1).

De la forma que se ve en la figura 15 se proyecta v a lo largo de horoesferas primero hacia (b_1, a_2) , luego a (b_2, a_2) , después a (b_2, a_1) y finalmente de nuevo a (b_1, a_1) obteniendo un vector $w = \phi^s v$.

Proposición 4.1. *Dada la construcción de arriba se tiene $m([b_1, b_2] \times [a_1, a_2]) = |s|$.*

Demostración. Podemos construir Σ superficie transversa al flujo que tenga como borde los segmentos de horoesferas que se recorren durante las proyecciones y el segmento geodésico que une a v y a w (ver figura 16). Luego se concluye la demostración a partir del teorema de Stokes:

$$m([b_1, b_2] \times [a_1, a_2]) = \left| \int_{\Sigma} d\alpha \right| = \left| \int_{\partial\Sigma} \alpha \right|$$

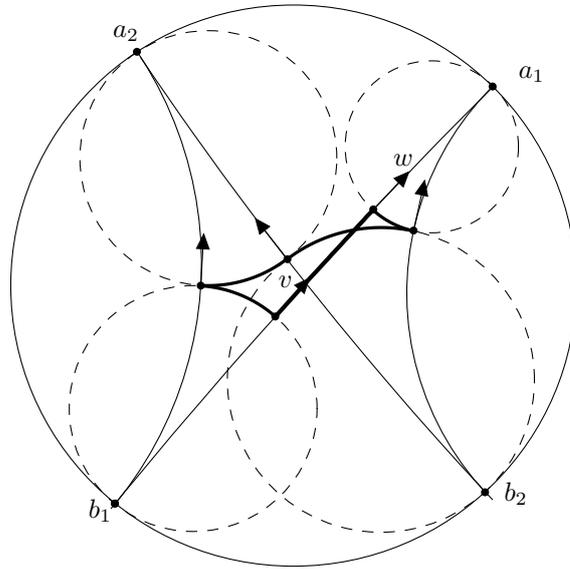


Figura 15: El vector v se proyecta sucesivamente a lo largo de horoesferas hacia las geodésicas vértices del rectángulo hasta volver a la geodésica original.

y, teniendo en cuenta que por proposición 2.10 la forma α vale 0 en dirección de las horoesferas y 1 en dirección del flujo, el último termino vale $|s|$.

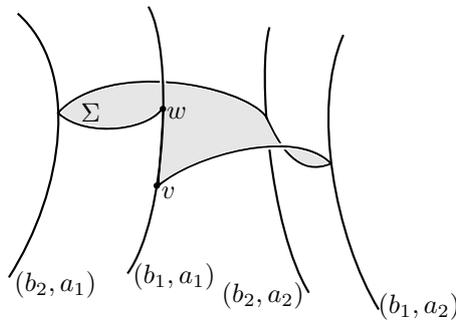


Figura 16: La superficie Σ donde se va a integrar.

□

Corolario 4.2. Sean S y S' superficies cerradas riemannianas con m y m' sus respectivas corrientes de Liouville.

Si $h : T^1 S \rightarrow T^1 S'$ es una conjugación de flujos y consideramos el morfismo $h : \mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S')$ inducido por la conjugación. Entonces $m' = h^* m$.

Demostración. Dado que h preserva obviamente las horoesferas y la distancia entre v y w , $m' = h^* m$ sobre los rectángulos geodésicos. No es difícil de ver que el álgebra de uniones finitas de rectángulos geodésicos genera la σ -álgebra de Borel, de forma que la tesis se extiende a la misma. □

En cierto sentido, teniendo en cuenta la proposición 3.1, hemos demostrado que el espectro de longitudes determina la corriente de Liouville.

En su demostración original Otal demuestra de forma directa que el espectro de longitudes determina la corriente de Liouville, usando solo la conjugación de órbitas y no la conjugación de flujos. Más aún, él muestra que una corriente geodésica cualquiera queda determinada por lo que se llama *número de intersección* con las clases de conjugación del π_1 (en el caso de la corriente de Liouville, el número de intersección coincidirá con el espectro de longitud de la clase de conjugación).

c Caracterización geométrica de la corriente de Liouville

Proposición 4.3. *En cartas geodésicas la corriente de Liouville tiene la forma*

$$dm(x, \theta) = \sin \theta dx d\theta.$$

Demostración. Trabajaremos en \mathcal{G}_v con su respectiva carta geodésica. Sea Σ una superficie de vectores w basados en γ_v “bien” orientados respecto de γ_v (es decir, tales que $\{w, \dot{\gamma}_v\}$ forman una base positiva), la cual parametrizaremos con $g : U \subset \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \Sigma \subset T^1 \tilde{S}$ de forma análoga a las geodésicas de \mathcal{G}_v .

$$\int_{\mathcal{G}_\Sigma} dm(x, \theta) = \int_{\Sigma} d\alpha = \int_U g^* d\alpha$$

Se tiene que $\mathcal{G}_\Sigma = U$ como subconjuntos de $\mathbb{R} \times (0, \pi)$. Así que basta probar que $g^* d\alpha = \sin \theta dx d\theta$.

Llamemos $\theta \cdot w$ a la rotación en sentido horario de w sobre su fibra.

- $Dg_{(x, \theta)}(1, 0) = (\dot{\gamma}_v(x), 0)$ ya que la coordenada velocidad de la curva $g(t, \theta) = (\gamma_v(t), -\theta \cdot \dot{\gamma}_v(t))$ está siendo transportada paralelamente.
- $Dg_{(x, \theta)}(0, 1) = (0, (\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \dot{\gamma}_v(x))$ dado que $g(x, \vartheta) = (\gamma_v(x), \vartheta \cdot \dot{\gamma}_v(x))$ es una rotación sobre la fibra parametrizada por longitud de arco.

De allí concluimos

$$\begin{aligned} g^* d\alpha((1, 0), (0, 1)) &= d\alpha((\dot{\gamma}_v(x), 0), (0, (\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \dot{\gamma}_v(x))) \\ &= -\langle \dot{\gamma}_v(x), (\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \dot{\gamma}_v(x) \rangle \\ &= -\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin \theta. \end{aligned}$$

□

5 Parte III: La Corriente de Liouville determina la Geometría

Hasta ahora disponemos de una conjugación h entre los flujos geodésicos que además preserva la corriente de Liouville. Esta h es apenas un homeomorfismo entre los tangentes unitarios y no hay ningún motivo por el cuál se deba proyectar a un homeomorfismo entre las superficies. Más aún esto es falso, por ejemplo si h' fuese un homeomorfismo entre los tangentes unitarios con estas condiciones que se proyecta a un homeomorfismo entre las superficies entonces $h = \psi^t \circ h'$ también tiene todas las mismas condiciones y sin embargo hace “explotar” los puntos, de forma que no se puede proyectar a las superficies. Este problema es en realidad menor y nos concentraremos ahora en otro problema: la conservación de ángulos.

a Función de ángulo deformado puntual

Sea $v \in T^1S$ y $\theta \in [0, \pi]$, nuevamente definimos $\theta \cdot v$ como la rotación de ángulo θ sobre la fibra de v en sentido horario.

Podemos ver que las geodésicas $\tilde{h}(\gamma_v)$ y $\tilde{h}(\gamma_{\theta \cdot v})$ se cortan ya que dos geodésicas se cortan si y solo si sus respectivos extremos sobre el borde están alternados, pero $\tilde{h} : \partial S \cong \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial S' \cong \mathbb{S}^1$ actúa como un homeomorfismo, de forma que preserva los ordenes de los puntos. Así definimos $\theta'(\theta, v)$ como el ángulo formado entre estas dos geodésicas, es decir el ángulo al cual se deforma un ángulo de θ sobre v .

Nuestro objetivo será probar que $\theta'(\theta, v) = \theta$.

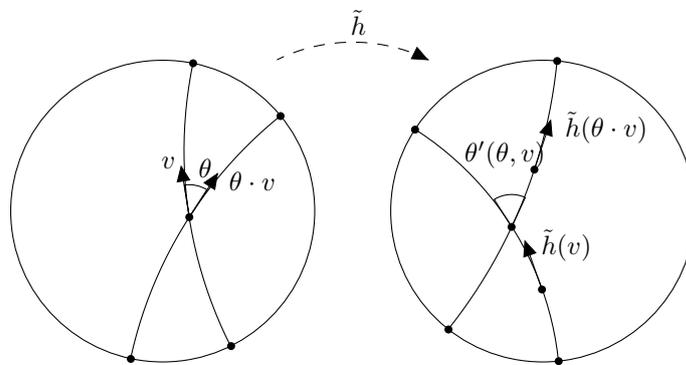


Figura 17: Construcción de θ' .

Un par de observaciones sencillas sobre θ' son

- θ' es continua,
- $\theta'(0, v) = 0$ y $\theta'(\pi, v) = \pi$.

b Función de ángulo deformado medio

Disponemos de mejores herramientas para trabajar con promedios que sobre cosas puntuales, de forma que definiremos

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} \theta'(\theta, v) d\lambda(v)$$

y nos propondremos probar que $\Theta'(\theta) = \theta$

Proposición 5.1. Θ' es un homeo superaditivo: para $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ con $\theta_1 + \theta_2 \in [0, \pi]$ tenemos $\Theta'(\theta_1) + \Theta'(\theta_2) \leq \Theta'(\theta_1 + \theta_2)$

Demostración. Podemos ver que esta propiedad se cumple puntualmente en el siguiente sentido: viendo el dibujo y notando el hecho de que, gracias al teorema de Gauss-Bonnet, los ángulos internos de un triángulo geodésico en curvatura negativa suman menos que π tenemos $\theta'(\theta_1, v) + \theta'(\theta_2, \theta_1 \cdot v) + (\pi - \theta'(\theta_1 + \theta_2, v)) \leq \pi$ de donde se despeja

$$\theta'(\theta_1, v) + \theta'(\theta_2, \theta_1 \cdot v) \leq \theta'(\theta_1 + \theta_2, v).$$

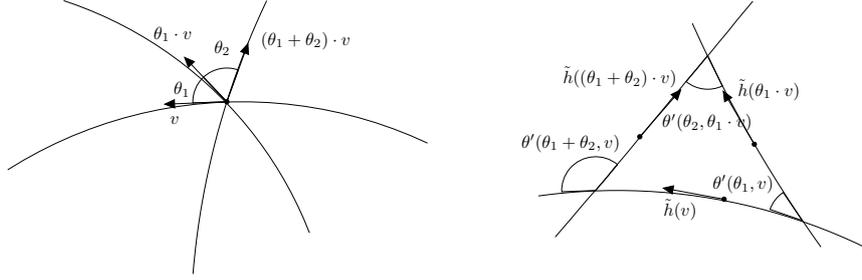


Figura 18: Se despeja de este dibujo una superaditividad puntual.

Integrando a ambos lados obtenemos la igualdad deseada ya que, por observación 2.9, el volumen de Liouville es invariante por rotaciones en las fibras, es decir $\frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} \theta'(\theta, \vartheta \cdot v) d\lambda(v) = \frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} \theta'(\theta, v) d\lambda(v) = \Theta'(\theta)$. \square

Proposición 5.2. Una función superaditiva $A : [0, a] \rightarrow [0, a]$ que deja fijos los extremos cumple una de las siguientes condiciones:

1. Existe $a_0 \in (0, a]$ tal que $A(x) < x \forall x \in (0, a_0)$ y $A(a_0) = a_0$.
2. $A(x) \leq x \forall x \in [0, a]$

Demostración. Por absurdo, si negamos ambas afirmaciones tendríamos b tal que $A(b) > b$ y una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \rightarrow 0$ y $A(a_n) \geq a_n$. Sea (c, d) un intervalo maximal con $A(x) > x \forall x \in (c, d)$. Sea n tal que $d - a_n \in (c, d)$, llegamos entonces a la siguiente contradicción: $d = A(d) \geq A(d - a_n) + A(a_n) > (d - a_n) + a_n = d$. \square

c El efecto de ángulos deformados en funciones continuas

Ahora, si tenemos $F_\theta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y convexa tendremos por la desigualdad de Jensen:

$$F_\theta(\Theta'(\theta)) \leq \frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} F_\theta(\theta'(\theta, v)) d\lambda(v) \quad (4)$$

además si F_θ es estrictamente convexa y tenemos la igualdad arriba podemos concluir que $\theta'(\theta, -)$ es constante (este hecho es clave dado que nos permitirá concluir que $\theta'(\theta, v) = \theta$ a partir de $\Theta'(\theta) = \theta$).

Dada F_θ definiremos ahora $F_v(v) = \int_0^\pi F_\theta(\theta'(\theta, v)) \sin \theta d\theta$. Luego la desigualdad obtenida por Jensen (usando Fubini) se convierte en:

$$\int_0^\pi F_\theta(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} F_v(v) d\lambda(v)$$

El siguiente lema, pese a su aspecto técnico, es en realidad el corazón de la demostración. Él nos dice que si promediamos en ordenes apropiados F_θ no percibe la deformación de los ángulos. Con un poco más de trabajo esto nos permitirá probar que los dos promedios de arriba son iguales (además de que Θ' es la identidad) con lo que concluiremos que los ángulos se preservan.

Lema 5.3. *Dada $F_\theta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y F_v definida como arriba se tiene*

$$\frac{1}{\lambda(T^1S)} \int_{T^1S} F_v(v) d\lambda(v) = \int_0^\pi F_\theta(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Demostración. Dada la ergodicidad (teorema 2.16) podemos aproximar la parte izquierda de la igualdad por un promedio temporal de F_v sobre una órbita que a su vez, por el shadowing lemma (2.12), podemos aproximar por una órbita periódica. Demostraremos entonces que el promedio de F_v sobre las geodésicas cerradas vale $\int_0^\pi F_\theta(\theta) \sin \theta d\theta$, lo cual implicaría el resultado deseado.

Sea ahora γ una geodésica cerrada, $\tilde{\gamma}$ un segmento de levantado de γ que se proyecte inyectivamente sobre γ y \mathcal{G}_γ el conjunto de geodésicas que cortan positivamente a $\tilde{\gamma}$ que veremos con coordenadas geodésicas (x, θ) basadas en $v = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$. Sea $\gamma' = h(\gamma)$ (entonces $\ell(\gamma) = \ell(\gamma')$) y definimos $\mathcal{G}_{\gamma'}$ el conjunto de geodésicas que cortan a γ' con coordenadas (x', θ') basadas en $w = \dot{\gamma}'$. Obsérvese que $\theta'(\theta, \gamma(t))$ es justamente la coordenada θ' de $h(t, \theta)$.

Llamando, por abuso de notación, γ al intervalo $[0, \ell(\gamma)]$ al considerarlo como dominio de integración tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma F_v(\gamma(t)) dt &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{[0, \pi] \times \gamma} F_\theta(\theta'(\theta, \gamma(t))) \sin \theta d\theta dt \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathcal{G}_\gamma} F_\theta(\theta'(\theta, t)) dm \stackrel{*}{=} \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathcal{G}_{\gamma'}} F_\theta(\theta') dm' \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{[0, \pi] \times \gamma'} F_\theta(\theta') \sin \theta' d\theta' dt' \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \ell(\gamma') \int_{[0, \pi]} F_\theta(\theta') \sin \theta' d\theta' \\ &= \int_{[0, \pi]} F_\theta(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

La igualdad marcada con un asterisco no es inmediata ya que h no necesariamente le hace corresponder $\mathcal{G}_{\gamma'}$ a \mathcal{G}_γ . Sin embargo \mathcal{G}_γ se “parte” en pedazos que se podrán reacomodar a efectos de la integral.

Sea $g \in \pi_1(S) = \pi_1(S')$ que representa a γ y a γ' y consideramos sus respectivos levantados que quedan fijos por g . Así $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma}'$ son dominios fundamentales de sus geodésicas extendidas por la acción de g . En conclusión \mathcal{G}_γ y $\mathcal{G}_{\gamma'}$ son dominios fundamentales de \mathcal{G}_v y \mathcal{G}_w (las geodésicas que cortan positivamente a las geodésicas extendidas de $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma}'$) por la acción de g .

Sea $\mathcal{G}_{\gamma',n} = h(\mathcal{G}_\gamma) \cap g^n \cdot \mathcal{G}_{\gamma'}$. Entonces $\mathcal{G}_{\gamma'} = \bigsqcup g^{-n} \cdot \mathcal{G}_{\gamma',n}$. Esto se puede ver ya que h sí es en efecto un homeomorfismo entre \mathcal{G}_v y \mathcal{G}_w de forma que dada $\zeta' \in \mathcal{G}_{\gamma'}$ existen únicos $\zeta \in \mathcal{G}_\gamma$ y n tales que $h(g^{-n} \cdot \zeta) = \zeta'$ dandonos que $\zeta' \in h(\mathcal{G}_\gamma) \cap g^n \cdot \mathcal{G}_{\gamma'}$ para un único n .

Usando ahora la π_1 -invarianza de la corriente de Liouville tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathcal{G}_\gamma} F_\theta(\theta'(\theta, t)) dm &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \sum_n \int_{\mathcal{G}_{\gamma',n}} F_\theta(\theta') dm' \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \sum_n \int_{g^{-n} \cdot \mathcal{G}_{\gamma',n}} F_\theta(\theta') dm' \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathcal{G}_{\gamma'}} F_\theta(\theta') dm'. \end{aligned}$$

□

La consecuencia inmediata de este lema es

$$\int_0^\pi F_\theta(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \int_0^\pi F_\theta(\theta) \sin \theta d\theta \quad (5)$$

d Los ángulos se preservan

Corolario 5.4. *La función Θ' es la identidad.*

Demostración. Conforme la proposición 5.2 tomemos $[0, a] \subset [0, \pi]$ maximal con la propiedad $\Theta'(\theta) \leq \theta \forall \theta \in [0, a]$. Observese que $\Theta'|_{[0,a]}$ es un homeo. Asumamos que existe un intervalo $(b, c) \subset [0, a]$ con $\Theta'(\theta) < \theta \forall \theta \in (b, c)$.

Tomando ahora $F_\theta(\theta) = \max\{a - \theta, 0\}$ y usandola en la ecuación (5) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a (a - \theta) \sin \theta d\theta &< \int_0^a (a - \Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi F_\theta(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \\ &\leq \int_0^\pi F_\theta(\theta) \sin \theta d\theta = \int_0^a (a - \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Está contradicción surge de haber asumido la existencia del intervalo (b, c) , con lo que concluimos simultaneamente que estamos en la segunda condición de la proposición 5.2 y $\Theta'(\theta) = \theta \forall \theta \in [0, \pi]$. □

Si tomamos ahora una F_θ estrictamente convexa cualquiera tenemos automáticamente la igualdad en la ecuación (5) que, por lema 5.3 nos permite concluir la igualdad en la ecuación (4) con lo que obtenemos $\theta'(\theta, v) = \theta$. Es decir, h preserva ángulos.

e Demostración del Teorema de Otal

Demostración. Solo queda ahora arreglar a h para que se pueda proyectar a las superficies. Observese esta preservación de ángulos junto con el teorema de Gauss-Bonnet implica que h manda geodésicas concurrentes en S a geodésicas concurrentes en S' (tres geodésicas concurrentes forman entre ellas ángulos que suman π , así que sus imágenes no pueden formar un triángulo no degenerado porque sus ángulos sumarían menos que π , así que concurren).

Tomamos cartas geodésicas basadas en un punto $v \in T^1S$ y su imagen. En estas cartas $h(x, \theta) = (x'(x, \theta), \theta'(x, \theta))$. El hecho de que h preserve ángulos y mande geodésicas concurrentes en geodésicas concurrentes se traduce en $\theta'(x, \theta) = \theta$ y $x'(x, \theta) = x'(x)$ (esto último se nota ya que las geodésicas basadas en $\gamma_v(x)$ se mandarían a geodésicas concurrentes sobre $\gamma_{\tilde{h}(v)}(x')$).

Ahora integrando, por ejemplo, la función $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\theta'(x, \theta))}$ sobre $[0, x_0] \times [0, 1]$ según dm y usando la invarianza de m por h obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_0^1 \int_0^{x_0} \frac{1}{\sin(\theta'(x, \theta))} \sin \theta dx d\theta \\ &= \int_0^1 \int_{x'(0)}^{x'(x_0)} \frac{1}{\sin(\theta')} \sin \theta' dx' d\theta' \\ &= x'(x_0) - x'(0). \end{aligned}$$

En definitiva $x'(x) = x + c(v)$. Es fácil ver que c es continua e invariante por el flujo geodésico, luego por ergodicidad el c no depende de v . Así que ahora $\hat{h}(v) = \psi^c h(v)$ sí se proyecta a las superficies.

Además será una isometría dado que preserve longitud de arco y ángulos (si se quiere, \hat{h} vista en cartas normales está forzada a ser una rotación). Así hemos demostrado el teorema de Otal. \square

6 Epílogo

La exposición de este trabajo fue deliberadamente directa con el objetivo de mantener cierta sencillez y claridad. El costo de este enfoque fue una descontextualización del teorema, un “perderse el bosque por el árbol”. Esta sección busca llenar ese bache.

¿Hasta dónde se generalizó este teorema? ¿Qué preguntas quedan por responder? ¿Qué otros problemas se relacionaron, históricamente, con este? Obviamente estas preguntas dan lugar a respuestas muy amplias que exceden el objetivo de esta sección, pero se trata de aquí dar aunque sea respuestas parciales a ellas.

a Rigidez del Espectro de Longitudes en Dimensión Mayor

La generalización obvia del teorema de Otal (y de hecho la forma en la que fue conjeturada originalmente por Burns y Katok [BK85]) sería cambiar la hipótesis de superficie por variedad de dimensión arbitraria. Como ya fue mencionado la primera parte de la demostración aquí expuesta (la demostración de que el espectro marcado de longitudes determina el flujo geodésico) se generaliza sin problema a dimensión mayor.

Teorema 6.1. *Sean M y M' variedades riemannianas homeomorfas cerradas orientables de curvatura negativa con el mismo espectro marcado de longitudes entonces sus flujos geodésicos son conjugados.*

Luego la pregunta de rigidez del espectro de longitudes se vuelve equivalente a la pregunta, considerablemente natural, de si el flujo geodésico determina la geometría de una variedad de curvatura negativa.

La generalización más fuerte en esta dirección fue demostrada por Hamenstädt [Ham99] apoyado fuertemente en un resultado de Besson, Courtois y Gallot [BCG95]. Hamenstädt demuestra el problema de rigidez del espectro de longitudes bajo la hipótesis de que una de las variedades sea localmente simétrica.

El resultado de Besson, Courtois y Gallot dice esencialmente que la geometría de una variedad riemanniana de curvatura negativa y localmente simétrica queda determinada por su volumen y por su entropía volumétrica (que en este caso coincide con la entropía topológica del flujo geodésico que ya sabemos que queda determinado por el espectro de longitudes), de forma que bastaría demostrar que dos variedades con igual espectro de longitudes tienen el mismo volumen.

Este hecho no sería difícil de demostrar si tuviésemos que la conjugación de flujos fuera C^1 ya que en tal caso podríamos ver, usando la proposición 2.10, que el volumen de Liouville se preserva por la conjugación y es fácil ver que, según el volumen de Liouville, $\text{Vol}(T^1M) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\text{Vol}(M)$. En su trabajo Hamenstädt demuestra la igualdad de volúmenes bajo hipótesis más débiles. En particular la demuestra para el caso de que una de las variedades sea localmente simétrica.

Teorema 6.2. *Sean M y M' variedades riemannianas homeomorfas cerradas orientables de curvatura negativa con el mismo espectro marcado de longitudes con M localmente simétrica. Entonces M y M' son isométricas.*

b El Espectro del Laplaciano: ¿Se puede escuchar la forma de un tambor?

La pregunta *¿Se puede escuchar la forma de un tambor?* fue planteada por Mark Kac en [Kac66]. La idea es si conociendo las soluciones armónicas a la ecuación de ondas sobre una membrana (digamos, un abierto conexo de \mathbb{R}^2 por fijar ideas) fija por su borde podemos saber exactamente la forma de la membrana (la respuesta en este caso es no, aunque si se puede determinar el área de la membrana, ver [Kac66]).

Saber soluciones armónicas para la ecuación de onda implica encontrar funcionales F sobre la membrana tales que $\Delta F = \lambda F$, donde Δ es el operador de Laplace. Formulada así tiene sentido plantearse la misma pregunta para tambores con forma de superficies cerradas en lugar de tambores planos en \mathbb{R}^2 . Concretamente la pregunta es *¿Si dos superficies tienen el mismo espectro del laplaciano (conjunto de valores propios contados con multiplicidad) serán entonces isométricas?*

La relación de este problema con el del espectro marcado de longitudes se puede ver en [Gor96]. Para superficies conocer el espectro del laplaciano es equivalente a conocer el espectro no marcado de longitudes (el conjunto de largos de geodésicas cerradas contadas con multiplicidad). De forma que el espectro marcado de longitudes determina el espectro del laplaciano, así que una respuesta positiva a la pregunta del espectro del laplaciano implicaría también una respuesta positiva para la del espectro marcado de longitudes.

Pero en nuestro caso, superficies de curvatura negativa, se puede ver que la métrica no queda determinada por el espectro del laplaciano ya aún en curvatura constante [Vig80]. Esto nos dice que el marcado en el espectro de longitudes nos está dando efectivamente información importante, además de dar más interés a la pregunta del espectro marcado de longitudes.

c Métricas de Anosov

Otra posible generalización sería tratar aflojar la hipótesis de curvatura negativa. Está generalización es menos natural dado que la curvatura negativa fue necesaria para si quiera enunciar el teorema de Otal. De todas formas se puede trabajar con el espectro no marcado (o, análogamente, con el espectro del laplaciano) de longitudes sin problemas.

Uno de los hechos más relevantes de la curvatura negativa para la demostración fue que su flujo geodésico fuese Anosov. Podríamos preguntarnos por la rigidez del espectro marcado se mantiene en la familia de métricas cuyo flujo geodésico es Anosov (llamadas *métricas de Anosov*).

Pero como estamos trabajando con el espectro no marcado claramente no vamos a tener esta rigidez (como ya dijimos, dicha rigidez no es verdad ni en el caso hiperbólico [Vig80])

Sin embargo en [PSU⁺14] se demuestra una versión continua de la rigidez

Teorema 6.3. *Sea (Σ, g_s) una familia diferenciable de métricas sobre Σ con $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ tales que g_0 es una métrica de Anosov y todas tienen el mismo espectro no marcado de longitudes. Entonces toda la familia es isométrica dos a dos.*

En [PSU⁺14] se hace una interesante analogía de las técnicas usadas para

demostrar ese teorema con técnicas usadas en el estudio del llamado problema de rigidez del borde [SU05].

Esta técnica consiste en estudiar una versión linealizada del problema (en cierto sentido “derivar” la familia de métricas para obtener un teorema lineal equivalente).

Dada un m -tensor covariante simétrico f se define su transformada de rayos X como

$$I_m f(\gamma) = \int_0^T f(\dot{\gamma}(t)) dt$$

donde $I_m f$ se evalúa sobre el conjunto de geodésicas cerradas y T es el periodo γ .

Es fácil ver que si $f = d\nu$, con ν un $m - 1$ -tensor simétrico y d la derivada interna, entonces $I_m f = 0$. En caso de que este sea el único caso donde $I_m f = 0$ se dice que I_m es s -inyectiva.

La linealización del problema entonces se vuelve probar que I_2 es s -inyectiva.

d La Función Zeta de Ruelle

Si vemos a $\ell : M(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ como una aplicación de las métricas posibles sobre una superficie Σ dada a $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ el teorema de Otal nos dice básicamente que la aplicación (restringida a las métricas de curvatura negativa) es inyectiva.

Una pregunta natural, aunque poco estudiada, sería preguntarse que se sabe sobre la imagen de ℓ . Por ejemplo si nos restringimos a las métricas hiperbólicas la imagen sería una bola $-3\chi(\Sigma)$ dimensional ($\chi(\Sigma)$ la característica de Euler de Σ), es decir el espacio de Teichmüller.

Hay restricciones obvias sobre los posibles espectros marcados de largos. Por ejemplo, sabiendo el espectro sobre las geodésicas primitivas queda determinado el resto del espectro. Cabría preguntarse si, restringiendo \mathcal{C} a las clases de geodésicas primitivas, la aplicación ℓ puede llegar a ser sobreyectiva. La respuesta es obviamente no.

Una posible restricción es la siguiente: si \mathcal{C}' son las clases de homotopía libre de geodésicas primitivas se define (de forma similar a la función zeta de Riemann)

$$\zeta_g(s) = \prod_{c \in \mathcal{C}'} (1 - e^{-s\ell_g(c)})$$

Resulta entonces que esta función converge cuando $\text{Re}(s)$ es suficientemente grande y su extensión meromorfa tiene un cero de orden $-\chi(\Sigma)$ en 0 [DZ16] (bajo las hipótesis de Σ orientable de curvatura negativa).

Esto nos dice que el espectro de longitudes no solo determina la métrica sino que también la topología de una superficie.

A El Plano Hiperbólico

Llamaremos *plano hiperbólico* a $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ dotado de la métrica $ds^2 = \frac{|dz|^2}{\text{Im}z}$.

Las isometrías que preservan orientación del plano hiperbólico serán las transformaciones de Möbius que lo dejen invariantes que podemos identificar con las matrices de coeficientes reales de determinante positivo. Normalizando dichas matrices podemos identificar al grupo de isometrías con

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} / \{\pm I\}$$

actuando, como dijimos, por transformaciones de Möbius: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Se puede ver a su vez que la acción derivada en $T^1\mathbb{H}^2$ es transitiva y de estabilizador trivial. Esto implica que \mathbb{H}^2 tiene curvatura constante (una cuenta verifica que será -1).

Así podemos identificar $T^1\mathbb{H}^2 \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ mediante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (i, i)$$

haciendo que la acción de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sea por multiplicación a izquierda.

Otra identificación que le daremos a \mathbb{H}^2 (que usaremos indistintamente) es el *disco de Poincaré*: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ con la métrica $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$. La identificación será vía la transformación de Möbius $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Claramente lo que más nos interesa será identificar las geodésicas de este espacio. Haciendo una cuenta podemos ver que $t \mapsto e^t i$ es una de ellas. Luego haciendo actuar $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sobre ella obtenemos todas las demás (ya que actúa transitivamente sobre $T^1\mathbb{H}^2$).

Como las transformaciones de Möbius preservan circunferencias y ángulos vemos entonces que las geodésicas los arcos de circunferencia (posiblemente degenerados) perpendiculares al borde del plano hiperbólico.

La geodésica $t \mapsto e^t i$ identificada dentro de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ se ve

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

luego el flujo geodésico vendrá dado por multiplicación a derecha por g_t (notar que multiplicando por izquierda g_t actúa como isometría, de forma que no puede ser el flujo geodésico).

Esta construcción se puede proyectar a una superficie S de género $g \geq 2$ encontrando una representación $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de $\pi_1(S)$ (luego $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ será una superficie homeomorfa a S con curvatura constante -1 , que llamaremos hiperbólica).

Una forma geométrica de construir esto es dibujando un $2(g+1)$ -agón regular y construir el grupo generado por las identificaciones apropiadas en los bordes.

B Regularidad de Conjugaciones de Órbitas

Lema B.1. Sean $\phi^t : M \rightarrow M$ y $\psi^t : M' \rightarrow M'$ flujos Anosov C^∞ sobre variedades riemannianas cerradas.

Si existe una conjugación de órbitas $h_0 : M \rightarrow M'$ entonces existe $h : M \rightarrow M'$ conjugación de órbitas C^∞ a lo largo de las órbitas y Hölder. Más aún, las derivadas de h a lo largo de las órbitas son Hölder.

Observación B.2. Tenemos que $h_0(\phi^t) = \psi^{\alpha(v,t)} h_0(v)$. Debido a la regularidad de las cajas de flujos h_0 y α tienen las mismas regularidades (dónde una regularidad a lo largo de una órbita para h_0 es equivalente a una regularidad en la segunda coordenada para α).

Las ideas de la demostración son similares a las de [KH95, Sección 19.1].

Usaremos la siguiente afirmación, aún más técnica que el lema en sí mismo. Alentamos al lector no particularmente inquisitivo a saltarse su demostración. Gran parte de los conceptos usados pueden ser rescatados de [KH95], donde se hace una demostración similar en un caso más simple.

Afirmación. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' superficies C^∞ transversas a los flujos en M y M' respectivamente tales que $h_0(\mathcal{T})$ se proyecta a lo largo del flujo a \mathcal{T}' . Entonces $g_{\mathcal{T},\mathcal{T}'} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$, definida como la composición entre h_0 y la proyección mencionada, es Hölder.

Demostración. Para aliviar notación llamaremos $g = g_{\mathcal{T},\mathcal{T}'}$.

Construimos una foliación \mathcal{W}^s sobre \mathcal{T} intersectando a \mathcal{T} con las hojas (locales) de \mathcal{W}^{cs} (analogamente construimos \mathcal{W}^u).

La primera parte de la demostración consistirá en demostrar que basta probar que $g|_{\mathcal{W}^s}$ y que $g|_{\mathcal{W}^u}$ son efectivamente Hölder (asumiremos entonces, para esta parte, que ambas funciones son Hölder con exponente α y constante K).

Si x e y están suficientemente cerca ($d(x,y) < \epsilon$) entonces, sin pérdida de generalidad, existirá $z \in \mathcal{W}^s(x) \cap \mathcal{W}^u(y)$ (podría ser que tuviésemos que intercambiar los roles de x e y en la intersección).

Del hecho de que ambas foliaciones sean transversas y están definidas en un compacto, sabemos que el ángulo entre ellas está acotado por $\theta > 0$. Tomando ϵ suficientemente chico podemos obtener la siguiente desigualdad aproximando por el caso euclídeo (donde las cuentas se pueden hacer explícitamente para conseguir la cota):

$$d(x,z)^2 + d(z,y)^2 \leq K_1 d(x,y)^2$$

para algún $K_1 > 0$.

Se puede ver haciendo un dibujo [dibujo](#) que para cualquier $\alpha > 0$ existe $K_2 > 0$ tal que la siguiente desigualdad se cumple para cualesquiera $a, b \geq 0$:

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \leq K_2 (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} d(g(x), g(y)) &\leq d(g(x), g(z)) + d(g(z), g(y)) \leq K(d(x,z)^\alpha + d(z,y)^\alpha) \\ &\leq K K_2^\alpha (d(x,z)^2 + d(z,y)^2)^{\alpha/2} \leq \underbrace{K K_2^\alpha K_1^{\alpha/2}}_{K'} d(x,y)^\alpha \end{aligned}$$

con lo que concluimos la primera parte de la demostración.

Mostraremos ahora que $g|_{\mathcal{W}^u}$ es Hölder (será análogo probarlo para $g|_{\mathcal{W}^s}$).

Tomemos x e y cercanos ($d = d(x, y) < \delta$) sobre una misma hoja de \mathcal{W}^u . Comencemos por observar que, en un entorno U de $h(\mathcal{T})$ donde este bien definida, la proyección a \mathcal{T}' es C^∞ . De forma que bastará probar que cerca de $h(x)$ hay un punto w_0 de la órbita de $h(y)$ (mejor dicho, en el segmento de órbita que queda contenido dentro de U) que cumple una desigualdad tipo Hölder (esto sería $d(h(x), w_0) < Kd^\alpha$) ya que w_0 y $h(y)$ se proyectarán al mismo punto de \mathcal{T}' .

Consideremos ϵ de forma tal que si tomamos $z \in M'$ entonces en un ϵ -entorno de z sobre \mathcal{W}^{cu} (como variedad inmersa) la proyección por el flujo hacia $\mathcal{W}^{su}(z)$ está controlada en el siguiente sentido: si w^z es la proyección entonces

- i. $d(z, w^z) < \nu d(z, w)$ para algún $\nu > 0$ que no dependerá de z .

Este último hecho se logra viendo que el ángulo entre las variedades estables fuertes y el flujo es al menos $\theta > 0$ (al tener la transversalidad de ambas sobre M' compacta), de forma que con ϵ chico podemos aproximar al caso euclídeo donde nos servirá $\nu = (\tan \theta)^{-1}$.

Exigiremos ahora que δ sirva para la continuidad uniforme (en ϵ) de h (si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(h(x), h(y)) < \epsilon$).

Consideremos ahora $k_1, k_2, C > 0$ y $0 < c < 1$ tales que

- ii. $d(\phi^t x, \phi^t y) < k_1 C^t d(x, y)$ para $t > 0$.

Para ello podemos tomar C constante de Lipschitz para ϕ^1 y elegir k_1 para compensar los errores a tiempos menores.

- iii. $d(\psi^{-s} z, \psi^{-s} w) < k_2 c^s d(z, w)$ para $t > 0$ y z y w en una misma inestable fuerte.

Estas constante se consiguen inmediatamente de la definición de flujo de Anosov.

Elijamos T tal que

- iv. $C^T d < \delta < C^{T+1} d$.

Llamemos $z_0 = h(x)$ y $z_1 = h(\phi^T x)$. Entonces $z_1 = \psi^S z_0$ donde a su vez tenemos el siguiente control sobre S :

- v. $\frac{1}{\beta} S - q \leq T \leq \beta S + q$ para ciertas constantes $\beta, q > 0$.

Sea w_1 es la proyección de $h(\phi^t y)$ a $\mathcal{W}^{su}(z_1)$ (observese que por ii. y iv. estamos en las condiciones de i.). Veremos en seguida que $w_0 = \phi^{-S} w_1$ será un punto como buscamos, siendo nuestro α tal que $c^\beta C^\alpha \leq 1$.

Para aliviar notación, en cada paso se le llamará K a las constantes fijas de la paso anterior:

$$\begin{aligned} d(z_0, w_0) &\stackrel{iii.}{\leq} k_2 c^S d(z_1, w_1) \stackrel{i.}{\leq} \nu K c^S d(\underbrace{z_1}_{h(\phi^T x)}, h(\phi^T y)) \stackrel{ii.}{\leq} k_1 K c^S C^T d \\ &\stackrel{iv.}{\leq} \delta K c^S \stackrel{v.}{\leq} c^q K c^{T\beta} = \left(\frac{C}{\delta}\right)^\alpha K (c^\beta C^\alpha)^T \left(\frac{\delta}{C^{T+1}}\right)^\alpha \stackrel{iv.}{\leq} K d^\alpha. \end{aligned}$$

Tomando d suficientemente chico desde el principio, podemos asumir que $w_0 \in U$. El único problema sería que estuviese en un segmento equivocado de órbita de $h(y)$, de forma que no se proyectara al mismo punto de \mathcal{T}' que $h(y)$.

Esto se arregla viendo que si $0 < t < T$ entonces $d(\phi^t x, \phi^t y) < \delta$ y por ello $d(h(\phi^t x), h(\phi^t y)) < \epsilon$. Por otro lado $d(\psi^s z_0, \psi^s w_0) < \epsilon'$ para $0 < s < S$ ya que z_1 y w_1 están en la misma inestable fuerte (que tan chico es ϵ' depende de ϵ que se puede ajustar para que sea tan pequeño como queramos).

Diciendo que $s(t)$ es tal que $\psi^{s(t)} h(x) = h(\phi^t(x))$ tenemos entonces que $d(\psi^{s(t)} h(y), \phi^{s(t)} w_0) < 2\epsilon'$, y como ambas recorren la misma órbita y están cerca (respecto a la órbita) en $s(T)$ se resuelve nuestro problema. \square

Demostración del lema B.1. La demostración será local. Consideremos sobre $T^1 S$ un cubrimiento finito por cajas de flujo A tales que $\bar{A} \subset B^\circ$ Donde B son también cajas de flujo. Si logramos conseguir las condiciones deseadas sobre un único A perturbando a h_0 de forma tal que no se deshagan las condiciones deseadas en caso que ya estuvieran presentes la demostración quedaría completa.

Si $B = \mathcal{T} \times (-\epsilon, \epsilon)$, sea \mathcal{T}' como en la afirmación. En estas coordenadas h_0 es de la forma $h_0(x, t) = (g_{\mathcal{T}, \mathcal{T}'}(x), T(x, t))$ ya que respeta las órbitas del flujo (notese que estas coordenadas son C^∞). Definimos ahora

$$h_1(x, t) = (g_{\mathcal{T}, \mathcal{T}'}(x), \rho(x, t)t + (1 - \rho(x, t))T(x, t))$$

donde ρ es una función “chichón” que es C^∞ y vale 1 sobre A y 0 fuera de B . Observe que h_1 cumple todas las condiciones deseadas; a saber: sobre A $h_1(x, t) = (g_{\mathcal{T}, \mathcal{T}'}(x), t)$ (que es Hölder y C^∞ a lo largo de las órbitas y sus derivadas en dirección del flujo siguen siendo Hölder), no le quita regularidad a h_0 sobre B y se pega bien con h_0 fuera de B .

El único problema a sortear es que podría pasar que h_1 (es decir, h_0 después de hacer las perturbaciones sobre todas las cajas de flujo) no sea monótona a lo largo de las órbitas. Para solucionar esto podemos ver que h_1 puede estar tan C^0 -cerca de h_0 como queramos (basta tomar las cajas B suficientemente chicas y los \mathcal{T}' cerca de sus respectivos $h_0(\mathcal{T})$), de forma que podemos asumir que h_1 es “casi” monótona.

Concretamente si $h_1(\phi^t v) = \psi^{\alpha(v, t)} h_1(v)$ podemos asumir que $\alpha(v, t) > 0$ si $t > 1$. Luego podemos aplicar el argumento de promediación de la demostración del teorema 3.2 y observar que no perdemos las regularidades al hacerlo. \square

Referencias

- [Bal12] Werner Ballman. *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*. Birkhäuser, 2012.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*. American Mathematical Society Providence, 2001.
- [BCG95] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geometric and functional analysis*, 5(5):731–799, 1995.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Heaglier. *Metric Spaces on Non-Positive Curvature*. Springer, 1999.
- [BK85] Keith Burns and Anatole Katok. Manifolds with non-positive curvature. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5(02):307–317, 1985.
- [Cro90] Christopher B Croke. Rigidity for surfaces of non-positive curvature. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 65(1):150–169, 1990.
- [dC92] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [DZ16] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Ruelle zeta function at zero for surfaces. *arXiv preprint arXiv:1606.04560*, 2016.
- [Gar16] Victoria Garcia. Flujos geodésicos en variedades de curvatura negativa. Monografía de licenciatura, UdelaR, 2016.
- [Gor96] Ruth Gornet. The marked length spectrum vs. the laplace spectrum on forms on riemannian nilmanifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 71(1):297–329, 1996.
- [Ham99] U Hamenstädt. Cocycles, symplectic structures and intersection. *Geometric and Functional Analysis*, 9(1):90–140, 1999.
- [Hat02] Allan Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Kac66] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *The american mathematical monthly*, 73(4):1–23, 1966.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [Ota90] Jean-Pierre Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Annals of Mathematics*, 131(1):151–162, 1990.
- [Pat99] Gabriel P. Paternain. *Geodesic Flow*. Birkhäuser, 1999.
- [PSU+14] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo, Gunther Uhlmann, et al. Spectral rigidity and invariant distributions on anosov surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 98(1):147–181, 2014.

- [SU05] Plamen Stefanov and Gunther Uhlmann. Boundary rigidity and stability for generic simple metrics. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(4):975–1003, 2005.
- [Vig80] Marie-France Vignéras. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Annals of Mathematics*, 112(1):21–32, 1980.
- [Wil12] Amie Wilkinson. Lectures on marked length spectrum rigidity. In *Geometric Group Theory, IAS/Park City Mathematics Series*, 2012.