

TRABAJO MONOGRÁFICO

Cocíclos en $SL(2, \mathbb{R})$:
La fórmula de
Herman-Avila-Bochi

Por: Luis Pedro Piñeyrúa Ramos
Orientador: Dr. Martín Sambarino
Co-orientador: Dr. Rafael Potrie

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar un teorema debido a A. Avila y J. Bochi [AB2] (originalmente de M. Herman [He]) que nos permite conocer el exponente de Lyapunov de un cociclo lineal bajo ciertas hipótesis, y algunos teoremas importantes de la teoría para hacer el trabajo autocontenido. Finalmente probamos un teorema de O. Knill [Kn] que nos permite obtener densidad de cociclos con exponente positivo.

Índice general

1. Introducción	4
2. Cocíelos en $SL(2, \mathbb{R})$	7
2.1. Cocíelos lineales	7
2.2. Exponentes de Lyapunov	9
2.3. Teorema de Oseledets	9
2.4. Hiperbolicidad Uniforme	16
3. La fórmula de Herman-Ávila-Bochi	22
3.1. La fórmula de Herman	22
3.2. Demostración del Teorema 3.2 asumiendo el Teorema 3.3	24
3.3. Demostración del Teorema 3.3	27
3.4. Un ejemplo interesante	35
4. Densidad de exponente positivo	37
4.1. Sistemas inducidos y cocíelos derivados	37
4.2. Demostración del Teorema 4.1	39
A. Descomposiciones de $SL(2, \mathbb{R})$	43
B. Algo de teoría ergódica	45

Notaciones

Este trabajo pretende ser autocontenido. Todos los resultados de importancia relevante para la monografía serán probados. En otros casos, se dejará la prueba de lado y simplemente se enunciarán para no hacer el trabajo muy extenso o por tener una prueba que se aleja del propósito de la monografía.

El lector deberá estar familiarizado con nociones básicas de topología, álgebra lineal y análisis real y complejo.

A continuación enunciamos algunas notaciones a ser utilizadas en este trabajo.

Llamaremos \mathbb{R} al conjunto de los números reales y \mathbb{C} al conjunto de los números complejos. Si $z = a + bi$ es un número complejo, diremos que $\bar{z} = a - bi$ es su *complejo conjugado*. Llamaremos \mathbb{D} al disco unitario, es decir al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y S^1 al borde de \mathbb{D} , el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La clausura de \mathbb{D} será el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y la notaremos $\bar{\mathbb{D}}$.

Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida, diremos que una propiedad se cumple para *casi todo punto* y notaremos ctp, cuando esa propiedad se cumple para un conjunto de medida total o equivalentemente si el conjunto de puntos donde no se cumple esa propiedad tiene medida nula. Llamaremos $L^1(X, \mu)$ al conjunto de funciones μ -integrables. Es decir, $L^1(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_X |f| d\mu < \infty\}$. Si $f \in L^1(X, \mu)$ notamos $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$ a la norma de f en $L^1(X, \mu)$.

Llamaremos $L^\infty(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$.

Si $f \in L^\infty(X, \mu)$ entonces $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ es la norma de f en $L^\infty(X, \mu)$.

Si $T : X \rightarrow X$ es una función medible, diremos que el conjunto A es *T-invariante* si $T^{-1}(A) = A$. Diremos que T *preserva la medida* μ o que μ es *T-invariante* si $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo A medible. Si T preserva la medida μ , diremos que T es *ergódica* si todo conjunto A que es *T-invariante*, verifica $\mu(A) = 0$ o $\mu(A^c) = 0$.

Llamaremos $M_n(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes reales. Llamaremos $GL(n, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices en $M_n(\mathbb{R})$ invertibles y $SL(n, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices invertibles con determinante 1. Llamaremos espacio proyectivo de $SL(2, \mathbb{R})$ al conjunto $SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$ y

lo notaremos $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Cambiando \mathbb{C} en lugar de \mathbb{R} se definen los mismos conjuntos de manera análoga.

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, llamaremos *traza* de la matriz A a la suma de los elementos de la diagonal de A . Es decir $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Llamaremos *radio espectral* de la matriz A al máximo de los módulos de los valores propios de A .

Llamaremos H_c con $c \neq 0$ a una matriz diagonal de la forma $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$

y R_θ a la rotación de ángulo θ : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Dotaremos al espacio de matrices con la siguiente norma: Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ definimos $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$.

Llamaremos *espacio proyectivo de \mathbb{R}^2* a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ donde $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda w$.

Capítulo 1

Introducción

Podría decirse que el principal objetivo de los sistemas dinámicos es comprender la evolución a través del tiempo de un sistema dado. Dicho de otro modo, si conocemos las leyes que gobiernan nuestro sistema, intentar predecir el comportamiento asintótico de la mayor cantidad de órbitas.

La complejidad de un sistema puede hacer esta tarea muy simple o muy difícil, es por eso que a lo largo del tiempo se han implementado técnicas para su estudio. Una herramienta fundamental son los llamados exponentes de Lyapunov. Dado un difeomorfismo $f : X \rightarrow X$ donde X es una variedad riemanniana, definimos el exponente de Lyapunov de f en el punto x como

$$\lambda(f, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n\|$$

siempre que exista este límite.

Si bien esta definición nos dice que los exponentes pueden tomar cualquier valor de cero a infinito, se diferencian dos casos: o el exponente es cero o es positivo. Esta distinción tiene diferentes consecuencias en la dinámica de un mapa, siendo el segundo caso mucho más rico: si $\lambda > 0$ entonces el crecimiento en norma del diferencial es exponencial, $\|Df_x^n\| \approx e^{\lambda n}$.

Los cocíclo lineales entran en la categoría de sistemas dinámicos por varias razones. La primera de ellas proviene de la teoría de probabilidad y trata el problema de multiplicar matrices de manera aleatoria. El objetivo sería poder predecir hacia donde tienden estos productos de matrices (ejemplo 2.2).

La otra razón de importancia proviene puramente de los sistemas dinámicos, y trata sobre estudiar la dinámica del diferencial sobre el fibrado tangente de un difeomorfismo en una variedad compacta (ejemplo 2.1).

Más formalmente definimos un cocíclo lineal de la siguiente manera. Sea $T : X \rightarrow X$ una función (sistema dinámico), y $A : X \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ una función que asocia a cada punto de X una matriz $n \times n$. El *cocíclo lineal* es el mapa

$$(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \mapsto (T(x), A(x)v) \in X \times \mathbb{R}^n$$

En la mayor parte del trabajo dotaremos a X de una medida μ y le pediremos al mapa ser medible y a T preservar dicha medida.

El objetivo es estudiar la dinámica de este mapa, es por eso que casi siempre tomaremos matrices invertibles y T será biyectiva.

En el caso de los difeomorfismos, si tomamos $T = f$ y $A(x) = Df_x$ obtenemos el cociclo antes mencionado (siempre que el fibrado tangente sea trivial). Luego los cociclos lineales contienen como un caso especial a los mapas diferenciales de un difeomorfismo.

De esta manera la noción de exponente de Lyapunov se traslada a la teoría de cociclos, al igual que la importancia dinámica de conocer dicho número.

Esta importancia se justifica de alguna forma con los teoremas de Furstenberg y Kesten ([FK]) y Oseledets ([Os]). El primero nos garantiza la existencia del límite ctp, además de otras propiedades. El segundo, más interesante, es una mejoría del primero ya que nos describe el comportamiento de casi todo vector.

A pesar de la importancia que tienen los exponentes de Lyapunov, son realmente muy pocas las formas que se conocen de determinar el exponente de Lyapunov de un cociclo lineal.

En el caso del producto aleatorio de matrices fue H. Furstenberg en [F] quien dió el primer resultado importante asegurando exponente positivo para una cantidad “grande” de medidas.

El otro clásico resultado es el “truco de subarmonicidad” de M. Herman ([He]), refinado más adelante por A. Avila y J. Bochi en [AB2] sobre lo que trata este trabajo.

Si $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ es un cociclo y θ denota un ángulo, definimos el cociclo $AR_\theta : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ como $(AR_\theta)(x) = A(x)R_\theta$. De esta manera incluimos a A en una familia de cociclos parametrizada por el círculo S^1 .

Teorema 1.1 ([He]). *Si μ es ergódica respecto a T y $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tal que $\log \|A\| \in L^1(X, \mu)$. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta \geq \int_X \log \left(\frac{\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}}{2} \right) d\mu(x) \quad (1.1)$$

Esta fórmula nos dice entre otras cosas que cuando A no sea una rotación ctp, podemos perturbar A para obtener cociclos con exponente positivo.

La idea de Herman fué ver que la función $\theta \mapsto \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)$ se extiende de manera subarmónica a todo el disco \mathbb{D} (de ahí el nombre “truco de subarmonicidad”), donde ρ es el *radio espectral*. La desigualdad se deduce del principio del máximo para las funciones subarmónicas.

Ávila y Bochi prueban en [AB2] que la ecuación (1.1) es en realidad una igualdad.

Teorema 1.2 ([AB2]). Sean μ , T y A como arriba:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta = \int_X \log \left(\frac{\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}}{2} \right) d\mu(x)$$

La idea de la prueba aquí es la misma idea que tuvo Herman, pero llevada más lejos. Ellos logran probar que el mapa $\theta \mapsto \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)$ se extiende al disco \mathbb{D} pero de manera armónica.

Lo interesante (además de su prueba basada en análisis complejo) es que esta propiedad de la familia es robusta, aunque cada miembro de la familia es (desde el punto de vista de los exponentes) C^0 inestable, debido a [Bo].

Teorema 1.3 (Bochi-Mañé [Bo]). Sea T un homeomorfismo de un espacio compacto de Hausdorff X , y sea μ una medida de probabilidad ergódica T -invariante con soporte total. Sea $\mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))^1$ el conjunto de todos los cocíclos continuos sobre T . Entonces, existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ tal que si $A \in \mathcal{R}$ entonces el cocíclo (A, T) es uniformemente hiperbólico o el exponente de Lyapunov de (A, T) respecto a μ es cero.

Finalmente O. Knill utiliza la fórmula de Herman para probar la densidad de cocíclos con exponente positivo dentro de los cocíclos medibles, acotados. Si $\mathcal{A} = L^\infty(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ con la topología inducida por la norma $\|A\| = \sup \{\|A(x)\| : x \in X\}$ y llamamos \mathcal{P} al conjunto de los cocíclos con exponente positivo.

Teorema 1.4 ([Kn]). Si el sistema (X, T, μ) es ergódico, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ es denso en \mathcal{A} .

La exposición aquí presentada sigue [AB2] y el esquema de la monografía es el siguiente.

En el capítulo 2 definimos los conceptos básicos sobre cocíclos lineales como definición de cocíclo lineal, definición de exponente de Lyapunov, definición de hiperbolicidad uniforme y sus propiedades y se prueba el teorema de Oseledets en dimensión 2 (el caso que nos interesa).

El capítulo 3 tiene la parte más importante de este trabajo, que concierne al enunciado y prueba de la fórmula de Herman, y un ejemplo interesante de un cocíclo no uniformemente hiperbólico con exponente positivo ctp.

Finalmente en el capítulo 4 probamos el resultado de densidad de Oliver Knill, utilizando la fórmula de Herman.

¹Al conjunto $\mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ lo dotamos con la topología de la convergencia uniforme.

Capítulo 2

Cocíclo en $SL(2, \mathbb{R})$

El objetivo de este capítulo es definir los conceptos básicos sobre la teoría de cocíclo lineales en $SL(2, \mathbb{R})$, y probar algunos resultados importantes de la misma. El lector interesado podrá consultar [AB1] o [Vi] para un estudio más detallado del tema.

2.1. Cocíclo lineales

Sea $T : X \rightarrow X$ una función (sistema dinámico), y $A : X \rightarrow GL(d, \mathbb{R})$ una función que toma valores en las matrices $d \times d$ invertibles con coeficientes reales. El *cocíclo lineal* o simplemente *cocíclo* F definido por A sobre T es el mapa

$$F : X \times \mathbb{R}^d \rightarrow X \times \mathbb{R}^d \quad F(x, v) = (T(x), A(x) \cdot v)$$

A lo largo de esta monografía trabajaremos en el caso dimensión 2 ($d = 2$), y con el subgrupo $SL(2, \mathbb{R})$, el grupo de matrices 2×2 con coeficientes reales y determinante 1. Esto en realidad no es ninguna restricción ya que un cocíclo en $GL(2, \mathbb{R})$ puede pensarse como un cocíclo en $SL(2, \mathbb{R})$ multiplicado por una función real θ .

Inductivamente vemos que los iterados o potencias de F son

$$F^n(x, v) = (T^n(x), A_T^n(x) \cdot v)$$

donde

$$A_T^n(x) = A(T^{n-1}(x)) \dots A(T(x))A(x)$$

Si además T es invertible, también lo es F , y:

$$F^{-n}(x, v) = (T^{-n}(x), A_T^{-n}(x) \cdot v)$$

donde

$$A_T^{-n}(x) = [A(T^{-n}(x)) \dots A(T^{-1}(x))]^{-1}$$

Luego, para m y n enteros cualesquiera obtenemos la relación:

$$A_T^{n+m}(x) = A_T^m(T^n(x)) \cdot A_T^n(x)$$

A esta relación le llamamos *identidad de cocíclo*s.

El cociclo $F = F_{T,A}$ queda determinado por los mapas T y A . En general trabajaremos con un mapa T fijo, y estudiaremos los distintos cocíclo s A_T . En estos casos denotaremos $A^n(x)$ en lugar de $A_T^n(x)$ por simplicidad y llamaremos a A cociclo.

Estamos interesados en teoría ergódica, luego X será un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) y $T : X \rightarrow X$ una función medible que preserva la medida μ . En algunos casos trabajaremos con mapas más regulares (continuos, diferenciables, etc.).

Veamos ahora dos de los ejemplos más importantes que motivan el estudio de los cocíclo s.

Ejemplo 2.1 (Diferencial de un difeomorfismo).

Tomemos $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo que preserva área y orientación. Sabemos que existen campos diferenciables X_1, X_2 en \mathbb{T}^2 tales que $\{X_1(x), X_2(x)\}$ forman una base ortonormal del plano tangente $T_x\mathbb{T}^2$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$. Definimos el cociclo de la siguiente manera: identificamos X con \mathbb{T}^2 , \mathbb{R}^2 con el plano tangente via el mapa (X_1, X_2) y tomamos μ como la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 . Definimos $A(x)$ como la transformación lineal $Df_x : T_xX \rightarrow T_{f(x)}X$ de la base $\{X_1(x), X_2(x)\}$ en la base $\{X_1(f(x)), X_2(f(x))\}$. Luego obtenemos

$$F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad F(x, v) = (f(x), A(x) \cdot v)$$

Como f preserva área y orientación $Df_x \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{T}^2$, entonces A queda bien definido. Luego, estudiar la dinámica del cociclo $F = F_{T,A}$ no es otra cosa que estudiar la dinámica del diferencial Df_x . La regla de la cadena y el producto de matrices nos dan la identidad de cocíclo s y demás propiedades.

Observamos que este ejemplo parecería que sólo se puede definir en superficies *paralelizables*, es decir, cuando el fibrado tangente es trivial ($TX = X \times \mathbb{R}^2$). Sin embargo, esta construcción también se puede hacer para cualquier superficie usando una definición (equivalente) de cocíclo s por *skew-product*. Ver [Vi].

Ejemplo 2.2 (Producto aleatorio de matrices).

Otra motivación para estudiar cocíclo s proviene de un problema bastante común en probabilidad que es el producto aleatorio de matrices. La idea es la siguiente. Tenemos un conjunto de matrices con una ley de probabilidad, y empezamos a tomar matrices de ese conjunto de manera aleatoria y las multiplicamos. Como siempre en sistemas dinámicos y en probabilidad el objetivo es predecir que es lo que va a pasar para la mayor cantidad de productos de matrices. El cociclo se modela de la siguiente manera.

Sea $X = \text{SL}(2, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones de matrices de determinante 1. Sea $\pi_0 : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ la proyección en la primer coordenada: $\pi_0(M_0, M_1, M_2, \dots) = M_0$. Dado $M = (M_n) \in X$ definimos el mapa $T : X \rightarrow X$ como $T(M_0, M_1, M_2, \dots) = (M_1, M_2, M_3, \dots)$ (T es conocido como el *shift*). Podemos definir entonces el cociclo $A_T(x) = \pi_0(x)$. De esta forma $A_T^n(M) = M_{n-1} \dots M_1 M_0$. Luego, si x es un punto aleatorio de X , $A_T^n(x)$ es el producto aleatorio de n matrices.

2.2. Exponentes de Lyapunov

Dado un cociclo nos interesa conocer el comportamiento asintótico de la mayor cantidad de órbitas del sistema. La primer pregunta que surge de forma natural es cómo es la norma de $A^n(x)$ cuando n es muy grande. Esta información nos la proporcionan los *exponentes de Lyapunov*.

Dado $x \in X$ definimos $\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|$. La existencia de este límite (μ -ctp) está dada por el siguiente teorema que enunciamos sin demostración.

Teorema 2.1 (Furstenberg-Kesten [FK]). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida y $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ es una función medible tal que*

$$\int_X \log \|A(x)\| d\mu(x) < \infty \quad (2.1)$$

Entonces:

- El límite $\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|$ existe μ -ctp.
- La función $\lambda : X \rightarrow [0, +\infty)$ es T -invariante, μ -integrable y su integral está dada por

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_X \lambda(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_X \log \|A^n(x)\| d\mu \\ &= \liminf_{n > 0} \frac{1}{n} \int_X \log \|A^n(x)\| d\mu \end{aligned} \quad (2.2)$$

A (2.1) le llamamos *condición de integrabilidad*, y a λ *exponente de Lyapunov*. Cuando μ sea ergódica para T , la función λ será constante ctp. y en este caso tenemos $\lambda = \Lambda$.

2.3. Teorema de Oseledets

El teorema de Furstenberg y Kesten nos dice cómo crece la norma de $A^n(x)$ cuando n tiende a infinito. El siguiente paso sería describir el comportamiento de los vectores $A^n(x) \cdot v$ para la mayor cantidad de vectores $v \in \mathbb{R}^2$. Una descripción bastante general la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Oseledets [Os]). Sean $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida μ , y $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ un cociclo que cumple la condición de integrabilidad (2.1).

- Si $\lambda(x) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (2.3)$$

- Para μ -c.p. x con $\lambda(x) > 0$ existe un subespacio unidimensional E_x^s tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| = \begin{cases} \lambda(x) & \text{si } v \in \mathbb{R}^2 \setminus E_x^s \\ -\lambda(x) & \text{si } v \in E_x^s \setminus \{0\} \end{cases} \quad (2.4)$$

- El espacio E_x^s depende mediblemente de x , y es invariante por el cociclo.

Invariante por el cociclo significa que $A(x) \cdot E_x^s = E_{T(x)}^s$. Que el mapa $x \mapsto E_x^s$ sea medible, lo podemos pensar como que el mapa de X en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ es medible.

Antes de dar la prueba del teorema, vamos a probar un lema que utilizaremos varias veces en este trabajo.

Lema 2.1 ([AB1]). Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida de probabilidad μ . Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f \circ T - f$ es integrable. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(T^n(x)) = 0 \quad \text{para casi todo punto } x \in X$$

Demostración. Sea $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f \circ T - f)(x)$. Por hipótesis g es integrable, entonces por el Teorema ergódico de Birkhoff (ver apéndice) existe una función \tilde{g} integrable tal que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{k+1}(x)) - f(T^k(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (f \circ T^n(x) - f(x)) \end{aligned}$$

Tenemos que probar que $\tilde{g} = 0$ c.p.

Sea $K_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$. Como $f \in L^1(X, \mu)$, tenemos que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ a menos de un conjunto de medida nula. Luego, si $x \in X$ es tal que $|f(T^n(x))| \rightarrow \infty$ tenemos que x no retorna nunca a K_n (o a partir de un cierto n_0). El teorema de recurrencia de Poincaré (ver apéndice) nos dice que estos puntos tienen medida nula. Concluimos que $\tilde{g} = 0$ c.p. \square

Demostración del Teorema de Oseledets. Supongamos primero que $\lambda(x) = 0$. Luego, dado $n \in \mathbb{N}$, y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sabemos que

$$\|A^n(x)\|^{-1}\|v\| \leq \|A^n(x) \cdot v\| \leq \|A^n(x)\|\|v\|$$

Tomando logaritmo y dividiendo sobre n obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n} \log (\|A^n(x)\|^{-1}\|v\|) \leq \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| \leq \frac{1}{n} \log (\|A^n(x)\|\|v\|)$$

Finalmente tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| \leq 0$$

Esto prueba (2.3).

Para la segunda parte del teorema usamos la descomposición de Cartan (ver apéndice): Para cada $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, existen rotaciones R_1 y R_2 , y una matriz diagonal D tales que $A = R_1 D R_2$. Además $\|A\| = \|D\|$ y es 1 si y solo si A es una rotación. En nuestro caso a partir de cierto natural n_0 tenemos $\|A^n(x)\| > 1$, sino $\lambda(x) = 0$. Podemos suponer entonces $n_0 = 0$. Luego existen vectores ortonormales $s(x)$ y $u(x)$ tales que

$$\|A(x) \cdot u(x)\| = \|A(x)\| \quad \text{y} \quad \|A(x) \cdot s(x)\| = \|A(x)\|^{-1}$$

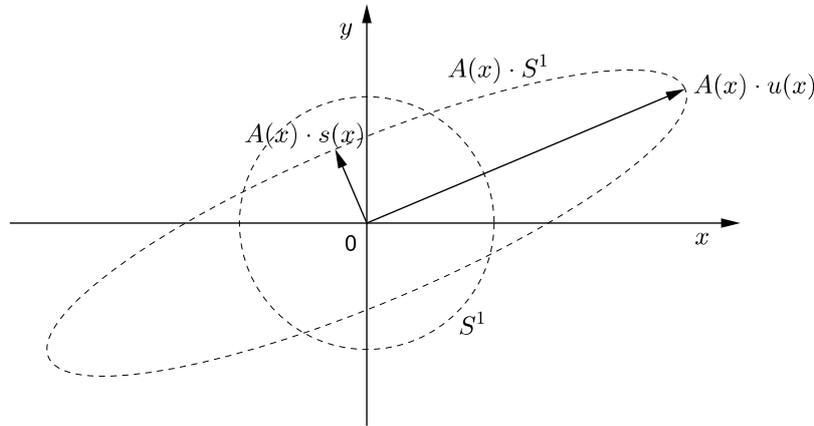


Figura 2.1: Base ortonormal

Para cada n definimos $s_n(x) = s(A^n(x))$ y $u_n(x) = u(A^n(x))$. Vamos a probar que los subespacios generados por $s_n(x)$ y $u_n(x)$ convergen a los subespacios buscados. Para probar la convergencia de $\{s_n(x)\}$ vamos a probar que el ángulo entre s_n y s_{n+1} decrece exponencialmente. Le llamamos α_n

a dicho ángulo, luego s_n se escribe como $s_n = (\cos \alpha_n) \cdot s_{n+1} + (\sen \alpha_n) \cdot u_{n+1}$ en la base ortotormal $\{s_{n+1}, u_{n+1}\}$. La imágen por $A^{n+1}(x)$ de esta base también es ortonormal por definición, luego

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}(x) \cdot s_n(x)\| &= \|\cos \alpha_n (A^{n+1}(x) \cdot s_{n+1}) + \sen \alpha_n (A^{n+1}(x) \cdot u_{n+1})\| \\ &\geq \|\sen \alpha_n \cdot A^{n+1}(x) \cdot u_{n+1}\| = |\sen \alpha_n| \|A^{n+1}(x)\| \end{aligned}$$

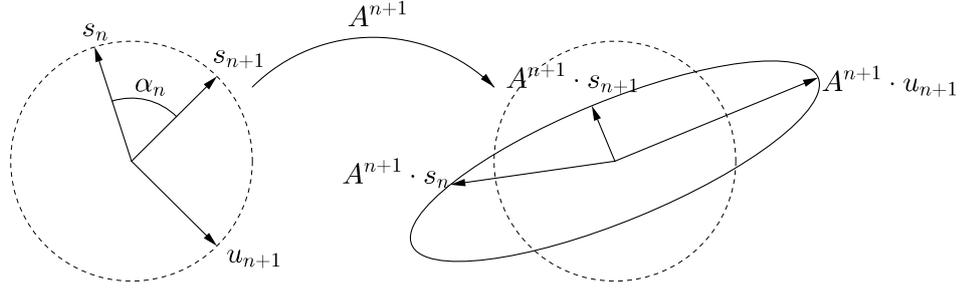


Figura 2.2: Decrecimiento exponencial de α_n

Por otro lado utilizando la identidad de cocícos

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}(x) \cdot s_n\| &= \|A(T^n(x)) \cdot A^n(x) \cdot s_n(x)\| \leq \|A(T^n(x))\| \cdot \|A^n(x) \cdot s_n(x)\| \\ &= \|A(T^n(x))\| \cdot \|A^n(x)\|^{-1} \end{aligned}$$

Juntando las dos desigualdades obtenemos

$$|\sen \alpha_n| \leq \frac{\|A(T^n(x))\|}{\|A^n(x)\| \cdot \|A^{n+1}(x)\|}$$

Tomando logaritmo y dividiendo sobre n obtenemos

$$\frac{1}{n} \log |\sen \alpha_n| \leq \frac{1}{n} \log \|A(T^n(x))\| - \frac{1}{n} \log \|A^{n+1}(x)\| - \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|$$

Si tomamos límite cuando n tiende a infinito, tenemos que el primer sumando de la derecha tiende a 0 por el Lema 2.1. Obtenemos entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\sen \alpha_n| \leq -2\lambda(x)$$

Esto prueba que el ángulo entre $s_n(x)$ y $s_{n+1}(x)$ decrece exponencialmente, probando que la sucesión $\{s_n(x)\}$ es de Cauchy. Llamamos $s(x)$ al límite de esta sucesión y $\beta_n(x)$ al ángulo entre $s_n(x)$ y $s(x)$. Como $\alpha_n(x)$ decrece

exponencialmente, también lo hace $\beta_n(x)$ y con la misma tasa exponencial. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\text{sen} \angle(s(x), s_n(x))| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\text{sen} \beta_n(x)| \leq -2\lambda(x)$$

Definimos a E_x^s como el subespacio generado por $s(x)$.

Podemos expresar $s(x)$ en la base ortonormal $\{s_n(x), u_n(x)\}$ como

$$s(x) = (\cos \beta_n) \cdot s_n(x) + (\text{sen} \beta_n) \cdot u_n(x)$$

Por un lado

$$\begin{aligned} \|A^n(x) \cdot s(x)\| &= \|(\cos \beta_n) A^n(x) \cdot s_n(x) + (\text{sen} \beta_n) A^n(x) \cdot u_n(x)\| \\ &\geq |\cos \beta_n| \|A^n(x) \cdot s_n(x)\| = |\cos \beta_n| \|A^n(x)\|^{-1} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot s(x)\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\cos \beta_n| - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| = -\lambda(x)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} &\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot s(x)\| \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log (|\cos \beta_n| \|A^n(x) \cdot s_n(x)\| + |\text{sen} \beta_n| \|A^n(x) \cdot u_n(x)\|) \\ &= \limsup_n \frac{1}{n} \log (\|A^n(x)\|^{-1} + |\text{sen} \beta_n| \|A^n(x)\|) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \max\{\|A^n(x)\|^{-1}, |\text{sen} \beta_n| \|A^n(x)\|\} \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \max\{-\log \|A^n(x)\|, \log |\text{sen} \beta_n| + \log \|A^n(x)\|\} \\ &\leq \max\left\{-\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|, \limsup_n \left(\frac{1}{n} \log |\text{sen} \beta_n| + \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|\right)\right\} \\ &= \max\{-\lambda(x), -2\lambda(x) + \lambda(x)\} = -\lambda(x) \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot s(x)\| = -\lambda(x)$ y esto prueba que E_x^s es el subespacio buscado.

Tomamos ahora un vector v que no pertenezca a E_x^s y llamamos γ_n al ángulo entre los vectores $s_n(x)$ y v entonces

$$\begin{aligned} \|A^n(x) \cdot v\| &= \|(\cos \gamma_n) A^n(x) \cdot s_n(x) + (\text{sen} \gamma_n) A^n(x) \cdot u_n(x)\| \\ &\geq |\text{sen} \gamma_n| \|A^n(x) \cdot u_n(x)\| = |\text{sen} \gamma_n| \|A^n(x)\| \end{aligned}$$

Como v no es colineal a $s(x)$, $|\text{sen} \gamma_n| \in (\epsilon, 1]$ a partir de un n_0 . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\text{sen} \gamma_n| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| = \lambda(x)$$

Por otro lado $\|A^n(x) \cdot v\| \leq \|A^n(x)\| \|v\|$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|v\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| = \lambda(x)$$

Esto prueba (2.4).

Para probar la última parte simplemente tomamos un vector $v \in E_x^s$. Luego

$$-\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log \|A^{n+1}(x) \cdot v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \log \|A^n(T(x))A(x) \cdot v\|$$

Entonces $A(x) \cdot v \in E_{T(x)}^s$, y esto prueba que E_x^s es invariante por el cociclo. Finalmente como A depende mediblemente de x , también lo hacen los vectores s_n y u_n , como el límite de funciones medibles es una función medible, concluimos que el mapa $x \mapsto E_x^s$ es medible. \square

Si además la transformación T es invertible, tenemos la siguiente versión de Oseledets

Teorema 2.3 (Oseledets, caso invertible [Os]). *Sean $T : X \rightarrow X$ una transformación biyectiva que preserva la medida μ , y $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ con la condición de integrabilidad (2.1).*

- Si $\lambda(x) = 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (2.5)$$

- Para μ -ctp x con $\lambda(x) > 0$ existe una descomposición $\mathbb{R}^2 = E_x^s \oplus E_x^u$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| = \begin{cases} \lambda(x) & \text{si } v \in \mathbb{R}^2 \setminus E_x^s \\ -\lambda(x) & \text{si } v \in E_x^s \setminus \{0\} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x) \cdot v\| = \begin{cases} -\lambda(x) & \text{si } v \in \mathbb{R}^2 \setminus E_x^u \\ \lambda(x) & \text{si } v \in E_x^u \setminus \{0\} \end{cases} \quad (2.7)$$

- Los espacios E_x^s y E_x^u dependen mediblemente del punto x , son invariantes por el cociclo, y satisfacen la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sen} \angle(E_{T^n(x)}^s, E_{T^n(x)}^u) = 0 \quad (2.8)$$

Los espacios E_x^s y E_x^u se llaman *espacios de Oseledets*.

Demostración. La parte (2.5) sale directamente del Teorema 2.2. Sean E_x^s y E_x^u los subespacios del Teorema 2.2 aplicados a los cocíctos F y F^{-1} respectivamente. Es claro que se cumple (2.6) y (2.7). Para que exista tal descomposición necesitamos probar que $E_x^s \neq E_x^u$ ctp.

Definimos las funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log \|A^n | E_x^s\| \quad \text{y} \quad g_n(x) = \frac{1}{n} \log \|A^{-n} | E_x^s\|$$

Utilizando la identidad de cocíctos y que los subespacios E_x^s son unidimensionales vemos que $g_n(x) = -(f_n \circ T^{-n})(x)$. Sabemos que $f_n \rightarrow -\lambda$ ctp entonces dado $\epsilon > 0$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_n(x) + \lambda(x)| > \epsilon\}) = 0$.

Como T es μ -invariante el conjunto $\{x : |f_n(x) + \lambda(x)| > \epsilon\}$ tiene la misma medida que $\{x : |(f_n \circ T^k)(x) + \lambda(T^k(x))| > \epsilon\}$ para todo k , en particular para $-n$. Como λ es μ -invariante obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x : |(f_n \circ T^{-n})(x) + \lambda(x)| > \epsilon\}) = 0$$

Luego $(f_n \circ T^{-n}) \rightarrow -\lambda$ ctp sii $g_n \rightarrow \lambda$ ctp.

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{-n} | E_x^s\| = \lambda(x)$ pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^{-n} | E_x^u\| = -\lambda(x)$, de donde $E_x^s \neq E_x^u$.

Para la última parte observamos que si $B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ entonces

$$\|B\|^{-2} \leq \frac{\sin \angle(Bv, Bu)}{\sin \angle(v, u)} \leq \|B\|^2$$

Luego tomando logaritmo obtenemos que

$$|\log \sin \angle(Bv, Bu) - \log \sin \angle(v, u)| \leq 2\|B\|$$

Si llamamos $\varphi(x) = \log \sin \angle(E_x^s, E_x^u)$ tenemos que $|\varphi \circ T(x) - \varphi(x)| \leq 2\|A(x)\| \in L^1(X, \mu)$, por la condición de integrabilidad (2.1).

Concluimos por el Lema 2.1 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi \circ T^n(x) = 0$ que es equivalente a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sin \angle(E_{T^n(x)}^s, E_{T^n(x)}^u) = 0$ \square

El siguiente es un corolario del teorema de Oseledets, que será utilizado más adelante. Relaciona el exponente de Lyapunov de un cocícto, con la integración del mismo actuando sobre el espacio estable.

Corolario 2.4. *Supongamos que el sistema (X, T, μ) es ergódico y que el cocícto A tiene exponente positivo. Sea $v_x \in E_x^s$ vector unitario del subespacio estable. Entonces $\lambda(A) = -\int_X \log |A(x) \cdot v_x| d\mu(x)$*

Demostración. Sea $\psi(x) = -\log |A(x) \cdot v_x|$. La condición de integrabilidad (2.1) nos dice que ψ es una función integrable. La invarianza del subespacio

E_x^s nos da

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \psi(T^j(x)) &= - \sum_{j=0}^{n-1} \log \|A(T^j(x)) \cdot v_{T^j(x)}\| \\
&= - \log \left(\prod_{j=0}^{n-1} \|A(T^j(x)) \cdot v_{T^j(x)}\| \right) \\
&= - \log \|A(T^{n-1}(x)) \dots A(T(x))A(x) \cdot v_x\| \\
&= - \log \|A^n(x) \cdot v_x\|
\end{aligned}$$

Luego aplicando los teoremas de Oseledets y de Birkhoff, más la ergodicidad del sistema obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \log \|A^n(x) \cdot v_x\| d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{j=0}^{n-1} \psi(T^j(x)) d\mu(x) \\
&= \int_X \tilde{\psi}(x) d\mu(x) = \int_X \psi(x) d\mu(x) = - \int_X \log \|A(x) \cdot v_x\| d\mu(x)
\end{aligned}$$

□

2.4. Hiperbolicidad Uniforme

El teorema de Oseledets (Teorema 2.3) nos da muy buena información sobre el comportamiento del cociclo, siempre que conozcamos el valor del exponente de Lyapunov. En particular, la dinámica resulta mucho más rica cuando dicho número es positivo. El problema ahora es determinar cuándo un cociclo tiene exponente positivo ctp. La hiperbolicidad uniforme nos garantiza esto.

En esta sección, X será un espacio topológico Hausdorff compacto, y $T : X \rightarrow X$ una función continua. Si $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ es una función continua, decimos que el cociclo A es *uniformemente hiperbólico* si existen constantes $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ y una descomposición continua de $\mathbb{R}^2 = E_x^s \oplus E_x^u$ tal que:

$$\|A^n(x) \cdot v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E_x^s \quad \forall n > 0 \quad (2.9)$$

$$\|A^{-n}(x) \cdot v\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E_x^u \quad \forall n > 0 \quad (2.10)$$

En realidad, se puede probar que la continuidad de la descomposición es una consecuencia de la continuidad de A y de la contracción-expansión (ecuaciones (2.9) y (2.10)).

Ejemplo 2.3. Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorfismo lineal del toro \mathbb{T}^2 via una matriz hiperbólica $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Tomando $T = f$, y $A_T = A$ obtenemos un cociclo uniformemente hiperbólico, ya que $A_T^n(x) = A^n(x) = Df_x^n$. De la hiperbolicidad de la matriz A tenemos la hiperbolicidad uniforme del cociclo.

Hasta aquí tenemos dos conceptos a priori distintos: por un lado el concepto de exponente de Lyapunov es un concepto que depende de la medida mientras que la hiperbolicidad uniforme se define para cocíclos continuos, sin importar cual sea la medida. La hiperbolicidad que nos da el teorema de Oseledets es una aproximación a lo que sería la hiperbolicidad ideal, o sea la uniforme. Si bien son conceptos distintos, es claro que en el caso en que μ sea una medida de Borel T -invariante, siempre que tengamos un cociclo A uniformemente hiperbólico, los espacios estables e inestables de la hiperbolicidad uniforme y los del teorema de Oseledets van a coincidir ctp, y su exponente de Lyapunov será positivo ctp.

Observación 2.1. *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, y $T : X \rightarrow X$ una función continua que preserva la medida μ . Sea A un cociclo uniformemente hiperbólico sobre T . Entonces, el exponente de Lyapunov de A es positivo ctp.*

Demostración. Tomemos la ecuación (2.10).
Sea $y = T^{-n}(x)$ y $w = A^{-n}(x) \cdot v = A^{-n}(T^n(y)) \cdot v$. Entonces, utilizando la identidad de cocíclos:

$$\|A^{-n}(x) \cdot v\| \leq C\lambda^n \|v\| \Leftrightarrow \|w\| \leq C\lambda^n \|A^n(y) \cdot w\|$$

Podemos suponer que w es de norma 1, luego

$$\|A^n(y)\| \geq \|A^n(y) \cdot w\| \geq \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{n} \log \|A^n(y)\| \geq \frac{1}{n} \frac{1}{C} + \log \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Deducimos que $\lambda(y) \geq \log \left(\frac{1}{\lambda}\right) > 0$ □

Tener exponente de Lyapunov positivo en un punto, nos dice que la norma de $A^n(x)$ crece exponencialmente con n . La observación anterior nos dice aún más: la hiperbolicidad uniforme garantiza crecimiento exponencial de la norma, pero ésta tasa de crecimiento es uniforme para todos los puntos en el espacio X . En otras palabras existen constantes $C > 0$, $\tau > 1$ tales que $\|A^n(x)\| \geq C\tau^n$, $\forall n > 0$, $\forall x \in X$.

En realidad ésta es una condición necesaria y suficiente como muestra la siguiente proposición. La prueba es muy similar a la prueba del teorema de Oseledets y se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 2.1 ([Yo]). *Un cociclo A es uniformemente hiperbólico si y sólo si existen constantes $C > 0$ y $\tau > 0$ tales que*

$$\|A^n(x)\| \geq Ce^{\tau n} \quad \forall n \geq 0, \forall x \in X$$

Ejemplo 2.4. Sea $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ una función continua sobre X espacio topológico compacto. Supongamos que todas las entradas de la matriz $A(x)$ son estrictamente positivas para cualquier punto x . Veamos que el cociclo A

es uniformemente hiperbólico.

La continuidad de A y la compacidad de X nos dice que las entradas de la matriz $A(x)$: a_x , b_x , c_x y d_x son mayores que cierto δ para todo punto $x \in X$. Ahora tomamos un vector (v, w) en \mathbb{R}^2 tal que $v, w > 0$, entonces si llamamos $(v_1, w_1) = A(x) \cdot (v, w)$ tenemos $v_1, w_1 > 0$ y su producto es:

$$\begin{aligned} v_1 w_1 &= (a_x v + b_x w)(c_x v + d_x w) = v^2 a_x c_x + a_x d_x v w + c_x b_x v w + w^2 b_x d_x \\ &> v w (a_x d_x + b_x c_x) = v w (1 + 2b_x c_x) > v w (1 + 2\delta) \end{aligned}$$

Si llamamos $(v_n, w_n) = A^n(x) \cdot (v, w)$ inductivamente obtenemos que

$$v_n w_n = v w \prod_{j=0}^{n-1} (1 + 2b_{T^j(x)} c_{T^j(x)}) > v w (1 + 2\delta)^n$$

Esto prueba que el producto de las entradas del vector crece uniformemente de manera exponencial. Entonces también lo hace su norma. Luego por la Proposición 2.1 tenemos que A es uniformemente hiperbólico.

Obstrucciones topológicas a la hiperbolicidad

La hiperbolicidad uniforme es una definición puramente dinámica para un cociclo lineal, aunque en sistemas dinámicos la relación dinámica-topología siempre termina siendo determinante. Para difeomorfismos en variedades diferenciables, la “simple” petición de contracción-expansión en el espacio tangente tiene fuertes restricciones topológicas. En particular, para el caso de superficies se sabe que si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov (globalmente hiperbólico), entonces, necesariamente M debe ser el toro \mathbb{T}^2 , y f es conjugado a un automorfismo lineal ([Fr]).

Sería de esperarse que para cociclos en general, también existiera alguna restricción para un cociclo uniformemente hiperbólico. Éste es en realidad el caso.

Proposición 2.2. *Sea $X = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $T : X \rightarrow X$ una función continua. Si $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ es un cociclo uniformemente hiperbólico, y llamamos a , t y e a los grados topológicos de los mapas A , T y E^s respectivamente, entonces*

$$2a = (t - 1)e \tag{2.11}$$

Demostración. Cuando hablamos de grado topológico de A nos referimos al grado topológico del mapa inducido por A colapsando $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ (el toro relleno, ver apéndice) a S^1 .

Primero que nada tenemos que los mapas

$$T : S^1 \rightarrow S^1, \quad A : S^1 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad E^s : S^1 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$$

son homotópicos a los mapas

$$e^{2\pi xi} \mapsto e^{2\pi xti}, \quad e^{2\pi xi} \mapsto R_{2\pi ax}, \quad e^{2\pi x} \mapsto \mathbb{R}e^{i\pi ex}$$

Como A es uniformemente hiperbólico, tenemos la relación $A(x) \cdot E_x^s = E_{T(x)}^s$. Esto implica la ecuación $\deg(A \cdot E^s) = \deg(E^s \circ T)$. El grado de la composición es el producto de los grados, luego $\deg(E^s \circ T) = et$.

Por otro lado

$$A(x) \cdot E_x^s \approx R_{2\pi ax} \cdot \mathbb{R}e^{i\pi ex} = \mathbb{R}e^{2\pi axi + \pi exi} = \mathbb{R}e^{\pi xi(2a+e)}$$

El grado es un invariante homotópico, luego $\deg(A \cdot E^s) = 2a + e$.

Juntando las dos igualdades obtenemos

$$2a + e = te \Leftrightarrow 2a = e(t - 1)$$

□

Estabilidad de los uniformemente hiperbólicos

En la sección anterior vimos que la hiperbolicidad uniforme nos garantiza exponente positivo, y por ende una dinámica rica. Veremos aquí que esta dinámica no sólo es rica, sino que no se rompe por pequeñas perturbaciones del cociclo.

La siguiente observación relaciona la hiperbolicidad de un cociclo con la de sus productos.

Observación 2.2. *Un cociclo (A, T) es uniformemente hiperbólico si y sólo si (A^k, T^k) es uniformemente hiperbólico para todo $k \geq 0$ (o equivalentemente existe un $k_0 > 0$ tal que (A^{k_0}, T^{k_0}) es uniformemente hiperbólico).*

Demostración. Por la identidad de cociclos tenemos que $A_T^{nk}(x) = (A_{T^k}^k)^n(x)$ de donde se deduce el resultado. □

Proposición 2.3. *Sea (A, T) un cociclo uniformemente hiperbólico y $B : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ una función continua. Entonces, si B está suficientemente cerca de A , (B, T) es uniformemente hiperbólico.*

Aquí estar cerca se refiere a la topología dada por la distancia: $d(A, B) = \sup \{\|A(x) - B(x)\| : x \in X\}$.

Demostración. Sea $C_\alpha^u(x) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \angle(v, E_x^u) \leq \alpha \text{ o } v = 0\}$. Por la continuidad de A y la expansividad sobre E_x^u , si tomamos un α suficientemente chico, tenemos que existe un entero positivo K_1 tal que

$$\|A^j(x) \cdot v\| \geq 2\|v\|, \quad \forall v \in C_\alpha^u(x), \text{ y } j \geq K_1$$

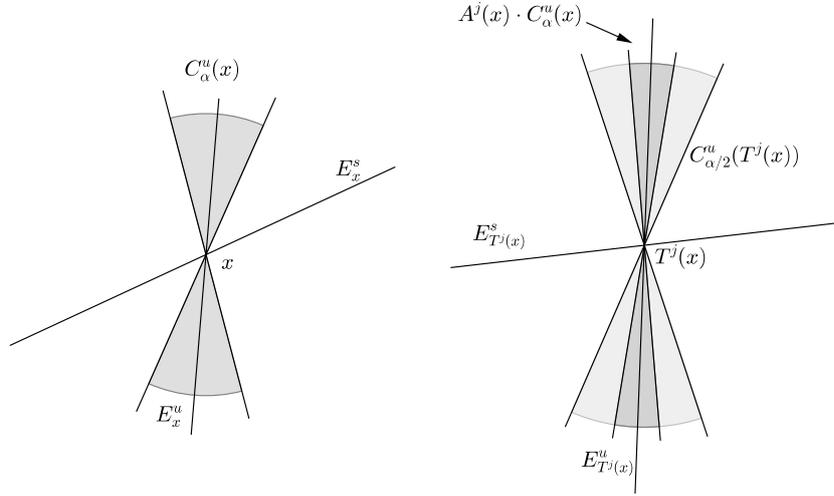


Figura 2.3: Estabilidad por conos

De la misma forma sabemos que existe un entero positivo K_2 tal que

$$A^j(x) \cdot C_\alpha^u(x) \subset C_{\alpha/2}^u(T^j(x)), \quad \forall j \geq K_2$$

Fijamos ahora un K positivo que cumpla las dos condiciones.

Existe un $\epsilon > 0$ suficientemente chico tal que si $\|A - B\| < \epsilon$ y $v \in C_\alpha^u(x)$ entonces $\|B^K(x) \cdot v\| \geq 2\|v\|$. Además, si $v \in C_\alpha^u(x) \Rightarrow B^K(x) \cdot v \in C_\alpha^u(T^K(x))$. Luego, si $m > 0$ entonces: $B^{Km}(x) \cdot C_\alpha^u(x) \subset C_\alpha^u(T^{Km}(x))$ que implica que $\|B^{Km}(x) \cdot v\| \geq 2^m\|v\|$. Obtenemos que $\|B^{Km}(x)\| \geq 2^m$ y la Proposición 2.1 nos dice que (B^k, T^k) es uniformemente hiperbólico. Finalmente por la Observación 2.2 tenemos que (B, T) es uniformemente hiperbólico. \square

Teorema de Bochi-Mañé

La Proposición 2.3 nos dice que si un cociclo (A, T) es uniformemente hiperbólico, entonces existe un entorno abierto \mathcal{U} de A dentro de los cocíelos continuos sobre T , tal que cualquier cociclo en \mathcal{U} es uniformemente hiperbólico. Dicho de otra forma, si A es uniformemente hiperbólico y B esta “cerca” de A entonces B también es uniformemente hiperbólico.

El siguiente teorema nos dice que sin contar a los uniformemente hiperbólicos dentro de los cocíelos continuos, la mayoría de los cocíelos tienen exponente de Lyapunov nulo. Esto hace que sea muy difícil encontrar ejemplos de cocíelos no uniformemente hiperbólicos con exponente de Lyapunov positivo.

El teorema fué enunciado por Mañé en [Ma] donde dió una idea de como probarlo (en realidad el teorema fue enunciado en el contexto de los difeomorfismos que preservan volumen, pero presentamos aquí la versión de cocíclo lineales). Finalmente Bochi en [Bo] fué quien dió la prueba del teorema.

Si bien el teorema es sumamente importante, la prueba se aleja bastante del propósito de este trabajo. El lector interesado podrá consultar las referencias mencionadas (la prueba también se encuentra en [AB1] y en [Vi]).

Teorema 2.5 (Bochi-Mañé). *Sea T un homeomorfismo de un espacio compacto de Hausdorff X , y sea μ una medida de probabilidad ergódica T -invariante con soporte total. Sea $\mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))^1$ el conjunto de todos los cocíclo continuos sobre T . Entonces, existe un conjunto residual \mathcal{R} en $\mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ tal que si $A \in \mathcal{R}$ entonces el cocíclo (A, T) es uniformemente hiperbólico o el exponente de Lyapunov de (A, T) respecto a μ es cero.*

¹Al conjunto $\mathcal{C}(X, \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ lo dotamos con la topología de la convergencia uniforme.

Capítulo 3

La fórmula de Herman-Ávila-Bochi

En el capítulo anterior vimos que dentro de los cocíelos continuos, a grandes rasgos pasa lo siguiente: o el cocíelo es uniformemente hiperbólico o se puede perturbar para tener exponente de Lyapunov cero. Esto nos dice que los cocíelos con exponente de Lyapunov positivo que no son uniformemente hiperbólicos son difíciles de encontrar.

En [He] Herman desarrolló un metodo para acotar por debajo los exponente de Lyapunov de ciertos tipos de cocíelos, y dió el primer ejemplo de un cocíelo no uniformemente hiperbólico con exponente de Lyapunov positivo (ctp) para el toro \mathbb{T}^2 .

3.1. La fórmula de Herman

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \rightarrow X$ ergódica respecto a μ , y $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ una función medible que cumple la condición de integrabilidad (2.1).

Para $\theta \in \mathbb{R}$ definimos el cocíelo $AR_\theta(x) = A(x)R_\theta$, donde

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

es la rotación de ángulo θ .

Como T es ergódica, la función $A \mapsto \lambda(A)$ está bien definida, y el mapa $\theta \mapsto \lambda(AR_\theta)$ es una función medible.

Enunciamos ahora la fórmula de Herman.

Teorema 3.1 ([He]). *Sean μ , T y A como arriba:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta \geq \int_X \log \left(\frac{\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}}{2} \right) d\mu(x) \quad (3.1)$$

Esta fórmula nos dice que si nuestro cociclo original A no es una rotación ($\|A\| > 1$) en algún subconjunto de medida positiva, entonces existe un subconjunto de medida positiva de θ 's en S^1 tales que el cociclo AR_θ tiene exponente de Lyapunov positivo, sin importar cual sea el exponente de A .

La idea de Herman fué ver que la función $\theta \mapsto \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)$ se extiende de manera subarmónica a todo el disco \mathbb{D} , donde ρ es el *radio espectral*, o sea el máximo del módulo de los valores propios. La desigualdad se deduce del principio del máximo para las funciones subarmónicas.

Ávila y Bochi prueban en [AB2] que la ecuación (3.1) es en realidad una igualdad.

Teorema 3.2 ([AB2]). *Sean μ , T y A como arriba:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta = \int_X \log \left(\frac{\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}}{2} \right) d\mu(x) \quad (3.2)$$

La idea de la prueba aquí es la misma idea que tuvo Herman, pero llevada más lejos. Ellos logran probar que el mapa $\theta \mapsto \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)$ se extiende al disco \mathbb{D} pero de manera armónica. Lo interesante de la prueba es que simplemente utiliza algo de topología y análisis complejo.

La prueba del Teorema 3.2 es un corolario de un teorema más general (Teorema 3.3) que enunciamos a continuación.

Llamaremos $N(A) = \log \left(\frac{\|A\| + \|A\|^{-1}}{2} \right)$.

Teorema 3.3 ([AB2]). *Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) d\theta = \sum_{i=1}^n N(A_i) \quad (3.3)$$

En la sección a continuación (sección 3.2) probaremos el Teorema 3.2 asumiendo el Teorema 3.3. La prueba del Teorema 3.3 se encuentra en la sección 3.3.

Antes de entrar directamente en la prueba del Teorema 3.2 vamos a probar la siguiente proposición que nos dará una noción intuitiva de la constante $N(A)$, como el promedio de expansión de la matriz A .

Proposición 3.1. *Sea $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, entonces*

$$N(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|A(\cos \theta, \sin \theta)\| d\theta$$

Demostración. La descomposición de Cartan nos dice que existen rotaciones R_α, R_β y una matriz diagonal H_c ($c \geq 1$) tales que $A = R_\beta H_c R_\alpha$. Luego podemos suponer que $A = H_c$, y además $\|A\| = \|R_\beta H_c R_\alpha\| = c$. Tenemos que probar:

$$\log\left(\frac{c+c^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + c^{-2} \sin^2 \theta} d\theta$$

El término de la derecha es

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log(c^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2 \log(c) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log(c^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta - \log(c)$$

Sea $F(b) = \int_0^\pi \log(b^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta$.

Derivamos F y aplicamos el cambio de variable: $x = \tan \theta$. Luego,

$$\begin{aligned} F'(b) &= 2b \int_0^\pi \frac{1}{b^2 + \tan^2 \theta} d\theta = 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b^2 + \tan^2 \theta} d\theta \\ &= 2b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + x^2)(1 + x^2)} dx \end{aligned}$$

Para resolver esta última integral aplicamos el teorema de los residuos, integrando la función $f(z) = \frac{1}{(b^2+z^2)(1+z^2)}$ (que es meromorfa) sobre la curva $\gamma_r = [-r, r] \cup A_r$ donde $A_r = \{re^{it} : t \in [0, \pi]\}$. Es fácil ver que $\int_{A_r} f(z) dz \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow +\infty$. Luego

$$2b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + x^2)(1 + x^2)} dx = 4b\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, bi) \right) = \frac{2\pi}{b+1}$$

Obtenemos la ecuación diferencial $F'(b) = \frac{2\pi}{b+1}$. La solución con condición inicial $F(1) = 0$ es $F(b) = 2\pi \log \frac{b+1}{2}$.

Finalmente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + c^{-2} \sin^2 \theta} d\theta = -\log(c) + \frac{1}{2\pi} F(c^2) = \log\left(\frac{c+c^{-1}}{2}\right)$$

□

3.2. Demostración del Teorema 3.2 asumiendo el Teorema 3.3

Antes de pasar directamente a la prueba del Teorema 3.2 vamos a probar otro teorema como paso intermedio.

Teorema 3.4. Sean A_1, A_2, \dots, A_n matrices en $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) d\theta = \sum_{i=1}^n N(A_i) \quad (3.4)$$

Demostración. Sea $B_\theta = A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta$. Tomo $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi]$.
 Por el Teorema 3.3 tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(B_\theta R_{\tilde{\theta}}) d\tilde{\theta} = N(B_\theta) \quad (3.5)$$

Por otro lado, fijado $\tilde{\theta}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(B_\theta R_{\tilde{\theta}}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta R_{\tilde{\theta}}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_{\tilde{\theta}} R_\theta) d\theta = N(A_1 R_{\tilde{\theta}}) + \sum_{j=2}^n N(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n N(A_j) \end{aligned}$$

Finalmente, integrando la ecuación (3.5) sobre θ y aplicando Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(B_\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(B_\theta R_{\tilde{\theta}}) d\tilde{\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(B_\theta R_{\tilde{\theta}}) d\theta \right) d\tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n N(A_j) d\tilde{\theta} = \sum_{j=1}^n N(A_j) \end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar la fórmula de Herman-Avila-Bochi (Teorema 3.2). Antes de empezar obtenemos la siguiente desigualdad para matrices en $SL(2, \mathbb{R})$.

Observación 3.1. Sea $A \in SL(2, \mathbb{R})$, entonces $N(A) \leq \log \|A\| < \log(2) + N(A)$

Demostración.

$$N(A) = \log \left(\frac{\|A\| + \|A\|^{-1}}{2} \right) \leq \log \left(\frac{\|A\| + \|A\|}{2} \right) = \log(\|A\|)$$

Por otro lado

$$N(A) = \log \left(\frac{\|A\| + \|A\|^{-1}}{2} \right) = \log(\|A\| + \|A\|^{-1}) - \log(2) > \log(\|A\|) - \log(2)$$

Concluimos que $N(A) \leq \|A\| < \log(2) + N(A)$

□

Demostración del teorema 3.2. Sea $\tilde{A}_j(x) = A(T^j(x))$ para $j = 1, \dots, n$. Aplicamos la observación anterior a la matriz

$$(AR_\theta)^n(x) = A(T^{n-1}(x))R_\theta \dots A(x)R_\theta = \tilde{A}_n(x)R_\theta \dots \tilde{A}_1(x)R_\theta$$

y obtenemos que

$$N((AR_\theta)^n(x)) \leq \log\|(AR_\theta)^n(x)\| < \log(2) + N((AR_\theta)^n(x))$$

La primer desigualdad y la condición de integrabilidad (2.1) de A nos dicen que la función $\theta \mapsto N((AR_\theta)^n(x))$ es integrable. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N((AR_\theta)^n(x))d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \log(2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N((AR_\theta)^n(x))d\theta \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.4 tenemos que

$$\sum_{j=1}^n N(\tilde{A}_j(x)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta < \frac{1}{2\pi} \log(2) + \sum_{j=1}^n N(\tilde{A}_j(x))$$

es decir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n N(A(T^{j-1}(x))) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \log(2) + \sum_{j=1}^n N(A(T^{j-1}(x))) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N(A(T^{j-1}(x))) &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi n} \log(2) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N(A(T^{j-1}(x))) \end{aligned}$$

Los términos a la izquierda y a la derecha de las desigualdades son los promedios de Birkhoff de la función $x \mapsto N(A(x))$ que es integrable porque el cociclo A cumple la condición de integrabilidad (2.1). El teorema de Birkhoff también nos dice que la función límite $\tilde{N}(A(x))$ es integrable e integra igual que la función $N(A(x))$. La ergodicidad de T nos da para x ctp

$$\begin{aligned} \int_X N(A(x))d\mu(x) &= \int_X \tilde{N}(A(x))d\mu(x) = \tilde{N}(A(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} N(A(T^j(x))) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta \end{aligned}$$

Si hubiera convergencia dominada obtendríamos

$$\begin{aligned} \int_X N(A(x))d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\|(AR_\theta)^n(x)\|d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta)d\theta \end{aligned}$$

lo que probaría el teorema.

Veamos que hay convergencia dominada.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{n} \log\|(AR_\theta)^n(x)\| = \frac{1}{n} \log\|A(T^{n-1}(x))R_\theta \dots A(x)R_\theta\| \\ &\leq \frac{1}{n} \log(\|A(T^{n-1}(x))R_\theta\| \dots \|A(x)R_\theta\|) \\ &= \frac{1}{n} \log(\|A(T^{n-1}(x))\| \dots \|A(x)\|) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log\|A(T^j(x))\| = f_n(x) \end{aligned}$$

Estos son los promedios de Birkhoff de la función $x \mapsto \log\|A(x)\|$ que es integrable, luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \log\|A(x)\|d\mu(x) < \infty$$

Esto prueba que hay convergencia dominada y por lo tanto el teorema. \square

3.3. Demostración del Teorema 3.3

Definimos las siguientes matrices

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{z+z^{-1}}{2} & -\frac{z-z^{-1}}{2i} \\ \frac{z-z^{-1}}{2i} & \frac{z+z^{-1}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$T_z = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2} & -\frac{z^2-1}{2i} \\ \frac{z^2-1}{2i} & \frac{z^2+1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para } z \in \mathbb{C}$$

Es claro que si $z \neq 0$ entonces $zS_z = T_z$. Además, si $z = e^{i\theta}$ tenemos que $S_z = R_\theta$.

Dadas $A_1, \dots, A_n \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, definimos

$$C_z = \prod_{j=1}^n A_j T_z = A_n T_z \dots A_1 T_z \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Entonces si $z = e^{i\theta}$:

$$C_z = \prod_{j=1}^n A_j T_z = \prod_{j=1}^n A_j e^{i\theta} R_\theta = z^n \prod_{j=1}^n A_j R_\theta \quad (3.6)$$

Esto implica que

$$\rho(C_z) = \rho\left(\prod_{j=1}^n A_j R_\theta\right) \quad \text{si } z = e^{i\theta}$$

Llamemos $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ a los valores propios de la matriz C_z y supongamos que $|\lambda_2(z)| < |\lambda_1(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Tenemos el siguiente lema.

Proposición 3.2. Sean $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ los valores propios de la matriz $C_z \in M_2(\mathbb{C})$ tales que $|\lambda_2(z)| < |\lambda_1(z)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Entonces, las funciones $z \mapsto \lambda_i(z)$ con $i = 1, 2$ son holomorfas y se extienden continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Las entradas de la matriz $C_z \in M_2(\mathbb{C})$ son polinomios en z que llamamos a, b, c, d . Luego,

$$C_z = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $p_z(t) = t^2 - \text{tr}(C_z)t + \det(C_z)$. Si $\lambda_1(z), \lambda_2(z)$ denotan los valores propios de C_z , entonces

$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{\text{tr}(C_z) \pm \sqrt{\text{tr}(C_z)^2 - 4\det(C_z)}}{2} \quad (3.7)$$

Como $\text{tr}(C_z)$ y $\det(C_z)$ son funciones holomorfas, bastaría con poder definir la raíz cuadrada de manera holomorfa. Esto lo podemos hacer siempre que $|\lambda_1(z)| \neq |\lambda_2(z)|$ que es nuestro caso. La fórmula (3.7) igual nos da continuidad aunque $|\lambda_1(z)| = |\lambda_2(z)|$. Por eso la continuidad en el borde. \square

Tenemos que si $|\lambda_2(z)| < |\lambda_1(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$\rho(C_z) = \max\{|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)|\} = |\lambda_1(z)|$$

Luego, por la Proposición 3.2

$$\log \rho(C_z) = \log |\lambda_1(z)|$$

es una función armónica en \mathbb{D} , que se extiende continuamente a $\overline{\mathbb{D}}$.

Por la propiedad del principio del máximo para las funciones armónicas, obtenemos que para $r \in [0, 1)$

$$\log \rho(C_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{rS^1} \log \rho(C_z) dz$$

La siguiente proposición nos dice que la continuidad en el borde nos deja pasar esta propiedad a $r = 1$.

Proposición 3.3. Sea $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Entonces

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt$$

Demostración. Definimos para $r \in [0, 1]$ la función $u_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como $u_r(t) = u(re^{it})$. Afirmamos que $u_r \rightrightarrows u_1$ (convergencia uniforme). Como u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ tenemos que es uniformemente continua.

Tomamos $\epsilon > 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$ entonces $|u(z) - u(w)| < \epsilon$. Tomamos un $r_0 > 0$ tal que si $r \geq r_0$ entonces

$$|re^{it} - e^{it}| \leq |r - 1| |e^{it}| = |r - 1| < \delta$$

(no depende del t). Luego, para todo $t \in [0, 2\pi]$ tenemos $|u_r(t) - u_1(t)| = |u(re^{it}) - u(e^{it})| < \epsilon$. Esto prueba nuestra afirmación.

Luego, $u_r \rightrightarrows u_1$ implica que $\int u_r \rightarrow \int u_1$. La armonicidad de u en \mathbb{D} nos da

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt = u(0)$$

□

Continuando con la prueba,

$$\log \rho(C_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \log \rho(C_z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) d\theta$$

Si el radio espectral de C_0 fuera $\prod_{j=1}^n \frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2}$, entonces obtendríamos

$$\begin{aligned} \log \rho(C_0) &= \log \left(\prod_{j=1}^n \frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2} \right) = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n N(A_j) \end{aligned}$$

probando el teorema.

Lema 3.1. Los valores propios de C_0 son cero y $\prod_{j=1}^n \frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2}$.

Demostración. Primero, por la descomposición de Cartan, tenemos que para cada $A_j \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, existen matrices $R_{\alpha_j}, R_{\beta_j}, H_{c_j}, c_j \geq 1$ tales que $A_j = R_{\beta_j} H_{c_j} R_{\alpha_j}$. Además, $\|A_j\| = \|R_{\beta_j} H_{c_j} R_{\alpha_j}\| = \|H_{c_j}\| = c_j$. Por otro lado, tenemos que $T_{zw} = T_z T_w$ que implica que $S_{zw} = S_z S_w$. De esto deducimos

que $R_\theta T_0 = T_0 R_\theta = e^{-i\theta} T_0$. Llamamos $\alpha = \prod_{j=1}^n e^{i\alpha_j}$ y $\beta = \prod_{j=1}^n e^{i\beta_j}$. Luego,

$$\begin{aligned}
C_0 &= \prod_{j=1}^n A_j T_0 = \prod_{j=1}^n (R_{\beta_j} H_{c_j} R_{\alpha_j}) T_0 = \prod_{j=1}^n R_{\beta_j} H_{c_j} (R_{\alpha_j} T_0) \\
&= \prod_{j=1}^n R_{\beta_j} H_{c_j} (e^{-i\alpha_j} T_0) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^n R_{\beta_j} H_{c_j} T_0 \\
&= e^{i\alpha} R_{\beta_n} \left(\prod_{j=2}^n H_{c_j} T_0 R_{\beta_{j-1}} \right) H_{c_1} T_0 \\
&= e^{i\alpha} R_{\beta_n} \prod_{j=2}^n H_{c_j} (e^{-i\beta_{j-1}} T_0) H_{c_1} T_0 = e^{i(\alpha+\beta)} \prod_{j=1}^n H_{c_j} T_0
\end{aligned}$$

Entonces $\rho(C_0) = \rho \left(\prod_{j=1}^n H_{c_j} T_0 \right)$ y $\forall j = 1, \dots, n$ tenemos que la matriz

$H_{c_j} T_0$ tiene valores propios 0 y $\frac{c_j + c_j^{-1}}{2}$, este último con su vector propio correspondiente $(-i, 1)$ (no depende de j). Luego

$$\left(\prod_{j=1}^n H_{c_j} T_0 \right) (-i, 1) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{c_j + c_j^{-1}}{2} \right) (-i, 1)$$

y concluimos que

$$\rho(C_0) = \prod_{j=1}^n \frac{c_j + c_j^{-1}}{2} = \prod_{j=1}^n \frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2}$$

□

Para terminar de probar el Teorema 3.3 tenemos que probar que $|\lambda_2(z)| < |\lambda_1(z)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Esta es la parte delicada de la prueba.

El siguiente lema nos da una condición necesaria y suficiente para que los valores propios de una matriz en $M_2(\mathbb{C})$ tengan el mismo módulo.

Lema 3.2. *Sea $C \in M_2(\mathbb{C})$ con $\det(C) \neq 0$, y λ_1, λ_2 sus valores propios. Entonces $|\lambda_2| = |\lambda_1|$ si y sólo si $\frac{(\operatorname{tr} C)^2}{4\det(C)} \in [0, 1]$*

Demostración. Sea $t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Tenemos que $\frac{(\operatorname{tr} C)^2}{4\det(C)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2} = \frac{1}{4}(t + t^{-1} + 2)$. Luego,

$$\frac{(\operatorname{tr} C)^2}{4\det(C)} \in [0, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{4}(t + t^{-1} + 2) \in [0, 1] \Leftrightarrow t + t^{-1} \in [-2, 2] \Leftrightarrow |t| = 1$$

□

Luego, para que $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ en \mathbb{D} necesitamos que

$$\frac{(\operatorname{tr} C_z)^2}{4 \det C_z} = \frac{(\operatorname{tr} C_z)^2}{4z^{2n}} \notin [0, 1] \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

lo que es equivalente a que

$$Q(z) = \frac{\operatorname{tr} C_z}{2z^n} \notin [-1, 1] \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Para probar esto vamos a ver que $Q^{-1}([-1, 1])$ está contenido en S^1 . Primero observamos que si $z = e^{i\theta} \in S^1$ la ecuación (3.6) nos dice que

$$Q(z) = \frac{\operatorname{tr}(C_z)}{2z^n} = \frac{\operatorname{tr}(z^n A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)}{2z^n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) \in \mathbb{R}$$

Luego, $Q(S^1) \subset \mathbb{R}$. Vamos a probar que S^1 contiene a todas las preimágenes de $[-1, 1]$ por Q utilizando argumentos topológicos.

Recordemos que el espacio proyectivo de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ es

$$\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) / \pm \operatorname{Id}$$

Sea $Y = \{A \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) : |\operatorname{tr}(A)| \leq 2\}$ y $X = \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \operatorname{Id}$. ($|\operatorname{tr}|$ está bien definido en $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$).

Lema 3.3. *Existe una función continua $F : X \mapsto S^1$ tal que $F^{-1}(\{1\}) = Y$ y el mapa inducido $\tilde{F} : \pi_1(X) \mapsto \pi_1(S^1)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Definimos F de la siguiente manera.

Tomamos una matriz $A \in X$. Si $A \in Y$ entonces definimos $F(A) = 1$. Si $A \notin Y$ entonces $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 > 0$ y sus valores propios son reales, llamemosles λ y λ^{-1} con $|\lambda| > 1$. Si $\pm v, \pm w$ son los vectores propios de norma 1 asociados a λ y λ^{-1} respectivamente, definimos $F(A) = \frac{v^2}{w^2}$. Tomamos los cuadrados para que quede bien definida.

En el interior de Y la función es constante 1, y por eso continua. Fuera de Y también ya que si perturbo poco la matriz, perturbo poco sus valores propios y direcciones propias. El problema de la continuidad es en el borde de Y .

Como las matrices llevan rectas en rectas, podemos estudiar su acción en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Si dos matrices en X están cerca en norma, sus respectivas acciones en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ son parecidas (Por esta razón le quitamos la identidad a $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$).

Tomamos $A \in X$ tal que $|\operatorname{tr}(A)| = 2$. Luego, la acción de A en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ tiene un único punto fijo. Entonces si B está suficientemente cerca de A y $B \notin Y$, la acción de B tendrá dos puntos fijos, que tendrán que estar cerca. Esto significa que los vectores propios de B están cerca o son casi opuestos. Concluimos que $F(B) = \frac{v^2}{w^2} \approx 1 = F(A)$. Esto prueba la continuidad de F .

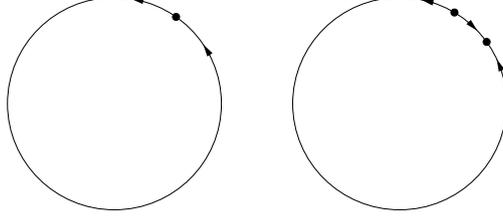


Figura 3.1: Acción de las matrices A y B en el espacio proyectivo.

Para la segunda parte del lema, basta con encontrar una curva cerrada γ en X que genere $\pi_1(X)$ tal que $F \circ \gamma$ tenga grado 1. Sea M una matriz diagonal hiperbólica. Definimos $\gamma : S^1 \rightarrow X$ como $\gamma(e^{i\theta}) = R_{\theta/2}M$. Claramente γ genera $\pi_1(X)$ ya que el género de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ proviene del subgrupo de rotaciones por la descomposición de Iwasawa (ver apéndice).

$$F \circ \gamma(1) = -1 \text{ y } F \circ \gamma(-1) = 1.$$

Tenemos que $R_{-\theta/2}M$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta/2) & -\sin(-\theta/2) \\ \sin(-\theta/2) & \cos(-\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos(\theta/2) & c^{-1} \sin(\theta/2) \\ -c \sin(\theta/2) & c^{-1} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Por otro lado $R_{\theta/2}M$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos(\theta/2) & -c^{-1} \sin(\theta/2) \\ c \sin(\theta/2) & c^{-1} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Luego $\overline{R_{-\theta/2}M(v)} = R_{\theta/2}M(\bar{v})$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Esto implica que si $\{v, w\}$ son los vectores propios de $R_{\theta/2}M$, entonces $\{\bar{v}, \bar{w}\}$ son los vectores propios de $R_{-\theta/2}M$. Obtenemos que $F \circ \gamma(\bar{z}) = \overline{F \circ \gamma(z)}$. Esto implica que $F \circ \gamma$ tiene grado 1. \square

Lema 3.4. $Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1$ tiene por lo menos $2n$ componentes conexas.

Demostración. Sea $g : S^1 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ definida como $g(e^{i\theta}) = R_{\theta/2}$. Es claro que g es un generador del $\pi_1(\text{PSL}(2, \mathbb{R}))$, ya que el subgrupo de rotaciones es lo que le da género a $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Definimos $h : S^1 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ como $h(e^{i\theta}) = A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta$ y a este producto de matrices le llamamos B_θ . Fijado j tenemos que A_j es homotópica a la identidad, por ser $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ conexo. Luego $g^2 = R_{\theta/2} R_{\theta/2} = R_\theta$ es homotópica a $A_j R_\theta$. Concluimos que g^{2n} es homotópico a B_θ . Podemos suponer que $B_\theta \neq \pm I$, sino aplicando una homotopía obtenemos lo mismo.

El mapa $F \circ g^{2n} : S^1 \rightarrow S^1$ está bien definido y por el Lema 3.3 tiene grado $2n$. Entonces el mapa $F \circ h$ tiene grado $2n$, y la preimagen del 1 por esta función tiene por lo menos $2n$ componentes conexas.

$$\begin{aligned} (F \circ h)^{-1}(\{1\}) &= h^{-1} \circ F^{-1}(\{1\}) = h^{-1}(F^{-1}(\{1\})) = h^{-1}(Y) \\ &= \left\{ e^{i\theta} \in S^1 : |\operatorname{tr}(B_\theta)| \leq 2 \right\} = Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1 \end{aligned}$$

□

Lema 3.5. $Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1$ es la unión de $2n$ sub-intervalos de S^1

Demostración. Como $\operatorname{tr}(C_z)$ es un polinomio de grado menor o igual a $2n$, tenemos que los mapas Q y Q' tienen grado menor o igual a $2n$.

Recordamos que $Q(S^1) \subset \mathbb{R}$. Para ver esto nuevamente sea $z = e^{i\theta}$ entonces,

$$Q(z) = \frac{\operatorname{tr}(C_z)}{2z^n} = \frac{\operatorname{tr}(z^n A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta)}{2z^n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) \in \mathbb{R}$$

Luego, en cada componente conexa de $S^1 \setminus Q^{-1}([-1, 1])$ hay por lo menos un cero de $Q'(z)$ y el lema anterior nos da por lo menos $2n$ componentes conexas.

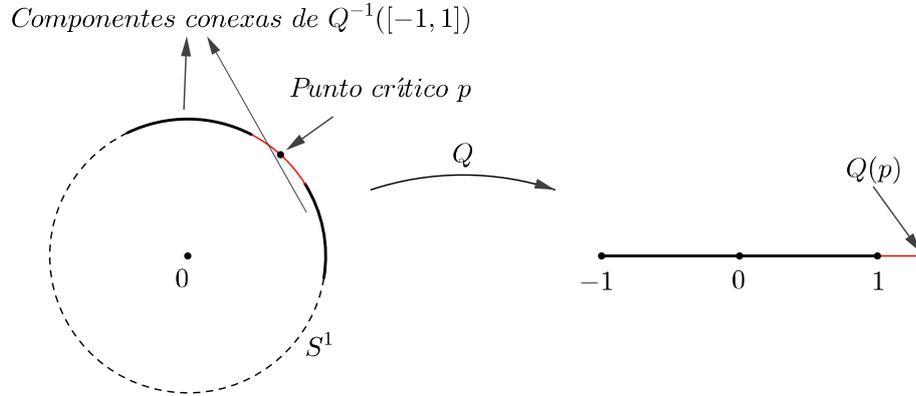


Figura 3.2: Puntos críticos

Q y Q' son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego preservan ángulos y orientación, por lo que $Q'(z)$ tiene exactamente $2n$ ceros, y todos ellos están en $S^1 \setminus Q^{-1}([-1, 1])$.

Entonces cada componente conexa de $Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1$ se mapea difeomórficamente en $[-1, 1]$ y el lema queda demostrado. □

El Lema 3.4 nos dice que $Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1$ tiene por lo menos $2n$ componentes conexas pero el grado de Q es menor o igual a $2n$. Luego

$Q^{-1}([-1, 1]) \cap S^1$ tiene exactamente $2n$ componentes conexas y el Lema 3.5 nos dice que cada una de estas componentes conexas se mapea difeomórficamente en $[-1, 1]$. Concluimos que $Q^{-1}([-1, 1]) \subset S^1$.

Resumen de la prueba del teorema 3.3. Tomamos las matrices

$$C_z = \prod_{j=1}^n A_j T_z = A_n T_z \dots A_1 T_z \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

donde

$$T_z = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2} & -\frac{z^2-1}{2i} \\ \frac{z^2-1}{2i} & \frac{z^2+1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para } z \in \mathbb{C}$$

Llamemos $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ a los valores propios de la matriz C_z . Los Lemas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 nos dicen que $|\lambda_2(z)| < |\lambda_1(z)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Además la Proposición 3.2 nos dice que la función $z \mapsto \lambda_1(z)$ es holomorfa. Luego $\log \rho(C_z) = \log |\lambda_1(z)|$ es una función armónica en el disco \mathbb{D} que se extiende continuamente al borde del disco. Aplicando el principio del máximo de las funciones armónicas obtenemos

$$\log \rho(C_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \log \rho(C_z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho(A_n R_\theta \dots A_1 R_\theta) d\theta$$

Finalmente el Lema 3.1 nos dice que

$$\begin{aligned} \log \rho(C_0) &= \log \left(\prod_{j=1}^n \frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2} \right) = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{\|A_j\| + \|A_j\|^{-1}}{2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n N(A_j) \end{aligned}$$

probando el teorema. □

El teorema anterior (Teorema 3.2) nos dice que aunque nuestro cociclo original A no tenga exponente positivo, igual podemos obtener un subconjunto de medida positiva de θ 's en S^1 tales que el cociclo $x \mapsto A(x)R_\theta$ tiene exponente de Lyapunov positivo. El corolario siguiente nos permite conocer un poco más de ese subconjunto, ya que nos acota la medida de los θ 's que no nos sirven, es decir los que tienen exponente nulo.

Corolario 3.5. *Sea ν la medida de Lebesgue en S^1 , entonces*

$$\nu(\{\theta \in S^1 : \lambda(AR_\theta) = 0\}) \leq \frac{2\pi}{\lambda(A)}$$

Demostración. En la prueba del Teorema 3.2 vimos que

$$\frac{1}{n} \log \|(AR_\theta)^n(x)\| \leq f_n(x)$$

donde $f_n(x)$ era el promedio de Birkhoff de la función $f(x) = \log \|A(x)\|$. Luego, si $\theta \in S^1$

$$\begin{aligned} \lambda(AR_\theta) &= \int_X \lambda(AR_\theta, x) d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(AR_\theta)^n(x)\| d\mu(x) \\ &\leq \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu(x) = \int_X \log \|A(x)\| d\mu(x) \\ &\leq \int_X \log(\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}) d\mu(x) \end{aligned}$$

Llamamos $U = \{\theta \in S^1 : \lambda(AR_\theta) = 0\}$.

$$\int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta = \int_{U^c} \lambda(AR_\theta) d\theta \leq \nu(U^c) \int_X \log(\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}) d\mu$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_X N(A(x)) d\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{U^c} \lambda(AR_\theta) d\theta \\ &\leq \frac{2\pi - \nu(U)}{2\pi} \int_X \log(\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}) d\mu \end{aligned}$$

de donde concluimos

$$\nu(U) \leq 2\pi \log 2 \left(\int_X \log(\|A(x)\| + \|A(x)\|^{-1}) d\mu \right)^{-1} \leq \frac{2\pi \log 2}{\lambda(A)} \leq \frac{2\pi}{\lambda(A)}$$

□

3.4. Un ejemplo interesante

Sea $X = S^1$ con la medida de Lebesgue que notaremos m . Tomamos $T : S^1 \rightarrow S^1$ una rotación irracional (es ergódica respecto a m).

Definimos el cociclo $A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ como

$$A(e^{it}) = H_c R_t \quad \text{con} \quad H_c = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \quad c > 1 \text{ fijo.}$$

Es claro que $a = \text{deg}(A) = 1$, y que $t = \text{deg}(T) = 1$ por ser una rotación. La Proposición 2.2 nos dice que A no puede ser uniformemente hiperbólico, ya que $t = 1$ y $a = 1$ no tiene solución para la ecuación (2.11).

Ahora calcularemos su exponente de Lyapunov, usando la fórmula de Avila-Bochi.

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N} : (AR_\theta)^n(e^{it}) = A^n(e^{i(\theta+t)})$

- Caso $n = 1$: $(AR_\theta)(z) = A(e^{it})R_\theta = H_c R_t R_\theta = H_c R_{\theta+t} = A(e^{i(\theta+t)})$
- Caso $n > 1$: Sea $z = e^{it}$ y $z_j = T^{j-1}(z)$ entonces

$$\begin{aligned} (AR_\theta)^n(e^{it}) &= \prod_{j=1}^n (AR_\theta)(T^{j-1}(e^{it})) = \prod_{j=1}^n (AR_\theta)(z_j) = \prod_{j=1}^n A(e^{i\theta} z_j) \\ &= \prod_{j=1}^n A(e^{i\theta} T^{j-1}(z)) = \prod_{j=1}^n A(T^{j-1}(e^{i\theta} z)) = A^n(e^{i\theta} z) \end{aligned}$$

y la afirmación queda probada.

Luego,

$$\lambda(AR_\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(AR_\theta)^n(z)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(e^{i\theta} z)\| = \lambda(A)$$

y $\|A(e^{it})\| = \|H_c R_t\| = \|H_c\| = c$.

Por el Teorema 3.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(AR_\theta) d\theta = \int_{S^1} \log \left(\frac{\|A(z)\| + \|A(z)\|^{-1}}{2} \right) dm(z) \\ &= \log \left(\frac{c + c^{-1}}{2} \right) > 0 \end{aligned}$$

Luego, este es un cociclo con exponente de Lyapunov positivo (y constante) ctp. pero no es uniformemente hiperbólico.

Capítulo 4

Densidad de exponente positivo

En este capítulo mostraremos un resultado debido a Oliver Knill [Kn]. El mismo dice que dentro de los cocíclo medibles y acotados, aquellos con exponente de Lyapunov positivo son densos.

Para la prueba del teorema es de vital importancia la fórmula de Herman (3.1) que nos permite obtener cocíclo con exponente positivo dentro de una familia de cocíclo, conociendo propiedades globales de la familia.

El espacio topológico que vamos a estudiar es

$$\mathcal{A} = L^\infty(X, \text{SL}(2, \mathbb{R})) = \{A : X \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) : a_{ij} \in L^\infty(X)\}$$

con la topología inducida por la norma

$$\|A\| = \sup \{\|A(x)\| : x \in X\}$$

(topología de la convergencia uniforme).

Llamamos \mathcal{P} al conjunto de los cocíclo con exponente positivo. El resultado que vamos a probar es

Teorema 4.1 ([Kn]). *Si el sistema (X, T, μ) es ergódico, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ es denso en \mathcal{A} .*

La idea de la prueba es simple, partimos de un cocíclo arbitrario $A \in \mathcal{A}$ y lo perturbamos utilizando la formula de Herman para obtener un $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ cercano a A en nuestra topología.

4.1. Sistemas inducidos y cocíclo derivados

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida. Sea $Z \subset X$ con $\mu(Z) > 0$. Si $x \in Z$ es positivamente recurrente podemos definir el tiempo de primer retorno

$\tau(x) = \inf\{n > 0 : T^n(x) \in Z\}$. El teorema de recurrencia de Poincaré nos dice que si T es ergódica, τ está definido para casi todo punto en Z . Es fácil ver que τ es medible por ser T medible. Definimos $T_Z(x) = T^{\tau(x)}(x)$. Esta función resulta medible por ser τ y T medibles. Además la medida de probabilidad μ_Z definida como $\mu_Z = \frac{\mu}{\mu(Z)}$ es preservada por T_Z .

Observación 4.1. T_Z preserva la medida μ_Z .

Demostración. Tomamos $U \in Z$. Suponderemos sin pérdida de generalidad que todos los puntos en U son positivamente recurrentes.

Sea $Z_n = \{x \in U : \tau(x) = n\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_Z(T_Z(U)) &= \mu_Z(T_Z(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} Z_n)) = \mu_Z(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} T^n(Z_n)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mu_Z(T^n(Z_n)) \\ &= \frac{1}{\mu(Z)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mu(T^n(Z_n)) = \frac{1}{\mu(Z)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mu(Z_n) \\ &= \frac{1}{\mu(Z)} \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} Z_n) = \frac{1}{\mu(Z)} \cdot \mu(U) = \mu_Z(U) \end{aligned}$$

□

Llamamos a (Z, T_Z, μ_Z) *sistema inducido* a partir (X, T, μ) . El sistema inducido resulta ergódico siempre que el sistema (X, T, μ) sea ergódico.

El cociclo $A_Z(x) = A^{\tau(x)}(x)$ lo llamaremos *cociclo derivado* de A sobre el sistema (Z, T_Z, μ_Z) . Además si $\log\|A\| \in L^1(X, \mu)$ tenemos que $\log\|A_Z\| \in L^1(Z, \mu_Z)$. Esto lo vemos de la siguiente manera.

Definimos nuevamente $Z_j = \{z \in Z : \tau(z) = j\}$. Claramente es una partición de Z , al igual que $\{T^j(Z_j) : j \geq 1\}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_Z \log\|A_Z\| d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Z_j} \log\|A^j\| d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \int_{Z_j} \log\|A \circ T^i\| d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \int_{T^i(Z_j)} \log\|A\| d\mu \leq \int_X \log\|A\| d\mu < \infty \end{aligned}$$

Esto prueba que $\log\|A_Z\|$ está en $L^1(Z, \mu_Z)$ y por el Teorema 2.1 tiene su respectivo exponente de Lyapunov.

El siguiente lema relaciona el exponente del cociclo original con el del cociclo derivado.

Lema 4.1. *Sea $Z \subset X$ con $\mu(z) > 0$ y (A_Z, T_Z) el cociclo derivado. Entonces $\lambda(A_Z) \cdot \mu(Z) = \lambda(A)$.*

Demostración. Sea $\tau_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau((T_Z)^j(x))$. Utilizando la identidad de cocíclos obtenemos

$$\begin{aligned} A^{\tau_n(x)}(x) &= \prod_{j=0}^{n-1} A^{\tau(T_Z^j(x))}(T^{\sum_{i=0}^{j-1} \tau(T_Z^i(x))}(x)) = \prod_{j=0}^{n-1} A^{\tau(T_Z^j(x))}(T_Z^j(x)) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} A_Z(T_Z^j(x)) = (A_Z)^n(x) \end{aligned}$$

Luego, por definición de λ y aplicando el teorema de Birkhoff a la función τ

$$\begin{aligned} \lambda(A_Z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|(A_Z)^n(x)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^{\tau_n(x)}(x)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tau_n(x)}{n \tau_n(x)} \log \|A^{\tau_n(x)}(x)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tau_n(x)}{n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau_n(x)} \log \|A^{\tau_n(x)}(x)\| = \tilde{\tau}(x) \lambda(A) \end{aligned}$$

La ergodicidad del sistema nos dice que

$$\tilde{\tau}(x) = \int_Z \tilde{\tau}(x) d\mu_Z(x) = \int_Z \tau(x) d\mu_Z(x) = \frac{1}{\mu(Z)} \int_Z \tau(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(Z)}$$

La última igualdad viene dada por el lema de Kac (ver apéndice). \square

4.2. Demostración del Teorema 4.1

Tomamos un $A \in \mathcal{A}$ arbitrario, y sea $\epsilon > 0$. Vamos a probar que existe un $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ tal que $\|A - B\| < \epsilon$.

Sea $\delta > 1$ tal que

$$2\|A\| |\delta - \delta^{-1}| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (4.1)$$

Ahora tomamos un natural n suficientemente grande que verifique

$$8\pi\|A\| \frac{\delta + \delta^{-1}}{n \log \delta} \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (4.2)$$

Tomamos un $(n, \frac{1}{n})$ conjunto de Rohlin Y . Esto significa que $Y, T(Y), \dots, T^{n-1}(Y)$ son disjuntos dos a dos, y $\mu\left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(Y)\right) \leq \frac{1}{n}$. La existencia de este conjunto de Rohlin se debe a un lema del mismo nombre (ver [Ha]). Es claro que $\mu(Y) \leq \frac{1}{n}$ sino $\mu\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(Y)\right) > 1$ por preservar T la medida de probabilidad μ .

Llamamos $Z = Y \cup \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(Y) \right)$. Tenemos que $\mu(Z) \leq \frac{2}{n}$.

Ahora, podemos encontrar facilmente un cociclo $C \in \mathcal{A}$ con $\|A - C\| < \frac{\epsilon}{3}$ que verifique $C_Z(x) \notin \text{SO}(2, \mathbb{R}) \forall x \in Z$ ($\text{SO}(2, \mathbb{R})$ es el conjunto de rotaciones).

Esto se debe a que $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ tiene medida nula en $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Podemos ver esto nuevamente con la descomposición de Iwasawa, que nos dice que topologicamente $\text{SL}(2, \mathbb{R}) = S^1 \times \mathbb{D}$ y tal S^1 es homeomorfo a $\text{SO}(2, \mathbb{R})$. Luego bastaría con perturbar el cociclo A solamente en $A^{-1}(\text{SO}(2, \mathbb{R})) \cap Z$ “empujando” muy poquito su imagen para que no intersectara $\text{SO}(2, \mathbb{R})$. Además, si $z \in Z$ el tiempo de primer retorno $\tau(z)$ es menor o igual a n . Esto implica que las entradas de C_Z están en $L^\infty(Z, \mu_Z)$.

También podemos pedirle que $\|C\| \leq 2\|A\|$ por la continuidad de la función norma.

Ahora aplicamos la fórmula de Herman (3.1) para el cociclo derivado C_Z sobre el sistema dinámico inducido (Z, T_Z, μ_Z) . Como C_Z no es una rotación en Z obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(C_Z R_\theta) d\theta = \int_Z \log \left(\frac{\|C_Z(x)\| + \|C_Z(x)\|^{-1}}{2} \right) d\mu_Z(x) > 0$$

Luego, existe un $\beta_0 \in S^1$ tal que $\lambda(C_Z R_{\beta_0}) > 0$. Sea χ_Z la función característica del conjunto Z . Tenemos la siguiente observación

Observación 4.2. Si $A \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $(AR_{\chi_Z \beta})_Z = A_Z R_\beta$

Demostración. Tomamos $x \in Z$ y sea $k = \tau(x)$. Luego

$$\begin{aligned} (AR_{\beta \chi_Z})_Z(x) &= (AR_{\beta \chi_Z})^k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (AR_{\beta \chi_Z})(T^j(x)) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} A(T^j(x)) R_{\beta \chi_Z(T^j(x))} = \left(\prod_{j=0}^{k-1} A(T^j(x)) \right) R_\beta \\ &= A^k(x) R_\beta = A_Z(x) R_\beta \end{aligned}$$

□

Definimos el cociclo $D = CR_{\beta_0 \chi_Z}$. Luego por la observación anterior tenemos que $D_Z = (CR_{\beta_0 \chi_Z})_Z = C_Z R_{\beta_0}$. Y $\lambda(D_Z) = \lambda(C_Z R_{\beta_0}) > 0$. El Lema 4.1 nos dice que $\lambda(D) = \lambda(D_Z) \cdot \mu(Z) > 0$.

Hasta ahora la fórmula de Herman nos permitió obtener un cociclo con exponente positivo, el problema es que la fórmula no nos dice nada acerca de la ubicación de ese cociclo. Tenemos que C está cerca de A , pero D podría estar muy lejos de C y por ende de A .

Si $\beta_0 \leq \frac{4\pi}{n \log(\delta)}$ (β_0 es chico) es fácil ver que D es el cociclo buscado. Supongamos en adelante que $\beta_0 > \frac{4\pi}{n \log(\delta)}$.

La ergodicidad del sistema (X, T, μ) nos dice que μ -ctp el exponente de Lyapunov de D es positivo y constante. Luego de acuerdo al teorema de Oseledets, tenemos que para x ctp existe un subespacio unidimensional E_x^s que es invariante: $D(x) \cdot E_x^s = E_{T(x)}^s$ y además si $v_x \in E_x^s$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|D^n(x) \cdot v_x\| = -\lambda(D)$$

Tomamos a v_x de norma 1. Sea $u(x)$ el ángulo que forman el primer vector de mi base de \mathbb{R}^2 con el vector v_x . Es decir $R_{u(x)} \cdot e_1(x) = v_x$.

Definimos ahora el cociclo $E = R_{u \circ T} H_{\delta^{-1}} R_{u \circ T}^{-1} D$ y vemos por definición que tiene la misma dirección invariante que D :

$$\begin{aligned} E(x) \cdot E_x^s &= R_{u(T(x))} H_{\delta^{-1}} R_{u(T(x))}^{-1} D(x) \cdot E_x^s = R_{u(T(x))} H_{\delta^{-1}} R_{u(T(x))}^{-1} \cdot E_{T(x)}^s \\ &= R_{u(T(x))} H_{\delta^{-1}} \cdot e_1(x) = R_{u(T(x))} \cdot e_1(x) = E_{T(x)}^s \end{aligned}$$

Luego, por el Corolario 2.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= - \int_X \log |E(x) \cdot v_x| d\mu(x) = - \int_X \log |\delta^{-1} D(x) \cdot v_x| d\mu(x) \\ &= \log \delta - \int_X \log |D(x) \cdot v_x| d\mu(x) = \log \delta + \lambda(D) \end{aligned}$$

Por el Lema 4.1 tenemos

$$\lambda(E_Z) = \lambda(D_Z) + \frac{\log \delta}{\mu(Z)} \geq \lambda(D_Z) + \frac{n}{2} \log \delta \geq \frac{n}{2} \log \delta$$

Aplicando el Corolario 3.5 al cociclo E_Z vemos que

$$\nu(\{\beta \in S^1 : \lambda(E_Z R_\beta) = 0\}) \leq \frac{2\pi}{\lambda(E_Z)} \leq \frac{4\pi}{n \log \delta}$$

Podemos encontrar un $\beta_1 \in S^1$ con

$$\beta_1 \leq \frac{4\pi}{n \log \delta} \tag{4.3}$$

tal que

$$\lambda(E_Z R_{(\beta_1 - \beta_0)}) > 0$$

Llamamos $B = ER_{\chi_Z(\beta_1 - \beta_0)}$. Por el Lema 4.1 y la Observación 4.2 tenemos que $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}$:

$$\lambda(B) = \lambda(B_Z) \mu(Z) = \lambda((ER_{\chi_Z(\beta_1 - \beta_0)})_Z) \mu(Z) = \lambda(E_Z R_{(\beta_1 - \beta_0)}) \mu(Z) > 0$$

Afirmamos que $\|A - B\| \leq \epsilon$.

Para ver esto definimos nuevamente un cociclo $F = R_{u(T)}H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}C$.

$$\|F\| = \|R_{u(T)}H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}CR_{(\beta_1-\beta_0)}\| = \|H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}C\| \leq \|C\|(\delta + \delta^{-1})$$

Luego, por definición de F tenemos $B = FR_{\chi_Z\beta_1}$.

Utilizando las ecuaciones (4.2) y (4.3)

$$\begin{aligned} \|B - F\| &= \|FR_{\chi_Z\beta_1} - F\| \leq \|F\|\|I - R_{\chi_Z\beta_1}\| \leq \|F\|\|\beta_1\| \leq \|C\|(\delta + \delta^{-1})\|\beta_1\| \\ &\leq 2\|A\|(\delta + \delta^{-1})\|\beta_1\| \leq 2\|A\|(\delta + \delta^{-1})\frac{4\pi}{n \log \delta} \leq \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

De la misma manera tenemos que

$$\begin{aligned} \|F - C\| &= \|R_{u(T)}H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}C - C\| \leq \|C\|\|I - R_{u(T)}H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}\| \\ &= \|C\|\|R_{u(T)}R_{u(T)}^{-1} - R_{u(T)}H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1}\| \\ &= \|C\|\|R_{u(T)}(R_{u(T)}^{-1} - H_{\delta^{-1}}R_{u(T)}^{-1})\| \\ &= \|C\|\|R_{u(T)}(I - H_{\delta^{-1}})R_{u(T)}^{-1}\| = \|C\|\|H_{(\delta^{-1}-1)}\| \\ &\leq \|C\|\|\delta - \delta^{-1}\| \leq 2\|A\|\|\delta - \delta^{-1}\| \leq \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

La última desigualdad sale de la ecuación (4.1).

Finalmente

$$\|B - A\| \leq \|B - F\| + \|F - C\| + \|C - A\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

Apéndice A

Descomposiciones de $SL(2, \mathbb{R})$

Primero que nada observamos que hay una biyección entre $SL(2, \mathbb{R})$ y las transformaciones de Möbius del plano hiperbólico dada por

$$A \mapsto \varphi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ donde si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ entonces } \varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Con esta relación obtenemos una acción de $SL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{R}^2 dada por

$$A \cdot z = \varphi_A(z)$$

Además esta acción es libre y transitiva.

Llamamos A al conjunto de matrices en $SL(2, \mathbb{R})$ diagonales, $A = \{a_t : t \in \mathbb{R}\}$ donde $a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$.

Llamamos N al conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{R} \right\}$.

Notamos K al conjunto de rotaciones del plano: $K = \{R_\theta : \theta \in S^1\}$.

Haciendo simples cuentas, vemos que la acción del subgrupo N en el plano nos da el flujo horizontal, así como la acción de A en la línea imaginaria $\mathbb{R}i$ es el flujo vertical. Además las transformaciones de Möbius que fijan $i = (0, 1)$ (los estabilizadores de i) son exactamente las que provienen del subgrupo de rotaciones K .

Teorema A.1 (Descomposición de Cartan).

Dada una matriz $g \in SL(2, \mathbb{R})$ existen rotaciones $k_1, k_2 \in K$ y una matriz diagonal $a \in A$ tales que $g = k_1 a k_2$.

Demostración. En lugar de trabajar con matrices, vamos a trabajar con las transformaciones de Möbius. Haremos un abuso de notación por simplicidad, hablaremos por igual de una matriz M que de su transformación asociada φ_M . Tomamos $g \in SL(2, \mathbb{R})$, y el número complejo i . Luego sabemos que existe una rotación k_1 tal que $k_1^{-1} g \cdot i$ pertenece a la línea imaginaria. Luego existe

una matriz $a \in A$ tal que $a^{-1}k_1^{-1}g.i = i$. Como los estabilizadores de i son las rotaciones, tenemos que $a^{-1}k_1^{-1}g \in K$. Entonces existe k_2 tal que $a^{-1}k_1^{-1}g = k_2 \Leftrightarrow k_1ak_2 = g$. \square

Teorema A.2 (Descomposición de Iwasawa).

Dada una matriz $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ existe una rotación $k \in K$, una matriz diagonal $a \in A$ y una matriz $n \in N$ tales que $g = kan$. Además el mapa

$$K \times A \times N \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Al igual que en la prueba anterior trabajaremos con las transformaciones de Möbius.

Tomamos $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Tenemos que $\text{Im}(g^{-1}.i) > 0$ porque las transformaciones de Möbius preservan el semiplano superior.

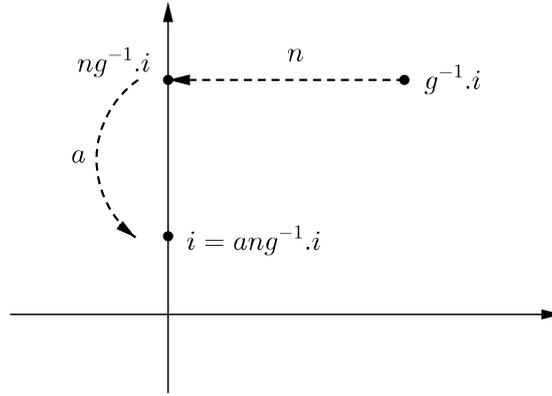


Figura A.1: Acción de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ en el plano

La acción de N en el plano es el flujo horizontal. Luego, existe una única matriz $n \in N$ tal que $ng^{-1}.i$ pertenece a la línea imaginaria. La acción de A en la recta imaginaria es el flujo vertical, entonces existe y es única la matriz $a \in A$ tal que $ang^{-1}.i = i$. De nuevo, como los estabilizadores de i son las rotaciones, tenemos que $ang^{-1} \in K$, osea que existe una rotación k tal que $ang^{-1} = k^{-1} \Leftrightarrow g = kan$. La unicidad de a y n nos dan la unicidad de k . Entonces el mapa es biyectivo. La continuidad del mapa y de su inversa es trivial. \square

Apéndice B

Algo de teoría ergódica

Teorema B.1 (Teorema ergódico de Birkhoff). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida finita, y $T : X \rightarrow X$ una función biyectiva que preserva la medida μ . Sea f una función integrable. Entonces*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

existe ctp. Además \tilde{f} es una función T -invariante, integrable y $\int_X f(x)dx = \int_X \tilde{f}(x)dx$

Lema B.1 (Lema de recurrencia de Poincaré. Versión medible). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida finita, y $T : X \rightarrow X$ una función biyectiva que preserva la medida μ . Sea $U / \mu(U) > 0$, y $U' = \{x \in U : T^k(x) \in U \text{ para infinitos } k\}$. Entonces $\mu(U \setminus U') = 0$*

Demostración. Supongamos por absurdo que existe $V \subset (U \setminus U')$ tal que $\mu(V) > 0$. Entonces $\exists k_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^k(V) \cap V = \emptyset \quad \forall k \geq k_0$

Luego $\{T^{n \cdot k_0}(V)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ son disjuntos dos a dos:

Si $T^{n_1 k_0}(V) \cap T^{n_2 k_0}(V) \neq \emptyset$ con $n_2 > n_1 \Rightarrow T^{k_0(n_2 - n_1)}(V) \cap V \neq \emptyset$. Esto es absurdo.

$$\text{Entonces: } \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} T^{k_0 n}(V) \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mu(T^{k_0 n}(V)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mu(V) = \infty$$

Pero $\mu(X) < \infty \Rightarrow$ no existe tal conjunto V . □

Lema B.2 (Lema de recurrencia de Poincaré. Versión topológica). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida de Borel finita, con X separable, métrico. Sea $T : X \rightarrow X$ una función biyectiva que preserva la medida μ .*

Entonces $\mathcal{R} = \{x \in X : x \text{ es positivamente recurrente}\}$ tiene medida total.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ base numerable de $X \Rightarrow \mu(A_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Tomamos A'_n como en el lema anterior y $B_n = A'_n \cup \overline{A_n}^c$.

Los conjuntos B_n tienen medida total:

$$\mu(B_n) = \mu(A'_n \cup \overline{A_n^c}) = \mu(A'_n) + \mu(\overline{A_n^c}) = \mu(A'_n) + \mu(A_n^c) = \mu(X)$$

Sea $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} B_n \Rightarrow \mu(\mathcal{R}) = \mu(X)$ (tomar complementos).

Veamos que los puntos de \mathcal{R} son positivamente recurrentes.

Sea $x \in \mathcal{R}$ y U entorno de x . Por ser $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una base, existe un A_{n_0} tal que $x \in A_{n_0} \subset U$.

Pero $x \in \mathcal{R} \Rightarrow x \in A'_{n_0} \cup \overline{A_{n_0}^c} \Rightarrow x \in A'_{n_0} \Rightarrow \exists k > 0 / T^k(x) \in A_{n_0} \subset U$. \square

Lema B.3 (Lema de Kac). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida. Sea $Z \subset X$ con $\mu(Z) > 0$ y $\tau(x) = \inf\{n > 0 : T^n(x) \in Z\}$ el tiempo de primer retorno. Si T es ergódica entonces:*

$$\int_Z \tau(x) d\mu(x) = 1$$

Demostración. Sea $A_n = \{x \in Z : \tau(x) = n\}$, es decir los puntos de Z donde el tiempo de primer retorno es exactamente n . Tenemos que $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. La ergodicidad de T nos dice que casi todo punto $x \in X \setminus Z$ entra (en el futuro) eventualmente en Z . Luego $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_k A_{n,k}$ donde $A_{n,k}$ son los x tales que $T^k(x) \in A_n$ pero $T^j(x) \notin A_n$ si $0 < j < k$. Luego

$$\begin{aligned} \int_Z \tau(x) d\mu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \tau(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \mu(A_{n,k}) \\ &= \mu(X) = 1 \end{aligned}$$

\square

Bibliografía

- [AB1] A. Avila, J. Bochi, *Trieste lectures notes on Lyapunov exponents*, School and Workshop on Dynamical Systems, 30 June-18 July, 2008.
- [AB2] A. Avila, J. Bochi, *A formula with some applications to the theory of Lyapunov exponents*, Israel Journal of Mathematics, **131** (2002), 125-137.
- [Bo] J. Bochi, *Genericity of zero Lyapunov exponents*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **22** (2002), 1667-1696.
- [Fr] J. Franks, *Anosov Diffeomorphisms*, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. AMS Vol 14 (1970), 61-94.
- [F] H. Furstenberg, *Non-commuting random products*, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 377-428.
- [FK] H. Furstenberg, H. Kesten, *Product of random matrices*, Ann. Math. Statist., **31**, (1960) 457-469.
- [Ha] P. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo (1956).
- [He] M. Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2*, Commentarii Mathematici Helvetici, **58** (1983), 453-502.
- [Kn] O. Knill, *Positive Lyapunov exponents for a dense set of bounded measurable $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **12**, no. 2 (1992), 319-331.
- [Ma] R. Mañé, *The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser, **362** (1996), 110-119.
- [Os] V. I. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc., **19** (1968), 197-231.

- [Ru] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd. ed., McGraw-Hill, 1987.
- [Vi] M. Viana, *Lectures on Lyapunov Exponents*, November 7, 2010.
- [Yo] J. C. Yoccoz, *Some questions and remarks about $SL(2, \mathbb{R})$ cocycles*, Modern Dynamical Systems and Applications, Cambridge University Press (2004), 447-458.