

TRABAJO MONOGRÁFICO

**Obstrucciones topológicas a la
existencia de difeomorfismos de
Anosov**

Mauro Camargo

Orientador: Rafael Potrie

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

En esta monografía estudiamos algunas condiciones topológicas que debe cumplir una variedad que admite difeomorfismos de Anosov. Estas relacionan la dinámica de un difeomorfismo de Anosov con la topología algebraica de la variedad en la que actúa.

Usamos estas condiciones para descartar la existencia de difeomorfismos de Anosov en determinadas variedades, a partir del cálculo de la acción inducida por un difeomorfismo en sus anillos de cohomología. Para algunos de estos cálculos, se aprovecha la estructura de producto en cohomología.

Por ejemplo, probamos un teorema debido a A. Gogolev y F. Rodriguez Hertz ([GRH]) que descarta la existencia de difeomorfismos de Anosov transitivos en ciertos fibrados por esferas. Para esto, estudiamos la cohomología de fibrados por esferas, pasando por la cohomología de fibrados vectoriales, el isomorfismo de Thom y la clase de Euler.

Abstract

In this monograph, we study some necessary topological conditions for a manifold to support an Anosov diffeomorphism. These conditions link the dynamics of an Anosov diffeomorphism with the algebraic topology of the manifold on which it acts.

We use these conditions to show certain manifolds do not support Anosov diffeomorphisms by means of the calculation of the action induced by a diffeomorphism on their cohomology rings. Some of these calculations exploit the product structure on the cohomology of said manifolds.

For example, we prove a theorem by A. Gogolev and F. Rodriguez Hertz ([GRH]) which shows that certain sphere bundles do not support transitive Anosov diffeomorphisms. In order to do this, we study the cohomology of sphere bundles via the cohomology of vector bundles, the Thom isomorphism and the Euler class.

Contents

1	Introducción	4
1.1	Enunciados de los resultados	5
1.2	Discusión de las demostraciones	9
1.2.1	Acción de un difeomorfismo de Anosov en $H^*(M)$	9
1.2.2	La fórmula de Künneth y la cohomología de un producto	10
1.2.3	La sucesión de Gysin y la cohomología de un fibrado por esferas	11
1.3	Organización de la monografía	12
2	Difeomorfismos de Anosov	13
2.1	Definición y primeras propiedades	13
2.2	Entropía	16
2.3	Conteo de órbitas periódicas	17
3	Isomorfismo de Thom y clase de Euler	19
3.1	Dualidad de Poincaré en cohomología de de Rham	19
3.1.1	Pairings y dualidad en espacios vectoriales	20
3.1.2	La dualidad de Poincaré	21
3.1.3	El dual de Poincaré a una subvariedad	25
3.2	Isomorfismo de Thom y clase de Euler: fibrados vectoriales	26
3.2.1	Fibrados vectoriales	26
3.2.2	Cohomología con soporte vertical compacto	29
3.2.3	Isomorfismo de Thom	31
3.2.4	Dualidad de Poincaré e intersecciones transversales	38
3.2.5	La clase de Euler de un fibrado vectorial	43
3.3	Isomorfismo de Thom y clase de Euler: fibrados por discos	48
3.3.1	Fibrados por discos	49
3.3.2	El isomorfismo de Thom en un fibrado por discos	49
4	Cohomología de un fibrado por esferas	50
4.1	La cohomología de un producto: la fórmula de Künneth	50
4.2	La clase de Euler de un fibrado por esferas	53
4.2.1	Clase de Euler del fibrado por esferas asociado a un fibrado vectorial	53
4.2.2	Clase de Euler de un fibrado topológico por esferas	53
4.3	La sucesión de Gysin	54

5	Índice de Lefschetz	56
5.1	Idea	56
5.2	Primera definición	56
5.3	Cálculo de ejemplos	58
5.4	Segunda definición	61
5.5	Coincidencia de las definiciones	62
5.6	Difeomorfismos de Anosov y $L(f)$	63
6	Pruebas de los resultados	64
A	Apéndice	75
A.1	Preliminares topológicos	75
A.1.1	Fibrados	75
A.1.2	Transversalidad	78
A.1.3	Orientación	80
A.1.4	Número de intersección	83
A.1.5	Cohomología de de Rham	85
A.1.6	Inducción en los abiertos de una variedad	91
A.1.7	Cohomología singular	92
A.2	Preliminares algebraicos	95

1 Introducción

En muchas situaciones, la topología de un espacio impone restricciones a la dinámica de una transformación actuando en él.

Un ejemplo clásico de esto es el teorema del punto fijo de Brouwer: toda transformación del disco en sí mismo debe tener un punto fijo.

Otro ejemplo es el teorema de Poincaré-Hopf, que implica que no puede haber un campo vectorial sin singularidades en una variedad con característica de Euler no nula. Esto nos dice, entonces, que la característica de Euler de una variedad es una obstrucción a la existencia de un flujo sin singularidades en ella. Por ejemplo, la única superficie cerrada y orientable que admite un tal flujo es el toro.

En esta monografía, veremos obstrucciones topológicas a la existencia de ciertas transformaciones en variedades compactas, los difeomorfismos de Anosov. Asociada a un difeomorfismo de Anosov se tiene una descomposición del fibrado tangente como suma directa de los subfibrados *estable* e *inestable*. Estos subfibrados se contraen y expanden uniformemente, respectivamente, bajo la acción del diferencial del difeomorfismo.

Los ejemplos clásicos de difeomorfismos de Anosov ocurren en toros. Se les llama *Anosov lineales*, y provienen de matrices hiperbólicas con coeficientes enteros. La acción de estas en el espacio euclídeo pasa al cociente como una acción en el toro. La hiperbolicidad de la matriz es lo que nos da la expansión y contracción uniformes.

Esta expansión y contracción uniforme tiene como consecuencia que no todas las variedades puedan admitir difeomorfismos de Anosov. Por ejemplo, en [Sma] se conjetura que toda variedad que admite un difeomorfismo de Anosov debe tener como cubrimiento universal el espacio euclídeo (la conjetura es de hecho más precisa, dice que únicamente las infranilvariedades admiten difeomorfismos de Anosov). En particular, según la conjetura, ninguna variedad cerrada y simplemente conexa debería admitir un difeomorfismo de Anosov, ni ninguna variedad cerrada con grupos de homotopía superiores no triviales.

Trataremos exclusivamente con variedades cerradas.

En el caso de codimensión uno (decimos que un difeomorfismo de Anosov $M \rightarrow M$ es de codimensión uno si el subfibrado estable o inestable tiene dimensión 1), Newhouse probó en [New] que deben ser transitivos. En [Fra2], Franks había probado anteriormente que un difeomorfismo de Anosov transitivo y de codimensión 1 solo es posible en un toro (de hecho, probó que debe ser conjugado a un Anosov lineal). Luego, para variedades de dimensión hasta tres, se sabe que solo hay difeomorfismos de Anosov en toros.

Hay varios resultados que restringen la topología de una variedad que admite un difeomorfismo de Anosov. Por ejemplo, Shiraiwa prueba en [Shi] que una variedad

orientable M con $\dim H^q(M) \leq 1$ para cada q no puede admitir un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable orientable, donde $H^q(M)$ es el q -ésimo grupo de cohomología de M . Otro resultado de este tipo es la prueba de Ruelle y Sullivan en [RS] de que si existe un difeomorfismo de Anosov transitivo con fibrados estable e inestable orientable en una variedad M , entonces $\dim H^{\dim E^u}(M), H^{\dim E^s}(M) \geq 2$. En este segundo ejemplo se da información más precisa acerca de la topología de la variedad agregando la hipótesis de transitividad.

Dado un difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$, la descomposición de TM en subfibrados expandidos y contraídos uniformemente por df impone condiciones fuertes a la dinámica de f , que a su vez imponen condiciones a la acción de f en el anillo de cohomología $H^*(M)$. Dado un isomorfismo de $H^*(M)$, no siempre existe un difeomorfismo que lo realice. Por otra parte, no todo anillo de cohomología soporta los tipos de acciones que debe inducir un difeomorfismo de Anosov en cohomología. En este sentido, parte de lo que haremos será investigar cómo es la posible acción de difeomorfismos en los anillos de cohomología de ciertas variedades, y averiguar si se pueden corresponder a la acción inducida por un difeomorfismo de Anosov.

Nos centraremos en particular en productos y fibrados por esferas. La mayor parte de las ideas para estos casos provienen de [GRH]. En dicho artículo se prueba que $S^2 \times S^2$ no admite difeomorfismos de Anosov, a partir del cálculo de su cohomología, y de la acción allí del mapa inducido por un difeomorfismo, que se puede calcular gracias a la existencia de un producto en cohomología. Esto es luego generalizado a otros productos, y a fibrados por esferas.

Antes de calcular la acción de un difeomorfismo en los anillos de cohomología de productos y fibrados, tendremos en primer lugar que poder calcular, u obtener información sobre estos a partir de la cohomología de la base y la fibra.

Para el caso de un producto, probamos la *fórmula de Künneth*, que nos da explícitamente la cohomología de un producto a partir de la de sus factores.

En el caso de un fibrado por esferas, el objetivo es probar la existencia de una sucesión exacta llamada *sucesión de Gysin*, que en ciertos casos nos permitirá calcular completamente la cohomología del fibrado a partir de la de la base. Para probar la existencia de esta sucesión, tendremos que ver primero la topología de fibrados por discos, donde aparecen el *isomorfismo de Thom* y la *clase de Euler*. Vemos en detalle el caso de fibrados vectoriales y cohomología de de Rham, ya que en este habrá interpretaciones más claras de algunos objetos. El caso general es análogo, sustituyendo cohomología de de Rham por cohomología singular.

1.1 Enunciados de los resultados

En esta sección, enunciamos con precisión los principales resultados que probaremos como conclusión de este trabajo.

Comenzamos definiendo los objetos centrales: los difeomorfismos de Anosov.

Definición 1.1. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov si el fibrado tangente a M se descompone como $TM = E^s \oplus E^u$, donde E^s , E^u son subfibrados continuos de TM , llamados *estable* e *inestable* respectivamente, que cumplen lo siguiente:

1. Son df -invariantes, es decir, $df(E^u) = E^u$ y $df(E^s) = E^s$.
2. Existen C, λ reales tales que $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ de forma que:
 - (a) $\|df^k(v)\| \leq C\lambda^k\|v\|$ para todo $v \in E^s$.
 - (b) $\|df^{-k}(v)\| \leq C\lambda^k\|v\|$ para todo $v \in E^u$.

Notación. Dado x en M , a los subespacios de T_xM asociados a los fibrados E^u y E^s los denotamos por E_x^u y E_x^s , y les llamamos *espacio inestable* y *espacio estable* de x , respectivamente. Luego, se tiene $T_xM = E_x^u \oplus E_x^s$, y $d_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$, $df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ para todo x en M .

Luego, estudiamos la acción de un difeomorfismo de Anosov en los grupos de cohomología de una variedad. Relacionamos además, en el capítulo 5, esta acción con el número de Lefschetz del difeomorfismo, que es un conteo “signado” de sus puntos fijos¹. Además, vemos en el capítulo 2 la relación entre el crecimiento de la cantidad de órbitas periódicas y la entropía² del difeomorfismo. Así, obtenemos el siguiente resultado, que será la herramienta principal para conseguir muchos de los otros. La prueba aparece en [KH], y originalmente el resultado aparece en [Bow]. Se usa en [Shi] y en [GRH] para obtener obstrucciones a la existencia de difeomorfismos de Anosov.

Teorema 1.2. *Sea M una variedad orientable, y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov tal que el fibrado inestable E^u es orientable. Entonces tenemos, si f es transitivo:*

$$\left| \sum_q (-1)^q \text{tr}(f^{*l} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right| = \#\text{Fix}(f^l) = e^{lh_{\text{top}}(f)} + o(e^{lh_{\text{top}}(f)})$$

y en el caso en que f no sea transitivo, se tiene

$$\left| \sum_q (-1)^q \text{tr}(f^{*Kl} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right| = \#\text{Fix}(f^{Kl}) = pe^{Klh_{\text{top}}(f)} + o(e^{Klh_{\text{top}}(f)})$$

¹ver capítulo 5

²ver capítulo 2

siendo $K > 1$ un entero, p la cantidad de piezas subbásicas en la descomposición espectral de f correspondientes a piezas básicas con entropía topológica máxima (igual a $h_{\text{top}}(f)$).

En el enunciado de este teorema, aparece la hipótesis de que el fibrado inestable sea orientable. Esta será una hipótesis que precisaremos en varias oportunidades, ya que es necesaria para poder relacionar el conteo de puntos fijos para un difeomorfismo de Anosov con su acción en cohomología. Es cierto que siempre es posible tomar un cubrimiento doble de la variedad que oriente al fibrado inestable. Sin embargo, no se tiene un buen control sobre la cohomología de este cubrimiento, y por esto no siempre será útil tomarlo.

El teorema 1.2 restringe las clases de isotopía en $\text{Difeo}(M)$ en las que podemos encontrar difeomorfismos de Anosov. Por ejemplo, el siguiente corolario nos dice que no puede existir ninguno isotópico a la identidad. Este resultado fue probado por Shiraiwa en [Shi], aunque daremos una prueba distinta.

Corolario 1.3. *Sea M una variedad orientable, y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov tal que el fibrado inestable E^u es orientable. Entonces, el mapa inducido por f en la cohomología de M no es el mapa identidad.*

Por otro lado, el teorema también restringe los grupos de cohomología de las variedades que admiten difeomorfismos de Anosov. Esto se usa también en [Shi] para dar ejemplos de variedades que no admiten difeomorfismos de Anosov.

Corolario 1.4. *Sea M cerrada y orientable. Entonces, si $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo $q \geq 0$, M no admite difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable E^u orientable.*

Ejemplo 1.5. El corolario anterior se aplica en los siguientes casos.

1. Para cualquier $n > 0$, la esfera S^n no admite difeomorfismos de Anosov.
2. Ninguna variedad que sea cohomológicamente una esfera admite difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable orientable. Por ejemplo, los espacios lente.
3. Los espacios proyectivos complejos no admiten difeomorfismos de Anosov.
4. Un producto de esferas de distintas dimensiones no admite difeomorfismos de Anosov.
5. Un fibrado con base una esfera S^n y fibra una esfera S^m no admite difeomorfismos de Anosov si $m > n$.

En el caso de los ejemplos 4 y 5 que acabamos de mencionar, es necesario hacer el cálculo de grupos de cohomología de productos y fibrados por esferas para ver que el corolario 1.4 se aplica. Esto lo hacemos usando la fórmula de Künneth y la sucesión de Gysin.

También basándonos en el Teorema 1.2, y en cálculos de los grupos de cohomología de fibrados por esferas, se obtiene el siguiente resultado, que aparece originalmente en [GRH].

Teorema 1.6 (Gogolev-Rodriguez Hertz). *Sea M cerrada de dimensión $2n$, y $S \rightarrow M$ un fibrado con fibra S^{2n} . Luego, S no admite difeomorfismos de Anosov transitivos.*

Además, si M es orientable con $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo $q \geq 0$ y $S \rightarrow M$ es un fibrado orientable, entonces S no admite difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable orientable.

Esto se aplica en el caso de $S^2 \times S^2$ que ya mencionamos. El teorema es mucho más general y en este caso se puede dar una prueba más simple como la que se da en [GRH], que luego presentaremos.

Ejemplo 1.7. No existen en $S^2 \times S^2$ difeomorfismos de Anosov.

La prueba dada en [GRH] del ejemplo anterior se puede generalizar para obtener:

Ejemplo 1.8. Si n es par, no existen difeomorfismos de Anosov en ningún producto de la forma $S^n \times S^n \times \cdots \times S^n$.

En el caso de un fibrado por esferas en el que la dimensión de la fibra es mayor que la de la base, tenemos:

Teorema 1.9 (Gogolev-Rodriguez Hertz). *Sea M cerrada de dimensión n , y $S \rightarrow M$ un fibrado con fibra S^m , con $m > n$. Entonces, S no admite difeomorfismos de Anosov transitivos.*

Más aún, si m es impar, S no admite difeomorfismos de Anosov.

Por último, como se dijo antes, tenemos un resultado que se basa en una obstrucción a la descomposición del tangente de una variedad como suma directa de dos subfibrados.

Proposición 1.10. *Sea M es orientable con $\chi(M) \neq 0$. Si M admite difeomorfismos de Anosov de codimensión k , entonces k debe ser par. Además, si E^u es orientable, debe ser también $H^k(M) \neq 0$.*

Esto se puede usar para descartar difeomorfismos de Anosov de determinadas codimensiones.

1.2 Discusión de las demostraciones

Damos en esta sección un breve resumen de las principales ideas que aparecen en las demostraciones de los resultados enunciados en la sección anterior.

1.2.1 Acción de un difeomorfismo de Anosov en $H^*(M)$

Para ver cómo es la acción en $H^*(M)$ de un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable orientable en una variedad orientable, usamos lo siguiente:

- La equivalencia entre las distintas definiciones del índice de Lefschetz. Por un lado, tenemos $L(f) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M))$. Por el otro, $L(f) = I(\Gamma(f), \Delta)$, donde $\Gamma(f), \Delta \subset M \times M$ son el gráfico de f y la diagonal en $M \times M$ respectivamente.
- El número de Lefschetz para un mapa f con gráfico transversal a la diagonal se calcula como suma de los números de intersección locales para cada punto fijo, y estos coinciden con $L_x f = \text{sgn det}(\text{id} - d_x f)$.
- El gráfico de un difeomorfismo de Anosov siempre es transversal a la diagonal, y además $L_x f$ siempre vale lo mismo para cada punto fijo x de f , cuando E^u es orientable. Luego, $\#\text{Fix}(f^l) = |L(f^l)|$.
- Si f es un difeomorfismo de Anosov, la cantidad de puntos fijos para f^l crece exponencialmente, con tasa exponencial $h_{\text{top}}(f)$, la entropía topológica de f . Si f es transitivo, tenemos $\#\text{Fix}(f^l) = e^{lh_{\text{top}}(f)} + o(e^{lh_{\text{top}}(f)})$. Si no es transitivo, a partir de la descomposición espectral para f , obtenemos que existe $K > 1$ tal que $\#\text{Fix}(f^{Kl}) = p e^{Klh_{\text{top}}(f)} + o(e^{Klh_{\text{top}}(f)})$, donde p es la cantidad de piezas subbásicas para f correspondientes a piezas básicas con entropía topológica $h_{\text{top}}(f)$.

Para probar que las definiciones del índice de Lefschetz coinciden, usamos dualidad de Poincaré, que nos sirve para plantear el problema en términos de integrales de formas diferenciales. Además, nos ayuda a tomar una base particular de $H^*(M)$ que facilite los cálculos.

La independencia del signo de $L_x f$ del punto fijo x que se tome sale de cómo es la acción de $d_x f$ en $T_x M$: este actúa como una matriz hiperbólica. Hacemos el cálculo en el caso de una matriz de esa forma, y vemos que el signo solo depende de la dimensión del espacio inestable. Por lo tanto, como los espacios inestables forman un fibrado vectorial continuo, esta dimensión es la misma en cada punto, y luego el signo de $L_x f$ no cambia al tomar distintos puntos.

Finalmente, para estimar precisamente el crecimiento asintótico de la cantidad de puntos fijos para potencias de f , asumimos un teorema que aparece en [KH],

que da una estimativa de esto para el caso de un conjunto hiperbólico compacto, localmente maximal y topológicamente mixing. Aplicamos el teorema de descomposición espectral, y obtenemos lo mencionado para el caso transitivo y el caso general.

Conocer la tasa exponencial de este crecimiento es necesario para parte de los teoremas 1.6 y 1.9. Para el resto de los resultados, alcanza con saber que el crecimiento de la cantidad de puntos fijos para f (o un iterado de f) es exponencial. Esto es más sencillo de probar.

1.2.2 La fórmula de Künneth y la cohomología de un producto

Nos va a interesar calcular la cohomología de un producto a partir de la cohomología de los factores. Esto nos permitirá, entre otras cosas, construir ejemplos de variedades que no admiten difeomorfismos de Anosov, dado que podremos obtener información sobre la acción de un difeomorfismo de un producto en cohomología, y su número de Lefschetz. Vale aclarar que esto no dependerá de la dinámica del difeomorfismo, sino que es un resultado sobre las clases de isotopía de difeomorfismos de estas variedades, y cómo actúan en cohomología. Veremos que no cualquier morfismo en cohomología es realizable como el morfismo inducido por un difeomorfismo. El ejemplo más simple de esto será en $S^2 \times S^2$.

Podríamos trabajar con homología, pero el producto en cohomología (ya sea el producto cup de la cohomología singular o el producto exterior de la cohomología de de Rham) simplifica los cálculos, y a la vez tiene una relación interesante con la intersección de subvariedades y la dualidad de Poincaré que podemos aprovechar en otros contextos.

Dadas variedades M, N , con sus respectivos anillos de cohomología $H^*(M)$ y $H^*(N)$, queremos ver cómo es $H^*(M \times N)$. Tenemos proyecciones p_1, p_2 desde $M \times N$ hacia M y N respectivamente. Para toda clase de cohomología $[\omega]$ en $H^*(M)$, tenemos su pullback $p_1^*[\omega]$, que es una clase en $H^*(M \times N)$, y análogamente para clases en N . Luego, podemos definir un producto entre clases en M y clases en N : el producto de $[\omega]$ en $H^*(M)$ y $[\eta] \in H^*(N)$ será $p_1^*[\omega] \wedge p_2^*[\eta]$ (si estamos tratando cohomología singular, se reemplaza el producto exterior por el producto cup). Lo que veremos es que toda clase en $H^*(M \times N)$ es combinación lineal de clases de este tipo.

Más precisamente, podemos definir un morfismo $K : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N)$, dado por $K(\omega \otimes \eta) = p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\eta)$. Probaremos en la sección 4.1 que este es un isomorfismo.

Para esto, la estrategia es hacer una especie de inducción en un buen cubrimiento finito de M (nos interesa probarlo para variedades compactas). Un buen cubrimiento es un cubrimiento por abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^n , tales que sus intersecciones finitas son difeomorfas a \mathbb{R}^n . Esta estrategia la usaremos también en

otras ocasiones.

Veremos que, para probar que una propiedad se cumple para M , alcanza con probar que:

- Se cumple para abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^n .
- Si se cumple para U , V y $U \cap V$, se cumple para $U \cup V$.

Para abiertos U difeomorfos a \mathbb{R}^n , tendremos $H^*(U \times N) \cong H^*(\mathbb{R}^n \times N)$. El lema de Poincaré nos dará el isomorfismo en este caso. Para pasar del isomorfismo para U, V y $U \cap V$ al isomorfismo para $U \cup V$, usaremos la sucesión de Mayer-Vietoris.

Finalmente, para calcular la acción de un difeomorfismo en la cohomología de un producto, usaremos que los morfismos inducidos respetan el producto en cohomología. De esta forma es que se prueba en [GRH] la no existencia de difeomorfismos de Anosov en $S^2 \times S^2$, y es una de las ideas centrales detrás de las demostraciones en dicho artículo. Esto también aparecerá cuando trabajemos con cohomología de fibrados.

1.2.3 La sucesión de Gysin y la cohomología de un fibrado por esferas

Por último, en la sección 4.3 vemos una forma de calcular la cohomología de un fibrado por esferas, conociendo cierta información sobre él. Luego la aplicaremos a fibrados que son cohomológicamente un producto, para en ese caso hacer un cálculo explícito del número de Lefschetz de un difeomorfismo. Esto es una generalización de lo que se explicó en la sección anterior, ya que un fibrado es una generalización de un producto. Vale aclarar que no todos los fibrados por esferas son cohomológicamente un producto. Impondremos condiciones para que esto sea así.

Para hacer esto, tendremos que pasar primero por el isomorfismo de Thom. Esto lo haremos en la sección 3. Dado un fibrado por esferas, existe un fibrado por discos que lo tiene como borde. Consideraremos en primer lugar el caso en el que el fibrado por esferas viene de un fibrado vectorial, donde usaremos cohomología de de Rham. Este caso contiene todas las ideas necesarias para el caso general, pero al mismo tiempo nos permite ver las cosas con más claridad. Discutimos ahora las ideas en este caso, aunque luego las pruebas estén hechas en el contexto más general.

En el caso de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, se puede ver que al considerar el subconjunto E' de los vectores con norma mayor o igual a 1 (para alguna métrica en el fibrado), se obtiene un espacio que se retrae por deformación al fibrado por esferas asociado al fibrado vectorial. Por lo tanto, es equivalente estudiar la cohomología de esta subvariedad $E' \subset E$ a estudiar la cohomología de dicho fibrado

por esferas. Luego, es natural intentar relacionar la cohomología de E' con la cohomología de E (que es la de M , dado que estos espacios son homotópicamente equivalentes) y la cohomología relativa de E respecto a E' . En esta última consideramos únicamente formas diferenciales que se anulan en E' . Para evitar tener que fijar una métrica en E , y depender de esta, trabajamos con formas *de soporte vertical compacto*, que tienen soporte compacto en cada fibra. La clase de Thom, que existe siempre que el fibrado sea orientable, será una de estas formas.

A partir de la clase de Thom, podremos definir la clase de Euler de un fibrado, una generalización importante de la característica de Euler de una variedad. La clase de Euler $e(E)$ asociada a un fibrado vectorial orientable $E \rightarrow M$ es una clase de cohomología en M , que tiene como una de sus propiedades que se anula cuando existe una sección de E que no se anula. A un fibrado por esferas asociado a un fibrado vectorial le asignaremos también una clase de Euler, que será la del fibrado vectorial del que proviene.

La sucesión de Gysin, que conseguimos a partir de todo lo anterior, nos permitirá relacionar la cohomología de un fibrado por esferas $S \rightarrow M$, con fibra S^{k-1} , con su clase de Euler y la cohomología de M . En particular, nos dirá que si la clase de Euler se anula, entonces el fibrado S tiene grupos de cohomología isomorfos a los del producto $M \times S^{k-1}$. En particular, veremos que esto sucede cuando existe una sección $M \rightarrow S$.

A partir de esto, se obtienen pruebas de los Teoremas 1.6 y 1.9, procediendo de forma similar que en el caso de un producto de espacios, ya que las hipótesis de los teoremas garantizan, como veremos, la existencia de secciones para los fibrados.

1.3 Organización de la monografía

En el apéndice a la monografía se encuentran la mayoría de los prerequisites.

En el capítulo 2, presentamos propiedades básicas de los difeomorfismos de Anosov.

En el capítulo 3 estudiamos fibrados, mayormente fibrados vectoriales orientados. Probamos el teorema del isomorfismo de Thom, definimos la clase de Euler de un fibrado vectorial y probamos varias de sus propiedades. Al final del capítulo, mencionamos el teorema análogo para fibrados por discos, y definimos también la clase de Euler en este caso.

En el capítulo 4, usamos lo visto en el capítulo 3 para probar la existencia de la sucesión de Gysin para un fibrado por esferas (proveniente o no de un fibrado vectorial), a partir de la definición de la clase de Euler de un tal fibrado. Damos también una prueba del teorema de Künneth, que nos permite calcular la cohomología de un producto de espacios.

En el capítulo 5, definimos el índice de Lefschetz de un mapa $f : M \rightarrow M$ de dos maneras: como el número de intersección del gráfico de f con la diagonal en

$M \times M$, y como la suma alternada de las trazas de los morfismos inducidos por f en cohomología. Vemos que las definiciones coinciden, y estudiamos el índice de Lefschetz de un difeomorfismo de Anosov.

En el capítulo 6, damos pruebas de los resultados que fueron enunciados en el capítulo 1.

2 Difeomorfismos de Anosov

Ahora definimos los difeomorfismos de Anosov, y vemos propiedades dinámicas que serán importantes a la hora de entender su acción en el anillo de cohomología de una variedad.

En particular, definiremos la entropía topológica de un mapa, y mostramos su relación con el crecimiento de los puntos fijos de potencias de f (es decir, puntos periódicos para f) cuando f es un difeomorfismo de Anosov.

2.1 Definición y primeras propiedades

Una referencia para esta sección es el capítulo 6 de [KH].

Definición 2.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Decimos que un subconjunto $\Lambda \subset M$ es un conjunto hiperbólico para f si es compacto, f -invariante, y para cada x en Λ se tiene que $T_x M$ se descompone como $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, donde E_x^s , E_x^u varían continuamente con x y además cumplen que:

1. El diferencial df de f respeta esta descomposición, es decir, $df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ y $df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$.
2. Existen $C, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tales que:
 - (a) $\|d_x f^k(v)\| \leq C\lambda^k \|v\|$ para todo $v \in E_x^s$.
 - (b) $\|d_x f^{-k}(v)\| \leq C\lambda^k \|v\|$ para todo $v \in E_x^u$.

Definición 2.2. Decimos que un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov si toda la variedad es un conjunto hiperbólico para f .

Vemos ahora como ejemplo los Anosov *lineales*.

Ejemplo 2.3. Sea $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ una matriz $n \times n$ con coeficientes enteros e invertible, tal que su inversa también tiene coeficientes enteros. Llamamos también $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la transformación lineal dada por la multiplicación por A .

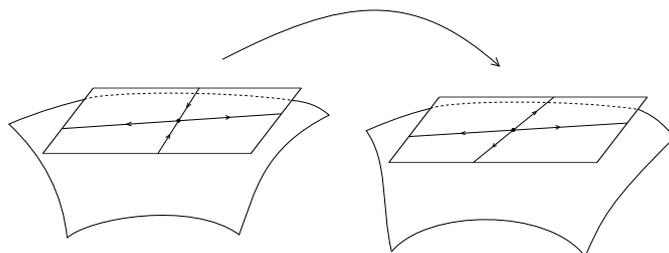


Figure 1: La acción del diferencial de un difeomorfismo de Anosov en el espacio tangente a un punto

Recordamos que existe un cubrimiento $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ dado por $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \bmod 1, \dots, x_n \bmod 1)$. Luego, por ser A de coeficientes enteros, A induce un mapa $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, dado por $f_A(\pi(x)) = \pi(Ax)$.

Ahora, tomamos A hiperbólica, es decir, tal que ninguno de sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (posiblemente con multiplicidad) tiene módulo 1.

Suponemos ahora que estos valores propios son reales. En ese caso, si llamamos E_λ al subespacio propio generalizado correspondiente al valor propio λ de A , tenemos que \mathbb{R}^n se descompone como $\mathbb{R}^n = \tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^s$, donde $\tilde{E}^u = \bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda$ y $\tilde{E}^s = \bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda$. La norma de los vectores en \tilde{E}^u crece exponencialmente al iterar A , mientras que la de los vectores en \tilde{E}^s decrece exponencialmente (puede que este crecimiento y decrecimiento no se dé en los primeros iterados, pero a partir de un momento sí sucederá). En el caso en que A tiene valores propios complejos, se tiene también la descomposición $\mathbb{R}^n = \tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^s$ con esta característica, aunque no se pueda hablar de subespacios propios generalizados.

Para cada punto \tilde{x} en \mathbb{R}^n tenemos entonces subespacios afines $\tilde{x} + \tilde{E}^u$, $\tilde{x} + \tilde{E}^s$, paralelos a \tilde{E}^u y \tilde{E}^s respectivamente. Observamos que estos se proyectan al toro \mathbb{T}^n como subvariedades inmersas. Además, dado $x \in \mathbb{T}^n$ con un levantado $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, están bien definidos los espacios tangentes $T_x\pi(\tilde{x} + \tilde{E}^u)$, $T_x\pi(\tilde{x} + \tilde{E}^s) \subset T_x\mathbb{T}^n$.

A partir de esta descomposición podemos entonces definir los fibrados estable e inestable en \mathbb{T}^n . Para cada punto $x \in \mathbb{T}^n$, definimos $E_x^s = T_x\pi(\tilde{x} + \tilde{E}^s)$, $E_x^u = T_x\pi(\tilde{x} + \tilde{E}^u)$.

Vemos automáticamente que estos espacios varían continuamente y que los fibrados que determinan son df_A -invariantes. Para chequear la condición de expansión y contracción uniforme en E^u y E^s respectivamente, alcanza con observar que f_A se comporta localmente como A , y usar la expansión y contracción de los vectores en \tilde{E}^u y \tilde{E}^s .

No todos los ejemplos de difeomorfismos de Anosov son de esta forma. Lo que sí sucede es que todos los ejemplos en toros son conjugados a ejemplos de esta forma. En [Man], Manning prueba que todo difeomorfismo de Anosov en un toro

es conjugado a uno lineal, a partir de trabajo previo de Franks, que probó en [Fra1] que todo difeomorfismo de Anosov transitivo en un toro \mathbb{T}^n con acción hiperbólica en $H_1(\mathbb{T}^n)$ es de esta forma. Manning prueba entonces que todo difeomorfismo de Anosov en un toro es transitivo y tiene acción hiperbólica en $H^1(\mathbb{T}^n)$.

Un ejemplo de un difeomorfismo de Anosov en una variedad compacta que no es un toro se puede encontrar en la sección I.3 de [Sma].

Veamos ahora algunas propiedades de los difeomorfismos de Anosov:

Proposición 2.4. *Si $f : M \rightarrow M$ es Anosov, entonces es expansivo.*

Definición 2.5. Dado un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$, decimos que un punto x en M es *errante* si existe U entorno de x tal que $f(U) \cap U \neq \emptyset$.

Definimos el *conjunto no errante* de $f : M \rightarrow M$ como $\Omega(f) = \{x \in M : x \text{ no es errante}\}$.

Definición 2.6. Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo, llamaremos $\text{Fix}(f)$ al conjunto de puntos fijos de f .

Llamamos además $\text{Per}(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f .

Observación. Tenemos $\text{Fix}(f) \subset \Omega(f)$. Más en general, $\text{Per}(f) \subset \Omega(f)$.

Los difeomorfismos de Anosov tienen la *propiedad de sombreado*, es decir, cumplen que toda “aproximación”, en cierto sentido, a una órbita, está cerca de una verdadera órbita (ver [KH], capítulo 18).

Esto tiene como consecuencia lo siguiente:

Proposición 2.7. *Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov, entonces $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$.*

Bajo ciertas condiciones, se puede ver cierta estructura en el conjunto no errante de un difeomorfismo. No explicitaremos cuáles son estas condiciones, ya que nos alcanzará con tener el resultado para los difeomorfismos de Anosov, que las cumplen. Este es el llamado *teorema de descomposición espectral*. Recordamos que un mapa $f : M \rightarrow M$ es *transitivo* si la órbita de algún punto en M es densa.

Teorema 2.8. *Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov, entonces $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$, con Λ_i cerrado, invariante y transitivo para f para cada $i = 1, \dots, k$.*

Además, para cada $i = 1, \dots, k$ se tiene $\Lambda_i = \Lambda_{i,1} \cup \dots \cup \Lambda_{i,l_i}$ donde los $\Lambda_{i,j}$ son cerrados permutados cíclicamente por f , es decir, son tales que $f(\Lambda_{i,j}) = \Lambda_{i,j+1}$ si $j < l_i$ y $f(\Lambda_{i,l_i}) = \Lambda_{i,1}$. Además, $f^{l_i}|_{\Lambda_{i,j}} : \Lambda_{i,j} \rightarrow \Lambda_{i,j}$ es topológicamente mixing para cada i, j .

A los conjuntos Λ_i dados por el teorema los llamamos *piezas básicas*, y a los $\Lambda_{i,j}$ *piezas subbásicas*.

Corolario 2.9. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- f es transitivo.
- f es topológicamente mixing.
- $\Omega(f) = M$.
- $\overline{Per(f)} = M$.

Los ejemplos de difeomorfismos de Anosov conocidos hasta ahora cumplen las propiedades mencionadas en el corolario. En [Sma], Smale plantea la pregunta de si necesariamente se deben cumplir.

2.2 Entropía

En esta sección, damos una definición y enunciamos algunas propiedades de la entropía topológica de un mapa continuo $f : M \rightarrow M$. Estas se pueden encontrar, junto con sus demostraciones, en el capítulo 3 de [KH].

Definición 2.10. Sea $f : M \rightarrow M$ continua, con M compacta y d una métrica en M .

Entonces, definimos

$$d_k^f(x, y) = \max_{0 \leq j \leq k-1} d(f^j(x), f^j(y))$$

Proposición 2.11. *Las funciones d_k^f son métricas en M .*

Dado x en M , $\varepsilon > 0$ y $k \geq 0$, llamamos $B_f(x, \varepsilon, k)$ a la bola de centro x y radio ε con la métrica d_k^f , es decir, $B_f(x, \varepsilon, k) = \{y \in M : d_k^f(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición 2.12. Decimos que un conjunto $A \subset M$ es (k, ε) -generador si $M \subset \bigcup_{x \in A} B_f(x, \varepsilon, k)$.

Llamamos $S_d(f, \varepsilon, k)$ a la cantidad de elementos de un conjunto (k, ε) -generador minimal.

Definimos ahora la entropía de un mapa f .

Definición 2.13. Si $f : M \rightarrow M$ es continuo, entonces definimos $h_d(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log S_d(f, \varepsilon, k)$.

Definimos la entropía topológica de f como $h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_d(f, \varepsilon)$.

Proposición 2.14. *La definición hecha de la entropía topológica de un mapa continuo no depende de la métrica $d : M \times M \rightarrow M$ que se tome.*

Ahora vemos propiedades que nos serán útiles en el caso particular de los difeomorfismos de Anosov.

Proposición 2.15. *Sea $f : M \rightarrow M$ continuo. Entonces, se cumplen:*

1. Si $g : N \rightarrow N$ es (topológicamente) conjugado a f , entonces $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.
2. Si $\Lambda \subset M$ es cerrado e invariante, $h_{top}(f|_{\Lambda}) \leq h_{top}(f)$.
3. Se tiene $h_{top}(f|_{\Omega(f)}) = h_{top}(f)$
4. Si $\Omega(M) = \bigcup_{i=1}^l \Lambda_i$, con Λ_i cerrado e invariante para cada i , entonces $h_{top}(f) = \max_{i=1, \dots, l} h_{top}(f|_{\Lambda_i})$.
5. Para todo entero m , $h_{top}(f^m) = |m|h_{top}(f)$.

A partir de 2, 3 y 4 obtenemos directamente:

Corolario 2.16. *Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov, entonces $h_{top}(f) = h_{top}(f|_{\Lambda_i})$, donde Λ_i es una pieza básica para f de entropía máxima entre las piezas básicas.*

2.3 Conteo de órbitas periódicas

En esta sección, vemos una forma de cuantificar el crecimiento de la cantidad de órbitas periódicas de un mapa $f : M \rightarrow M$ según su período, y la relación de este crecimiento con la entropía topológica de f .

Nos interesa el caso de los difeomorfismos de Anosov en particular. En este caso, siempre hay crecimiento exponencial de órbitas periódicas, como veremos. Entonces, tiene sentido considerar la tasa de crecimiento exponencial de esta cantidad. Esa será nuestra primera definición.

Un detalle a considerar es que vamos a fijarnos cómo crece $\#\text{Fix}(f^l)$ cuando l crece, en lugar de en el crecimiento de la cantidad de puntos periódicos de período estrictamente l .

Definición 2.17. Llamamos $p(f)$ a la tasa de crecimiento exponencial de $\#\text{Fix}(f^l)$. Es decir, $p(f) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log \#\text{Fix}(f^l)$.

De hecho, esta cantidad coincide con la entropía de f en ciertos casos. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado, tomado del capítulo 18 de [KH].

Teorema 2.18. *Sea M compacta y $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo, con $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico compacto y localmente maximal. Entonces, $p(f|_{\Lambda}) = h_{top}(f|_{\Lambda})$.*

Corolario 2.19. Si $f : M \rightarrow M$ es Anosov, entonces $p(f) = h_{top}(f)$.

Para que todo esto sea útil, precisamos:

Proposición 2.20. Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov, entonces $h_{top}(f) > 0$.

Se puede probar esto de varias formas. Por ejemplo, alcanza con encontrar una intersección homoclínica (ver [KH], capítulo 0) transversal, lo que nos da un subconjunto hiperbólico y topológicamente mixing Λ para f , tal que $f|_{\Lambda}$ es un subshift de tipo finito, o cadena de Markov topológica ([KH], capítulo 1), lo que facilita el cálculo de la entropía, y se puede ver en ese caso que esta es positiva. Esto se puede encontrar, por ejemplo, en el capítulo 4 de [Mn].

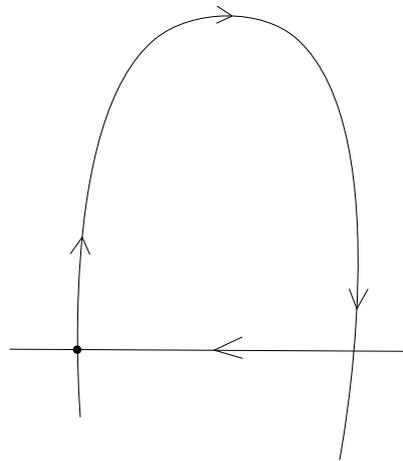


Figure 2: Intersección homoclínica transversal.

Esto ya nos da información importante:

Proposición 2.21. Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov, entonces $\#\text{Fix}(f^l)$ crece exponencialmente con l .

Vamos a ver ahora un resultado más general, que nos da una estimativa más precisa para $\#\text{Fix}(f^l)$.

La prueba se puede encontrar en el capítulo 20 de [KH], en el capítulo 20. Para varios de los resultados que probaremos será fundamental. Originalmente proviene de [Bow].

Teorema 2.22 (Bowen). Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo, con Λ conjunto hiperbólico compacto y localmente maximal tal que $f|_{\Lambda}$ es topológicamente mixing. Entonces, existen $\alpha > 0$ y $\lambda < e^{h_{top}(f|_{\Lambda})}$ tales que

$$|\#\text{Fix}(f^l) - e^{lh_{top}(f|_{\Lambda})}| < \alpha\lambda^l$$

En el caso transitivo, tenemos como consecuencia:

Corolario 2.23. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov transitivo. Entonces, se tiene*

$$\#\text{Fix}(f^l) = e^{lh_{\text{top}}(f)} + o(e^{lh_{\text{top}}(f)})$$

Y, en el caso general:

Corolario 2.24. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov, y sea $p \in \mathbb{N}$ la cantidad de piezas subbásicas Λ correspondientes a piezas básicas con entropía máxima (es decir, igual a $h_{\text{top}}(f)$). Entonces, existe $K > 0$ tal que se tiene*

$$\#\text{Fix}(f^{Kl}) = pe^{Klh_{\text{top}}(f)} + o(e^{Klh_{\text{top}}(f)})$$

3 Isomorfismo de Thom y clase de Euler

En este capítulo, estudiamos en detalle la relación entre la cohomología del espacio total de un fibrado vectorial y la cohomología de la base.

En la sección 3.1, estudiamos la dualidad de Poincaré en cohomología de de Rham y definimos el dual de Poincaré a una subvariedad, que nos será útil en la segunda sección.

La sección 3.2 es la parte central del capítulo, en la que probamos el teorema del isomorfismo de Thom, definimos y damos propiedades importantes de la clase de Euler de un fibrado vectorial.

Por último, en la sección 3.3 presentamos el caso de los fibrados por discos, usando cohomología singular. Un fibrado vectorial se puede pensar como un caso particular de un fibrado por discos, y por lo tanto el isomorfismo de Thom en este caso será una generalización del caso visto en la sección 3.2.

3.1 Dualidad de Poincaré en cohomología de de Rham

Sea M una variedad diferenciable orientada, de dimensión n .

Si M es compacta, entonces toda forma diferencial en M tiene soporte compacto, por lo tanto su cohomología de de Rham y su cohomología con soporte compacto coinciden. Sin embargo, en el caso no compacto pueden diferir, como en $M = \mathbb{R}^m$ (ver Apéndice). Veremos en esta sección que, no obstante, existe cierta relación entre ellas. Además, como producto de esta relación, podremos asociar a cada subvariedad orientada $N^k \subset M$ su *dual de Poincaré*. Veremos más adelante que esta construcción nos permitirá, en ciertos casos, describir el producto en cohomología en términos de intersección de subvariedades.

En esta sección, seguimos el capítulo 1 de [BT], más específicamente la sección 5.

3.1.1 Pairings y dualidad en espacios vectoriales

Vamos a recordar, en primer lugar, ciertas nociones de álgebra lineal.

Definición 3.1. Dados dos espacios vectoriales reales V y W , a un funcional lineal $\varphi : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ le llamaremos *pairing* entre V y W .

Decimos que un pairing es no degenerado si $\varphi(v, w) = 0$ para todo $w \in W$ implica $v = 0$, y $\varphi(v, w) = 0$ para todo $v \in V$ implica $w = 0$.

Observación. Dados dos espacios vectoriales V y W , y un pairing $\varphi : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ entre ellos, se tiene un mapa lineal $V \rightarrow W^*$ dado por $v \mapsto \varphi(v, -)$, y análogamente un mapa $W \rightarrow V^*$ dado por $w \mapsto \varphi(-, w)$.

Además, el pairing φ es no degenerado si y solo si ambos mapas son inyectivos.

Vamos a usar la siguiente proposición elemental de álgebra lineal.

Proposición 3.2. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $\varphi : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ es un pairing entre ellos, entonces φ es no degenerado si y solamente si el mapa $V \rightarrow W^*$ dado por $v \mapsto \varphi(v, -)$ es un isomorfismo.

Por último, damos una definición y un lema que precisaremos más adelante.

Definición 3.3. Sean $\varphi : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : V' \otimes W' \rightarrow \mathbb{R}$ pairings entre espacios vectoriales V, W y V', W' , respectivamente. Sean además $f : V \rightarrow V'$, $g : W' \rightarrow W$ transformaciones lineales.

Decimos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \otimes & & \otimes \\ W & \xleftarrow{g} & W' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

conmuta si y solamente si para todos $v \in V$, $w' \in W'$ se cumple

$$\varphi(v \otimes g(w')) = \psi(f(v) \otimes w')$$

Además, decimos que *conmuta a menos de un signo* si la igualdad que se da para todos $v \in V$, $w' \in W'$ es

$$\varphi(v \otimes g(w')) = \pm \psi(f(v) \otimes w')$$

Lema 3.4. Sean $\varphi : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : V' \otimes W' \rightarrow \mathbb{R}$ pairings, y $f : V \rightarrow V'$, $g : W' \rightarrow W$ transformaciones lineales.

Llamemos $\tilde{\varphi} : V \rightarrow W^*$ al mapa inducido por φ , y $\tilde{\psi} : V' \rightarrow W'^*$ al mapa inducido por ψ .

Entonces, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \tilde{\psi} \\ W^* & \xrightarrow{g^*} & W'^* \end{array}$$

conmuta (a menos de un signo) si y solamente si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \otimes & & \otimes \\ W & \xleftarrow{g} & W' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

conmuta (a menos de un signo).

Proof. La condición necesaria y suficiente para que el cuadrado conmute es que sea $g^*(\tilde{\varphi}(v)) = \tilde{\psi}(f(v)) : W' \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $v \in V$. Pero se tiene, dado w' en W' :

$$\begin{aligned} g^*(\tilde{\varphi}(v))(w') &= \tilde{\varphi}(v)(g(w')) \\ &= \varphi(v \otimes g(w')) \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\tilde{\psi}(f(v))(w') = \psi(f(v) \otimes w')$$

Luego, el cuadrado conmuta si y solamente si $\varphi(v \otimes g(w')) = \psi(f(v) \otimes w')$ para todos $v \in V$, $w' \in W'$, y eso define la conmutatividad del otro diagrama. La prueba es análoga para el caso de la conmutatividad a menos de un signo. □

3.1.2 La dualidad de Poincaré

Nuestro primer objetivo en esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (Dualidad de Poincaré). *Sea M una variedad orientable de dimensión n , que admite un buen cubrimiento finito. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$,*

$$H^k(M) \cong (H_c^{n-k}(M))^*$$

La definición de *buen cubrimiento* se encuentra en el Apéndice, en la sección A.1.6.

Dado el enunciado de la Proposición 1.1, cabe esperar que consigamos probar el teorema definiendo un pairing no degenerado $H^k(M) \otimes H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Empezamos definiendo un mapa bilineal a nivel de las formas diferenciales. Recordamos que toda n -forma con soporte compacto puede ser integrada en M , ya que M es una variedad orientada. Luego, se obtiene lo siguiente:

Observación. Para todo $k \geq 0$, el mapa $\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $(\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$ está bien definido, y es bilineal.

Más aún, gracias al teorema de Stokes, tenemos un mapa bilineal inducido en $H^k(M) \times H_c^{n-k}(M)$.

Proposición 3.6. *Para todo $k \geq 0$, se tiene un mapa bilineal $H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$.*

Siempre que se tiene un mapa bilineal $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, este induce un *pairing* en el producto tensorial de V y W , es decir, un mapa lineal $V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$. Este está definido en $V \otimes W$ como el único mapa lineal que extiende $v \otimes w \mapsto B(v, w)$. En nuestro caso particular, obtenemos:

Definición 3.7. Llamamos $\int : H^k(M) \otimes H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ al *pairing* dado por $[\omega] \otimes [\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$.

Para completar la prueba del teorema, resta ver que el pairing definido es no degenerado. Lo probamos primero para el caso $M \cong \mathbb{R}^n$, y luego usamos el Teorema 1.1, asumiendo que M tiene un buen cubrimiento finito.

Lema 3.8. *Para todo $k \geq 0$, el pairing $\int : H^k(\mathbb{R}^n) \otimes H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es no degenerado.*

Proof. Debido a los lemas de Poincaré, solo es necesario tratar el caso $k = 0$ (un pairing φ entre espacios vectoriales de dimensión 0 es trivialmente no degenerado).

En ese caso, recordamos que $H^0(\mathbb{R}^n) = \langle [1] \rangle$ y $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \langle [f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n] \rangle$, donde 1 es la función constante 1 y f es una función diferenciable con soporte compacto e integral 1 en \mathbb{R}^n .

Luego, vemos que el mapa $\psi : H^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow (H_c^n(\mathbb{R}^n))^*$ dado por $\psi([1])([\eta]) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge \eta$ es inyectivo, ya que $\psi([1])([f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n]) = \int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, y por lo tanto $\psi([1]) \neq 0$, lo que implica $\text{Ker}(\psi) = \{0\}$. Concluimos que ψ es un isomorfismo, y por la Proposición 1.1, el pairing \int es no degenerado. \square

Teorema 3.9. *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n , entonces el pairing $\int : H^k(M) \otimes H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es no degenerado para todo $k \geq 0$.*

Proof. Sea \mathcal{P} la propiedad tal que se cumple $\mathcal{P}(U)$ si y solo si el pairing $\int : H^k(U) \otimes H_c^{n-k}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es no degenerado para todo $k \geq 0$.

En el lema anterior vimos que se cumple cuando $U \cong \mathbb{R}^n$. Ahora, alcanza con probar (esto se ve en el Apéndice, en la sección A.1.6.) que si se cumplen $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(U \cap V)$ entonces se cumple $\mathcal{P}(U \cup V)$.

Probemos entonces esto. Consideramos las dos sucesiones de Mayer Vietoris, para cohomología de de Rham y para cohomología con soporte compacto:

$$\begin{aligned} & \longrightarrow H^k(U \cup V) \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \\ & \longleftarrow H_c^{n-k}(U \cup V) \xleftarrow{i_*} H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) \xleftarrow{j_*} H_c^{n-k}(U \cap V) \xleftarrow{d_*} H_c^{n-k-1}(U \cup V) \longleftarrow \end{aligned}$$

Luego, podemos aplicar el pairing a las sucesiones, obteniendo el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \xrightarrow{i^*} & H^k(U) \oplus H^k(V) & \xrightarrow{j^*} & H^k(U \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{k+1}(U \cup V) & \longrightarrow \\ & & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\ \longleftarrow & & H_c^{n-k}(U \cup V) & \xleftarrow{i_*} & H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) & \xleftarrow{j_*} & H_c^{n-k}(U \cap V) & \xleftarrow{d_*} & H_c^{n-k-1}(U \cup V) & \longleftarrow \\ & & \downarrow \int_{U \cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{U \cap V} & & \downarrow \int_{U \cup V} & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & \end{array}$$

Afirmación. *El diagrama de arriba es conmutativo a menos de un signo.*

Asumiendo la afirmación, por el Lema 1.7 tenemos un diagrama conmutativo a menos de un signo de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & \longrightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & & (H_c^{n-k}(U \cup V))^* & \longrightarrow & ((H_c^{n-k}(U))^* \oplus (H_c^{n-k}(V))^*) & \longrightarrow & (H_c^{n-k}(U \cap V))^* & \longrightarrow \end{array}$$

donde además sabemos que los mapas $H^k(U \cap V) \rightarrow (H_c^{n-k}(U \cap V))^*$ y $(H^k(U) \oplus H^k(V)) \rightarrow (H_c^{n-k}(U))^* \oplus (H_c^{n-k}(V))^*$ son isomorfismos para todo $k \geq 0$, dado que eso es equivalente (ver Proposición 1.6) a que se cumplan $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(U \cap V)$.

Pero entonces, por el lema de los cinco, los mapas $H^k(U \cup V) \rightarrow (H_c^{n-k}(U \cup V))^*$ son también isomorfismos, y por lo tanto se cumple $\mathcal{P}(U \cup V)$. Esto concluye la prueba del teorema.

Demostramos ahora la afirmación:

Para los cuadrados de la forma

$$\begin{array}{ccc}
H^k(U \cup V) & \xrightarrow{i^*} & H^k(U) \oplus H^k(V) \\
\otimes & & \otimes \\
H_c^{n-k}(U \cup V) & \xleftarrow{i_*} & H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) \\
\downarrow \int_{U \cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{array}$$

tenemos, dadas $[\omega] \in H^k(U \cup V)$ y $([\eta], [\tau]) \in H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V)$,

$$\int_{U \cup V} \omega \wedge i_*([\eta], [\tau]) = \int_{U \cup V} \omega \wedge (i_{U*}\eta + i_{V*}\tau) \quad (1)$$

$$= \int_{U \cup V} \omega \wedge i_{U*}\eta + \int_{U \cup V} \omega \wedge i_{V*}\tau \quad (2)$$

$$= \int_U \omega \wedge \eta + \int_V \omega \wedge \tau \quad (3)$$

donde en (1) usamos la definición de i_* y en (3) que $i_{U*}\eta$ es una forma que extiende a η y está soportada en U (análogamente con $i_{V*}\tau$). Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\int_U + \int_V \right) (i^*\omega \otimes (\eta, \tau)) &= \left(\int_U + \int_V \right) (i_U^*\omega, i_V^*\omega) \otimes (\eta, \tau) \\
&= \int_U i_U^*\omega \wedge \eta + \int_V i_V^*\omega \wedge \tau \\
&= \int_U \omega \wedge \eta + \int_V \omega \wedge \tau
\end{aligned}$$

ya que $i_U^*\omega$ es solamente la restricción de ω a U , y es análogo para $i_V^*\omega$. Por lo tanto el cuadrado conmuta. Para los cuadrados en los que aparecen j^* y j_* , la discusión es similar. Veamos los cuadrados que involucran a d y d^* :

Dada $[\omega] \in H^k(U \cap V)$, recordemos que $d^*[\omega] = [\eta] \in H^{k+1}(U \cup V)$, donde $\eta|_U = -d(\rho_V) \wedge \omega$ y $\eta|_V = d(\rho_U) \wedge \omega$, siendo $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$ de $U \cup V$.

Por otro lado, si $[\tau] \in H_c^{n-k}(U \cup V)$, $d_*[\tau] = [\theta] \in H_c^{n-k-1}(U \cap V)$, donde

$i_{U*}\theta = -d(\rho_U) \wedge \tau$ (en U) y $i_{V*}\theta = d(\rho_V) \wedge \tau$ (en V). Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{U \cap V} [\omega] \wedge d_*[\tau] &= \int_{U \cap V} \omega \wedge d(\rho_V) \wedge \tau \\ &= (-1)^k \int_{U \cap V} d(\rho_V) \wedge \omega \wedge \tau \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= -(-1)^k \int_{U \cap V} d^*[\omega] \wedge [\tau] \\ &= (-1)^{k+1} \int_{U \cup V} d^*[\omega] \wedge [\tau] \end{aligned} \quad (2)$$

donde en (1) usamos que ω es una k -forma, y en (2) que $d^*[\omega]$ está soportada en $U \cup V$. Concluimos que el cuadrado conmuta, y esto termina con la prueba de la afirmación. \square

3.1.3 El dual de Poincaré a una subvariedad

Veamos ahora cómo asociamos a cada subvariedad $X \subset M$ (encajada como un conjunto cerrado) una clase de cohomología, llamada su dual de Poincaré.

Si X es de dimensión k , entonces se tiene un funcional lineal $I_X : \Omega_c^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$I_X(\omega) = \int_X i^* \omega$$

siendo $i : X \rightarrow M$ la inclusión.

Proposición 3.10. *El funcional I_X induce un funcional en $H_c^k(M)$, dado por $[\omega] \mapsto \int_X i^* \omega$.*

La independencia del representante de la clase $[\omega]$ sale del hecho de que X no tiene borde, y del teorema de Stokes.

Ahora, por el isomorfismo $(H_c^k(M))^* \cong H^k(M)$ que vimos en la parte anterior, debe existir en $H^{n-k}(M)$ una única clase η_X tal que $I_X([\omega]) = \int_M \omega \wedge \eta_X$ para toda clase $[\omega]$ en $H_c^k(M)$. Es decir, existe η_X tal que

$$\int_X i^* \omega = \int_M \omega \wedge \eta_X$$

para toda $[\omega]$ en $H_c^k(M)$. A η_X la llamamos dual de Poincaré a X . Cuando sea necesario tomar un representante de η_X , también le llamaremos η_X .

En resumen,

Teorema 3.11. Si $X^k \subset M^n$ es una subvariedad encajada como un subconjunto cerrado, entonces existe una única clase de cohomología η_X en $H^{n-k}(M)$ tal que, para toda forma cerrada ω en $\Omega^k(M)$, se tiene

$$\int_X i^* \omega = \int_M \omega \wedge \eta_X$$

3.2 Isomorfismo de Thom y clase de Euler: fibrados vectoriales

Ahora vamos en camino a ver el isomorfismo de Thom para un fibrado vectorial orientable $E \rightarrow M$, y definir su clase de Euler.

El isomorfismo de Thom nos dará una relación entre la cohomología de M y la cohomología con soporte vertical compacto de E . Esta última es equivalente a la cohomología relativa de E respecto al complemento de un entorno tubular de la sección nula. Es decir, es la cohomología que resulta de considerar las formas diferenciales que se anulan lejos de 0 en cada fibra.

En el caso más simple posible, un fibrado trivial $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ (que es nada más que un espacio vectorial), esta cohomología coincide con la cohomología con soporte compacto de \mathbb{R}^k , que está generada por una forma ω de integral 1. Esta forma nos da una orientación de \mathbb{R}^k .

La clase de Thom de un fibrado vectorial de rango k será análoga a la forma $\omega \in H_c^k(\mathbb{R}^k)$. Restringida a cada fibra F , nos dará un generador de $H_c^k(F)$, y por lo tanto una orientación de la fibra.

A partir de la clase de Thom, definiremos la clase de Euler, que es una obstrucción a la existencia de una sección $M \rightarrow E$ del fibrado que no se anule. Esta es una generalización de la característica de Euler de una variedad.

3.2.1 Fibrados vectoriales

Definición 3.12. Un fibrado vectorial de rango k sobre una variedad M es un fibrado $E \rightarrow M$ con proyección diferenciable, fibra \mathbb{R}^k y grupo de estructura $GL(k, \mathbb{R})$.

En el apéndice se detalla la noción de un fibrado con un cierto grupo de estructura.

Vemos también la noción de equivalencia de fibrados en este caso:

Definición 3.13. Dados fibrados vectoriales $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M'$, un mapa de fibrados vectoriales del primero al segundo consiste de un par de mapas $\hat{f} : E \rightarrow E'$, $g : M \rightarrow M'$ tales que $\pi' \circ \hat{f} = g \circ \pi$ (es decir, \hat{f} preserva fibras) y \hat{f} es lineal en cada fibra.

En ese caso, decimos que \hat{f} cubre a g .

Observamos que $f : M \rightarrow M'$ es continuo, y queda determinado por \hat{f} . Esto nos permite decir cuándo dos fibrados vectoriales son equivalentes, es decir, cuándo existe entre ellos una equivalencia de fibrados vectoriales.

Definición 3.14. Una equivalencia entre fibrados vectoriales es un mapa de fibrados vectoriales invertible, y cuya inversa es un mapa de fibrados vectoriales.

En particular, si dos fibrados vectoriales son equivalentes, entonces sus espacios totales son homeomorfos, pero lo segundo no necesariamente implica lo primero.

Veamos ahora una noción de “descomposición” de un fibrado: así como un espacio vectorial se puede descomponer como suma directa de subespacios, en algunas oportunidades un fibrado vectorial se descompone como suma directa de *subfibrados*.

Definición 3.15. Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, un subfibrado de este es un fibrado vectorial con espacio total un subconjunto E' de E , base M y proyección $\pi|_{E'} \rightarrow M$.

Es decir, así como un fibrado vectorial sobre M es una colección de espacios vectoriales F_x parametrizados por los puntos de M , un subfibrado vectorial es una colección de subespacios de los F_x , con la parametrización por puntos de M que tienen como subconjuntos de ellos. En particular, estos subespacios varían continuamente.

Decimos entonces que un fibrado E es suma directa de subfibrados E_1 y E_2 si para cada x en M se tiene que la fibra de E sobre x se descompone como $E_x = E_{1x} \oplus E_{2x}$. También tenemos una noción de “suma directa externa” para fibrados vectoriales. Esta es la llamada *suma de Whitney*. La fibra de la suma directa de E , E' sobre cada x en M será la suma directa de E_x y E'_x . Damos una definición que formaliza esto:

Definición 3.16. Dados fibrados vectoriales $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M$, tenemos un fibrado vectorial producto $\pi \times \pi' : E \times E' \rightarrow M \times M$. Llamamos ahora $\Delta : M \rightarrow M \times M$ al mapa diagonal.

Definimos la suma de Whitney $E \oplus E'$ de E y E' como $E \oplus E' = \Delta^*(E \times E')$.

En el pullback f^*E de un fibrado E por un mapa f , la fibra sobre un punto x es la fibra sobre $f(x)$. Luego, vemos que la fibra para $E \oplus E'$ sobre cada punto x es $E_x \oplus E'_x$. Luego, se puede ver que tanto E como E' son, de forma natural, subfibrados de $E \oplus E'$, y este se descompone como suma directa de ellos (con la noción de suma directa “interna” que dimos antes).

De la misma forma que una variedad es orientable si podemos elegir una orientación del espacio tangente en cada punto de forma que varíe continuamente, un

fibrado sobre M será orientable si para cada x en M podemos elegir una orientación de la fibra E_x sobre x , de forma que estas orientaciones varíen continuamente.

De hecho, como quedará claro a partir de la definición que daremos ahora, una variedad es orientable si y solamente si su fibrado tangente $TM \rightarrow M$ es orientable como fibrado vectorial (esto *no* es lo mismo que pedir que su espacio total sea orientable como variedad, de hecho, TM como variedad siempre es una variedad orientable aunque M no lo sea).

Definición 3.17. Decimos que un fibrado vectorial de rango k es orientable si existe una trivialización $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tal que $g_{\alpha\beta}(x)$ está en $GL^+(k, \mathbb{R})$.

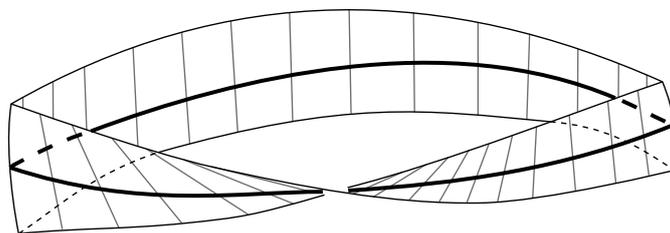


Figure 3: La banda de Möbius es el espacio total de un fibrado vectorial no orientable sobre el círculo.

Luego, si tenemos una trivialización de este tipo, definimos mediante los mapas ϕ_α una orientación de cada fibra a partir de una orientación de \mathbb{R}^k , y esto estará bien definido por la condición de que $g_{\alpha\beta}(x)$ tenga determinante positivo para cada x en $U_{\alpha\beta}$.

De forma similar a la construcción del cubrimiento doble orientable de una variedad no orientable, dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ no orientable, se puede construir una variedad N y un cubrimiento doble no trivial $h : N \rightarrow M$ de forma que $h^*(E)$ sea un fibrado orientable sobre N . Si el cubrimiento $N \rightarrow M$ resultara ser trivial, entonces E sería orientable (la construcción del cubrimiento doble orientable de una variedad es en realidad un caso particular de esto).

Por lo tanto, se tiene:

Proposición 3.18. *Un fibrado vectorial sobre un espacio simplemente conexo es orientable.*

Muchas veces nos interesará descomponer un fibrado vectorial como la unión de fibrados triviales, de la misma forma que para variedades nos interesa considerar un buen cubrimiento, en el que cada abierto es difeomorfo a \mathbb{R}^n . De hecho, estas ideas están relacionadas: un fibrado vectorial sobre un punto es siempre trivial, y los abiertos que forman un buen cubrimiento son contractibles y por lo tanto “a

menos de homotopía” son un punto. En el apéndice (sección A.1) mencionamos que un fibrado sobre un espacio contractible es trivial.

Por lo tanto, si tenemos un buen cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de una variedad M , y un fibrado vectorial $E \rightarrow M$, la restricción de E a cada abierto U_α es un fibrado trivial, al que denotamos $E|_{U_\alpha}$.

Un ejemplo muy común es el fibrado tangente a una variedad.

Definición 3.19. Si M^n es una variedad diferenciable, entonces su *fibrado tangente* TM es un fibrado vectorial sobre M de rango n tal que la fibra sobre cada x en M es T_xM , el espacio tangente a M en x .

Si asumimos $M \subset \mathbb{R}^N$ para algún natural N , entonces podemos definir $TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^N : v \in T_xM \subset \mathbb{R}^N\}$ (pensando T_xM como velocidades de curvas contenidas en M , en el punto x).

Dado que toda variedad se encaja en \mathbb{R}^N para N suficientemente grande, esta no es una restricción importante. Para ver una definición intrínseca de TM (y una prueba de que efectivamente es un fibrado vectorial) se puede consultar el capítulo 3 de [Lee].

Para terminar, damos una definición del fibrado normal a una subvariedad X encajada en M .

Definición 3.20. Si $X^k \subset M^n$ es una subvariedad de una variedad riemanniana, entonces el *fibrado normal* de X en M es un fibrado vectorial de rango $n - k$ sobre X , cuyo espacio total se puede definir de la siguiente manera:

$N(X, M) = \{(x, v) \in TM : v \in T_xX^\perp\}$, donde pensamos a T_xX como subespacio de T_xM . Es decir, $N(X, M)$ consiste en los vectores perpendiculares al tangente de X en M .

Si está claro que estamos pensando a X como una subvariedad de M , entonces escribimos $NX = N(X, M)$.

3.2.2 Cohomología con soporte vertical compacto

Sea M una variedad diferenciable, no necesariamente compacta. Definimos ahora la cohomología con soporte vertical compacto, para un fibrado $E \rightarrow M$ (se puede definir en general, pero lo haremos para fibrados vectoriales).

Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real, con fibra de dimensión m .

Definición 3.21. Decimos que una forma diferencial ω en E tiene *soporte compacto en la dirección vertical* si $p^{-1}(K) \cap \text{sup}(\omega)$ es compacto para todo $K \subset M$ compacto.

Llamamos $\Omega_{cv}^*(E)$ al subconjunto de $\Omega^*(E)$ dado por las formas con soporte compacto en la dirección vertical, y $\Omega_{cv}^k(E)$ al subconjunto de las formas de dimensión k de este tipo.

Hacemos ahora algunas observaciones sobre la definición.

- Observación.*
1. Si M no es compacta, $\Omega_{cv}^*(E)$ difiere de $\Omega_c^*(E)$, las formas diferenciales con soporte compacto.
 2. Toda forma ω en $\Omega_{cv}^*(E)$ tiene soporte compacto cuando se la restringe a cada fibra. Esto *no* es equivalente a que ω tenga soporte compacto en la dirección vertical, y no nos alcanzaría con pedir solo esta condición para lo que haremos.
 3. Para cada k , $\Omega_{cv}^k(E)$ es un subespacio vectorial de $\Omega^k(E)$. Además, $\Omega_{cv}^*(E)$ es una subálgebra de $\Omega^*(E)$, ya que el producto exterior de formas con soporte compacto vertical también tiene soporte compacto vertical.
 4. Dada ω en $\Omega_{cv}^*(E)$, se tiene que $d\omega$ también está en $\Omega_{cv}^*(E)$. Luego, se sigue de la observación anterior que $(\Omega_{cv}^k(E), d^k)$ es un complejo de cocadenas.

Gracias a las observaciones de arriba, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 3.22. Llamamos *cohomología con soporte compacto en la dirección vertical*, o *cohomología vertical compacta* de E a la cohomología del complejo $(\Omega_{cv}^k(E), d^k)$. La denotamos $H_{cv}^*(E)$.

Observación. La cohomología con soporte vertical compacto es equivalente a la cohomología relativa de E respecto al complemento de un entorno tubular de la sección nula.

Dada la observación que acabamos de hacer, podríamos trabajar con cohomología relativa y dejar de lado la definición de cohomología con soporte vertical compacto. Por ahora no haremos esto, para evitar tener que hacer la elección de un entorno tubular de la sección nula, o de una métrica en E . Luego sí nos será útil.

Por último, vemos que tenemos una sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología con soporte vertical compacto.

Proposición 3.23. Si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial, y $W \subset M$ es un abierto, llamamos $E|_W$ al fibrado sobre W que es la restricción del fibrado original sobre M .

Si $U, V \subset M$ son abiertos, existe una sucesión exacta de la siguiente forma:

$$\dots \rightarrow H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \rightarrow H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V) \rightarrow H_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow H_{cv}^{*+1}(E|_{U \cup V}) \rightarrow \dots$$

Los mapas son análogos a los que se tiene en la sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología de de Rham.

3.2.3 Isomorfismo de Thom

Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ de rango k , nos interesa conocer la estructura de $H_{cv}^*(E)$, y cómo se relaciona con la de $H^*(M)$. Vamos a definir una operación $\Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-k}(M)$ que las relacionará³. Esto lleva cierto trabajo, pero la idea es la siguiente:

Localmente, E es de la forma $U \times \mathbb{R}^k$, con U un abierto de M . Examinemos entonces en primer lugar el caso en el que $E = M \times \mathbb{R}^k$.

Observación. Tomemos $E = M \times \mathbb{R}^k$. Entonces:

- Toda r -forma diferencial en E es combinación lineal de formas del tipo $\pi^*(\phi) \wedge f(x, t_1, \dots, t_k) dt_{i_1} \dots dt_{i_r}$, con ϕ una forma en M , y t_1, \dots, t_k coordenadas en \mathbb{R}^k .
- Cuando $r = k$ y nuestra forma tiene soporte compacto en la dirección vertical, entonces la forma $f(x, t_1, \dots, t_k) dt_{i_1} \dots dt_{i_k}$ puede ser integrada “a lo largo de la fibra”, es decir, la integral

$$\int_{\pi^{-1}(x)=\mathbb{R}^k} f(x, t_1, \dots, t_k) dt_{i_1} \dots dt_{i_k}$$

tiene sentido, ya que f tiene soporte compacto en cada fibra $\pi^{-1}(x)$.

Con la notación de la observación, llamamos *de tipo 1* a las formas diferenciales en E del tipo $\pi^*(\phi) \wedge f(x, t_1, \dots, t_k) dt_{i_1} \dots dt_{i_r}$ en las que $r = k$, y *de tipo 2* a aquellas en las que $r < k$. Como se dijo, toda forma diferencial en E es combinación lineal de formas de tipo 1 y de tipo 2. Por lo tanto, para definir la operación deseada, alcanza con hacerlo en estas formas.

Definición 3.24. Si $E = M \times \mathbb{R}^k$, definimos $\pi_* : \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-k}(M)$ como el único mapa lineal que extiende lo siguiente:

1. $\pi_*(\pi^*(\phi) \wedge f(x, t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k) = \phi \int_{\mathbb{R}^k} f(x, t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$
2. $\pi_*(\omega) = 0$ si ω es una forma del tipo 2.

Nos referimos a π_* como “integración a lo largo de las fibras”. Queda ahora definir π_* para un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ posiblemente no trivial, aunque para esto precisamos la hipótesis de orientabilidad de E .

³La notación $\Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-k}$ sirve para mostrar que la operación que definiremos manda formas de grado $q + k$ en formas de grado q

Definición 3.25. Sea E un fibrado vectorial real orientable cualquiera sobre M , y sea $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$.

Dada una trivialización $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de E , tenemos que $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ es combinación lineal de formas del tipo 1 y formas del tipo 2 en $\pi^{-1}(U_\alpha)$, a menos de la identificación $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^m$. Alcanza entonces con hacer la definición en los casos en que ω_α es del tipo 1 o del tipo 2. Estas coinciden con la definición en el caso $E = M \times \mathbb{R}^m$.

1. Si ω_α es del tipo 1, es (nuevamente a menos de la mencionada identificación) $\omega_\alpha = \pi^*(\phi) \wedge f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$, donde x_1, \dots, x_n son coordenadas en U_α , t_1, \dots, t_k coordenadas en \mathbb{R}^k y ϕ es una forma diferencial en U_α . En ese caso,

$$\pi_*(\omega)|_{U_\alpha} = \pi_*(\omega_\alpha) = \phi \int_{\pi^{-1}(x)} f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \in \Omega^{*-k}(U_\alpha)$$

2. Si ω_α es del tipo 2,

$$\pi_*(\omega)|_{U_\alpha} = \pi_*(\omega_\alpha) = 0$$

Haciendo esto para todo $\alpha \in I$, tenemos definida $\pi_*(\omega)$ en todo $U_\alpha \subset M$, y por lo tanto, en toda M .

Proposición 3.26. *La definición hecha tiene sentido, es decir, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\pi_*(\omega_\alpha) = \pi_*(\omega_\beta)$ en $U_\alpha \cap U_\beta$ (esto implica además que la definición no depende de la trivialización utilizada).*

Proof. Sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ en una trivialización de E , tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Llamamos p a la proyección $p : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta$ sobre el primer factor.

Tenemos $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ y $\omega_\beta = \varphi_\beta^* \omega|_{\pi^{-1}(U_\beta)}$. Por lo tanto, en $U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$, se tiene

$$\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\beta^{-1})^* \omega_\beta$$

y por lo tanto

$$\omega_\alpha = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^* \omega_\beta$$

Esto ya nos dice (dado que $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ preservan las fibras y son isomorfismos lineales allí) que si ω_α es de tipo 1, entonces ω_β también lo es, y viceversa. Luego alcanza con probar la afirmación en el caso en que son de tipo 1.

En ese caso, tenemos $\omega_\alpha = p^*(\phi) \wedge f dt_1 \dots dt_k$, $\omega_\beta = p^*(\tau) \wedge g dt_1 \dots dt_k$. Por lo tanto,

$$\omega_\alpha = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*(p^*(\tau) \wedge g dt_1 \dots dt_k)$$

y entonces

$$\omega_\alpha = (p \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*(\tau) \wedge (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*(g dt_1 \dots dt_k)$$

Pero sabemos que $p \circ \varphi_\beta^{-1} = \pi$, y $\pi \circ \varphi_\alpha = p$, por lo tanto tenemos

$$\omega_\alpha = p^*(\tau) \wedge (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*(g dt_1 \dots dt_k)$$

Luego, por un lado tenemos

$$\pi_* \omega_\beta = \tau \int_{p^{-1}(x)} g dt_1 \dots dt_m$$

y por el otro,

$$\pi_* \omega_\alpha = \tau \int_{p^{-1}(x)} (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*(g dt_1 \dots dt_k)$$

y entonces

$$\pi_* \omega_\alpha = \tau \int_{\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p^{-1}(x))} g dt_1 \dots dt_k$$

y acá es donde usamos que E es orientable: como E es orientable, $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ preserva la orientación de las fibras, y por lo tanto $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p^{-1}(x))$ es $p^{-1}(x)$ y no $-p^{-1}(x)$ (recordamos que, si M es una variedad orientada, llamamos $-M$ a M con la orientación opuesta). Luego, concluimos

$$\pi_* \omega_\beta = \pi_* \omega_\alpha$$

□

Ahora que tenemos definida π_* en $\Omega_{cv}^*(E)$, damos un paso más y vemos que induce un mapa en la cohomología vertical compacta de E . Para esto, usamos lo siguiente.

Proposición 3.27. *La derivada exterior y la integración a lo largo de las fibras conmutan. Es decir, $\pi_* d = d \pi_*$.*

Proof. Alcanza con probarlo para formas soportadas en entornos en los que el fibrado es trivial. Por lo tanto, alcanza con probarlo para el caso del fibrado trivial $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Lo vemos para formas del tipo 1 y del tipo 2.

Si ω es una forma del tipo 1, entonces $\omega = \pi^*(\phi) \wedge f(x, t) dt_1 \dots dt_k$. Llamamos l al grado de ϕ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \pi_* d\omega &= \pi_*(\pi^*(d\phi) \wedge f dt_1 \dots dt_k + (-1)^l \pi^*(\phi) \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt_1 \dots dt_k) \\ &= (d\phi) \int f dt_1 \dots dt_k + (-1)^l \sum_{i=1}^n \phi \wedge dx_i \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d\pi_*\omega &= d(\phi \int f dt_1 \dots dt_k) \\
&= (d\phi) \int f dt_1 \dots dt_k + (-1)^l \phi \wedge \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt_1 \dots dt_k \\
&= (d\phi) \int f dt_1 \dots dt_k + (-1)^l \sum_{i=1}^n \phi \wedge dx_i \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dt_1 \dots dt_k
\end{aligned}$$

Luego, si ω es del tipo 1, tenemos lo que queremos.

Si ω es del tipo 2, entonces $\omega = \pi^*(\phi) \wedge f(x, t) dt_{i_1} \dots dt_{i_r}$ con $r < k$. Por un lado,

$$d\pi_*\omega = 0$$

Por el otro, es inmediato que $\pi_*d\omega = 0$ a menos que sea $r = k - 1$. En ese caso, se tiene

$$\pi_*d\omega = (-1)^l \sum_{i=1}^k \pi_*(\pi^*(\phi) \wedge \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_r})$$

El único sumando no nulo en la expresión de la derecha se da cuando $dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_r} = \pm dt_1 \dots dt_k$. En ese caso,

$$\begin{aligned}
\pi_*(\pi^*(\phi) \wedge \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \dots dt_k) &= \phi \int \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \dots dt_k \\
&= \pm \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \right) dt_1 \dots \hat{dt}_i \dots dt_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que, al tener f soporte compacto, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i = 0$ (por el teorema fundamental del cálculo). \square

Corolario 3.28. *El mapa π_* induce un mapa en cohomología, $\pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-k}(M)$. , dado por $\pi_*([\omega]) = [\pi_*(\omega)]$.*

Ahora veremos que π_* es de hecho un isomorfismo, cuya inversa llamaremos *isomorfismo de Thom*. Comenzamos nuevamente por el caso de un fibrado trivial.

Proposición 3.29. *Si $E = M \times \mathbb{R}^k$, entonces $\pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-k}(M)$ es un isomorfismo.*

Proof. Sea $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y con soporte compacto tal que $\int_{\mathbb{R}^k} g = 1$. Observamos que $\Phi = g dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ es una forma cerrada en \mathbb{R}^k , y por lo tanto en E . Luego, definimos $\tilde{T} : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega_{cv}^{*+k}(E)$ como $\tilde{T}(\omega) = p^*(\omega) \wedge \Phi$. Por ser Φ cerrada, $d\tilde{T} = \tilde{T}d$, y por lo tanto \tilde{T} induce $T : H^*(M) \rightarrow H_{cv}^*(E)$. Veamos que esta es la inversa de π_* : Por un lado, si $\omega \in \Omega^*(M)$, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_*(T(\omega)) &= \pi_*(\pi^*(\omega) \wedge \Phi) \\ &= \pi_*(\pi^*(\omega) \wedge g dt_1 \dots dt_k) \\ &= \omega \int_{\mathbb{R}^k} g dt_1 \dots dt_k \\ &= \omega \end{aligned}$$

Vemos entonces que \tilde{T} es inversa a derecha de π_* , por lo tanto T también lo es a nivel de la cohomología. No es verdad que \tilde{T} y $\pi_* : \Omega_{cv}^{*+k}(E) \rightarrow \Omega^*(M)$ sean verdaderamente inversas, sin embargo T y $\pi_* : H_{cv}^{*+k}(E) \rightarrow H^*(M)$ sí lo son.

Esto se prueba mediante el mismo procedimiento que el lema de Poincaré para cohomología con soporte compacto. Para ver los detalles de la prueba, se puede consultar el capítulo 1 de [BT]. □

Antes de pasar al caso general, vemos que la integración a lo largo de las fibras se comporta de manera intuitiva en dos aspectos. Esto nos ayudará al generalizar lo que acabamos de probar.

Proposición 3.30. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial real de rango k , $\eta \in \Omega^*(M)$ y $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$. Entonces:*

1. *Se da la igualdad $\pi_*(\pi^*(\eta) \wedge \omega) = \eta \wedge \pi_*(\omega)$.*
2. *Si además M es orientable, de dimensión n , $E \rightarrow M$ es orientable y se tiene $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$, $\eta \in \Omega^{k+n-q}(M)$, entonces dándole a E la orientación como producto local, se cumple que*

$$\int_E (\pi^*(\eta)) \wedge \omega = \int_M \eta \wedge \pi_*(\omega)$$

Proof. Probamos el ítem 1:

Alcanza con probarlo en el caso de un fibrado trivial $E = M \times \mathbb{R}^k$, y para formas del tipo 1 y del tipo 2.

Si $\omega = \pi^*(\phi) \wedge f dt_1 \dots dt_k$ es una forma de tipo 1, entonces

$$\begin{aligned} \pi_*(\pi^*(\eta) \wedge \omega) &= \pi_*(\pi^*(\eta \wedge \phi) \wedge f dt_1 \dots dt_k) \\ &= \eta \wedge \phi \int f dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$\eta \wedge \pi_* \omega = \eta \wedge \phi \int f dt_1 \dots dt_k$$

Luego en ese caso se cumple.

Si $\omega = \pi^*(\phi) \wedge f dt_{i_1} \dots dt_{i_r}$ con $r < k$ es de tipo 2, entonces $\pi_*(\pi^*(\eta) \wedge \omega) = 0$ (porque $r < k$), y $\pi_* \omega = 0$, por lo tanto también $\eta \wedge \pi_*(\omega) = 0$. Queda entonces probado 1.

Para probar el ítem 2, tomamos una partición de la unidad de M . Luego, alcanza con probarlo para un fibrado trivial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, y en este caso se cumple por el teorema de Fubini. \square

Ahora, procedemos como en la demostración del teorema de dualidad de Poincaré, y aplicamos la sucesión de Mayer-Vietoris junto con el lema de los cinco para deducir el isomorfismo en el caso general, por inducción en un buen cubrimiento.

Teorema 3.31. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado orientable, donde M admite un buen cubrimiento finito. Entonces, $\pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-k}(M)$ es un isomorfismo.*

Proof. Lo hacemos por inducción en un buen cubrimiento finito. Alcanza con ver que, dados abiertos U, V de forma que $\pi_* : H_{cv}^*(E|_U) \rightarrow H^*(U)$, $\pi_* : H_{cv}^*(E|_V) \rightarrow H^*(V)$ y $\pi_* : H_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow H^*(U \cap V)$ son isomorfismos, entonces $\pi_* : H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \rightarrow H^*(U \cup V)$ también es un isomorfismo.

Consideramos el siguiente diagrama, cuyas filas son las sucesiones de Mayer-Vietoris para cohomología con soporte vertical compacto y cohomología de de Rham.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V) & \longrightarrow & H^*(E|_{U \cap V}) & \longrightarrow & H_{cv}^{*+1}(E|_{U \cup V}) & \longrightarrow \\ & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & \\ \longrightarrow & H^{*-k}(U \cup V) & \longrightarrow & H^{*-k}(U) \oplus H^{*-k}(V) & \longrightarrow & H^{*-k}(U \cap V) & \longrightarrow & H^{*-n+1}(M) & \longrightarrow \end{array}$$

Si probamos que el diagrama es conmutativo, entonces por ser π_* un isomorfismo en el caso de un fibrado trivial, y por el lema de los cinco, tenemos lo que buscamos. Alcanza con probar entonces que es conmutativo. Para los primeros dos cuadrados, es inmediato, y para el segundo, sale de la parte 1 de la proposición anterior:

Tomamos una partición de la unidad $\{\rho_U, \rho_V\}$ de $U \cup V$ asociada al cubrimiento $\{U, V\}$. Entonces, $\{\pi^*(\rho_U), \pi^*(\rho_V)\}$ es una partición de la unidad de $E|_{U \cup V}$ asociada al cubrimiento $\{E|_U, E|_V\}$.

Entonces, en U , tenemos

$$\begin{aligned}
\pi_*(d^*[\omega]) &= \pi_*(d(\pi^*(\rho_U)\omega)) \\
&= \pi_*((d\pi^*(\rho_U)) \wedge \omega) \\
&= \pi_*(\pi^*(d\rho_U) \wedge \omega) \\
&= d\rho_U \wedge \pi_*\omega \\
&= d^*(\pi_*\omega)
\end{aligned}$$

Y análogamente en V . Por lo tanto, el diagrama conmuta y tenemos lo que queríamos. \square

Ahora estamos en condiciones de definir el *isomorfismo de Thom* y la *clase de Thom* de E .

Definición 3.32. Llamamos *isomorfismo de Thom* a $(\pi_*)^{-1} = T : H^*(M) \rightarrow H_{cv}^{*+m}(E)$, y *clase de Thom de E* a la clase de cohomología $\Phi(E) = T(1) \in H_{cv}^m(E)$, donde $1 \in H^0(M)$ es la clase correspondiente a la función constante 1.

Se puede dar una fórmula explícita para T , en términos de la clase de Thom. A su vez, esta puede ser caracterizada de la siguiente forma:

Proposición 3.33. *Sea E un fibrado vectorial orientado, y $\Phi = \Phi(E)$ su clase de Thom. Entonces,*

1. *El isomorfismo $T : H^*(M) \rightarrow H_{cv}^{*+m}(E)$ está dado por*

$$T(\omega) = \pi^*(\omega) \wedge \Phi$$

2. *La clase $\Phi \in H_{cv}^m(E)$ está unívocamente caracterizada por ser la clase en $H_{cv}^m(E)$ que se restringe al generador de $H_c^m(F)$, para toda fibra F . Es decir, es la única para la que se cumple $\int_F i^*(\Phi) = 1$ para toda F .*

Proof. Dada ω en $H^*(M)$, tenemos $\pi_*(\pi^*(\omega) \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*(\Phi) = \omega$, por lo tanto debe ser $T(\omega) = \pi^*(\omega) \wedge \Phi$, y 1 queda probado.

Supongamos ahora que existe Φ' cerrada, de soporte vertical compacto tal que su restricción a cada fibra integra 1. Entonces, para toda ω en $H^*(M)$, tenemos $\pi_*(\pi^*(\omega) \wedge \Phi') = \omega \wedge \pi_*\Phi' = \omega$. Pero entonces, el mapa $\omega \mapsto \pi^*(\omega) \wedge \Phi'$ coincide con el isomorfismo de Thom, por lo tanto sus imágenes de la clase 1 en $H^0(M)$ coinciden, y luego $\Phi = \Phi'$. \square

Por último, veamos cómo es la clase de Thom de la suma de Whitney de dos fibrados vectoriales.

Proposición 3.34. *Dados dos fibrados vectoriales orientados E_1 y E_2 , la clase de Thom de $E_1 \oplus E_2$ es*

$$\Phi(E_1 \oplus E_2) = p_1^* \Phi(E_1) \wedge p_2^* \Phi(E_2)$$

donde $p_i : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_i$ es la proyección canónica, para $i = 1, 2$.

Proof. Llamamos $F = E_1 \oplus E_2$, $n = \text{rango } E_1$ y $m = \text{rango } E_2$.

Usamos la proposición anterior: alcanza con probar que la restricción de $p_1^* \Phi(E_1) \wedge p_2^* \Phi(E_2)$ a cada fibra F_x de F es un generador de $H_c^{n+m}(F_x)$.

Veamos esto:

Dada una fibra $F_x = (E_1 \oplus E_2)_x$ de F , tenemos $F_x = (E_1)_x \times (E_2)_x$, por lo tanto, por la fórmula de Künneth, se tiene $H_c^n((E_1)_x) \otimes H_c^m((E_2)_x) \cong H_c^{n+m}(F_x)$, donde el isomorfismo está dado por $\omega \otimes \eta \mapsto p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\eta)$.

Tenemos que $p_1^* \Phi(E_1) \wedge p_2^* \Phi(E_2)$ es una clase en $H_{cv}^{n+m}(E_1 \oplus E_2)$ que se restringe a su generador, ya que $\Phi(E_1), \Phi(E_2)$ se restringen a los generadores de $H_c^n((E_1)_x)$ y $H_c^m((E_2)_x)$ respectivamente.

Alternativamente, podríamos observar que

$$\int_{F_x} i^*(p_1^* \Phi(E_1) \wedge p_2^* \Phi(E_2)) = \int_{(E_1)_x} i_1^* \Phi(E_1) \wedge \left(\int_{(E_2)_x} i_2^* \Phi(E_2) \right) = \int_{(E_1)_x} i_1^* \Phi(E_1) = 1$$

que se deduce del teorema de Fubini, donde i_1, i_2 son las respectivas inclusiones de las fibras $(E_1)_x, (E_2)_x$ en E_1 y E_2 . □

3.2.4 Dualidad de Poincaré e intersecciones transversales

En esta sección veremos la relación entre la intersección transversal de subvariedades y la dualidad de Poincaré. Además, vemos que el número de intersección de dos subvariedades coincide con la integral del dual de Poincaré de una en la otra.

Para comenzar, consideramos la clase de Thom del fibrado normal N_S de una subvariedad S de M (recordamos que este es difeomorfo a un entorno tubular T de S), y probamos lo siguiente:

Proposición 3.35. *El dual de Poincaré $\eta_S \in H^{n-k}(M)$ de una subvariedad $S \subset M$ cerrada y orientada de dimensión k y la clase de Thom $\Phi(N_S)$ del fibrado normal a S en M pueden ser representados por la misma forma.*

Más precisamente, si $j : T \rightarrow M$ es la inclusión de un entorno tubular de S , entonces

$$\eta_S = j_* \Phi(N_S)$$

donde $\Phi(N_S) \in H_{cv}^{n-k}(T)$ es la clase de Thom de N_S , y $j_* : H_{cv}^{n-k}(T) \rightarrow H^{n-k}(M)$ está inducida por la inclusión.

Proof. Recordemos que el dual de Poincaré de S es la única clase $\eta_S \in H^{n-k}(M)$ tal que, para toda $[\omega] \in H^k(M)$, se tiene

$$\int_S i^* \omega = \int_M \omega \wedge \eta_S$$

Alcanza entonces con probar que, para toda $[\omega] \in H^k(M)$ se cumple que

$$\int_S i^* \omega = \int_M \omega \wedge j_* \Phi(N_S)$$

Llamamos $\Phi = \Phi(N_S)$. Dada una tal $[\omega]$, tenemos:

$$\int_M \omega \wedge j_* \Phi = \int_T \omega \wedge \Phi$$

porque $j_* \Phi$ coincide con Φ en T , y es nula en su complemento. Observamos ahora que, si fuera $\omega = \pi^* i^* \omega$, es decir, si ω fuera igual a la “extensión trivial” a T de su restricción a S , tendríamos:

$$\begin{aligned} \int_T \omega \wedge \Phi &= \int_T \pi^* i^* \omega \wedge \Phi \\ &= \int_S i^* \omega \wedge \pi_* \Phi \\ &= \int_S i^* \omega \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad fue probada en la sección anterior.

Por supuesto que no necesariamente se cumplirá $\omega = \pi^* i^* \omega$, pero lo que sí debe de cumplirse es que $\omega = \pi^* i^* \omega + d\tau$ (en T) para alguna $\tau \in \Omega^{k-1}(T)$, ya que a nivel de la cohomología, $\pi^* : H^k(S) \rightarrow H^k(T)$ e $i^* : H^k(T) \rightarrow H^k(S)$ son inversas.

Luego, en el caso general lo que se tiene es

$$\begin{aligned} \int_T \omega \wedge \Phi &= \int_T (\pi^* i^* \omega + d\tau) \wedge \Phi \\ &= \int_S i^* \omega \wedge \pi_* \Phi + \int_T d(\tau \wedge \Phi) \\ &= \int_S i^* \omega + \int_{\partial T = \emptyset} \tau \wedge \Phi \\ &= \int_S i^* \omega \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad sale de que Φ es cerrada, y en la tercera usamos el teorema de Stokes. □

Recordamos que siempre podemos tomar entornos tubulares arbitrariamente chicos de una subvariedad. Por lo tanto, tenemos:

Corolario 3.36. *Dada $X \subset M$ una subvariedad de dimensión k , y $\eta_X \in H^{n-k}(M)$ su dual de Poincaré, siempre es posible tomar una representante de η_X soportada en un entorno arbitrariamente pequeño de X .*

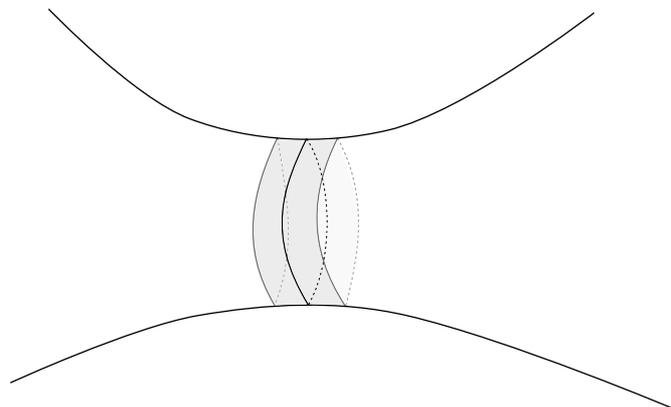


Figure 4: Podemos tomar el soporte del dual de Poincaré a la curva tan pequeño como queramos.

Ahora hacemos una observación sobre el fibrado normal de una intersección transversal de subvariedades:

Observación. Si $R, S \subset M$ son subvariedades cerradas que se intersectan transversalmente, entonces $N_{R \cap S} = N_R \oplus N_S$.

Para probar la afirmación alcanza con considerar el caso local, en el que $M = \mathbb{R}^n$, y R, S son subespacios de \mathbb{R}^n tales que $R + S = \mathbb{R}^n$. En este caso, es geoméricamente claro que todo vector normal a $R \cap S$ se puede escribir como suma de vectores normales a R y a S de forma única (además se puede probar fácilmente tomando coordenadas).

Como consecuencia, y usando la Proposición 3.34 junto con la proposición anterior, tenemos:

Teorema 3.37. *Si R, S son subvariedades cerradas y orientadas de M que se intersectan transversalmente, entonces*

$$\eta_{R \cap S} = \eta_R \wedge \eta_S$$

Proof. La Proposición 3.34 implica que $\Phi(N_{R \cap S}) = \Phi(N_R \oplus N_S) = \Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S)$. Por la proposición anterior, debe ser entonces $\eta_{R \cap S} = j_* \Phi(N_{R \cap S}) = j_*(\Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S)) = \eta_R \wedge \eta_S$.

□

Esto nos permite obtener información acerca del producto en el anillo de cohomología de la variedad a partir de conocer las intersecciones de sus subvariedades, que es algo geométrico.

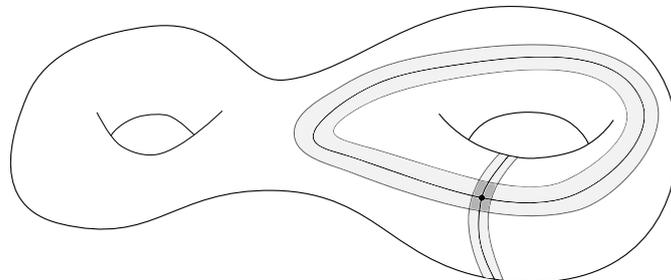


Figure 5: El producto de los duales de Poincaré de las curvas en la superficie da el dual de Poincaré a un punto.

Vemos ahora un ejemplo sencillo pero importante: el dual de Poincaré de una subvariedad compacta y orientada de dimensión 0 (es decir, una unión finita de puntos con una elección de orientación para cada uno).

Cuando esta consista de un único punto (como en la figura 5), su dual de Poincaré será un generador del grupo de cohomología de dimensión superior de la variedad.

Ejemplo 3.38. Si $X = \{x\} \subset M^n$ está orientada (es decir, x tiene asociado un signo $\sigma = \pm 1$), entonces $\eta_X = \sigma[\tau]$, donde $\tau \in H^n(M)$ es una forma con soporte compacto e integral 1. Esto es porque el fibrado normal de X en M podemos tomarlo como una bola abierta centrada en x , y en este caso la integral de una forma sobre la fibra coincide con su integral en la bola.

Si $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset M$ está orientada (es decir, para cada x_i tenemos un signo $\sigma_i \in \{1, -1\}$), entonces $\eta_X = \sum \sigma_i \tau_i$, donde τ_i son formas como la forma τ que se describe arriba.

Como consecuencia, vemos cómo expresar el número de intersección de dos subvariedades.

Corolario 3.39. Dadas $X^k, Y^{n-k} \subset M$ cerradas y orientadas, se tiene

$$I(X, Y) = \int_Y i^* \eta_X$$

donde $i : Y \rightarrow M$ es la inclusión de Y en M .

Proof. Asumimos primero que X e Y se intersectan transversalmente. En ese caso, tenemos

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= \sum_{p \in X \cap Y} \sigma_p(X, Y) \\
&= \sum_{p \in X \cap Y} \int_{U(p)} \eta_{\{p\}} \\
&= \int_M \sum_{p \in X \cap Y} \eta_{\{p\}} \\
&= \int_M \eta_{X \cap Y} \\
&= \int_M \eta_X \wedge \eta_Y \\
&= \int_Y i^* \eta_X
\end{aligned}$$

Si X e Y no se intersectan transversalmente, tomamos $i_t : Y \rightarrow M$ homotópica a la inclusión $i : Y \rightarrow M$ y suficientemente cerca de esta, de manera que sea un encaje y su imagen Y' interseque transversalmente a X .

Se tiene entonces $I(X, Y) = I(X, Y') = \int_{Y'} j^* \eta_X$, donde $j : Y' \rightarrow M$ es la inclusión de Y en M . Pero $\int_{Y'} j^* \eta_X = \int_Y i_t^* j^* \eta_X = \int_Y i^* \eta_X$, lo que concluye la prueba en el caso general.

□

El Teorema 3.37 es un caso particular del siguiente, cuando se considera la inclusión $i : X \rightarrow M$ de una subvariedad X .

Teorema 3.40. *Si $f : M^n \rightarrow N^m$ es un mapa diferenciable transversal a una subvariedad cerrada y orientada $Y \subset N$ de codimensión k , que preserva orientación, entonces $\eta_{f^{-1}(Y)} = f^* \eta_Y \in H^k(M)$.*

Proof. Tomamos W un entorno tubular de Y en N . Podemos suponer (posiblemente tomando W más chico), perturbando f dentro de su clase de homotopía, que f es transversal a Y y a W . Luego, $f^{-1}(W)$ es un entorno tubular de $f^{-1}(Y)$ en M .

Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(Y) & \xrightarrow{T} & H_{cv}^k(W) & \xrightarrow{j_*} & H^k(N) \\
 \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\
 H^0(f^{-1}(Y)) & \xrightarrow{T} & H_{cv}^k(f^{-1}(W)) & \xrightarrow{j_*} & H^k(M)
 \end{array}$$

El primer cuadrado es conmutativo por la caracterización que vimos de la clase de Thom como la clase que integra 1 en cada fibra, y por lo tanto $f^*(\Phi(W)) = \Phi(f^{-1}(T))$.

El segundo cuadrado es conmutativo porque j_* solo extiende a las formas a M y N como la forma nula fuera de W y $f^{-1}(W)$ respectivamente.

Luego, tenemos $f^*\eta_Y = f^*j_*\Phi(W) = j_*\Phi(f^{-1}(W)) = \eta_{f^{-1}(Y)}$.

Si f no es transversal a W , tomamos \hat{f} que sí lo sea y sea homotópica a f . Luego, $\eta_{\hat{f}^{-1}(Y)} = \hat{f}^*\eta_Y = f^*\eta_Y$, y queda probado. □

De la demostración, deducimos además lo siguiente.

Observación. Si $f, g : M \rightarrow N$ son homotópicas y transversales a una subvariedad $Y \subset N$, entonces $\eta_{f^{-1}(Y)} = \eta_{g^{-1}(Y)}$.

3.2.5 La clase de Euler de un fibrado vectorial

Puede ser interesante pensar en cuándo un fibrado vectorial admite una sección no nula.

Por ejemplo, cuando consideramos el fibrado tangente a una variedad cerrada y orientable M , una sección no nula corresponde a un campo sin singularidades. En este caso, el teorema de Poincaré-Hopf nos dice que, para que exista un tal campo, la característica de Euler de M debe ser nula. Por otro lado, esta condición es suficiente: una variedad cerrada y orientable admite un campo sin singularidades si y solamente si $\chi(M) = 0$ (ver [GP], capítulo 3).

Ahora miramos esto desde otro punto de vista, que se preste más a ser generalizado a un fibrado vectorial que no sea necesariamente el fibrado tangente a una variedad.

Un campo sin singularidades se corresponde con una sección $s : M \rightarrow TM$ del fibrado tangente cuya imagen no interseca a la sección nula $i : M \rightarrow TM$. Esto implica que $I(s, i(M)) = 0$. Pero, como sabemos, dos secciones de un fibrado vectorial son siempre homotópicas, y por lo tanto la existencia de un campo sin singularidades implica que $I(i, i(M)) = I(i(M), i(M)) = 0$. Es decir, solo es posible que exista un tal campo si el número de intersección de la sección nula

consigo misma es 0. Luego, para una variedad M , $I(i(M), i(M))$ mide qué tan lejos se está de tener secciones de TM que no se anulan.

Para un fibrado vectorial $E \rightarrow M^n$ de rango k cualquiera, no hay en general un número de autointersección de la sección nula, ya que $i(M)$ no necesariamente tiene dimensión $\frac{n+k}{2}$. Esto sucede solamente para $k = n$. No podemos hablar entonces del número de autointersección de la sección nula, pero sí podemos hablar de su autointersección como una subvariedad de E . Al perturbar la sección nula para obtener una sección $s : M \rightarrow E$ que sea transversal a ella, conseguimos que $s(M) \cap i(M)$ sea una subvariedad de E . Ahora, si existiese una sección que no se anula en ningún punto, tendríamos que $s(M) \cap i(M)$ sería vacía, o, lo que es lo mismo, $s^{-1}(i(M)) = \emptyset$. Ahora, podría suceder que existiera una sección con ceros y aun así se tuviera $s^{-1}(i(M)) \neq \emptyset$, de la misma forma que podemos tener campos con finitas singularidades aunque sea $\chi(M) = 0$. Esto no debería depender de la sección s que tomemos. Lo podemos solucionar así: si $s^{-1}(i(M)) = \emptyset$, entonces su dual de Poincaré $\eta_{s^{-1}(i(M))} \in H^k(M)$ es nulo. Y esto no depende de qué sección s tomemos, ya que $\eta_{s^{-1}(i(M))} = s^* \eta_{i(M)}$, y, como sabemos, todas las secciones son homotópicas entre sí. Luego, tiene sentido que nuestra obstrucción a la existencia de una sección sin ceros de un fibrado E de rango k sea una clase de cohomología $e(E)$ en $H^k(M)$, dada por $e(E) = i^* \eta_{i(M)}$.

Esta clase de cohomología $e(E) \in H^k(M)$ es la *clase de Euler* de E . Es claro que esta debería estar directamente relacionada con la característica de Euler de M en el caso $E = TM$. Veremos que esto es así: $e(TM) = \chi(M)[\omega]$, donde $[\omega]$ es un generador de $H^n(M)$ que integra 1 en M .

Vamos ahora a definir la clase de Euler. Daremos una definición distinta a la idea intuitiva que dimos en esta introducción, pero probaremos que coinciden. Luego, veremos algunas propiedades de la clase de Euler, que nos servirán además para dar obstrucciones a la existencia de determinados subfibrados en el tangente a una variedad.

Definición 3.41. Dado un fibrado vectorial orientado $\pi : E \rightarrow M$ de rango k , definimos su clase de Euler como $e(E) := i^* j_* \Phi(E) \in H^k(M)$, donde $\Phi(E)$ es la clase de Thom de E , $i : M \rightarrow E$ es la inclusión de M en E como la sección nula, y $j_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^*(E)$ está inducida por la inclusión.

En la definición es necesario incluir el mapa j_* para poder tomar el pullback por i . Más allá de ese detalle técnico, lo que podemos pensar es que la clase de Euler $e(E)$ está representada en M por el pullback de $\Phi(E)$ mediante la sección cero del fibrado.

Hay una caracterización más intuitiva de la clase de Euler, basada en lo visto en la sección anterior:

Proposición 3.42. Dada una sección $s : M \rightarrow E$ transversal a la imagen de la

sección nula $i : M \rightarrow E$, se tiene que la clase de Euler de E es dual de Poincaré a $s^{-1}(i(M))$.

La prueba se basa en la siguiente:

Observación. La clase de Thom de un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ puede ser representada por la misma forma que el dual de Poincaré $\eta_{i(M)}$ correspondiente a la sección nula $i : M \rightarrow E$.

Esto es porque el dual de Poincaré a $i(M)$ es la clase de Thom del fibrado normal de $i(M)$ en E , pero este fibrado normal se puede tomar como siendo el mismo E .

Vemos ahora la prueba de la proposición.

Proof. Tenemos $j_*\Phi(E) = \eta_{i(M)}$. Ahora, si $s : M \rightarrow E$ es una sección transversal a la sección nula y homotópica a ella, tenemos $i^*j_*\Phi(E) = s^*j_*\Phi(E) = \eta_{s^{-1}(i(M))}$, y eso es lo que queríamos. \square

Corolario 3.43. Si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial orientado de rango $n = \dim M$, donde M es una variedad cerrada, entonces $e(E) = \alpha[\omega]$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ es el número de autointersección de la sección.

Corolario 3.44. Si $X^k \subset M^n$ es una subvariedad tal que $k = \frac{n}{2}$, entonces la clase de Euler del fibrado normal N_X de X en M es $I(X, X)[\omega_X]$, siendo $[\omega_X] \in H^k(X)$ un generador que integra 1 en X .

De esta forma, vemos que la clase de Euler es una obstrucción a la existencia de secciones no nulas, ya que si s es una sección no nula, $s^{-1}(i(M)) = \emptyset$, y por lo tanto $e(E) = \eta_\emptyset = 0$.

Vemos algunas de las propiedades básicas de la clase de Euler.

Proposición 3.45. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial orientado de rango k . Se cumplen las siguientes:

1. Si $E' \rightarrow M'$ es otro fibrado de rango k , y $(\hat{f}, f) : (E, M) \rightarrow (E', M')$ es un mapa que preserva orientación, entonces

$$e(E) = f^*e(E')$$

2. Dado otro fibrado $E' \rightarrow M$, se tiene

$$e(E \oplus E') = e(E) \wedge e(E')$$

3. Si existe una sección no nula $s : M \rightarrow E$, entonces $e(E) = 0$.

4. Si llamamos \overline{E} a E con la orientación opuesta, entonces $e(\overline{E}) = -e(E)$.

Proof. Primero, tenemos que si (\hat{f}, f) es un mapa de fibrados entre E y E' , entonces $\hat{f}^*\Phi(E') = \Phi(E)$, y por lo tanto $f^*e(E') = e(E)$, ya que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_{cv}^k(E) & \xleftarrow{\hat{f}^*} & H_{cv}^k(E') \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\ H^k(E) & \xleftarrow{f^*} & H^k(E') \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ H^k(M) & \xleftarrow{f^*} & H^k(M') \end{array}$$

Luego, sabemos que si E, E' son fibrados sobre M , entonces $\Phi(E \oplus E') = \Phi(E) \wedge \Phi(E')$, y entonces $e(E \oplus E') = e(E) \wedge e(E')$.

Si $s : M \rightarrow E$ es una sección no nula e $i : M \rightarrow E$ es la sección cero, como ya vimos, se tiene $e(\overline{E}) = \eta_{s^{-1}(i(M))}\eta_{\emptyset} = 0$.

Por último, si \overline{E} es E con la orientación opuesta, tenemos $\Phi(\overline{E}) = -\Phi(E)$, y por lo tanto $e(\overline{E}) = -e(E)$. □

Veamos ahora algunas de las consecuencias de la proposición.

La clase de Euler es un invariante de fibrados vectoriales. Es decir:

Corolario 3.46. *Si E, E' son fibrados orientados isomorfos sobre M , entonces $e(E) = \pm e(E')$, donde el signo es positivo si existe un isomorfismo entre ellos que preserva orientación, y es negativo si existe uno que la revierte.*

Observación. Si $E \cong M \times \mathbb{R}^k$ es trivial, $e(E) = 0$.

Corolario 3.47. *Si $E \rightarrow M$ tiene rango impar, entonces $e(E) = 0$.*

Proof. Si E es de dimensión impar, entonces el isomorfismo $E \rightarrow E$ dado por $v \mapsto -v$ en cada fibra es un isomorfismo que revierte orientación. Por lo tanto, $e(E) = -e(E)$, y luego $e(E) = 0$. □

Observamos que lo anterior sucede porque estamos usando cohomología de de Rham, en la que los coeficientes son números reales. Se puede definir la clase de Euler para cohomología singular (con coeficientes enteros), por ejemplo, y en ese caso lo que tenemos es que si E es de dimensión impar, entonces $e(E) + e(E) = 0$. Es decir, para fibrados vectoriales de rango impar, la clase de Euler con coeficientes enteros es un elemento de torsión.

Corolario 3.48. Si $e(E) \neq 0$, y $E = E_1 \oplus E_2$, entonces $e(E_1), e(E_2) \neq 0$.

Esto es directo del punto 2 de la proposición. Como consecuencia de esto, tenemos:

Corolario 3.49. Un fibrado vectorial orientable E con clase de Euler no nula no tiene subfibrados de rango impar.

Proof. Vemos primero que E no puede tener un subfibrado orientable de rango impar. En este caso el resultado se deduce directamente de lo anterior: si $F \subset E$ es un subfibrado, podemos tomar F' complemento directo de F (por ejemplo, poniendo una métrica en E y tomando F' como el complemento ortogonal de F). Luego $E = F \oplus F'$, y por ser E y F orientables tenemos que F' es orientable. Pero entonces, $0 \neq e(E) = e(F) \wedge e(F')$. Luego, no puede existir un subfibrado F de rango impar y orientable, ya que este tendría $e(F) = 0$.

Ahora, si E tiene un subfibrado F de rango impar que no es orientable, tomamos un cubrimiento doble de M tal que $f^*F \subset f^*E$ es orientable. Por ser $e(E) \neq 0$, debe ser $e(f^*E) \neq 0$. Ahora estamos en el caso de un subfibrado orientable, y queda probado el corolario. \square

Veamos ahora que, como dijimos, en el caso del fibrado tangente TM a una variedad M , la clase de Euler $e(TM)$ es un elemento de $H^n(M)$, por lo tanto es un múltiplo de un generador de este. Recordemos que, como dicho generador, podemos tomar una clase que integre 1.

Proposición 3.50. Si M es una variedad cerrada y orientada, entonces

$$\int_M e(TM) = \chi(M)$$

y por lo tanto $e(TM) = \chi(M)[\omega]$, donde $\omega \in \Omega^n(M)$ es como arriba.

Proof. Tenemos $\int_M e(TM) = \int_\Delta e(T_\Delta)$, donde Δ es la diagonal en $M \times M$.

Por otro lado, observamos que $T_\Delta \cong N_\Delta$, ya que $T_\Delta \oplus N_\Delta = T_{M \times M}|_\Delta \cong T_M \oplus T_M$, y $T_\Delta \cong T_M$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_M e(TM) &= \int_\Delta e(T_\Delta) \\ &= \int_\Delta e(N_\Delta) \\ &= \int_\Delta \Phi(N_\Delta) \\ &= \int_\Delta \eta_\Delta \\ &= I(\Delta, \Delta) \\ &= \chi(M) \end{aligned}$$

□

Esto nos da ciertas obstrucciones a la existencia de una descomposición del fibrado tangente a una variedad como $TM = E_1 \oplus E_2$.

Por ejemplo:

Proposición 3.51. *Si M es cerrada y orientable con $\chi(M) \neq 0$, entonces TM no se descompone como $TM = E_1 \oplus E_2$ con E_1, E_2 de dimensión impar y alguno de ellos orientable.*

Sabemos que $\chi(S^{2n}) = 2$ para todo $n \geq 1$, y por lo tanto por el Teorema de Poincaré-Hopf, no existen campos sin singularidades en S^{2n} . En términos de fibrados, esto equivale a decir que no existen subfibrados triviales de dimensión 1 de TS^{2n} . Ahora podemos decir un poco más:

Proposición 3.52. *No existen subfibrados vectoriales de TS^{2n} con rango $0 < k < 2n$.*

Si existiese un tal subfibrado $E \subset TM$, sería orientable por ser S^{2n} simplemente conexa y luego debería ser, por lo que vimos, $0 \neq e(E) \in H^k(S^{2n}) = 0$, luego no es posible que exista.

Vale la pena aclarar que, si bien la existencia de una sección de un fibrado implica que la clase de Euler se anula, el recíproco no se cumple: existen fibrados vectoriales E con $e(E) = 0$, que no admiten secciones no nulas. Para un ejemplo, se puede ver el capítulo 4, sección 23 de [BT].

Es importante mencionar que hay otras definiciones posibles de la clase de Euler de un fibrado vectorial. Mediante el procedimiento que se describe en la sección A.1.1 del Apéndice y se detalla en el capítulo 29 de [Ste], uno puede intentar construir una sección no nula de un fibrado vectorial de rango k construyendo una sección del fibrado por esferas con fibra S^{k-1} asociado a este (es decir, el fibrado con espacio total los vectores de norma 1). La sección se construye primero en el 0-esqueleto M^0 (pensando a M como un complejo CW), y se va extendiendo desde el q -esqueleto al $(q+1)$ -esqueleto. Esto se puede hacer sin problemas hasta llegar a una sección definida en el $(k-1)$ -esqueleto. En ese momento aparece una obstrucción a extender la sección al k -esqueleto, y esa obstrucción es justamente la clase de Euler (en cohomología singular). Este punto de vista se puede encontrar en la parte 3 de [Ste].

3.3 Isomorfismo de Thom y clase de Euler: fibrados por discos

Vemos ahora resultados análogos a los anteriores para el caso de fibrados por discos $D \rightarrow M$. Estos serán de hecho una generalización de los que ya vimos, dado que todo fibrado vectorial es un fibrado por discos.

Veremos una versión del isomorfismo de Thom para fibrados por discos, y luego la definición de la clase de Euler para un fibrado por esferas asociado a un fibrado por discos (de hecho, como veremos, todo fibrado por esferas sobre una variedad sin borde es isomorfo al borde de un fibrado por discos).

3.3.1 Fibrados por discos

Damos primero una definición de lo que es ser orientable para un fibrado por discos. La definición es análoga a la definición para fibrados vectoriales.

Definición 3.53. Un fibrado por discos $D \rightarrow M$ con fibra D^k es orientable si existe una trivialización $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que los mapas de transición $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Homeo}(D^k)$ tienen su imagen contenida en $\text{Homeo}^+(D^k)$.

Una vez más, esto significa que se le puede asignar de manera coherente una orientación a las fibras de D . Nos va a interesar una condición que es equivalente a esta definición.

Proposición 3.54. *Un fibrado por discos $D \rightarrow M$ con fibra D^k es orientable si y solamente si existe un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y clases de cohomología $[\sigma_\alpha] \in H^k(D|_{U_\alpha}, \partial D|_{U_\alpha})$ tales que:*

1. *La restricción de $[\sigma_\alpha]$ a D_x es un generador de $H^k(D_x, \partial D_x)$ para cada x en U_α .*
2. *Siempre que sea $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene que las clases $[\sigma_\alpha], [\sigma_\beta]$ coinciden.*

Lo que usaremos en realidad es que nuestra definición de orientabilidad implica la condición de arriba. Eso se puede ver definiendo las clases $[\sigma_\alpha]$ mediante una trivialización $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ dada por la orientación, ya que un elemento de $\text{Homeo}^+(D^k)$ actúa como la identidad en $H^k(D^k, \partial D^k)$.

3.3.2 El isomorfismo de Thom en un fibrado por discos

El teorema del isomorfismo de Thom para fibrados por discos es:

Teorema 3.55. *Dado un fibrado por discos orientado $D \rightarrow M$ con fibra D^k , existe una única clase de cohomología $\Phi(D) \in H^k(D, \partial D)$ tal que su restricción a (D, D_x) es un generador de $H^k(D_x, \partial D_x)$ para toda fibra D_x .*

Además, se tiene un isomorfismo $T : H^(M) \rightarrow H^{*+k}(D, \partial D)$ dado por $T(\sigma) = \pi^*\sigma \smile \Phi(D)$.*

Como en el caso de fibrados vectoriales, llamamos a $\Phi(D)$ *clase de Thom de D* , y a T *isomorfismo de Thom*.

De la misma forma, definimos la clase de Euler para un fibrado por discos:

Definición 3.56. Dado un fibrado orientable $D \rightarrow M$ con fibra D^k , la clase de Euler de D es $e(D) = i^* j_* \Phi(D) \in H^k(M)$, donde $j_* : H^*(D, \partial D) \rightarrow H^*(D)$ está inducido por la inclusión $(D, \partial D) \rightarrow (D, \emptyset)$ y $i^* : H^*(D) \rightarrow H^*(M)$ por una sección continua $i : M \rightarrow D$.

Para la definición, se usa una sección continua $i : M \rightarrow D$. En la sección 1 del Apéndice (por ejemplo, en A.11) se da una explicación de la existencia de dicha sección continua. Argumentos similares (consultar [Ste], parte 3) permiten ver que la definición no depende de la sección escogida, dada que son todas homotópicas entre sí).

La prueba del teorema del isomorfismo de Thom para fibrados por discos es muy similar a la que vimos para fibrados vectoriales: primero se prueba en el caso de un producto, y luego se hace inducción en un buen cubrimiento, usando Mayer-Vietoris y la condición de orientabilidad para el caso general. Para ver una prueba, se puede consultar el capítulo 10 de [MS], donde se da una prueba para fibrados vectoriales pero que se generaliza sin ningún cambio para fibrados por discos.

4 Cohomología de un fibrado por esferas

4.1 La cohomología de un producto: la fórmula de Künneth

En esta sección, probamos la *fórmula de Künneth*, que nos da la cohomología de un producto de variedades en términos de la cohomología de los factores. Nos interesará en particular el caso del producto de una variedad con una esfera, pero lo probaremos en general dado que es interesante por sí mismo, y no agrega más dificultades.

También vale el resultado para cohomología singular, para ese caso se puede obtener con una prueba análoga a la que haremos, o mediante el isomorfismo de de Rham.

La prueba que hacemos se puede encontrar en [BT], capítulo 1.

Teorema 4.1 (Fórmula de Künneth). *Sean M, N variedades. Llamamos $p_1 : M \times N \rightarrow M$, $p_2 : M \times N \rightarrow N$ a las proyecciones sobre M y N respectivamente. Entonces, se tiene un isomorfismo*

$$K : H^*(M) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(M \times N)$$

dado por $K(\omega \otimes \eta) = p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\eta)$.

En particular, tenemos

$$H^q(M \times N) \cong \bigoplus_{i+j=q} H^i(M) \otimes H^j(N)$$

La prueba será por inducción en los abiertos de M . Primero vemos el caso particular en que $M \cong \mathbb{R}^n$:

Lema 4.2. *Sea N una variedad. Luego, $K : H^*(\mathbb{R}^n) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n \times N)$ es un isomorfismo.*

Proof. Recordamos que $p_2 : \mathbb{R}^n \times N \rightarrow N$ es una equivalencia homotópica, y por lo tanto induce un isomorfismo en cohomología.

Además, sabemos que $H^*(\mathbb{R}^n) \cong H^0(\mathbb{R}^n) = \langle 1 \rangle$, donde $1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$ es la clase correspondiente a la función constante 1. Luego, tenemos un isomorfismo $\varphi : H^*(\mathbb{R}^n) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(N)$, con $\varphi(a \otimes \omega) = a\omega$.

Observamos ahora que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{R}^n) \otimes H^*(N) & \xrightarrow{K} & H^*(\mathbb{R}^n \times N) \\ & \searrow \varphi & \nearrow p_1^* \\ & & H^*(N) \end{array}$$

conmuta, y con eso concluimos que K es un isomorfismo. \square

Ahora, probamos el caso general:

Demostración (Teorema 4.1). Alcanza con probar que si $U, V \subset M$ son abiertos tales que el teorema se cumple para $U \times N$, $V \times N$ y $(U \cap V) \times N$, entonces se cumple para $(U \cup V) \times N$.

Consideramos el cubrimiento $\{U, V\}$ de $U \cup V$. Luego, llamando $U' = U \times N$, $V' = V \times N$, tenemos que $\{U', V'\}$ es un cubrimiento de $(U \cup V) \times N = U' \cup V'$. Aplicando Mayer-Vietoris, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^*(U' \cup V') \xrightarrow{i'^*} H^*(U') \oplus H^*(V') \xrightarrow{j'^*} H^*((U' \cap V')) \xrightarrow{\delta^*} H^{*+1}(U' \cup V') \rightarrow \dots$$

donde i'^* es $i'^* = (i_{U'}^*, i_{V'}^*)$, y $j'^* = j_{U'}^* - j_{V'}^*$, siendo $i_W : W \rightarrow U' \cup V'$ la inclusión para $W = U', V'$, y $j_W : U' \cap V' \rightarrow W$ también la inclusión, para $W = U', V'$.

Ahora, usamos Mayer-Vietoris para $U \cup V$, y hacemos el producto tensorial con $H^*(N)$ en cada término. La sucesión sigue siendo exacta, ya que es exacta en cada dimensión (hacer el producto tensorial con un espacio vectorial preserva la exactitud). Usamos además que $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$. Obtenemos entonces la sucesión exacta

$$\begin{array}{c} \rightarrow H^*(U \cup V) \otimes H^*(N) \xrightarrow{i^* \otimes \text{id}} (H^*(U) \otimes H^*(N)) \oplus (H^*(V) \otimes H^*(N)) \xrightarrow{j^* \otimes \text{id}} \\ \xrightarrow{j^* \otimes \text{id}} H^*(U \cap V) \otimes H^*(N) \xrightarrow{\delta^* \otimes \text{id}} H^{*+1}(U \cup V) \otimes H^*(N) \longrightarrow \end{array}$$

donde $i^* = (i_U^*, i_V^*)$, y $j^* = j_U^* - j_V^*$, siendo estos inducidos por inclusiones análogamente a lo que ya vimos antes.

Luego, tenemos el morfismo K entre ambas sucesiones, y sabemos que es un isomorfismo en los casos $K : H^*(U \cap V) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*(U' \cap V') = H^*((U \cap V) \times N)$, y $K : (H^*(U) \otimes H^*(N)) \oplus (H^*(V) \otimes H^*(N)) \rightarrow H^*(U') \oplus H^*(V') = H^*(U \times N) \oplus H^*(V \times N)$. Luego, si probamos que el diagrama cuyas filas son las sucesiones exactas y mapas verticales los morfismos de Künneth es conmutativo, quedaría probado, por el lema de los cinco, que $K : H^*(U \cup V) \otimes H^*(N) \rightarrow H^*((U \cup V) \times N)$ es un isomorfismo, y esto es lo que buscamos.

Alcanza con chequear que, para cada q , los siguientes cuadrados son conmutativos:

•

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^q H^i(U \cup V) \otimes H^{q-i}(N) & \xrightarrow{i^* \otimes \text{id}} & \bigoplus_{i=0}^q (H^i(U) \otimes H^{q-i}(N)) \oplus (H^i(V) \otimes H^{q-i}(N)) \\ \downarrow K & & \downarrow (K, K) \\ H^q((U \cup V) \times N) & \xrightarrow{j'^*} & H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N) \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^q (H^i(U) \otimes H^{q-i}(N)) \oplus (H^i(V) \otimes H^{q-i}(N)) & \xrightarrow{j^* \otimes \text{id}} & \bigoplus_{i=0}^q H^i(U \cap V) \otimes H^{q-i}(N) \\ \downarrow (K, K) & & \downarrow K \\ H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N) & \xrightarrow{j'^*} & H^q((U \cap V) \times N) \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^q H^i(U \cap V) \otimes H^{q-i}(N) & \xrightarrow{\delta^* \otimes \text{id}} & \bigoplus_{i=0}^{q+1} H^i(U \cup V) \otimes H^{q+1-i}(N) \\ \downarrow K & & \downarrow K \\ H^q((U \cap V) \times N) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{q+1}((U \cup V) \times N) \end{array}$$

Para los dos primeros cuadrados, la conmutatividad sale directamente de la definición de los morfismos.

Para el tercer cuadrado, la prueba es muy similar a la prueba de la conmutatividad del diagrama en la demostración del Teorema 3.31: hay que considerar el cubrimiento $\{U', V'\}$ de $(U \cup V) \times N$, y a partir de una partición de la unidad

$\{\rho_U, \rho_V\}$ de $U \cup V$ se consigue, tomando pullback por las proyecciones, una partición de la unidad de $(U \cup V) \times N$. A partir de esto, solamente queda aplicar la definición de los morfismos, y del mapa δ^* .

□

4.2 La clase de Euler de un fibrado por esferas

4.2.1 Clase de Euler del fibrado por esferas asociado a un fibrado vectorial

Si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial, podemos poner en E una métrica, es decir, un producto interno en cada fibra que varíe continuamente. Esto nos permite medir distancias en las fibras. El fibrado por esferas asociado a un fibrado vectorial E de rango k es $S(E) = \{v \in E : |v| = 1\}$.

Vemos que, efectivamente, es un fibrado por esferas sobre M , con fibra S^{k-1} . Este fibrado admite una sección si y solamente si E admite una sección no nula. Por lo tanto, podemos pensar la clase de Euler de E como una obstrucción a la existencia de una sección de $S(E)$.

Definición 4.3. Si $S \rightarrow M$ es un fibrado por esferas con fibra S^k isomorfo a $S(E)$ para un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ de rango $k + 1$, definimos la clase de Euler de S como $e(S) = e(E) \in H^{k+1}(M)$.

4.2.2 Clase de Euler de un fibrado topológico por esferas

Proposición 4.4. Sea $\pi : S \rightarrow M$ con fibra S^k . Existe un fibrado $D(S) \rightarrow M$ por discos, con fibra D^{k+1} , tal que $\partial D(S) = S$.

Proof. Consideramos el *mapping cylinder* de la proyección $\pi : S \rightarrow M$, $M\pi$, que es el espacio que se obtiene a partir de $S \times [0, 1]$ al identificar los puntos (x, t) en $S \times 1$ con $\pi(x)$ en M . Es decir,

$$M\pi = (S \times [0, 1]) / \sim$$

donde $(x, 1) \sim \pi(x)$.

Luego, $D(S) = M\pi$ es el fibrado por discos que queremos, con la proyección $\hat{\pi}(x, t) = \pi(x)$.

□

Esto nos permite definir la clase de Euler de un fibrado por esferas:

Definición 4.5. Si $S \rightarrow M$ es un fibrado por esferas con fibra S^k , definimos la clase de Euler de S como $e(S) = e(D(S)) \in H^{k+1}(M)$.

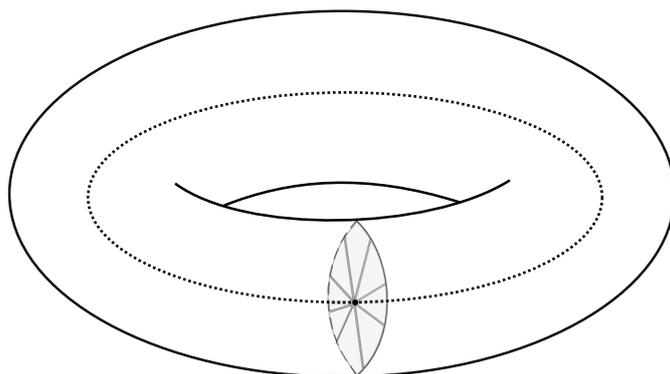


Figure 6: El toro es un fibrado por círculos. Tomando el mapping cylinder de la proyección, obtenemos el toro sólido, un fibrado por discos con borde el toro.

4.3 La sucesión de Gysin

Vamos a estudiar ahora la cohomología de un fibrado por esferas sobre una variedad cerrada M .

Para esto, nos vamos a basar en lo que hemos visto acerca de la cohomología de fibrados vectoriales o fibrados por discos. Dado un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ equipado con una métrica riemanniana, llamamos $D(E)$ al subconjunto de E formado por los vectores en E con norma menor o igual a 1, y $S(E)$ al subconjunto de los vectores en E de norma 1, es decir, $S(E) = \partial D(E)$.

Observamos que si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial de rango k , entonces $S(E) \rightarrow M$ es un fibrado por esferas sobre M con fibra S^{k-1} . Esta construcción nos da muchos ejemplos de fibrados por esferas. Sin embargo, no todos los fibrados por esferas se obtienen de este modo.

Para tratar al mismo tiempo los casos en los que el fibrado por esferas viene de un fibrado por discos y de un fibrado vectorial, usamos escisión:

Observación. Si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial, entonces $H^*(E, D(E)^c) \cong H^*(D(E), S(E))$ mediante el mapa inducido por la inclusión.

Como consecuencia de este isomorfismo, podemos considerar la clase de Thom $\Phi(E)$ de un fibrado vectorial como un elemento de $H^*(D(E), S(E))$. Esto es análogo al caso de un fibrado por discos, en el que la clase de Thom es un elemento de $H^*(D, \partial D)$.

Vemos ahora la sucesión de Gysin de un fibrado por esferas:

Teorema 4.6 (Sucesión de Gysin). *Si $S \rightarrow M$ es un fibrado por esferas orientable, con fibra S^k , entonces existe una sucesión exacta larga de la siguiente forma:*

$$\dots \longrightarrow H^{q-k-1}(M) \xrightarrow{\sim e} H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-k}(M) \longrightarrow \dots$$

donde $e = e(S)$ es la clase de Euler de S , y además en el caso de cohomología de de Rham, $\pi_* : H^{*+k+1}(S) \rightarrow H^{*+1}(M)$ es integrar en las fibras de S (esto es análogo a la integración en las fibras de un fibrado vectorial).

Esta sucesión nos ayudará a obtener información sobre la cohomología de un fibrado por esferas.

Por ejemplo, vemos que si la clase de Euler $e(S)$ se anula, entonces los grupos de cohomología de S coinciden con los de un producto $M \times S^k$.

La prueba del teorema se basa en usar la sucesión exacta larga del par (D, S) , y el isomorfismo de Thom para hacer aparecer la cohomología de M y la clase de Euler del fibrado.

Proof. Sea $\hat{\pi} : D \rightarrow M$ fibrado por discos tal que $\partial D = S$. Consideramos el par (D, S) . Tenemos la sucesión exacta larga del par:

$$\dots \longrightarrow H^q(D, S) \xrightarrow{j^*} H^q(D) \xrightarrow{i^*} H^q(S) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(D, S) \longrightarrow \dots$$

Ahora, tomamos el isomorfismo de Thom $T : H^*(M) \rightarrow H^{*+k+1}(D, S)$. Recordamos que es $T(\omega) = \hat{\pi}^*(\omega) \cup \Phi$, donde $\Phi \in H^{k+1}(D, S)$ es la clase de Thom de D . Llamamos $\hat{\pi}_* = T^{-1}$. Mediante este isomorfismo, reemplazamos los grupos de cohomología del par (D, S) por los de M , y obtenemos

$$\dots \longrightarrow H^{q-k-1}(M) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(D) \xrightarrow{i^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-k}(M) \longrightarrow \dots$$

donde $\alpha^* = j^* \circ T$, y $\pi_* = \hat{\pi}_* \circ d^*$. Ahora, recordamos que $\hat{\pi} : D \rightarrow M$ es una equivalencia homotópica, y por lo tanto $\hat{\pi}^* : H^*(M) \rightarrow H^*(D)$ es un isomorfismo, con inversa $s^* : H^*(D) \rightarrow H^*(M)$, donde $s : M \rightarrow D$ es una sección. Luego, reemplazamos $H^q(D)$ por $H^q(M)$ en la sucesión:

$$\dots \longrightarrow H^{q-k-1}(M) \xrightarrow{\beta^*} H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-k}(M) \longrightarrow \dots$$

donde ahora $\beta^* = s^* \circ j^* \circ T$, y el mapa entre $H^q(M)$ y $H^q(S)$ es π^* ya que $\hat{\pi} \circ i = \pi$.

Falta ver entonces que $s^* \circ j^* \circ T(\omega) = \omega \smile e(S)$. Recordamos que $e(S) = s^* j_* \Phi$, donde Φ es la clase de Thom de D .

Se tiene $s^* j^*(\hat{\pi}^*(\omega) \cup \Phi) = s^*(\hat{\pi}^*(\omega) \cup j^*(\Phi)) = s^* \hat{\pi}^*(\omega) \cup s^* j^*(\Phi) = \omega \smile e(S)$.

Por lo tanto, llegamos a la sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow H^{q-k-1}(M) \xrightarrow{\smile e} H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-k}(M) \longrightarrow \dots$$

□

5 Índice de Lefschetz

5.1 Idea

Sea M una variedad diferenciable, cerrada, de dimensión n . Dado un mapa $f : M \rightarrow M$ diferenciable, nos puede interesar saber si f tiene puntos fijos, y en caso de que los tenga, cuántos tiene, y qué sucede con los mapas que son perturbaciones de f .

En general, un mapa f podría tener tener infinitos puntos fijos, sin embargo, siempre existe una perturbación de f con finitos puntos fijos. A su vez, dado un mapa f con $\#\text{Fix}(f) < +\infty$, es posible que haya una perturbación g de f con un número (finito) distinto de puntos fijos. Esto se puede observar fácilmente, por ejemplo, en funciones reales (aunque la recta real no sea una variedad cerrada, se puede adaptar ese ejemplo para que suceda lo mismo en S^1 , por ejemplo). Por estos motivos no vamos a contar los puntos fijos de la manera más ingenua, sino que haremos una especie de conteo “signado” de puntos fijos. Al número obtenido mediante este conteo, lo llamaremos *índice de Lefschetz* de f .

Daremos dos definiciones del índice de Lefschetz, una utilizando teoría de intersección, que puede resultar más clara conceptualmente, y luego otra utilizando la acción inducida por f en la cohomología de M . Esta última resultará de gran utilidad en las siguientes secciones.

Para la primera definición del índice de Lefschetz, seguimos el capítulo 3 de [GP]. Usando ideas de la sección 12 de [BT], vemos que esta coincide con la segunda definición, que también se encuentra allí.

5.2 Primera definición

Contar puntos fijos de f equivale a contar intersecciones del gráfico $\Gamma(f) \subset M \times M$ de f con la diagonal $\Delta \subset M \times M$.

Recordamos que si $N, S \subset M$ son subvariedades de dimensión complementaria que se cortan transversalmente, entonces su número de intersección es $I(N, S)$, donde

$$I(N, S) = \sum_{x \in N \cap S} \epsilon(x)$$

siendo $\epsilon(x) = \pm 1$ el número de orientación de x en $N \cap S$.

Si N y S no se cortan transversalmente, $I(N, S) = I(i_1(N), S)$, donde $i_1 : N \rightarrow M$ es un encaje homotópico a la inclusión $i : N \rightarrow M$, y que es transversal a S . Por más detalles, ver las secciones A.1.2 y A.1.4 del Apéndice.

Definición 5.1. Si $\Gamma(f)$ y Δ son transversales, decimos que f es un *mapa de Lefschetz*.

Si f es de Lefschetz, $\Gamma(f) \cap \Delta$ consiste de finitos puntos, por lo tanto $\text{Fix}(f) < +\infty$.

No todos los mapas son de Lefschetz. Sin embargo, tenemos lo siguiente:

Lema 5.2. *Todo mapa $f : M \rightarrow M$ es homotópico a un mapa de Lefschetz.*

En general puede no ser tan fácil ver si, dado un mapa con finitos puntos fijos, este es de Lefschetz o no usando únicamente la definición. Sin embargo, la pregunta de si la intersección de $\Gamma(f)$ y Δ en un punto $(x, x) \in M \times M$ (con $x \in \text{Fix}(f)$) es transversal es una pregunta que equivale a conocer el comportamiento de $d_x f : T_x M \rightarrow T_x M$. Más precisamente, se tiene:

Lema 5.3. *Dada $f : M \rightarrow M$ y un punto $x \in \text{Fix}(f)$, la intersección de Δ con $\Gamma(f)$ es transversal en (x, x) si y solo si $d_x f : T_x M \rightarrow T_x M$ no tiene a 1 como valor propio, es decir, si y solo si la transformación lineal $\text{Id} - d_x f$ es invertible.*

Cuando se cumple esta condición para $x \in \text{Fix}(f)$, decimos que x es un *punto fijo de Lefschetz* (luego, f es un mapa de Lefschetz si y solo si todos sus puntos fijos son de Lefschetz). Como ejemplo de esto, notamos que si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo con $x \in \text{Fix}(f)$ un punto fijo hiperbólico, entonces x es un punto fijo de Lefschetz, ya que en ese caso $d_x f : T_x M \rightarrow T_x M$ no tiene valores propios de módulo 1.

Podemos extraer aún más información de $d_x f$ en el caso en que x es un punto fijo de Lefschetz. Pensando en el caso de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos ver que dado $x \in \text{Fix}(f)$, $\epsilon(x, x) = \text{sgn}(1 - f'(x))$. Esto se generaliza de la siguiente manera.

Lema 5.4. *Si $\Gamma(f)$ y Δ son transversales, entonces dado $x \in \text{Fix}(f)$ se tiene que $\epsilon(x, x) = \text{sgn} \det(\text{Id} - d_x f)$, donde $\epsilon(x, x)$ es el número de orientación de (x, x) en $\Gamma(f) \cap \Delta$.*

Definición 5.5. Si $\Gamma(f)$ y Δ son transversales, dado $x \in \text{Fix}(f)$ llamamos *número local de Lefschetz en x* al número de orientación $\epsilon(x, x) = \text{sgn} \det(\text{Id} - d_x f)$ recién mencionado, y lo denotamos $L_x f$.

Damos entonces nuestra primera definición del índice de Lefschetz:

Definición 5.6. El índice de Lefschetz de $f : M \rightarrow M$ es $L(f) = I(\Gamma(f), \Delta)$.

Proposición 5.7 (Propiedades de $L(f)$). *Se cumplen las siguientes:*

1. $L(f)$ es invariante por homotopías.

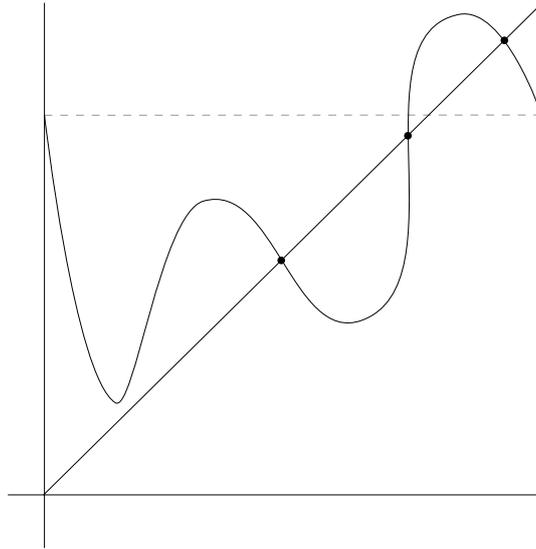


Figure 7: Un mapa del círculo. Vemos que $L_x f$ coincide con $\epsilon(x, x)$ para cada punto fijo x .

2. Si Δ y $\Gamma(f)$ son transversales, entonces

$$L(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} L_x f$$

3. Si $L(f) \neq 0$, entonces $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Utilizando el ítem 2 de la proposición anterior, podemos ver que es posible calcular $L(f)$ conociendo únicamente el comportamiento local de f alrededor de sus puntos fijos.

5.3 Cálculo de ejemplos

Veamos ahora algunos ejemplos simples, con transformaciones lineales hiperbólicas.

Ejemplo 5.8. Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$ una matriz hiperbólica, es decir, que no tenga valores propios de módulo 1 (que pueden ser reales o complejos). El único punto fijo del mapa $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por multiplicar por A es el 0, luego se tiene $L_0 f_A = \text{sgn det}(Id - A)$, dado que f_A es lineal y A es hiperbólica. Separamos en tres casos según los valores propios de A .

1. Tomemos A con valores propios de módulo menor a 1. Por ser A una matriz real, sus valores propios deben ser de la forma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l, \mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_r, \overline{\mu_r}\}$

donde $l + 2r = n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, l$ y $\mu_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ para $j = 1, \dots, 2r$. Se tiene

$$\det(Id - A) = \prod_{i=1}^l (1 - \lambda_i) \prod_{j=1}^r (1 - \mu_j)(1 - \overline{\mu_j})$$

Como $\overline{(1 - \mu_j)} = (1 - \overline{\mu_j})$ para todo j , tenemos $\prod_{j=1}^r (1 - \mu_j)(1 - \overline{\mu_j}) = \prod_{j=1}^r |1 - \mu_j|^2 > 0$.

Además, $|\lambda_i| < 1$ para todo i , luego $1 - \lambda_i > 0$ para todo i , y por lo tanto $\prod_{i=1}^l (1 - \lambda_i) > 0$.

Concluimos entonces que $\det(Id - A) > 0$, y por lo tanto $L_0(f_A) = 1$.

2. Ahora consideramos A con valores propios de módulo mayor a 1. Una vez más, sus valores propios son de la forma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_s, \overline{\mu_s}\}$ con $k + 2s = n$, y los λ_i, μ_j como arriba.

También análogamente, tenemos

$$\det(Id - A) = \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i) \prod_{j=1}^s (1 - \mu_j)(1 - \overline{\mu_j})$$

con $\prod_{j=1}^s (1 - \mu_j)(1 - \overline{\mu_j}) = \prod_{j=1}^s |1 - \mu_j|^2 > 0$.

Luego, queda ver qué sucede con $\prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i)$. Recordamos que $\lambda_i \in \mathbb{R}$, con $|\lambda_i| > 1$. Si A preserva orientación, entonces una cantidad par de los λ_i es menor a cero. Ordenándolos a todos de menor a mayor, se tiene $\lambda_1 < \dots < \lambda_{2t} < 0 < \lambda_{2t+1} < \dots < \lambda_k$, con $2t \leq k$. En ese caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \det(Id - A) &= \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i) \\ &= \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^{2t} (1 - \lambda_i) \prod_{i=2t+1}^k (1 - \lambda_i) \\ &= \operatorname{sgn} \prod_{i=2t+1}^k (1 - \lambda_i) \\ &= (-1)^{k-2t} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

Pero se tiene $2s + k = n$, y por lo tanto $(-1)^k = (-1)^n$. Concluimos entonces que, si A preserva orientación, $L_0(f_A) = \operatorname{sgn} \det(Id - A) = (-1)^n$.

De forma análoga, se prueba que si A revierte orientación, entonces $L_0(f_A) = \operatorname{sgn} \det(Id - A) = (-1)^{n+1}$.

3. Ahora, si $A \in GL(n, \mathbb{R})$ es una matriz hiperbólica cualquiera, consideramos E^u la suma directa de todos los subespacios propios generalizados (para A) correspondientes a valores propios de módulo mayor a 1, y E^s el análogo para valores propios de módulo menor a 1. Luego, $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$, y además

$A(E^u) = E^u, A(E^s) = E^s$. Además, $A|_{E^s}$ es una transformación lineal como en el caso 1, y $A|_{E^u}$ como en el caso 2. Por lo tanto, tenemos

$$\operatorname{sgn} \det(Id - A) = \operatorname{sgn} \det(Id - A)|_{E^u} \operatorname{sgn} \det(Id - A)|_{E^s}$$

Supongamos que $A|_{E^u}$ preserva orientación. Por los casos anteriores, $L_0(f_A) = \operatorname{sgn} \det(Id - A) = (-1)^{\dim E^u}$.

Análogamente, si $A|_{E^u}$ revierte orientación, entonces $L_0(f_A) = (-1)^{\dim E^u + 1}$.

Ahora, usamos el ejemplo anterior para probar algo que será útil luego.

Ejemplo 5.9. Analicemos qué sucede en el caso en el que $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable E^u orientable, que preserve la orientación de E^u . Observamos que f es un mapa de Lefschetz (en particular, $\#\operatorname{Fix}(f) < +\infty$), porque todos sus puntos fijos son hiperbólicos. Luego, vale

$$L(f) = \sum_{x \in \operatorname{Fix}(f)} L_x f$$

Afirmamos que $L_x f = (-1)^{\dim E^u}$ para todo $x \in \operatorname{Fix}(f)$, de lo que se concluiría que $|L(f)| = \#\operatorname{Fix}(f)$. Verifiquemos que se cumple:

Sea $x \in \operatorname{Fix}(f)$ arbitrario. Tenemos que $L_x f = \operatorname{sgn} \det(Id - d_x f)$. Como $d_x f$ es una transformación lineal invertible e hiperbólica, entonces podemos usar el ejemplo anterior. Sabemos que $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$. Tenemos, por las condiciones de expansión y contracción en E^s y E^u que E_x^u es la suma directa de todos los subespacios propios generalizados para $d_x f$ correspondientes a valores propios de módulo mayor a 1, y lo mismo para E_x^s con subespacios propios generalizados correspondientes a valores propios de módulo menor a 1. Luego, como en el caso 3 del ejemplo anterior, usando que $d_x f|_{E_x^u}$ preserva orientación, obtenemos $\operatorname{sgn} \det(Id - d_x f) = (-1)^{\dim E_x^u} = (-1)^{\dim E^u}$.

Para este ejemplo fue importante tener espacios inestables definidos en toda la variedad, y orientados coherentemente. De otro modo, se podría tener cancelaciones de los índices de Lefschetz de distintos puntos. Por ejemplo, podemos considerar la herradura de Smale (ver [Sma]), un difeomorfismo de S^2 tal que la cantidad de puntos periódicos hiperbólicos crece exponencialmente, y sin embargo el número de Lefschetz $L(f^l)$ siempre es menor o igual a 2, debido a estas cancelaciones: el diferencial de f preserva la orientación del espacio inestable para algunos puntos fijos, pero no para otros.

Proposición 5.10. *Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable orientable, donde M es una variedad orientable, entonces*

$$|L(f)| = \#\operatorname{Fix}(f)$$

Ahora podemos introducir la segunda definición del índice de Lefschetz.

5.4 Segunda definición

Definición 5.11. Sea M una variedad compacta, y $f : M \rightarrow M$ una función continua. Para cada $q \geq 0$, f induce un morfismo $f^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M)$.

Definimos el *índice de Lefschetz* de f como

$$L(f) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M))$$

Observamos que por ser M una variedad compacta, hay únicamente finitos términos no nulos, y cada uno de ellos es un número entero⁴, por lo tanto $L(f)$ también lo es.

Teorema 5.12. *Las definiciones presentadas del índice de Lefschetz coinciden, es decir, si $f : M \rightarrow M$ es diferenciable, entonces*

$$I(\Gamma(f), \Delta) = \sum_{q \geq 0} \text{tr}(f^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M))$$

Esta definición nos permite relacionar el índice de Lefschetz como lo definimos anteriormente con la acción en cohomología de un mapa diferenciable. El índice de Lefschetz condiciona cómo puede ser esta acción inducida, y viceversa.

Como corolario, tenemos el teorema del punto fijo de Brouwer.

Corolario 5.13. *Si $f : D^n \rightarrow D^n$ es continua, donde D^n es un disco cerrado de dimensión n , entonces f tiene un punto fijo.*

Proof. Supongamos que $f : D^n \rightarrow D^n$ es continua y no tiene puntos fijos. Como D^n es una variedad con borde, no podemos considerar inmediatamente el número de Lefschetz de un mapa diferenciable y homotópico a f , que ya concluiría con la prueba. Alternativamente, se podría ver una versión del índice de Lefschetz para variedades con borde.

Podemos definir, a partir de f , un mapa $\hat{f} : S^n \rightarrow S^n$ sin puntos fijos, que coincida con f en la clausura del hemisferio sur, y que se defina en cada el hemisferio norte como $\hat{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Luego \hat{f} es continua y no sobreyectiva, y no tiene puntos fijos. Pero esto no es posible, dado que si $g : S^n \rightarrow S^n$ es diferenciable y no es sobreyectiva, se tiene $\deg(g) = 0$, y por lo tanto $L(g) = 1$, lo que implicaría que g sí debe tener puntos fijos.

Por lo tanto, alcanza con tomar g diferenciable y homotópica a f suficientemente cerca para ser también no sobreyectiva y no tener puntos fijos. □

⁴para cohomología singular con coeficientes en \mathbb{Z} , esto es inmediato. Si cambiamos a coeficientes en \mathbb{R} , vale por el teorema del coeficiente universal. Para cohomología de de Rham se sigue del teorema de de Rham.

5.5 Coincidencia de las definiciones

Probamos en esta sección que las definiciones dadas del índice de Lefschetz coinciden. Para esto, utilizamos lo discutido en la sección 3.2.

Demostración del Teorema 5.12. Recordamos que si $X, Y \subset Z$ son subvariedades cerradas y orientadas, se tiene $I(X, Y) = \int_Y \eta_X$.

Tomamos ahora $Z = M \times M$, $X = \Gamma(f)$, $Y = \Delta$, y obtenemos

$$\begin{aligned} L(f) &= I(\Gamma(f), \Delta) \\ &= \int_{\Delta} \eta_{\Gamma(f)} \\ &= (-1)^{n^2} \int_{\Gamma(f)} \eta_{\Delta} \end{aligned}$$

Ahora, podemos ver a $\Gamma(f)$ como la imagen del mapa $\varphi_f : M \rightarrow M \times M$ dado por $x \mapsto (x, f(x))$. De ahí, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(f)} \eta_{\Delta} &= \int_{\varphi_f(M)} \eta_{\Delta} \\ &= \int_M \varphi_f^*(\eta_{\Delta}) \end{aligned}$$

Podemos calcular explícitamente $\varphi_f^*(\eta_{\Delta})$. Para esto, escribimos η_{Δ} de forma conveniente.

Lema. Sea $\{\omega_i\}_{i \in I}$ una base de $H^*(M)$, y sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ su base dual respecto a la dualidad de Poincaré, es decir, tal que $\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}$. Sean $\pi_1, \pi_2 : M \times M \rightarrow M$ las proyecciones al primer y segundo factor respectivamente.

Entonces, se tiene

$$\eta_{\Delta} = \sum_{i \in I} (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i$$

Demostración del Lema. Sabemos que $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j : i, j \in I\}$ es una base de $H^*(M \times M)$. Luego, tenemos $\eta_{\Delta} = \sum_{i, j \in I} c_{ij} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$ para ciertos coeficientes $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Veamos que $c_{kl} = (-1)^{\deg \omega_k} \delta_{kl}$ para todos $k, l \in I$.

Por un lado, se tiene $\Delta = i(M)$, donde $i : M \rightarrow M \times M$ es el mapa diagonal. Luego:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l &= \int_M i^*(\pi_1^* \tau_k) \wedge i^*(\pi_2^* \omega_l) \\
&= \int_M \tau_k \wedge \omega_l \\
&= (-1)^{(\deg \omega_l)(\deg \tau_k)} \delta_{kl}
\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos usar que η_{Δ} es dual de Poincaré a Δ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l &= \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge \eta_{\Delta} \\
&= \sum_{i,j \in I} c_{ij} \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j \\
&= \sum_{i,j \in I} c_{ij} (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg \tau_k) + (\deg \omega_l)(\deg \omega_i)} \int_{M \times M} \pi_1^*(\omega_i \wedge \tau_k) \wedge \pi_2^*(\omega_l \wedge \tau_j)
\end{aligned}$$

Esta última expresión es, por el teorema de Fubini, igual a $(-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_k)} c_{kl}$.

Luego, tenemos que $c_{kl} = (-1)^{\deg \omega_k} \delta_{kl}$, como queríamos. \square

Ahora solo queda calcular $\varphi_f^*(\eta_{\Delta})$.

Lema. Sea $\{\omega_i : i \in I\}$ una base de $H^*(M)$, y $\{\tau_i : i \in I\}$ su base dual mediante dualidad de Poincaré, de forma tal que $\eta_{\Delta} = \sum_{i \in I} (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_i$.

Se tiene entonces

$$\varphi_f^*(\eta_{\Delta}) = \sum_{i \in I} (-1)^{\deg \omega_i} \omega_i \wedge f^* \tau_i$$

Asumiendo el lema, cuya prueba es elemental, solamente queda expresar f^* en las bases $\{\omega_i\}, \{\tau_i\}$ para terminar con la prueba del resultado. \square

5.6 Difeomorfismos de Anosov y $L(f)$

Veremos ahora que, en el caso de un difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$, el índice de Lefschetz nos da un conteo preciso de los puntos periódicos de f , en términos de su acción en cohomología.

Ejemplo 5.14. Revisitemos el Ejemplo 1.2. En ese caso, obtuvimos que $|L(f)| = \#\text{Fix}(f)$, cuando $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov que cumple ciertas condiciones. Por lo tanto, tenemos que la cantidad de puntos fijos de f se relaciona con su acción en cohomología de la siguiente manera

$$\#\text{Fix}(f) = \left| \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f_* : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right|$$

Como f^l cumple las condiciones planteadas en el Ejemplo 1.2 para todo $l \geq 1$ siempre que f las cumpla, se tiene

$$\#\text{Fix}(f^l) = \left| \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f^{l*} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right|$$

Veremos luego que el hecho de que $f : M \rightarrow M$ sea un difeomorfismo de Anosov nos da ciertos estimativos del comportamiento de $\#\text{Fix}(f^l)$ según l .

6 Pruebas de los resultados

Probamos ahora los resultados que se enunciaron en la sección 1.2.

Empezamos con el Teorema 1.2. Recordamos que este nos dice que, en una variedad orientable M y para un difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$ con fibrado inestable orientable, se tiene

$$\left| \sum_q (-1)^q \text{tr}(f^{*l} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right| = \#\text{Fix}(f^l) = e^{lh_{\text{top}}(f)} + o(e^{lh_{\text{top}}(f)})$$

si f es transitivo, y

$$\left| \sum_q (-1)^q \text{tr}(f^{*Kl} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right| = \#\text{Fix}(f^{Kl}) = pe^{Klh_{\text{top}}(f)} + o(e^{Klh_{\text{top}}(f)})$$

en el caso general, donde $K > 0$ es entero y p es la cantidad de piezas subbásicas en la descomposición espectral de f correspondientes a piezas básicas con entropía topológica igual a $h_{\text{top}}(f)$.

Demostración del teorema 1.2. En el capítulo 5 (teorema 5.12) probamos $L(f^l) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f^{*l} : H^q(M) \rightarrow H^q(M))$. Por otro lado, en 5.10 probamos que $|L(f^l)| = \#\text{Fix}(f^l)$.

Entonces, concluimos el resultado gracias al corolario 2.23 en el caso transitivo, y el corolario 2.24 en el caso general, que relacionan $\#\text{Fix}(f^l)$ con la entropía topológica de f .

□

Ahora probamos el corolario 1.3, que dice que, si M es orientable, el morfismo inducido en $H^*(M)$ por un difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$ con fibrado inestable orientable no puede ser el morfismo identidad.

Demostración del corolario 1.3. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo en una variedad orientable que induce el morfismo identidad en cohomología. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} |L(f^l)| &= \left| \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr}(f^{*l} : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) \right| \\ &= \left| \sum_{q \geq 0} (-1)^q \dim H^q(M) \right| \\ &= |\chi(M)| \end{aligned}$$

y por lo tanto $|L(f^l)|$ está acotado. Pero, por lo visto en el capítulo 5, en el caso de un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable orientable, se tiene que $|L(f^l)| = \#\text{Fix}(f^l)$.

Luego, como $\#\text{Fix}(f^l)$ para un difeomorfismo de Anosov crece exponencialmente, no puede ser acotado, y por lo tanto f no es un difeomorfismo de Anosov.

□

Observamos que para este teorema no precisamos conocer la tasa de crecimiento exponencial de la cantidad de puntos fijos para potencias de un difeomorfismo de Anosov: nos alcanzó con saber que esta crece exponencialmente. Más aún, nos hubiera alcanzado con saber que no está acotada.

Ahora vemos que no hay difeomorfismos de Anosov en $S^2 \times S^2$ (ejemplo 1.7). Esta prueba es la que aparece en [GRH], y es la que generalizan luego a fibrados.

1.7. Llamamos $M = S^2 \times S^2$. Primero, observamos que $S^2 \times S^2$ es simplemente conexa, y por lo tanto todo fibrado vectorial sobre M será orientable. Luego, si f es un difeomorfismo de Anosov en M , no puede inducir el morfismo identidad en cohomología, pero veremos que todo difeomorfismo en M tiene una potencia que induce la identidad en $H^*(M)$.

Por el teorema de Künneth, tenemos

$$H^q(M) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } q = 0 \\ \langle \alpha, \beta \rangle & \text{si } q = 2 \\ \langle \varepsilon \rangle & \text{si } q = 4 \\ 0 & \text{si } q \neq 0, 2, 4 \end{cases}$$

donde además podemos tomar $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, $\alpha \smile \beta = \varepsilon$.

Tomando posiblemente una potencia de f , podemos asumir que induce la identidad en $H^0(M)$ y $H^4(M)$, es decir, que $f^*\varepsilon = \varepsilon$. Queda entonces ver que alguna potencia de f induce la identidad en $H^2(M)$.

Consideramos la matriz A asociada a $f^*|_{H^2(M)} : H^2(M) \rightarrow H^2(M)$. Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con a, b, c, d enteros tales que $ad - bc = \pm 1$. Tomando una potencia de f , podemos suponer $ad - bc = 1$.

Ahora, sabemos que los morfismos inducidos en cohomología respetan el producto, por lo tanto:

- $0 = f^*(\alpha^2) = f^*(\alpha) \smile f^*(\alpha)$
- $0 = f^*(\beta^2) = f^*(\beta) \smile f^*(\beta)$
- $\varepsilon = f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$

Y obtenemos, por ejemplo de la primera:

$$\begin{aligned} 0 &= f^*(\alpha) \smile f^*(\alpha) \\ &= (a\alpha + c\beta) \smile (a\alpha + c\beta) \\ &= ac\alpha \smile \beta + ca\beta \smile \alpha \\ &= 2ac\alpha \smile \beta \\ &= 2ac\varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto $2ac = 0$.

Análogamente, conseguimos relaciones usando las otras igualdades. Concluimos:

$$\begin{cases} ac = 0 \\ bd = 0 \\ ad + bc = 1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

de esto se concluye $a = d = \pm 1$, $b = c = 0$. Pero entonces, una potencia de f induce la identidad en cohomología. Por lo tanto, f no puede ser un difeomorfismo de Anosov. □

Probamos ahora el corolario 1.4. Recordamos que este dice que toda variedad orientable que admita difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable orientable debe tener algún grupo de cohomología de dimensión mayor o igual a 2.

La prueba es directa a partir del corolario 1.3, que ya probamos.

Demostración del corolario 1.4. Si fuera $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo q tendríamos que, para todo mapa $f : M \rightarrow M$, f^2 induce el morfismo identidad en cohomología.

Por lo tanto, ningún mapa $f : M \rightarrow M$ puede ser un difeomorfismo de Anosov con fibrado inestable orientable, por 1.3. □

Usando ahora la sucesión de Gysin, probamos los resultados que involucran fibrados por esferas:

Comenzamos por el teorema 1.6. Este nos dice que, si tenemos un fibrado por esferas $S \rightarrow M$, donde $\dim M = \dim S = 2n$, entonces S no admite difeomorfismos de Anosov transitivos, y además si $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo q y el fibrado es orientable, M no admite difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable orientable.

Demostración del teorema 1.6. Supongamos que existe un difeomorfismo de Anosov $f : S \rightarrow S$. Llamamos E^u al fibrado inestable asociado a f .

Afirmación. *Para ver que S no admite difeomorfismos de Anosov transitivos, alcanza con considerar el caso en que $S \rightarrow M$ es un fibrado orientable, S es una variedad orientable y E^u es orientable.*

Si una de las hipótesis en la afirmación no se cumple, se toma un cubrimiento finito y se levanta f a este cubrimiento de forma que se cumplan. La prueba de que este levantado sigue siendo un difeomorfismo de Anosov, y de que es transitivo si f es transitivo se encuentra en [GRH].

Probamos entonces el resultado asumiendo las hipótesis en la afirmación.

Resumimos ahora la estrategia de la prueba:

- Usamos la sucesión de Gysin para relacionar $H^q(S)$ con $H^q(M)$ cuando $q \neq 0, 2n, 4n$ y calcular $H^{2n}(S)$.
- Damos generadores explícitos de $H^{2n}(S)$ y calculamos la acción de f^* allí.

Esto ya alcanza para probar que si $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo q , S no admite difeomorfismos de Anosov con fibrado inestable orientable.

- Vemos que las trazas de $f^* : H^q(S) \rightarrow H^q(S)$ y $f^* : H^{q+2n}(S) \rightarrow H^{q+2n}(S)$ coinciden para $0 \leq q \leq 2n$.
- Concluimos que f no puede ser un difeomorfismo de Anosov transitivo, ya que veremos que los cálculos hechos en el paso anterior implicarán que debe tener más de una pieza básica.

Empezamos entonces calculando $H^q(S)$ usando la sucesión de Gysin del fibrado $S \rightarrow M$.

Tenemos:

$$\dots \longrightarrow H^{q-2n-1}(M) \xrightarrow{\smile e} H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-2n}(M) \longrightarrow \dots$$

Dado que $e(S) \in H^{2n+1}(M) = 0$, tenemos $e(S) = 0$. Por lo tanto, la sucesión de Gysin se parte en varias sucesiones exactas cortas, de la forma

$$0 \longrightarrow H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-2n}(M) \longrightarrow 0$$

para cada $q \geq 0$. Podemos concluir entonces lo siguiente:

- Si $q < 2n$, $\pi^* : H^q(M) \rightarrow H^q(S)$ es un isomorfismo.
- Si $q > 2n$, $\pi_* : H^q(S) \rightarrow H^{q-2n}(M)$ es un isomorfismo.
- $H^{2n}(S) \cong \mathbb{R}^2$.

Veamos ahora cómo es la acción de f^* en $H^{2n}(S)$. Para esto, tomamos generadores explícitos de $H^{2n}(S)$.

Tomamos una fibra $S^{2n} = \pi^{-1}(x)$, donde x es un punto de M . Sabemos que $H^{2n}(M) = \langle \eta_{\{x\}} \rangle$. Luego, podemos definir $\alpha = \pi^* \eta_{\{x\}} = \eta_{\pi^{-1}(x)} = \eta_{S^{2n}}$, que es un elemento de $H^{2n}(S)$.

Por otro lado sabemos (ver A.11), por ser $\dim M = 2n$, que existe una sección $s : M \rightarrow S$. Luego, $s(M)$ es una subvariedad de S de dimensión $2n$, y definimos $\beta = \eta_{s(M)} \in H^{2n}(S)$.

Veamos que $H^{2n}(S) = \langle \alpha, \beta \rangle$. Alcanza con probar que α y β son linealmente independientes. Pero tenemos $\alpha \wedge \beta = \eta_{S^{2n}} \wedge \eta_{s(M)} = \eta_{S^{2n} \cap s(M)}$. Por ser $s : M \rightarrow S$ una sección del fibrado, la fibra $S^{2n} = \pi^{-1}(x)$ y $s(M)$ se intersectan en un único punto $y \in S$, luego $\alpha \wedge \beta = \eta_{\{y\}} = \pm \tau$, siendo $\tau \in H^{4n}(S)$ una forma de volumen en S . Por lo tanto, tanto α como β son no nulas, y no puede ser una múltiplo de la otra ya que $\alpha \wedge \alpha = \eta_{S^{2n} \cap S^{2n}} = \eta_{\emptyset} = 0$, dado que siempre es posible perturbar la inclusión de una fibra en S para que no se autointersecte.

Probamos entonces que $H^{2n}(S) = \langle \alpha, \beta \rangle$, donde $\alpha^2 = 0$, $\alpha \wedge \beta = \pm\tau$ y $\beta^2 = k\tau$, para $k = I(s(M), s(M)) \in \mathbb{Z}$. Podemos suponer que $\alpha \wedge \beta = \tau$. Vemos ahora que esto implica que f^* actúa como la identidad en $H^{2n}(S)$, a menos posiblemente de tomar una potencia de f .

Llamamos A a la matriz asociada a $f^*|_{H^{2n}(S)}$ en la base $\{\alpha, \beta\}$. Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $f^*\alpha = a\alpha + c\beta$, $f^*\beta = b\alpha + d\beta$. Las entradas de la matriz son números enteros, ya que las podemos calcular explícitamente como (sumas de) números de intersección de subvariedades. Podemos suponer además, tomando f^2 si es necesario, que $f^*\tau = \tau$.

Sabemos que f^* respeta el producto exterior, y por lo tanto, debe ser:

1. $(f^*\alpha)^2 = f^*(\alpha^2)$
2. $f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta) = f^*(\alpha \wedge \beta)$
3. $(f^*\beta)^2 = f^*(\beta^2)$

A partir de 1, 2 y 3, y porque A debe ser invertible (y su inversa de coeficientes enteros), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2ac + c^2k &= 0 \\ ad + cb + cdk &= 1 \\ 2bd + d^2k &= k \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

Es importante observar que para obtener este sistema de ecuaciones se usa, como en el caso de $S^2 \times S^2$, la paridad de $2n$ para ver que $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

Se puede ver que esto implica que $a = d = \pm 1$, $b = c = 0$. Una vez más, tomando una potencia de f tenemos $f^*|_{H^{2n}(S)} = \text{id}$.

En el caso en que $\dim H^q(M) \leq 1$ para todo q , ya podemos ver que S no admite difeomorfismos de Anosov ya que tenemos $\dim H^q(S) \leq 1$ para $q \neq 2n$, y $f^*|_{H^{2n}(S)} = \text{id}$, por lo tanto si f fuera Anosov, se tendría que $|L(f^l)| = \#\text{Fix}(f^l)$ está acotado, y esto no puede suceder.

Veamos ahora que f no puede ser un difeomorfismo de Anosov transitivo, sin la restricción en la cohomología de M . Para esto, veremos cómo es la acción de f^* en $H^q(S)$, para $q \neq 2n$.

Primero, un lema que nos permitirá dar un isomorfismo explícito entre $H^q(S)$ y $H^{q-2n}(S)$, para $2n < q < 4n$.

Lema. Sea q entero tal que $2n < q < 4n$. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^{q-2n}(D) & \xrightarrow{i^*} & H^{q-2n}(S) \\ \downarrow \wedge \Phi & & \downarrow \wedge \beta \\ H^{q+1}(D, S) & \xleftarrow{\delta^*} & H^q(S) \end{array}$$

conmuta a menos de un signo, donde $i^* : H^{q-2n}(D) \rightarrow H^{q-2n}(S)$ está inducido por la inclusión.

Demostración (lema). Recordamos que, si $j : (D^{2n+1}, S^{2n}) \rightarrow (D, S)$ es la inclusión de una fibra, entonces tenemos un cuadrado conmutativo dado por

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(S^{2n}) & \xleftarrow{j^*} & H^{2n}(S) \\ \downarrow \delta^* & & \downarrow \delta^* \\ H^{2n+1}(D^{2n+1}, S^{2n}) & \xleftarrow{j^*} & H^{2n+1}(D, S) \end{array}$$

donde $H^{2n+1}(D, S)$ está generado por la clase de Thom del fibrado por discos $D \rightarrow M$. Ahora, $j^*\beta = j^*\eta_{i(M)} = \eta_{j^{-1}(i(M))} = \eta_y$, donde y es el punto de $s(M)$ que está en la fibra. Pero entonces, $j^*\beta$ genera $H^{2n}(S^{2n})$ (dado que es dual de Poincaré a un punto). Además sabemos que $\delta^* : H^{2n}(S^{2n}) \rightarrow H^{2n+1}(D^{2n+1}, S^{2n})$ es un isomorfismo (D^{2n+1} es contractible), y por lo tanto manda $j^*\beta$ en un generador de $H^{2n+1}(D, S)$.

Pero también sabemos que $j^* : H^{2n+1}(D, S) \rightarrow H^{2n+1}(D^{2n+1}, S^{2n})$ manda la clase de Thom $\Phi(D)$ en un generador de $H^{2n+1}(D^{2n+1}, S^{2n})$. Pero entonces, por la conmutatividad del diagrama, $\delta^*\beta = \pm\Phi(D)$.

Para probar la conmutatividad del cuadrado en el lema, alcanza ahora con usar la definición de δ^* . Dada $\omega \in H^{q-2n}(D)$, $\delta^*(i^*(\omega) \wedge \beta) \in H^{q+1}(D, S)$ está representada por la derivada exterior de una extensión de $i^*(\omega) \wedge \beta$ a D . Pero, como $\delta^*\beta = \pm\Phi$, sabemos que existe una extensión β' de β a D que tiene como derivada exterior una forma cohomóloga con $\pm\Phi$. Luego, $\omega \wedge \beta'$ es una extensión de $i^*(\omega) \wedge \beta$, y su derivada exterior es $d(\omega \wedge \beta') = \pm\omega \wedge d\beta'$, que está en la misma clase que $\pm\Phi$, pues ω es cerrada.

Por lo tanto, el cuadrado conmuta. □

Ahora, un segundo lema, que nos permitirá relacionar la traza de $f^*|_{H^{q-2n}(S)} : H^{q-2n}(S) \rightarrow H^{q-2n}(S)$ con la de $f^*|_{H^q(S)} : H^q(S) \rightarrow H^q(S)$.

Lema. Si $2n < q < 4n$, entonces el morfismo $H^{q-2n}(S) \rightarrow H^q(S)$ dado por $\omega \mapsto \omega \wedge \beta$ es un isomorfismo.

Demostración del Lema. Alcanza con probar, por el lema anterior, que $\delta^* : H^q(S) \rightarrow H^{q+1}(D, S)$ e $i^* : H^{q-2n}(D) \rightarrow H^{q-2n}(S)$ son isomorfismos.

Sabemos que $\pi_* H^q(S) \rightarrow H^{q-2n}(M)$ es un isomorfismo, por ser $q > 2n$. Recordando la definición de π_* , tenemos que $\pi_* = \delta^* \circ T^{-1}$, donde $T : H^{q+1}(D, E) \rightarrow H^{q-2n}(M)$ es el isomorfismo de Thom. Por lo tanto, δ^* es un isomorfismo.

Ahora, vemos que $i^* : H^{q-2n}(D) \rightarrow H^{q-2n}(S)$ es un isomorfismo. Sabemos que, si $\hat{\pi} : D \rightarrow M$ es la proyección del fibrado por discos D , entonces $\hat{\pi} \circ i = \pi$. Por lo tanto, $i^* \circ \hat{\pi}^* = \pi^*$. Pero sabemos que $\hat{\pi}^*$ es un isomorfismo por ser $\hat{\pi}$ una equivalencia homotópica, y $\pi^* : H^{q-2n}(M) \rightarrow H^{q-2n}(S)$ es un isomorfismo por ser $q - 2n < 2n$. Esto termina de probar el lema. □

Ahora, tenemos que el siguiente diagrama conmuta, dado que $f^* \beta = \beta$:

$$\begin{array}{ccc} H^{q-2n}(S) & \xrightarrow{f^*} & H^{q-2n}(S) \\ \downarrow \wedge \beta & & \downarrow \wedge \beta \\ H^q(S) & \xrightarrow{f^*} & H^q(S) \end{array}$$

Pero entonces, por ser $\wedge \beta : H^{q-2n}(S) \rightarrow H^q(S)$ un isomorfismo cuando $2n < q < 4n$, tenemos que $\text{tr}(f^*|_{H^{q-2n}(S)} : H^{q-2n}(S) \rightarrow H^{q-2n}(S)) = \text{tr}(f^*|_{H^q(S)} : H^q(S) \rightarrow H^q(S))$.

Ahora, calculamos $\#\text{Fix}(f^l)$ usando la fórmula de Lefschetz:

$$\begin{aligned} \#\text{Fix}(f^l) &= |1 + \text{tr}(\text{Id}|_{H^{2n}(S)}) + 1 + \sum_{q \neq 0, 2n, 4n} (-1)^q \text{tr}(f^*|_{H^q(S)} : H^q(S) \rightarrow H^q(S))| \\ &= 2 |2 + \sum_{0 < q < 2n} (-1)^q \text{tr}(f^*|_{H^q(S)} : H^q(S) \rightarrow H^q(S))| \end{aligned}$$

Pero entonces, tomando λ como el valor propio de f^* de mayor módulo, tenemos

$$\#\text{Fix}(f^l) = 2k\lambda^l + o(\lambda^l)$$

siendo k un entero. Esto nos dice que f no puede ser un difeomorfismo de Anosov transitivo, por el corolario 2.23. □

Observamos que fue fundamental en la prueba ver que una potencia de f induce la identidad en $H^{2n}(S)$. Para esto, usamos que $2n$ es par, para ver que si $\alpha, \beta \in H^{2n}(S)$ entonces $\alpha \smile \beta = (-1)^4 \beta \smile \alpha$. Esto no funcionaría así si α y β tuvieran grado 3, por ejemplo. Luego, este procedimiento no sirve para $S^3 \times S^3$.

Por último, probamos el teorema 1.9. En este caso, tenemos un fibrado $S \rightarrow M^n$ con fibra S^m , siendo $m > n$. La prueba es un poco más simple que la del teorema anterior, pero las ideas son similares.

Demostración del teorema 1.9. Sea $f : S \rightarrow S$ un difeomorfismo. Supongamos que es un difeomorfismo de Anosov.

Una vez más, asumimos primero que S está orientado y que M es orientable. La estrategia de la prueba será:

- Usamos la sucesión de Gysin para calcular $H^q(S)$ en términos de $H^q(M)$.
- Damos isomorfismos $H^q(S) \rightarrow H^{q+m}(S)$ que conjugan la acción de f^* en estos grupos. Luego, concluimos que las trazas de los morfismos inducidos en estos coinciden.
- Concluimos el resultado mirando el índice de Lefschetz de f , y viendo qué implica acerca de la cantidad de puntos periódicos y de piezas básicas de f .

Por ser $m > n$, aplicando el teorema A.11 del Apéndice vemos que existe una sección $s : M \rightarrow S$ y por lo tanto la clase de Euler $e = e(S)$ es 0. Entonces, la sucesión de Gysin nos da sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \longrightarrow H^q(M) \xrightarrow{\pi^*} H^q(S) \xrightarrow{\pi_*} H^{q-m}(M) \longrightarrow 0$$

y, por lo tanto, tenemos:

$$H^q(S) = \begin{cases} H^q(M) & \text{si } q = 0, \dots, n \\ 0 & \text{si } q = n + 1, \dots, m - 1 \\ H^{q-m}(M) & \text{si } q = m, \dots, m + n \end{cases}$$

Por ser $m > n$, existe una sección $s : M \rightarrow S$. Luego, $i(M) \subset S$ es una subvariedad encajada de dimensión n , y entonces tiene dual de Poincaré $\tau = \eta_{i(M)} \in H^m(S)$.

Lema. Si $0 \leq q \leq n$, entonces el mapa $H^q(S) \rightarrow H^{q+m}(S)$ dado por $\omega \mapsto \omega \wedge \tau$ es un isomorfismo.

Demostración del lema. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^q(S) & \xrightarrow{\wedge \tau} & H^{q+m}(S) \\ \pi^* \uparrow & & \downarrow \pi_* \\ H^q(M) & \xrightarrow{id} & H^q(M) \end{array}$$

Este es conmutativo a menos de un signo si y solamente si $\pi_*(\pi^*(\omega) \wedge \tau) = \pm \omega$ para toda $\omega \in H^q(S)$.

En la proposición 3.30 probamos (para fibrados vectoriales, la prueba en este caso es análoga, dado que π_* es integrar en las fibras) que $\pi_*(\pi^*(\omega) \wedge \tau) = \omega \wedge \pi_*(\tau)$.

Por lo tanto, alcanza con probar que $\pi_*(\tau) = \pm 1$. Pero para cada fibra $F = \pi^{-1}(x)$ tenemos $i : F \rightarrow S$ la inclusión, tal que

$$\begin{aligned} \int_F i^* \tau &= \int_F s^* \eta_{s(M)} \\ &= \int_F \eta_{i^{-1}(s(M))} \\ &= \int_{F=\pi^{-1}(x)} \eta_{\{s(x)\}} \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

donde $\eta_{s(x)}$ es el dual de Poincaré a la subvariedad $\{s(x)\} \subset F$ de F , y por lo tanto su integral en F es ± 1 .

Como $0 \leq q \leq n$, tanto $\pi^* : H^q(M) \rightarrow H^q(S)$ como $\pi_* : H^{q+m}(S) \rightarrow H^q(M)$ son isomorfismos. Por lo tanto, como el diagrama conmuta a menos de un signo, tenemos que el morfismo $H^q(S) \rightarrow H^{q+m}(S)$ dado por $\omega \mapsto \omega \wedge \tau$ también es un isomorfismo. □

Ahora vemos que $f^* \tau = \tau$ (posiblemente cambiando f por un iterado). Esto nos permitirá, como en la prueba del teorema 1.6, comparar la acción de f^* en $H^q(S)$ con su acción en $H^{q+m}(S)$.

Lema. *Se tiene $f^* \tau = \pm \tau$.*

Demostración del lema. Tenemos un isomorfismo $\pi_* : H^m(S) \rightarrow H^0(M) \cong \mathbb{R}$, luego $H^m(S) = \langle \tau \rangle$, y por lo tanto por ser f un difeomorfismo se tiene $f^* \tau = \pm \tau$. □

De estos lemas concluimos que $\text{tr}(f^* : H^q(S) \rightarrow H^q(S)) = \text{tr}(f^* : H^{q+m}(S) \rightarrow H^{q+m}(S))$, para $q = 0, \dots, n$. Esto se cumple también para los morfismos inducidos por potencias de f .

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} |L(f^l)| &= \sum_{0 \leq q \leq q+m} (-1)^q \text{tr}(f^{l*} : H^q(S) \rightarrow H^q(S)) \\ &= \sum_{0 \leq q \leq n, m \leq q \leq n+m} (-1)^q \text{tr}(f^{l*} : H^q(S) \rightarrow H^q(S)) \\ &= \sum_{0 \leq q \leq n} ((-1)^q + (-1)^{q+m}) \text{tr}(f^{l*} : H^q(S) \rightarrow H^q(S)) \end{aligned}$$

Pero entonces, si m es impar tenemos $|L(f^l)| = 0$, y por lo tanto f no puede ser un difeomorfismo de Anosov.

Por otro lado, si m es par, obtenemos de la misma forma que en la prueba del teorema 1.6 que f debe tener una cantidad par de piezas subbásicas contenidas en piezas básicas de entropía máxima, y por lo tanto f no puede ser un difeomorfismo de Anosov transitivo. □

Ahora probamos la proposición 1.10. Tenemos que probar que si M es orientable con $\chi(M) \neq 0$ y $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov de codimensión k , entonces k es par, y si además E^u es orientable, entonces $H^k(M) \neq 0$.

Demostración de 1.10. Sea M cerrada y orientable de dimensión n , con $\chi(M) \neq 0$. Tenemos $\omega \in H^n(M)$ un generador que integra 1 en M .

Si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov de codimensión impar, entonces $\dim E^u$ es impar. Por 3.49, TM no puede tener subfibrados de dimensión impar, y luego no puede existir un tal difeomorfismo.

Ahora, si k es par y E^u es orientable, entonces E^s también lo es. Luego, existen las clases de Euler de E^u y E^s , y deben ser no nulas porque de lo contrario sería $\chi(M)\omega = e(TM) = e(E^u) \wedge e(E^s) = 0$, pero por hipótesis $\chi(M) \neq 0$. Por lo tanto, $e(E^u) \in H^k(M) \neq 0$. □

Observamos que esto nos da otra prueba de que $S^2 \times S^2$ no admite difeomorfismos de Anosov. Por 1.10, un difeomorfismo de Anosov en dicha variedad debería ser de codimensión 2.

Por otro lado, la clase de Euler del fibrado inestable (orientable pues $S^2 \times S^2$ es simplemente conexa) $e(E^u)$ sería no nula y además cumpliría $f^*e(E^u) = \pm e(E^u)$, luego $f^*|_{H^2(S^2 \times S^2)}$ tendría a ± 1 como valor propio, pero eso implicaría que es, a menos de un signo, el morfismo identidad.

A Apéndice

A.1 Preliminares topológicos

A.1.1 Fibrados

Las definiciones que damos en esta sección se pueden encontrar en [Ste].

El concepto de fibrado por un espacio sobre otro es, en cierto sentido, una generalización del concepto de producto de espacios.

Si M, F son espacios topológicos y llamamos $E = M \times F$, entonces tenemos las proyecciones $\pi : E \rightarrow M, p : E \rightarrow F$ sobre M y F respectivamente. Observamos que, dado $x \in M, \pi^{-1}(x) = \{x\} \times F$, es decir, todas las fibras de la proyección π son homeomorfas a F . De este modo, el espacio E se puede descomponer como una unión de copias de F (las fibras de π), parametrizadas por los puntos x en M .

Definición A.1. Un fibrado topológico con fibra F y base M consiste en un espacio E junto con un mapa continuo $\pi : E \rightarrow M$, de tal forma que:

- Existe un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ de M , y homeomorfismos $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ que preservan fibras (es decir, tales que $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F$ es un homeomorfismo).
- Las llamadas *funciones de transición* $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$ dadas por $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta|_{\{x\} \times F}$ son continuas.

En el producto $E = M \times F$, tenemos proyecciones tanto hacia M como hacia F , que actúan como coordenadas globales en E .

Además, dado un punto (x_0, y_0) en E , tenemos “copias” de M y F en E que lo contienen. Alcanza con tomar $\{x_0\} \times F$ y $M \times \{y_0\}$. Es decir, tenemos encajes $F \rightarrow E$ y $M \rightarrow E$, que a cada punto de M (resp. F) le asignan un punto en la fibra de π (resp. p). Es decir, si $s : M \rightarrow E$ es un tal encaje, se tiene $\pi \circ s = id_M$ (y análogamente para F).

Definición A.2. Una sección de un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ es un mapa continuo $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id_M$.

En un fibrado, puede suceder que se pierdan ciertas propiedades: no necesariamente se tienen coordenadas globales bien definidas, o secciones $M \rightarrow E$, o una proyección $p : E \rightarrow F$.

Localmente el fibrado es un producto, y por lo tanto sí hay coordenadas locales análogas al caso del producto. No necesariamente se podrán extender coherentemente a coordenadas globales.

Necesitaremos también una noción de equivalencia entre fibrados. Esto nos lleva a definir lo que es un mapa entre dos fibrados.

Definición A.3. Dados dos fibrados $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M'$, un mapa entre ellos consiste en un par de mapas $f : M \rightarrow M'$, $\hat{f} : E \rightarrow E'$ tales que $\pi' \circ \hat{f} = f \circ \pi$.

En ese caso, decimos que \hat{f} cubre a f .

Definición A.4. Dados dos fibrados $\pi : E \rightarrow M$, $\pi' : E' \rightarrow M'$, decimos que son equivalentes si existen mapas de fibrados $(\hat{f}, f) : (E, \pi, M) \rightarrow (E', \pi', M')$ y $(\hat{g}, g) : (E', M', \pi') \rightarrow (E, M, \pi)$ tales que $(\hat{f} \circ \hat{g}, f \circ g) = (\text{id}_{E'}, \text{id}_{M'})$ y $(\hat{g} \circ \hat{f}, g \circ f) = (\text{id}_E, \text{id}_M)$.

En general, un fibrado puede tener más estructura que la de un fibrado topológico. Por ejemplo, en el caso en el que la fibra F es \mathbb{R}^k , podemos querer darle a cada fibra una estructura de espacio vectorial, de forma coherente.

Lo que haremos será lo siguiente: si queremos darle cierta estructura al fibrado, pediremos que la imagen de las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ esté contenida en un subgrupo $G \subset \text{Homeo}(F)$ que respete esa estructura.

Definición A.5. Un fibrado con fibra F , base M y grupo de estructura $G \subset \text{Homeo}(F)$ es un fibrado topológico $\pi : E \rightarrow M$ que además cumple que $g_{\alpha\beta}(x)$ es un elemento de G , para todos $\alpha, \beta \in I$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Podemos definir también la noción de mapa entre fibrados con el mismo grupo de estructura. Solamente agregamos a la definición que dimos la condición de que en cada fibra la acción sea (a menos de tomar trivializaciones locales) por elementos de G .

Nuestro primer ejemplo de un fibrado con fibra F y grupo de estructura $G \subset \text{Homeo}(F)$ será el siguiente.

Ejemplo A.6. Un *fibrado vectorial* de rango $k \geq 0$ sobre una variedad M es un fibrado con base M , fibra \mathbb{R}^k y grupo de estructura $GL(k, \mathbb{R})$. Pediremos además que la proyección $\pi : E \rightarrow M$ sea diferenciable.

Vemos que, para un fibrado vectorial, tiene sentido (es decir, queda bien definido) definir una estructura de espacio vectorial en cada fibra mediante las cartas locales y la estructura usual en \mathbb{R}^k .

Observación. Si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial, entonces existe una sección $i : M \rightarrow E$

Si tuviéramos simplemente un fibrado topológico con fibra \mathbb{R}^k e intentáramos hacer la misma definición, nos encontraríamos con ambigüedades. Por ejemplo: nada nos garantiza que si x está en $U_\alpha \cap U_\beta$, entonces se tenga $\varphi_\alpha^{-1}(x, 0) = \varphi_\beta^{-1}(x, 0)$. En cambio, si sabemos que $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\beta|_{\{x\} \times \mathbb{R}^k}$ es un isomorfismo lineal, entonces sí lo tenemos asegurado.

Gran parte de lo que veremos será en el contexto de fibrados vectoriales. Vemos ahora uno de los ejemplos más comunes de estos.

Definición A.7. Si M^n es una variedad diferenciable, entonces su *fibrado tangente* TM es un fibrado vectorial sobre M de rango n tal que la fibra sobre cada x en M es T_xM , el espacio tangente a M en x .

Si asumimos $M \subset \mathbb{R}^N$ para algún natural N , entonces podemos definir $TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^N : v \in T_xM \subset \mathbb{R}^N\}$.

Dado que toda variedad se encaja en \mathbb{R}^N para N suficientemente grande, esta no es una restricción importante. Para ver una definición intrínseca de TM (y una prueba de que efectivamente es un fibrado vectorial) se puede consultar [Lee].

Ahora vamos a ver una condición para que un fibrado con fibra F sobre M sea equivalente al producto $M \times F$. En ese caso, decimos que el fibrado es *trivial*.

Primero, observamos que un fibrado sobre un punto siempre es trivial. Luego, parece posible que si la base M de un fibrado es lo suficientemente similar a un punto, entonces el fibrado tenga que ser trivial. Veremos que alcanza con que M sea homotópicamente equivalente a un punto.

Primero, hacemos una definición.

Definición A.8 (Definición/Proposición). Si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado con fibra F y grupo de estructura G , y $f : M' \rightarrow M$ es un mapa continuo, entonces existe un único (a menos de equivalencia de fibrados) fibrado $p : f^*E \rightarrow M'$ con fibra F y grupo de estructura G tal que el siguiente diagrama conmuta, para $\hat{f} : f^*E \rightarrow E$:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

A este fibrado le llamamos *pullback de E por f* , o *fibrado inducido por f* .

Podemos tomar $f^*E = \{(x, e) \in M' \times E : f(x) = \pi(e)\}$, con $\text{hat } f : f^*E \rightarrow E$ como la restricción de la proyección al segundo factor $M' \times E \rightarrow E$.

Por lo tanto, tenemos:

Observación. Si $f : M' \rightarrow M$ es un mapa constante, el fibrado f^*E es trivial.

Luego, la siguiente proposición nos da lo que queríamos.

Proposición A.9. Si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado, y $f, g : M' \rightarrow M$ son mapas continuos y homotópicos entre sí, entonces f^*E, g^*E son fibrados equivalentes.

Corolario A.10. Si M es contractible, entonces todo fibrado sobre M es trivial.

Vamos a necesitar también, en ciertos casos, la existencia de secciones para un fibrado. Ya vimos que para un fibrado vectorial se puede definir siempre una

sección. Podemos preguntarnos qué sucede en el caso de un fibrado por discos que no sea equivalente a un fibrado vectorial. En este caso, si bien cada fibra es homeomorfa a \mathbb{R}^n para algún n , no tenemos definido un origen en cada fibra de forma consistente. Veremos que esto no es necesario para la existencia de una sección, gracias a un resultado general.

Teorema A.11. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado con fibra F , siendo M una variedad compacta de dimensión $\dim(M) = n$. Entonces, si $\pi_q(F) = 0$ para todo q tal que $0 \leq q \leq n - 1$, existe una sección continua $s : M \rightarrow E$.*

La prueba se encuentra en [Ste], en la parte 3.

Esencialmente, el resultado se obtiene triangulando M con símlices suficientemente pequeños para que el fibrado sea trivial sobre cada uno de ellos. Luego nos queda $M = \bigcup_{q=0}^n M^q$, siendo M^q la unión de los q -símlices de la triangulación. Siempre podemos definir una sección en finitos puntos de M , y por lo tanto podemos hacerlo en M^0 . Extender una sección definida en M^q a una definida en M^{q+1} equivale a extender la sección definida en el borde de cada $(q + 1)$ -símplice a todo el símplice. Pero, como el fibrado sobre cada símplice es trivial, esto equivale a extender una función continua $f : S^q = \partial D^{q+1} \rightarrow F$ a D^{q+1} , y esto se puede hacer siempre que f sea homotópicamente trivial. Eso debe suceder porque pedimos $\pi_q(X) = 0$ para $q \leq n - 1$. Luego, por inducción, la sección se extiende hasta $M^n = M$.

A.1.2 Transversalidad

Vamos a ver ahora algunas nociones básicas de transversalidad. Esta sección se basa en material de [GP].

Definición A.12. Dadas $X, Y \subset M$, decimos que son transversales, o que se intersectan transversalmente, si para todo p en $X \cap Y$ se cumple que $T_p X + T_p Y = T_p M$.

Observamos que la definición implica que dos subvariedades que se intersectan lo pueden hacer transversalmente solamente si la suma de sus dimensiones es mayor que la dimensión del espacio ambiente. Además, dos subvariedades disjuntas son transversales.

Si pensamos en el ejemplo en que $X^{n-k}, Y^{n-l} \subset \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales, que su intersección sea transversal corresponde a que $X + Y = \mathbb{R}^n$. En este caso, su intersección es un subespacio de dimensión $n - k - l$.

El ejemplo anterior es, en cierto sentido, el más importante, porque así es como se ve localmente una intersección transversal de subvariedades.

Más en general, si N es otra variedad, podemos ver qué significa que un mapa $f : N \rightarrow M$ sea transversal a una subvariedad de M .

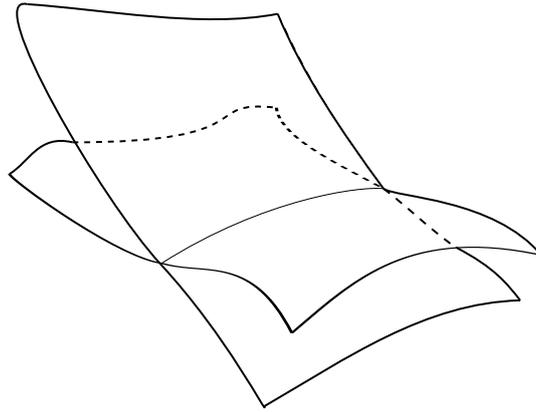


Figure 8: Intersección transversal

Definición A.13. Si $f : N \rightarrow M$ es diferenciable, entonces decimos que f es transversal a $X \subset Y$ si para todo q en $f^{-1}(X)$ se tiene que $\text{Im}d_q f + T_{f(q)}X = T_{f(q)}M$.

Proposición A.14. Sean N, M variedades, con $X, Y \subset M$ subvariedades transversales, y $f : N \rightarrow M$ diferenciable que suponemos transversal a X . Entonces:

1. $X \cap Y \subset M$ es una subvariedad de M , de codimensión $\text{codim}(X \cap Y) = \text{codim}(X) + \text{codim}(Y)$.
2. $f^{-1}(X) \subset N$ es una subvariedad de N , de codimensión $\text{codim}(f^{-1}(X), N) = \text{codim}(X, M)$.

Vemos ahora dos propiedades de la transversalidad que usaremos constantemente: la estabilidad y la genericidad. Vemos versiones débiles de ambas propiedades, pero que serán suficientes para lo que haremos.

Proposición A.15. Sea $f : N \rightarrow M$ diferenciable, con N compacta, y sea $X \subset M$ una subvariedad. Entonces si $f_t : N \rightarrow M$ con $t \in [0, 1]$ es una homotopía empezando en f (es decir, $f_0 = f$), existe $\varepsilon > 0$ tal que f_t es transversal a X para todo $t < \varepsilon$.

Lo que podemos pensar (aunque no es exactamente eso lo que dice la proposición) es que, manteniéndonos cerca de un mapa transversal a una subvariedad, esa transversalidad no se pierde, es decir, es estable por perturbaciones suficientemente pequeñas.

Veamos ahora un teorema sobre la genericidad de la transversalidad.

Teorema A.16. Sea $F : N \times S \rightarrow Y$ diferenciable y transversal a $X \subset Y$. Entonces, para casi todo s en S , el mapa $f_s = F(-, s)$ es transversal a X .

La condición de que $F : N \times S \rightarrow Y$ sea transversal a X es necesaria. Podría pasar que, al tomar una función $S \rightarrow C^\infty(N, M)$, obtengamos que f_s no es transversal a X para ningún s en S . Sin embargo, tomando S de dimensión suficientemente grande, y eligiendo bien el mapa $S \rightarrow C^\infty(N, M)$, esto no sucede.

Por ejemplo, el teorema de Whitney nos dice que podemos pensar en M como una subvariedad de \mathbb{R}^{2n} . En este caso, podemos tomar $S = B_\varepsilon(0)$ para $\varepsilon > 0$ chico, y $G : N \times S \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por $G(x, s) = f(x) + s$, siendo $f : N \rightarrow M$ algún mapa diferenciable. Ahora, si $N(M)$ es un entorno tubular de radio $\delta > \varepsilon$ (posiblemente achicando ε), definimos $F : N \times S \rightarrow M$ como $F = \pi \circ G$, siendo $\pi : N(M) \rightarrow M$ la proyección.

Obtenemos en este caso que, dada $X \subset M$, para casi todo s el mapa f_s es transversal a la subvariedad X .

Lo que usaremos en la práctica será el siguiente corolario.

Corolario A.17. *Sea $f : N \rightarrow M$ diferenciable y $X \subset M$ una subvariedad. Luego, existe $g : N \rightarrow M$ diferenciablemente homotópica a f y transversal a X .*

A.1.3 Orientación

Si V es un espacio vectorial de dimensión n , podemos considerar una relación de equivalencia en el conjunto de las bases ordenadas de V : decimos que $\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\}$ si existe un isomorfismo lineal $A : V \rightarrow V$ con determinante positivo tal que $A(v_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Mediante esta relación de equivalencia, el conjunto de las bases ordenadas de V se parte en dos clases de equivalencia.

Definición A.18. Una orientación del espacio vectorial V de dimensión $n \geq 1$ es una asignación de un signo positivo a una de las clases de equivalencia mencionadas, y de un signo negativo a la otra.

Para un espacio vectorial V de dimensión 0, una orientación es una elección de un signo positivo o negativo.

Observación. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, este tiene exactamente dos orientaciones posibles.

Definición A.19. Si la base ordenada $\{v_1, \dots, v_n\}$ pertenece a la clase de equivalencia a la que le corresponde un signo positivo, decimos que es una *base positiva*, y de lo contrario decimos que es una *base negativa*.

Definición A.20. Si $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados, decimos que T preserva orientación si manda alguna base positiva de V en una base positiva de W . De lo contrario, decimos que revierte orientación.

Observación. Si $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados, entonces preserva orientación si y solamente si manda cualquier base positiva en una base positiva.

Análogamente, T revierte orientación si y solamente si manda alguna base positiva en una base negativa.

Definición A.21. En \mathbb{R}^n , la orientación estándar es aquella en la que la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base positiva.

Ahora, definimos la orientación para una variedad. Esencialmente, una orientación de una variedad es una elección de orientación para cada espacio tangente, que varía diferenciablemente en cierto sentido.

Para lo siguiente, consideraremos a \mathbb{R}^n con la orientación estándar. Los espacios $T_x\mathbb{R}^n$ se identifican con \mathbb{R}^n de forma canónica asociando a cada v en \mathbb{R}^n la velocidad de la curva $\gamma_v(t) = x + tv$ en 0. Esta identificación induce una orientación en $T_x\mathbb{R}^n$, en la que $\{\gamma'_{e_1}(0), \dots, \gamma'_{e_n}(0)\}$ es una base positiva.

Definición A.22. Si M^n es una variedad diferenciable, posiblemente con borde, entonces una orientación de M es una elección de una orientación de T_xM para cada x en M , de forma tal que existen parametrizaciones $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \subset M$ tales que $d_x\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\varphi_\alpha(x)}M$ preserva orientación para cada α .

Llamamos *orientable* a una variedad que admite una orientación, y *orientada* a una variedad junto con una elección de orientación.

Proposición A.23. Sea M una variedad diferenciable. Entonces M es orientable si y solamente si existe un atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ tal que los cambios de cartas $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ preservan orientación.

Observación. Si M es una variedad orientable y conexa, determinar una orientación en M equivale a fijar una orientación en T_xM para algún x en M .

Si M y N son orientables, su producto $M \times N$ es también orientable.

Definición A.24. Sean M y N variedades orientadas y conexas. Sean x en M e y en N , y bases $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ de T_xM y T_yN respectivamente. Definimos la orientación producto en $M \times N$ como aquella en que $\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$ es una base positiva de $T_{(x,y)}M \times N$.

Veamos ahora cómo dar una orientación natural a la intersección de dos sub-variedades orientadas $X, Y \subset M$, cuando estas son transversales.

Observación. Si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces una orientación en dos de los espacios V_1, V_2, V_3 determina una orientación en el tercero.

Dadas bases ordenadas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, y la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, pedimos que se cumpla

$$\text{sgn}(\mathcal{B}) = \text{sgn}(\mathcal{B}_1) \text{sgn}(\mathcal{B}_2)$$

Vamos a usar esa observación. Recordamos que, si $X \subset M$ es una subvariedad de M , entonces el subespacio $N_x(X, M) \subset T_x M$ consiste de los vectores perpendiculares al tangente de X en el punto x .

Proposición A.25. Sean $X, Y \subset M$ subvariedades orientadas de la variedad orientada M y transversales entre sí. Entonces $X \cap Y$ es una subvariedad orientable de M .

Proof. Primero miramos el caso en el que X e Y tienen dimensiones complementarias, es decir, $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(M)$. En este caso, $X \cap Y$ es una variedad de dimensión 0, es decir, es una unión (a lo sumo) numerable de puntos en M . Por ser $X \cap Y$ de dimensión 0, los espacios tangentes $T_x(X \cap Y)$ son también de dimensión 0, para cada x en $X \cap Y$. Luego, dar una orientación de $X \cap Y$ equivale a asignar a cada x en $X \cap Y$ un signo positivo o negativo. Lo hacemos de la siguiente manera: Dado x en $X \cap Y$ y bases positivas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de $T_x X$ y $T_x Y$ respectivamente, se tiene (por ser X e Y de dimensiones complementarias) que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ es una base de $T_x X \oplus T_x Y = T_x M$. Le asignamos a x un signo positivo si y solo si \mathcal{B} es una base positiva de $T_x M$.

Ahora, miramos el caso en el que $\dim(X) + \dim(Y) > \dim(M)$. En este caso, la intersección $X \cap Y$ tendrá dimensión mayor a 0. Sea x en $X \cap Y$. Hacemos las siguientes observaciones:

1. $N_x(X \cap Y, X) \oplus T_x(X \cap Y) = T_x X$
2. $N_x(X \cap Y, Y) \oplus T_x(X \cap Y) = T_x Y$

Por el ítem 1, para dar una orientación de $T_x(X \cap Y)$ alcanza con dar una orientación de $N_x(X \cap Y, X)$. Pero por el segundo ítem, se tiene una orientación natural de $N_x(X \cap Y, X)$, como describimos en la observación anterior a esta proposición. Luego queda determinada una orientación en $T_x(X \cap Y)$, que depende de las orientaciones de $T_x X, T_x Y$ y $T_x M$.

Resta ver que, al hacer esta definición en todos los tangentes $T_x(X \cap Y)$ para x en $X \cap Y$ queda una orientación en $X \cap Y$, es decir, resta ver que lo que definimos varía continuamente. Pero localmente la intersección transversal de subvariedades se ve como la intersección de subespacios vectoriales U, V de \mathbb{R}^n tales que $U + V = \mathbb{R}^n$. En ese caso, tenemos lo que queremos ya que las orientaciones elegidas son “constantes” (a menos de la identificación de $T_x U$ con U y de $T_x V$ con V , lo son). Luego, tomando cartas locales, tenemos que las orientaciones elegidas varían continuamente. \square

Definición A.26. Si M es una variedad orientada, llamamos $-M$ a la variedad orientada M con la orientación opuesta.

Si $f : M \rightarrow N$ es transversal a la subvariedad $Y \subset N$, entonces podemos definir una orientación natural en $f^{-1}(Y)$. Observamos que esto corresponde a lo que vimos con la intersección de subvariedades, tomando $f : X \rightarrow N$ la inclusión.

Proposición A.27. Sean M, N variedades orientadas y $f : M \rightarrow N$ diferenciable, y transversal a la subvariedad orientada $Y \subset N$. Entonces, $f^{-1}(Y)$ es una subvariedad orientable de M .

Proof. La prueba es casi la misma que en el caso de la intersección. Dado x en $f^{-1}(Y)$, tenemos $N_x(f^{-1}(Y), M) \oplus T_x f^{-1}(Y) = T_x M$, por lo tanto alcanza con dar una orientación a $N_x(f^{-1}(Y), M)$.

Por ser f transversal a Y , $d_x f(T_x M) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} N$, luego debe ser $d_x f^{-1}(T_{f(x)} Y) = T_x f^{-1}(Y)$ (una inclusión es evidente, y la otra se debe cumplir para que alcancen las dimensiones). Pero entonces, $\text{Ker}(d_x f) \subset T_x f^{-1}(Y)$. Por lo tanto, $d_x f(N_x(f^{-1}(Y), M)) \oplus T_{f(x)} Y = T_{f(x)} N$. Luego, tenemos una orientación para $d_x f(N_x(f^{-1}(Y), M))$,

Por ser $\text{Ker}(d_x f) \subset T_x f^{-1}(Y)$, $d_x f$ es inyectivo en $N_x(f^{-1}(Y), M)$, y por lo tanto la orientación en $d_x f(N_x(f^{-1}(Y), M))$ induce una en $N_x(f^{-1}(Y), M)$. Con esta, obtenemos una orientación en $T_x f^{-1}(Y)$, que era lo que queríamos. \square

A.1.4 Número de intersección

En esta sección, nos basamos en el capítulo 3 de [GP].

Cuando dos subvariedades orientadas y compactas X, Y de una variedad orientada M tienen dimensiones complementarias, su intersección consiste en una cantidad finita de puntos. Esta cantidad no es estable al perturbar las subvariedades (por ejemplo, podrían dejar de intersectarse), pero ahora definiremos el *número de intersección* de dos subvariedades, que es un conteo signado de sus puntos de intersección, tomando en cuenta las orientaciones de X e Y en los puntos de intersección. Esta cantidad sí será invariante bajo deformaciones de X e Y .

Definición A.28. Sean X, Y subvariedades compactas y orientadas de la variedad orientada M , de dimensiones complementarias. Entonces el número de intersección de X e Y es

$$I(X, Y) = \sum_{x \in X \cap Y} \sigma_x$$

donde $\sigma_x = \pm 1$, según si la orientación de $\{x\}$ como intersección de X e Y es de signo positivo o negativo.

Recordando la sección anterior, lo que debemos hacer para averiguar si σ_x es positivo o negativo para un x en $X \cap Y$ es: tomamos bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de $T_x X$ y $T_x Y$

respectivamente. Si $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ es una base positiva de $T_x M$, entonces $\sigma_x = 1$. De lo contrario, $\sigma_x = -1$.

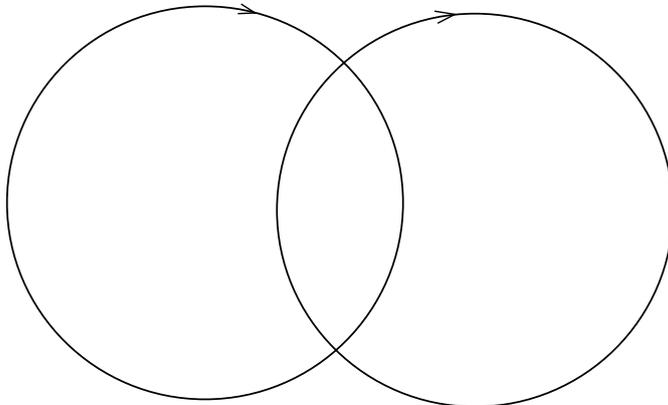


Figure 9: Círculos transversales. Hay dos puntos de intersección, pero el número de intersección es 0.

Para ver que se cumple lo que afirmamos sobre la invariancia de $I(X, Y)$ por deformaciones de X o Y , vamos a definir el número de intersección entre un mapa diferenciable transversal a una subvariedad y dicha subvariedad.

Recordamos que si $f : M \rightarrow N$ es transversal a la subvariedad $Y \subset N$, entonces $f^{-1}(Y)$ es una subvariedad de M , de codimensión $\text{codim}(f^{-1}(Y), M) = \text{codim}(Y, N)$. Luego, si $\dim(M) + \dim(Y) = \dim(N)$, $f^{-1}(Y)$ es de dimensión 0.

Definición A.29. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable, con M y N orientadas y compactas. Si f es transversal a la subvariedad compacta y orientada $Y \subset N$ tal que $\dim(M) + \dim(Y) = \dim(N)$, definimos

$$I(f, Y) = \sum_{x \in f^{-1}(Y)} \sigma_x$$

donde $\sigma_x = \pm 1$ tiene el signo que corresponde a la orientación de $\{x\}$ con la orientación preimagen.

Observación. Si $X, Y \subset M$ son transversales, y el mapa $i : X \rightarrow M$ es la inclusión, entonces i es transversal a Y , y se cumple $I(X, Y) = I(i, Y)$.

Proposición A.30. Si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable, con M y N compactas y orientadas, e $Y \subset M$ es una subvariedad compacta y orientada, entonces $I(f, Y)$ es invariante por homotopías de f . Es decir, si $g : M \rightarrow N$ es diferenciable y homotópica a f , y es transversal a Y , se tiene $I(g, Y) = I(f, Y)$.

Esto nos permite extender la definición del número de intersección a subvariedades que no sean transversales, y análogamente para mapas y subvariedades.

Definición A.31. Si X, Y son subvariedades cerradas y orientadas de la subvariedad cerrada y orientada M , definimos $I(X, Y)$ como $I(i_t, Y)$ donde $i_t : X \rightarrow M$ es homotópico a la inclusión $i : X \rightarrow M$, y transversal a Y .

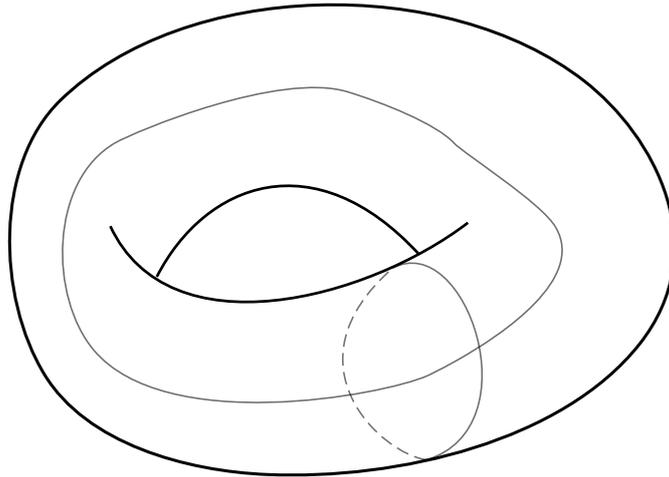


Figure 10: Círculos con número de intersección ± 1 . Al deformarlos, se siguen intersectando, y el número de intersección sigue siendo 1.

Observación. Si x es un punto de N , entonces $I(f, x)$ es el grado de f .

Proposición A.32. $I(X, Y) = (-1)^{\dim(X)\dim(Y)} I(Y, X)$.

Recordemos que la característica de Euler de una variedad cerrada y M se define como la suma de los índices de los ceros de un campo de vectores en M con finitos ceros. El teorema de Poincaré-Hopf (ver [GP]) nos garantiza que esto está bien definido.

Podemos interpretar esta suma de índices como un conteo de la autointersección de la sección nula $i(M)$ en TM . De hecho, se tiene lo siguiente:

Proposición A.33. Si M es cerrada y orientable, entonces $\chi(M) = I(i(M), i(M)) = I(\Delta, \Delta)$ con Δ diagonal en $M \times M$.

A.1.5 Cohomología de de Rham

Ahora damos definiciones de cohomología de de Rham, con soporte compacto y cohomología relativa, además de sus primeras propiedades. Todo lo que se ve está contenido en [God].

Dada una variedad (con borde) diferenciable M de dimensión n , llamamos $\Omega^*(M)$ al conjunto de las formas diferenciales en M . Es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , y además el producto exterior de formas diferenciales le da una estructura de álgebra sobre \mathbb{R} .

Además, es un álgebra graduada⁵, ya que $\Omega^*(M) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(M)$, donde $\Omega^q(M)$ es el conjunto de las q -formas en M , y $n = \dim(M)$ (recordemos que, si $q > n$ o $q < 0$, $\Omega^q(M) = 0$). Esto es porque, si ω es una k -forma y η una l -forma, entonces $\omega \wedge \eta$ es una $(k + l)$ -forma.

Como $d^2 = 0$, se tiene el complejo de cocadenas⁶ $(\Omega^q(M), d^q)$, y podemos definir su cohomología, la *cohomología de de Rham*.

Definición A.34. Para cada $q = 0, \dots, n$ definimos el q -ésimo grupo de cohomología de de Rham de M como $H_{dR}^q(M) = \frac{Ker d^q}{Im d^{q-1}}$. En esta sección le llamaremos simplemente $H^q(M)$, más adelante haremos la distinción cuando pueda causar confusión.

El *anillo de cohomología* de M es $H^*(M) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(M)$. También es un álgebra graduada con el producto inducido por el producto exterior de formas.

Recordamos que si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable, entonces induce un homomorfismo $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$, el pullback de f . Como además este conmuta con la derivada exterior, induce un mapa en cohomología $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$.

Recordamos algunas propiedades de este:

Proposición A.35. *Se cumplen:*

- $id^* = id$
- Si $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ son diferenciables, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- Si $f, g : M \rightarrow N$ son diferenciables y homotópicos, entonces $f^* = g^*$.

Además, si $f : M \rightarrow N$ es continua, es homotópica a un mapa diferenciable $\hat{f} : M \rightarrow N$ y por lo tanto podemos definir $f^* = \hat{f}^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$.

Obtenemos entonces, por la proposición anterior, que dos espacios homotópicamente equivalentes tienen anillos de cohomología isomorfos. Como corolario, tenemos el *lema de Poincaré*:

Teorema A.36. *Si ω es una q -forma cerrada en \mathbb{R}^n , con $q > 0$, entonces es exacta. En otras palabras, $H^q(\mathbb{R}^n) = 0$ para $q > 0$.*

⁵Esto se define en el apéndice

⁶También definido en el apéndice

El teorema anterior junto con la siguiente proposición nos termina de dar $H^*(\mathbb{R}^n)$. Su prueba se basa en que si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cumple $df = 0$, entonces es localmente constante.

Proposición A.37. *Si M es conexa, entonces $H^0(M) \cong \mathbb{R}$.*

Una herramienta útil para hacer cálculos es la sucesión de Mayer-Vietoris. Esta nos permite calcular la cohomología de una variedad descomponiéndola como unión de conjuntos abiertos y calculando la cohomología de estos y de sus intersecciones, que puede ser más simple que la de M .

Sean U, V abiertos. Llamamos $i_U : U \rightarrow U \cup V$, $i_V : V \rightarrow U \cup V$ a las respectivas inclusiones de U y V en $U \cup V$. Además, llamamos $j_U : U \cap V \rightarrow U$, $j_V : U \cap V \rightarrow V$ a las inclusiones de $U \cap V$ en U y V respectivamente.

Proposición A.38. *La siguiente sucesión es exacta para cada q :*

$$0 \longrightarrow \Omega^q(U \cup V) \xrightarrow{(c)} \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^q(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Para ver que $j_U^* - j_V^*$ es sobreyectiva, usamos una partición de la unidad de $U \cup V$ asociada al cubrimiento $\{U, V\}$ ⁷.

Además, se puede ver que los mapas en la sucesión conmutan con la derivada exterior, y por lo tanto se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Esta induce una sucesión exacta larga en cohomología.

Proposición A.39. *Si U, V son abiertos de una variedad M , entonces existe una sucesión exacta larga de la siguiente forma:*

$$\dots \rightarrow H^q(U \cup V) \xrightarrow{i^*} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{j^*} H^q(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$

donde $i^* = (i_U^*, i_V^*)$ y $j^* = j_U^* - j_V^*$.

Veamos explícitamente cómo es $\delta^* : H^q(U \cap V) \rightarrow H^{q+1}(U \cup V)$.

Si $[\omega]$ es un elemento de $H^q(U \cap V)$, y ω una forma cerrada en $\Omega^q(U \cap V)$ que lo representa, entonces una preimagen de ω por $j^* = j_U^* - j_V^*$ es $(\rho_V \omega, -\rho_U \omega)$. Luego, un representante de $\delta^*[\omega]$ en $\Omega^{q+1}(U \cup V)$ es una forma cerrada en $U \cup V$ cuya restricción a U es $d(\rho_V \omega)$, y su restricción a V es $d(-\rho_U \omega)$.

Ahora introducimos la *cohomología con soporte compacto*.

⁷Recordemos que si $\{\rho_U, \rho_V\}$ es una partición de la unidad de $U \cup V$ asociada al cubrimiento $\{U, V\}$, entonces el soporte de ρ_U está contenido en U , y análogamente para ρ_V con V . Además, $\rho_U + \rho_V = 1$

Definición A.40. Dada una forma diferencial ω en M , su soporte es $\text{sop}\omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$.

Definición A.41. Llamamos $\Omega_c^*(M)$ a las formas diferenciales en M con soporte compacto. Entonces, tenemos que $d(\Omega_c^q(M)) \subset \Omega_c^{q+1}(M)$, por lo tanto al restringir d a las formas de soporte compacto, obtenemos otro complejo de cocadenas $(\Omega_c^q(M), d^q)$. El anillo de cohomología con soporte compacto de M será entonces $H_c^*(M) = \frac{\text{Ker}(d)}{\text{Im}(d)}$, y una vez más obtenemos $H_c^*(M) = \bigoplus_q H_c^q(M)$, donde la definición de $H_c^q(M)$ es análoga a la de $H^q(M)$, para formas con soporte compacto.

No tenemos exactamente las mismas propiedades para la cohomología con soporte compacto que las que vimos antes, debido justamente a la restricción de trabajar con formas con soporte compacto.

Por ejemplo, un mapa $f : M \rightarrow N$ no necesariamente define un homomorfismo $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ mediante el pullback de formas, dado que no hay ningún motivo por el cual $f^*\omega$ deba tener soporte compacto aunque ω sí lo tenga. Por ejemplo, si $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es la proyección sobre M , y ω es una forma en M con soporte compacto, $\pi^*\omega$ no tendrá soporte compacto si ω es no nula.

Sí podemos definir un pullback para mapas *proprios*, es decir, mapas tales que la preimagen de un compacto es un compacto. Por el mismo motivo que en lo anterior, este mapa también induce un homomorfismo $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ en cohomología con soporte compacto.

Proposición A.42. Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa diferenciable y propio. Luego existe un homomorfismo $f^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$ inducido por el pullback de formas, tal que:

- $\text{id}^* = \text{id}$
- Si $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ son diferenciables y propios, entonces

También nos va a interesar otro tipo de mapa inducido. Si U, V son abiertos de una variedad tales que $U \subset V$, entonces una forma con soporte compacto en U se puede extender a V , siendo la forma nula en $V \setminus U$.

Proposición A.43. Si $i : U \rightarrow V$ es la inclusión de un conjunto abierto en otro, entonces induce un homomorfismo $i_* : H_c^*(U) \rightarrow H_c^*(V)$, dado por $i_*[\omega] = [\omega']$, donde ω' es la extensión de ω a V tal que ω' es nula en $V \setminus U$.

Además, se cumple $\text{id}_* = \text{id}$, y si $U \subset V \subset W$ son tres abiertos con inclusiones $i : U \rightarrow V$, $j : V \rightarrow W$, se tiene $(j \circ i)_* = j_* \circ i_*$.

En el caso no compacto, la cohomología con soporte compacto y la cohomología de de Rham difieren. Veámoslo en la recta real.

Ejemplo A.44.

$$H_c^q(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1 \\ 0 & q \neq 1 \end{cases}$$

En particular, esto nos muestra que la cohomología con soporte compacto no es invariante por homotopías, dado que $H_c^1(\{x_0\}) \cong H^1(\{x_0\})$ por ser $\{x_0\}$ compacto, y esta última sabemos que se anula, por lo tanto $H_c^1(\mathbb{R})$ no es isomorfo a $H_c^1(\{x_0\})$, aunque estos espacios sean homotópicamente equivalentes.

Se tiene, para cohomología con soporte compacto, una sucesión de Mayer-Vietoris análoga a la que ya vimos. Consideramos una vez más abiertos U, V y las inclusiones $i_U : U \rightarrow U \cup V$, $i_V : V \rightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \rightarrow U$ y $j_V : U \cap V \rightarrow V$.

Proposición A.45. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \Omega_c^q(U \cap V) \xrightarrow{(-j_{U*}, j_{V*})} \Omega_c^q(U) \oplus \Omega_c^q(V) \xrightarrow{i_{U*} + i_{V*}} \Omega_c^q(U \cup V) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta para cada q .

Una vez más, esto nos da una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas, y por lo tanto una sucesión exacta larga en cohomología con soporte compacto.

Proposición A.46. *Si U, V son abiertos, se tiene una sucesión exacta larga de la siguiente forma:*

$$\dots \rightarrow H_c^q(U \cap V) \xrightarrow{j_*} H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \xrightarrow{i_*} H_c^q(U \cup V) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

donde $i_*([\omega], [\eta]) = i_{U*}[\omega] + i_{V*}[\eta]$, y $j_* = (-j_{U*}, j_{V*})$.

También consideraremos la *cohomología relativa* respecto a una subvariedad.

Definición A.47. Sea M una variedad diferenciable, posiblemente con borde, y sea $X \subset M$ una subvariedad (también posiblemente con borde) de M , encajada y tal que es un subconjunto cerrado de M . Sea $i : X \rightarrow M$ la inclusión.

Llamamos $\Omega^q(M, X) \subset \Omega^q(M)$ al conjunto de las q -formas en M tales que $i^*\omega = 0$.

Observación. Si $\dim(X) = \dim(M)$, entonces $\Omega^q(M, X)$ consiste de las q -formas en M que son cero en X .

Como $d \circ i^* = i^* \circ d$, tenemos que $(\Omega^q(M, X), d^q)$ también es un complejo de cocadenas, y por lo tanto podemos hacer la siguiente definición:

Definición A.48. La cohomología (de de Rham) relativa de M respecto a X es

$$H_{dR}^q(M, X) = \frac{\text{Ker}(d^q : \Omega^q(M, X) \rightarrow \Omega^{q+1}(M, X))}{\text{Im}(d^{q-1} : \Omega^{q-1}(M, X) \rightarrow \Omega^q(M, X))}$$

Llamamos a (M, X) donde $X \subset M$ un *par* de espacios. Es de esperar que exista una relación entre la cohomología relativa de M respecto a X , la cohomología de X y la de M . Esto queda explícito en la *sucesión exacta larga del par* (M, X) . Una referencia para este resultado, y para el resto de la sección, es el capítulo 12 de [God].

Proposición A.49. Si (M, X) es un par de espacios que satisface las hipótesis que dimos para definir $H^*(M, X)$, y los mapas $i : X \rightarrow M$, $j : (M, \emptyset) \rightarrow (M, X)$ son inclusiones, entonces existe una sucesión exacta larga de la forma

$$\dots \longrightarrow H^q(M, X) \xrightarrow{j^*} H^q(M) \xrightarrow{i^*} H^q(X) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(M, X) \longrightarrow \dots$$

Para probar la proposición, alcanza con ver que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Omega^q(M, X) \xrightarrow{j^*} \Omega^q(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^q(X) \longrightarrow 0$$

es exacta para cada q .⁸

La exactitud de la sucesión se ve fácilmente, a menos de ver que $i^* : \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^q(X)$ es sobreyectivo, es decir, ver que toda forma en X se extiende a M .

Lema A.50. Sea $X \subset M$ una subvariedad encajada como un subconjunto cerrado. Entonces si ω es una q -forma en X , existe ω' q -forma en M tal que $i^*\omega' = \omega$.

El lema se prueba usando cartas en las que X se vea como un hiperplano (o un “semi-hiperplano”, si tiene borde) en \mathbb{R}^n , y partición de la unidad.

Observación. Como se ve en el Apéndice, $\delta^*[\omega]$ está representada por la forma cerrada $d\omega'$, donde ω' es una extensión a M de ω .

Por último, enunciemos el teorema de escisión:

Teorema A.51. Si $Z \subset X \subset M$, con $\bar{Z} \subset \text{int}(X)$, entonces el homomorfismo $H^*(M, X) \rightarrow H^*(M \setminus Z, X \setminus Z)$ inducido por la inclusión es un isomorfismo.

⁸ver Apéndice: Una sucesión exacta corta de complejos de cadenas induce una sucesión exacta larga del tipo que se ve en la proposición

A.1.6 Inducción en los abiertos de una variedad

En esta sección, presentamos un lema que nos será útil a la hora de probar propiedades topológicas de variedades.

Supongamos que queremos probar que se cumple una propiedad $\mathcal{P}(M)$, para una variedad M . Podemos comenzar probando que se cumple $\mathcal{P}(U)$ cuando $U \cong \mathbb{R}^n$ es un abierto de M , ya que en general esto puede ser más simple. Siempre es posible cubrir M con abiertos de ese tipo, y cuando \mathcal{P} cumpla ciertas condiciones, con esto alcanzará para probar $\mathcal{P}(M)$.

Vamos a considerar exclusivamente, a partir de ahora, variedades que admiten *buenos cubrimientos finitos*.

Definición A.52. Un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un *buen cubrimiento* si U_α es difeomorfo a \mathbb{R}^n para todo α en I , y todas las intersecciones finitas no vacías $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ también lo son.

Ahora, explicitamos lo que se mencionó antes:

Teorema A.53. *Sea M una variedad de dimensión n que admite un buen cubrimiento finito, y sea \mathcal{P} una propiedad de subconjuntos abiertos de M , tal que:*

1. *Se cumple $\mathcal{P}(U)$ para todo $U \subset M$ difeomorfo a \mathbb{R}^n .*
2. *Si se cumplen $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(U \cap V)$, entonces se cumple $\mathcal{P}(U \cup V)$.*
3. *Si se cumplen $\mathcal{P}(U)$ y $\mathcal{P}(V)$ para U y V abiertos disjuntos, entonces se cumple $\mathcal{P}(U \cup V)$.*

Entonces, se cumple $\mathcal{P}(M)$.

Proof. Observamos que alcanza con probarlo para M conexa, ya que el caso general se deduce de este usando la hipótesis 3.

Hacemos la prueba por inducción en el cardinal de un buen cubrimiento de M .

Si $M = U_1$ con $U_1 \cong \mathbb{R}^n$, entonces se cumple $\mathcal{P}(M)$ por 1.

Supongamos ahora que tenemos probado el resultado para todas las variedades que admiten un buen cubrimiento de cardinal k . Entonces, si M es una variedad con un buen cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{k+1}\}$, tenemos

$$(U_1 \cup \dots \cup U_k) \cap U_{k+1} = (U_1 \cap U_{k+1}) \cup \dots \cup (U_k \cap U_{k+1})$$

Luego, si llamamos $N = (U_1 \cup \dots \cup U_k)$, entonces tanto N como $N \cap U_{k+1}$ admiten buenos cubrimientos de cardinal k (estos son $\{U_1, \dots, U_k\}$ y $\{U_1 \cap U_{k+1}, \dots, U_k \cap U_{k+1}\}$ respectivamente). Por lo tanto, por hipótesis de inducción, se cumple $\mathcal{P}(N)$. Como también se cumple $\mathcal{P}(U_{k+1})$, concluimos que se cumple $\mathcal{P}(N \cup U_{k+1})$, es decir, se cumple $\mathcal{P}(M)$. \square

Visualmente, la existencia de buenos cubrimientos resulta intuitiva. Sin embargo, la prueba tiene ciertos detalles delicados.

Proposición A.54. *Toda variedad admite un buen cubrimiento.*

Proof. Ponemos en M una métrica riemanniana. Se puede probar (ver [dC], capítulo 3) que alrededor de cada punto x en M existe un entorno U_x fuertemente convexo, es decir, tal que para todo par de puntos y, z en $\overline{U_x}$ existe una única geodésica minimizante contenida en U_x (salvo por sus extremos) que los une. Por definición, la intersección de dos abiertos fuertemente convexos es también fuertemente convexa.

Mediante el mapa exponencial, U_x es difeomorfo (posiblemente tomándolo más pequeño), a un abierto *tipo estrella* (respecto a 0) de $T_x M \cong \mathbb{R}^n$, para cada $x \in M$. De la misma manera, todas las intersecciones finitas no vacías $U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_j}$ son difeomorfas a abiertos tipo estrella de \mathbb{R}^n , para $x_i, \dots, x_j \in M$, $j \geq 1$.

Luego, $\{U_x\}_{x \in M}$ es un cubrimiento por abiertos difeomorfos a abiertos tipo estrella de \mathbb{R}^n , tales que todas sus intersecciones finitas no vacías también lo son. El siguiente lema termina la prueba:

Lema. *Todo abierto tipo estrella de \mathbb{R}^n es difeomorfo a \mathbb{R}^n .*

La prueba de este lema se puede encontrar en [GT].

□

Corolario A.55. *Toda variedad compacta admite un buen cubrimiento finito.*

Claramente la condición de ser compacta no es necesaria para admitir un buen cubrimiento finito. Una condición necesaria, y la primera aplicación que podemos darle al Teorema A.53 junto con la sucesión de Mayer-Vietoris es:

Proposición A.56. *Si una variedad admite un buen cubrimiento finito, entonces su cohomología (singular, de de Rham, con soporte compacto) tiene dimensión finita.*

Un ejemplo, entonces, de una variedad que no admite un buen cubrimiento finito puede ser una superficie de género infinito. Nosotros trabajamos únicamente con variedades que admitan buenos cubrimientos finitos.

A.1.7 Cohomología singular

Definimos ahora la cohomología singular de un espacio topológico. Esta nos será útil cuando el espacio que estemos considerando no sea una variedad diferenciable, ya que en ese caso no tenemos disponible la cohomología de de Rham.

Veremos que se tiene un producto en el anillo de cohomología singular $H^*(X)$, análogo al producto exterior en el caso de la cohomología de de Rham.

Para esta sección, la referencia es el capítulo 3 de [Hat]. Asumimos conocidas definiciones básicas del capítulo 2 de este libro, como la noción de cadena singular, borde de una cadena singular, complejo de cadenas singulares, etc.

Definición A.57. Dado un espacio topológico X y un grupo abeliano G , definimos el grupo de q -cocadenas singulares con coeficientes en R como $C^q(X; R) = \text{Hom}(C_q(X); R)$, donde $C_q(X)$ es el grupo de q -cadenas singulares en X .

Para nosotros, R será \mathbb{Z} o \mathbb{R} .

Proposición A.58. Se tiene un complejo de cocadenas $(C^q(X; R), \delta^q)$, donde $\delta^q = \partial_{q+1}^* : C^q(X; R) \rightarrow C^{q+1}(X; R)$ es el dual al mapa borde $\partial_{q+1} : C_{q+1}(X) \rightarrow C_q(X)$.

Esta proposición nos permite definir la cohomología singular de X con coeficientes en R :

Definición A.59. Dado $q \in \mathbb{Z}$, El q -ésimo grupo de cohomología singular de X es

$$H^q(X) = \frac{\text{Ker}(\delta^q)}{\text{Im}(\delta^{q-1})}$$

Lo siguiente es se prueba como en cohomología de de Rham:

Proposición A.60. Si $f : X \rightarrow Y$ es un mapa continuo, existe para cada q un morfismo inducido en cohomología $f^* : H^q(Y; R) \rightarrow H^q(X; R)$, dado por $f^*[\eta] = [\eta \circ f]$.

Además, estos morfismos cumplen:

- Si $g : Y \rightarrow Z$ es otro mapa continuo, se tiene $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^q(Z) \rightarrow H^q(X)$.
- El morfismo inducido por el mapa identidad es el morfismo identidad, es decir, $\text{id}^* = \text{id} : H^q(X) \rightarrow H^q(X)$.

De la misma forma que tenemos cohomología relativa para cohomología de de Rham, podemos definir cohomología relativa en este contexto.

Definición A.61. Dado un subconjunto $A \subset X$, el grupo de q -cocadenas singulares relativas respecto a A (con coeficientes en R) es $C^q(X, A; R) = \{\eta \in C^q(X; R) : \eta(\sigma) = 0 \text{ para toda } \sigma \text{ con imagen en } A\}$.

Observación. El mapa coborde $\delta : H^q(X; R) \rightarrow H^{q+1}(X; R)$ cumple que $\delta^q(C^q(X, A; R)) \subset C^{q+1}(X, A; R)$.

Definición A.62. Definimos los grupos de cohomología relativa de X respecto de A como

$$H^q(X, A; R) = \frac{\text{Ker}(\delta^q : C^q(X, A; R) \rightarrow C^{q+1}(X, A; R))}{\text{Im}(\delta^{q-1} : C^{q-1}(X, A; R) \rightarrow C^q(X, A; R))}$$

Ahora vemos cómo es el producto en cohomología singular análogo al producto exterior en cohomología de de Rham. Lo definimos primero a nivel de cocadenas singulares.

Definición A.63. Dadas cocadenas singulares η, τ en $C^q(X; R)$, $C^l(X; R)$ respectivamente, definimos su *producto cup* como la cocadena singular $\eta \smile \tau$ en $C^{q+l}(X; R)$ que en cada símplice singular $\sigma : \Delta^{q+l} \rightarrow X$ vale

$$\eta \smile \tau(\sigma) = \eta(\sigma|_{[v_0, \dots, v_q]})\tau(\sigma|_{[v_q, \dots, v_{q+l}]})$$

donde el producto a la derecha es el producto en R (recordamos que para nosotros R es \mathbb{R} o \mathbb{Z}).

Recordamos que, para probar que el producto exterior de formas induce un producto en cohomología de de Rham, se usa que, si ω, η son q - y l - formas diferenciales respectivamente, se tiene $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge (d\eta)$. En este caso, tenemos lo mismo.

Proposición A.64. Si η, τ son elementos de $C^q(X; R)$, $C^l(X; R)$, entonces

$$\delta(\eta \smile \tau) = (\delta\eta) \smile \tau + (-1)^q \eta \smile (\delta\tau)$$

Entonces, podemos definir:

Proposición A.65. Dados q, l , se tiene un producto $H^q(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{q+l}(X; R)$ dado por $[\eta] \smile [\tau] = [\eta \smile \tau]$.

Además, este cumple las siguientes propiedades:

- Es asociativo y distributivo.
- $[\eta] \smile [\tau] = (-1)^{ql} [\tau] \smile [\eta]$
- Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f^*([\eta] \smile [\tau]) = f^*[\eta] \smile f^*[\tau]$.

Definición A.66. Definimos el anillo de cohomología singular de X con coeficientes en R , $H^*(X; R)$, como $H^*(X; R) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(X; R)$, con el producto cup como producto.

Observamos que $H^*(X; R)$ es un álgebra graduada sobre R .

Por último, enunciamos el teorema de de Rham, que nos dice que en el caso en que X es una variedad, se tiene una equivalencia entre $H_{dR}^q(X)$ y $H^q(X; \mathbb{R})$. Se puede encontrar un enunciado más específico (que en particular explicita cuál es el isomorfismo) y su prueba en el capítulo 5 de [Bre].

Teorema A.67. Si M es una variedad diferenciable, existe un isomorfismo $\Phi : H_{dR}^q(M) \rightarrow H^q(M, \mathbb{R})$ para cada q .

Más aún, este isomorfismo manda el producto exterior de clases de cohomología de de Rham en el producto cup de clases de cohomología singular, es decir, $\Phi(\omega \wedge \tau) = \Phi(\omega) \smile \Phi(\tau)$. Por lo tanto, se concluye:

Teorema A.68. *Si M es una variedad diferenciable, existe un isomorfismo de álgebras $\Phi : H_{dR}^*(X) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$.*

Esto último se puede encontrar en [BT], capítulos 2 y 3.

A.2 Preliminares algebraicos

Definición A.69. Sea A un álgebra sobre R , con $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Decimos que es un álgebra graduada si es una suma directa de grupos abelianos $\{R_i\}_{i \geq 0}$ tales que $R_i R_j \subset R_{i+j}$, y $\alpha R_i \subset R_i$ para α en R .

Un ejemplo de álgebra graduada pueden ser los polinomios sobre \mathbb{R} o \mathbb{Z} , o las formas multilineales en un espacio vectorial.

Los ejemplos más importantes que usamos son las formas diferenciales en una variedad, o las cocadenas singulares en un espacio topológico, y luego los anillos de cohomología correspondientes.

Lema A.70. *Consideremos un diagrama conmutativo de grupos abelianos o espacios vectoriales de la siguiente forma, con filas exactas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Entonces, si α, β, δ y ε son isomorfismos, se tiene que γ también es un isomorfismo.

Definición A.71. Un complejo de cadenas es una sucesión de módulos $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ junto con homomorfismos $d_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$, tales que $d_{q-1} \circ d_q = 0$ para cada entero q . Lo denotamos (C_\bullet, d_\bullet) , o simplemente C .

A un complejo de cadenas lo representamos de la siguiente forma:

$$\dots \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{d_{q+1}} A_q \xrightarrow{d_q} A_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} \dots$$

Análogamente, tenemos la definición de complejo de cocadenas.

Definición A.72. Un complejo de cocadenas es una sucesión de módulos $\{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ junto con homomorfismos $d^q : C^q \rightarrow C^{q-1}$, tales que $d^{q+1} \circ d^q = 0$ para cada entero q .

Lo denotamos (C^\bullet, d^\bullet) , o C .

Ahora podemos definir los grupos de homología (cohomología) de un complejo de cadenas (de cocadenas).

Definición A.73. Dado un complejo de cadenas (C_\bullet, d_\bullet) , su q -ésimo grupo de homología es

$$H_q(C_\bullet, d_\bullet) = \frac{\text{Ker}(d_q)}{\text{Im}(d_{q+1})}$$

Análogamente, el q -ésimo grupo de cohomología de un complejo de cocadenas (C^\bullet, d^\bullet) es

$$H^q(C) = \frac{\text{Ker}(d^q)}{\text{Im}(d^{q-1})}$$

Ahora definimos los *mapas de cadenas*, que son mapas entre complejos de cadenas. La definición para complejos de cocadenas es análoga.

Definición A.74. Dados complejos de cadenas (B_\bullet, d_\bullet^B) y (C_\bullet, d_\bullet^C) , un mapa de cadenas de B a C es una sucesión de mapas $\{\alpha_q : B_q \rightarrow C_q\}$ tales que $d_q^C \circ \alpha_q = \alpha_{q-1} \circ d_q^B$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & B_{q+1} & \xrightarrow{d^B} & B_q & \xrightarrow{d^B} & B_{q-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_{q+1} & & \downarrow \alpha_q & & \downarrow \alpha_{q-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{d^C} & C_q & \xrightarrow{d^C} & C_{q-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Los mapas de cadenas (cocadenas) inducen mapas en homología (cohomología), ya que la condición de ser un mapa de cadenas implica que $\alpha_q : B_q \rightarrow C_q$ manda $\text{Ker}(d_q^B)$ en $\text{Ker}(d_q^C)$, y además pasa al cociente.

Proposición A.75. *Dados complejos de cadenas B, C y un mapa de cadenas $\alpha : B \rightarrow C$, para cada q se tiene un homomorfismo $\alpha_{q*} : H_q(B) \rightarrow H_q(C)$ dado por $\alpha_{q*}[b] = [\alpha_q(b)]$.*

Algo que usaremos repetidas veces será la sucesión exacta larga en cohomología inducida por una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Primero tenemos que definir esto último.

La definición para complejos de cadenas es análoga.

Definición A.76. Una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas consiste en:

- Complejos de cocadenas A, B, C .
- Mapas de cocadenas $\alpha : A \rightarrow B, \beta : B \rightarrow C$

tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{\alpha^q} B^q \xrightarrow{\beta^q} C^q \longrightarrow 0$$

es exacta para cada q .

Proposición A.77. Dada una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga de la forma

No vamos a dar una prueba de la proposición, que se puede encontrar en (), pero sí vamos a ver cómo es $\delta^q : H^q(C) \rightarrow H^{q+1}(A)$ (ver que está bien definida es parte de la prueba, esto tampoco lo haremos) Se puede encontrar la prueba completa en el capítulo 2 de [Hat]. Dada $[c]$ en $H^q(C)$, tomamos un representante $c \in C^q$. Como $\beta^q : B^q \rightarrow C^q$ es sobreyectiva, existe $b \in B^q$ tal que $\beta(b) = c$. Ahora, veremos que existe un cociclo $a \in A^{q+1}$ tal que $\alpha^{q+1}(a) = d^q(b)$, y luego definiremos $\delta^q[c] = [a]$. Como β es un mapa de cocadenas, tenemos que $\beta^{q+1} \circ d^q(b) = d^q \circ \beta^q(b) = d^q(c) = 0$. Luego, $d^q(b) \in \text{Ker}(\beta^{q+1}) = \text{Im}(\alpha^{q+1})$, y por lo tanto existe $a \in A^{q+1}$ tal que $\alpha^{q+1}(a) = d^q(b)$. Para ver que a es un cociclo, se hace un argumento análogo.

References

- [Bow] Rufus Bowen. Some systems with unique equilibrium states. *Mathematical systems theory*, 8(3):193–202, 1974.
- [Bre] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.
- [BT] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [dC] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.

- [Fra1] John Franks. Anosov diffeomorphisms on tori. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:117–124, 1969.
- [Fra2] John Franks. Anosov diffeomorphisms. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 61–93, Providence, R.I., 1970.
- [God] Claude Godbillon. *Eléments de Topologie Algébrique*. Hermann, 1971.
- [GP] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice Hall, 1974.
- [GRH] Andrey Gogolev and Federico Rodriguez Hertz. Manifolds with higher homotopy which do not support Anosov diffeomorphisms. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 46:349–366, 2014.
- [GT] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Calcul différentiel*. Ellipses, 1998.
- [Hat] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [KH] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [Lee] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2002.
- [Man] Anthony Manning. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. *American Journal of Mathematics*, 96:422–429, 1974.
- [Mn] Ricardo Mañé. *Introdução à teoria ergódica*. IMPA, 1983.
- [MS] John Milnor and James Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [New] Sheldon E. Newhouse. On codimension one Anosov diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92:761–770, 1970.
- [RS] David Ruelle and Dennis Sullivan. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology*, 14:319–327, 1975.
- [Shi] Kenichi Shiraiwa. Manifolds which do not admit Anosov diffeomorphisms. *Nagoya Mathematical Journal*, 49:111–115, 1973.
- [Sma] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73:747–817, 1967.
- [Ste] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.