Práctico 3

La siguiente lista de ejercicios pretende servir para testear y consolidar los conocimientos adquiridos en el curso. Es un práctico globalizador con lo cual trata temas de todo el curso. Como referencia, se puede consultar el Libro "Fundamentos de Teoria Ergódica" de M. Viana y K. Oliveira el libro de Mañé "Teoria Ergódica".

1. Mostrar que si una medida σ-invariante μ en $B(X) = X^{\mathbb{Z}}$ cumple que $\mu(C_i(A) \cap C_{i+j}(B)) = \mu(C_i(A))\mu(C_{i+j}(B))$ para todos $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 1$ y $A, B \subset X$ medibles, entonces μ es una medida producto (i.e. de Bernoulli).

2. Mostrar que si existe $k_0 \geq 2$ y una medida μ en $B(X) = X^{\mathbb{Z}}$ cumple que $\mu(C_i(A) \cap C_{i+j}(B)) = \mu(C_i(A))\mu(C_{i+j}(B))$ para todo $j \geq k_0$ y $A, B \subset X$ medibles, entonces μ es una medida de Markov. (Ver el ejercicio I.12.4 del libro de Mañé).

3. Demostrar el Teorema de Perron-Frobenius: Si A es una matriz $d \times d$ con coeficientes estrictamente positivos entonces tiene un valor propio dominante (positivo y de módulo estrictamente mayor que el resto de los valores propios). Además, su vector propio tiene todas sus entradas positivas. (Sugerencia: Pensar en el espacio proyectivo.)

4. Dar ejemplos de matrices estocásticas irreducibles pero no aperiódicas, o equivalentemente, shifts de Markov ergódicos pero no mixing.

5. (**Transformación de Gauss**) Consideramos la siguiente transformación $G : (0, 1] \to (0, 1]$ dada por la fórmula:
$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$
donde $[a]$ denota la parte entera del número $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Sea μ la medidda en $(0, 1]$ dada por
$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{dx}{1 + x}$$
   a) Mostrar que μ es una probabilidad invariante.
   b) Mostrar que μ es ergódica (de hecho es *exacta*[1]). Intentar mostrar propiedades ergódicas mayores que la ergodicidad, por ejemplo mixing.
   c) Mostrar que $h_\mu(G) = \int_{(0,1]} \log |G'(x)| d\mu(x)$.

6. (**Fracciones continuas**) Dado $x \in (0, 1]$ definimos $a_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ como $\left[\frac{1}{x}\right]$ y $x_1 = \frac{1}{x} - a_1 = G(x)$ (con G la transformación de Gauss). Inductivamente, mientras $x_{n-1} \neq 0$, definimos $a_n = \left[\frac{1}{x_{n-1}}\right]$ y $x_n = G(x_{n-1})$. Si $x_n = 0$ para algún n denotamos $x = [0, a_1, \ldots, a_n]$ la *fracción continua* de x. Si $x_n \neq 0$ para todo n denotamos $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ a la fracción continua.

[1]Propiedad más fuerte que ser Kolmogorov.

a) Mostrar que

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n + x_n}}}}$$

b) Supongamos que $x_n \neq 0$ para todo n. Sea

$$z_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

mostrar que $z_n \to x$. Mostrar que si $\frac{p}{q}$ es un racional cuyo denominador es menor o igual que el de z_n entonces $|x - z_n| \leq |x - \frac{p}{q}|$ (i.e. es la mejor aproximación de x).

c) Mostrar que la transformación de Gauss es un shift en la fracción continua.

d) Calcular el promedio de los a_i para un punto geérico de $(0, 1]$ con respecto a Lebesgue.

7. Mostrar que si $T : X \to X$ es una transformación medible que no es invertible entonces existen conjuntos medibles A, B de medida positiva tal que $T(A) = T(B)$. (Por las dudas, aclaramos que X tiene que ser un espacio de Lebesgue; y si ayuda, X es un espacio mtrico separable con la sigma algebra de Borel.)

8. Mostrar que si $(T, \mathfrak{A}, \mu)$ es un K-sistema con respecto a una sigma-álgebra $\mathfrak{A}_0$ entonces $L^2(X, \mathfrak{A}_0, \mu)$ es de dimensión infinita. Concluir que todos los K-sistemas son espectralmente equivalentes.

9. Mostar que si (T, μ) es invertible y un K-sistema, entonces T^{-1} también lo es.

10. Sea X un espacio métrico y sea μ una medida invariante por el shift bilateral $\sigma : B(X) \to B(X)$. Mostrar que si μ cumple que para todo cilindro C y $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si C' es un conjunto medible generado por cilindros de la forma $C_j(A_0, \dots A_k)$ con $j \geq N$ se cumple que σ es un K-sistema.

11. a) Sea μ una medida T-invariante y $\mathcal{P}$ una partición finita tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno $\mathcal{U}$ de μ en el espacio de probabilidades invariantes tal que si $\nu \in \mathcal{U}$ entonces $h_\nu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$.

    b) Sea $T : X \to X$ una transformación continua y *expansiva* del espacio métrico X (i.e. existe $\delta > 0$ tal que si $x \neq y$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ (o $n \in \mathbb{N}$ si T no es invertible) tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$). Mostrar que la función $\mu \mapsto h_\mu(T)$ es *semicontinua superiormente* (i.e. si $\mu_n \to \mu$ entonces $\limsup h_{\mu_n}(T) \leq h_\mu(T)$).

    c) Mostrar que T tiene una probabilidad invariante con entropía igual a $h_{top}(T)$.

12. Mostrar que si $T : X \to X$ es una transformación continua y expansiva y X contiene un arco no trivial entonces $h_{top}(T) > 0$. Dar un ejemplo de una transformación expansiva con entropía topológica nula.

13. Mostrar que un mapa continuo de grado $d > 1$ en el círculo tiene entropía topológica mayor o igual a $\log d$.

14. Mostrar sin usar el principio variacional que una transformación continua en un espacio métrico compacto donde el conjunto no-errante es finito tiene entropía topológica nula.

15. Probar que $P_{top}(T^k, S_k\varphi) = kP_{top}(T, \varphi)$ y que si T es un homeomorfismo entonces $P_{top}(T^{-1}, \varphi) = P_{top}(T, \varphi)$.