

Práctico 2

La siguiente lista de ejercicios pretende servir para testear y consolidar los conocimientos adquiridos en el curso. Trata sobre el concepto de Entropía. Como referencia, se puede consultar el Libro “Fundamentos de Teoría Ergódica” de M. Viana y K. Oliveira (capítulos 9 y 10); o el capítulos IV del libro de Mañé “Teoría Ergódica”.

1. Definimos, para dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} la entropía condicional¹ de \mathcal{P} respecto de \mathcal{Q} como:

$$H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(P)}$$

Probar que si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ son particiones finitas:

- a) $H_\mu((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})|\mathcal{R}) = H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) + H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$.
- b) Si $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ entonces $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R})$ y $H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P}) \geq H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q})$.
- c) $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ si y solo si $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0$.

2. Probar que si $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ entonces $h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T, \mathcal{Q})$.
3. Sea $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P})$, mostrar que $h_\mu(T, \mathcal{P}) = h_\mu(T, \mathcal{P}^n)$. Si T es invertible, sea $\mathcal{P}^{\pm n} = \bigvee_{i=-n}^n T^{-i}(\mathcal{P})$, entonces $h_\mu(T, \mathcal{P}) = h_\mu(T, \mathcal{P}^{\pm n})$.
4. Recordar que si \mathcal{P} es una partición, entonces $\mathcal{P}(x)$ es el átomo que contiene a x . Demostrar que si T es weak mixing entonces $\mu(\mathcal{P}^n(x)) \rightarrow 0$ con n .
5. Mostrar que $h_\mu(T^k, \mathcal{P}) = kh_\mu(T, \mathcal{P})$ para $k \geq 0$. Mostrar que si T es invertible entonces $h_\mu(T^{-1}, \mathcal{P}) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.
6. Sean (T, X, μ) y (S, Y, ν) transformaciones medibles, mostrar que $h_{\mu \times \nu}(T \times S) = h_\mu(T) + h_\nu(S)$.
7. Mostrar que si (T, X, μ) es una *extensión* de (S, Y, ν) (i.e. existe $H : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ medible con $H_*\mu = \nu$ tal que $H \circ T = S \circ H$, o S es un *factor* de T) entonces $h_\mu(T) \geq h_\nu(S)$.
8. Suponga que μ_1, μ_2 son medidas ergódicas y $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ con $t \in (0, 1)$ entonces $h_\mu(T) = th_{\mu_1}(T) + (1-t)h_{\mu_2}(T)$.
9. Dar un ejemplo de transformación continua T tal que existen sucesiones de medidas ergódicas μ_n que convergen débilmente a μ (también ergódica) de forma que $h_{\mu_n}(T) = 0$ pero $h_\mu(T) > 0$.
10. Pensar un ejemplo de transformación que tenga entropía infinita. (Sugerencia: Restringirse a $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que preserve Lebesgue. Considerar la partición en intervalos sugerida en el Ejemplo 9.1.4 del Libro de Viana-Oliveira de partición en numerables intervalos que tiene entropía infinita y considerar la transformación que manda de forma afín cada uno de esos intervalos en todo $[0, 1]$. Mostrar que preserva Lebesgue, es ergódica y que la entropía tiene que ser infinita. Construir un ejemplo invertible a partir de este.)

¹Notar que $H_\mu(\mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})$ donde \mathcal{P} es la partición trivial.

11. Sea X un espacio métrico con la σ -álgebra de borel y sea $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \dots \prec \mathcal{P}_n \prec \dots$ una sucesión de particiones finitas tal que para μ -ctp $x \in X$ se cumple que $\text{diam}\mathcal{P}_n(x) \rightarrow 0$. Mostrar que $h_\mu(T) = \lim h_\mu(T, \mathcal{P}_n)$.
12. Una partición \mathcal{P} es *generadora* si \mathcal{P}^n genera los conjuntos medibles (mod 0). Mostrar que $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$. Si T es invertible, decimos que \mathcal{P} es *generadora* si $\mathcal{P}^{\pm n}$ genera los medibles (mod 0), mostrar que en este caso $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.
13. Una transformación continua $T : X \rightarrow X$ se dice *expansiva* si existe $\alpha > 0$ tal que dados $x \neq y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \alpha$ (en el caso que T no fuese invertible, se pide $n \geq 0$). Mostrar que si \mathcal{P} es una partición finita cuyos átomos tienen diámetro menor que α entonces \mathcal{P} es generadora.
14. Mostrar que si $T : X \rightarrow X$ es invertible y \mathcal{P} es una partición tal que $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}(\mathcal{P})$ genera los conjuntos medibles (mod 0) entonces $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P}) = 0$.
15. Mostrar que si $T : X \rightarrow X$ preserva μ y es ergódica, entonces la cantidad de preimágenes de un punto está bien definida y es constante μ -ctp. Mostrar que si es mayor que 1 entonces la entropía es positiva.