Práctico 4

De este práctico hay que entregar 4 ejercicios.

1. Mostrar que la función $x \mapsto -\log(x)$ es la única función continua ψ (a menos de multiplicación por constante positiva) de $(0,1] \to [0,\infty)$ tal que vale 0 en 1, es monótona decreciente y cumple que $\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$.

2. Definimos, para dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ la entropía condicional[1] de $\mathcal{P}$ respecto de $\mathcal{Q}$ como:

$$H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) = -\sum_{P\in\mathcal{P}}\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \mu(P\cap Q)\log\frac{\mu(P\cap Q)}{\mu(P)}$$

   Probar que si $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}$ son particiones finitas:

   a) $H_\mu((\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})|\mathcal{R}) = H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) + H_\mu(\mathcal{Q}|(\mathcal{P}\vee\mathcal{R}))$.

   b) Si $\mathcal{P}\prec\mathcal{Q}$ entonces $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{R})$ y $H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P}) \geq H_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q})$.

   c) $\mathcal{P}\prec\mathcal{Q}$ si y solo si $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0$.

3. Probar que si $\mathcal{P}\prec\mathcal{Q}$ entonces $h_\mu(T,\mathcal{P}) \leq h_\mu(T,\mathcal{Q})$.

4. Sea $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P})$, mostrar que $h_\mu(T,\mathcal{P}) = h_\mu(T,\mathcal{P}^n)$. Si T es invertible, sea $\mathcal{P}^{\pm n} = \bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathcal{P})$, entonces $h_\mu(T,\mathcal{P}) = h_\mu(T,\mathcal{P}^{\pm n})$.

5. Recordar que si $\mathcal{P}$ es una partición, entonces $\mathcal{P}(x)$ es el átomo que contiene a x. Demostrar que si T es weak mixing entonces $\mu(\mathcal{P}^n(x)) \to 0$ con n.

6. Mostrar que $h_\mu(T^k,\mathcal{P}) = kh_\mu(T,\mathcal{P})$ para $k \geq 0$. Mostrar que si T es invertible entonces $h_\mu(T^{-1},\mathcal{P}) = h_\mu(T,\mathcal{P})$.

7. Sean (T,X,μ) y (S,Y,ν) transformaciones medibles, mostrar que $h_{\mu\times\nu}(T\times S) = h_\mu(T) + h_\nu(S)$.

8. Mostrar que si (T,X,μ) es una *extensión* de (S,Y,ν) (i.e. existe $H : (X,\mu) \to (Y,\nu)$ medible con $H_*\mu = \nu$ tal que $H\circ T = S\circ H$, o S es un *factor* de T) entonces $h_\mu(T) \geq h_\nu(S)$.

9. Suponga que μ_1,μ_2 son medidas ergódicas y $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ con $t\in(0,1)$ entonces $h_\mu(T) = th_{\mu_1}(T) + (1-t)h_{\mu_2}(T)$.

10. Dar un ejemplo de transformación continua T tal que existen sucesiones de medidas ergódicas μ_n que convergen débilmente a μ (también ergódiica) de forma que $h_{\mu_n}(T) = 0$ pero $h_\mu(T) > 0$.

[1] Notar que $H_\mu(\mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})$ donde $\mathcal{P}$ es la partición trivial.

11. Pensar un ejemplo de transformación que tenga entropía infinita. (Sugerencia: Restringirse a $T : [0, 1] \to [0, 1]$ que preserve Lebesgue. Considerar la partición en intervalos sugerida en el Ejemplo 9.1.4 del Libro de Viana-Oliveira de partición en numerables intervalos que tiene entropía infinita y considerar la transformación que manda de forma afín cada uno de esos intervalos en todo $[0, 1]$. Mostrar que preserva Lebesgue, es ergódica y que la entropía tiene que ser infinita. Construir un ejemplo invertible a partir de este.)

12. Sea X un espacio métrico con la σ-álgebra de borel y sea $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_n \prec \ldots$ una sucesión de particiones finitas tal que para μ-ctp $x \in X$ se cumple que $\operatorname{diam}\mathcal{P}_n(x) \to 0$. Mostrar que $h_\mu(T) = \lim h_\mu(T, \mathcal{P}_n)$.

13. Una partición $\mathcal{P}$ es *generadora* si $\mathcal{P}^n$ genera los conjuntos medibles (mod 0). Mostrar que $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$. Si T es invertible, decimos que $\mathcal{P}$ es *generadora* si $\mathcal{P}^{\pm n}$ genera los medibles (mod 0), mostrar que en este caso $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

14. Una transformación continua $T : X \to X$ se dice *expansiva* si existe $\alpha > 0$ tal que dados $x \neq y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \alpha$ (en el caso que T no fuese invertible, se pide $n \geq 0$). Mostrar que si $\mathcal{P}$ es una partición finita cuyos átomos tienen diametro menor que α entonces $\mathcal{P}$ es generadora.

15. Mostrar que si $T : X \to X$ es invertible y $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\bigvee_{i=0}^{\infty} T^{-i}(\mathcal{P})$ genera los conjuntos medibles (mod 0) entonces $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P}) = 0$.

16. Mostrar que si $T : X \to X$ es una transformación medible que no es invertible entonces existen conjuntos medibles A, B de medida positiva tal que $T(A) = T(B)$. (Por las dudas, aclaramos que X tiene que ser un espacio de Lebesgue; y si ayuda, X es un espacio mtrico separable con la sigma algebra de Borel.)

17. Mostrar que si $T : X \to X$ preserva μ y es ergódica, entonces la cantidad de preimágenes de un punto está bien definida y es constante μ-ctp. Mostrar que si es mayor que 1 entonces la entropía es positiva.

18. Mostrar que si $(T, \mathfrak{A}, \mu)$ es un K-sistema con respecto a una sigma-álgebra $\mathfrak{A}_0$ entonces $L^2(X, \mathfrak{A}_0, \mu)$ es de dimensión infinita. Concluir que todos los K-sistemas son espectralmente equivalentes.

19. Mostar que si (T, μ) es invertible y un K-sistema, entonces T^{-1} también lo es.

20. Sea $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ una transformación preservando medida. Considerar $\mathcal{S} = \{A : h_\mu(T, \{A, A^c\}) = 0\}$.

    a) Mostrar que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra[2].

    b) Mostrar que si $\mathcal{S}$ es la σ-álgebra trivial (mod 0) entonces T es mixing [3].

21. Sea X un espacio métrico y sea μ una medida invariante por el shift bilateral $\sigma : B(X) \to B(X)$. Mostrar que si μ cumple que para todo cilindro C y $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si C' es un conjunto medible generado por cilindros de la forma $C_j(A_0, \ldots A_k)$ con $j \geq N$ se cumple que σ es un K-sistema.

22. $(*)$ Mostrar que si una transformación $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ tiene entropía positiva, entonces su operador asociado U_T en $L^2(X, \mu)$ contiene espectro de Lebesgue de rango numerable (y posiblemente otras medidas espectrales, claramente).

[2]Llamada álgebra de Pinsker.

[3]De hecho, vale que T es un K-sistema.

23. *a*) Sea μ una medida T-invariante y $\mathcal{P}$ una partición finita tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno $\mathcal{U}$ de μ en el espacio de probabilidades invariantes tal que si $\nu \in \mathcal{U}$ entonces $h_\nu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$.

    b) Sea $T : X \to X$ una transformación continua y *expansiva* del espacio métrico X (i.e. existe $\delta > 0$ tal que si $x \neq y$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ (o $n \in \mathbb{N}$ si T no es invertible) tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$). Mostrar que la función $\mu \mapsto h_\mu(T)$ es *semicontinua superiormente* (i.e. si $\mu_n \to \mu$ entonces $\limsup h_{\mu_n}(T) \leq h_\mu(T)$).

    c) Mostrar que T tiene una probabilidad invariante con entropía igual a $h_{top}(T)$.

24. Mostrar que si $T : X \to X$ es una transformación continua y expansiva y X contiene un arco no trivial entonces $h_{top}(T) > 0$. Dar un ejemplo de una transformación expansiva con entropía topológica nula.

25. Mostrar que un mapa continuo de grado $d > 1$ en el círculo tiene entropía topológica mayor o igual a $\log d$.

26. Mostrar sin usar el principio variacional que una transformación continua en un espacio métrico compacto donde el conjunto no-errante es finito tiene entropía topológica nula.