Práctico 3

Se espera que los estudiantes trabajen todos los ejercicios del práctico. Para la aprobación del curso se deberán entregar 3 ejercicios de este práctico a elección que muestren diversidad temática.

1. Mostrar que si $T : X \to X$ que preserva μ es ergódica, entonces toda función propia de U_T (i.e. $\varphi \in L^2(X,\mu)$ tal que $\varphi \circ T = \lambda\varphi$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$) es de módulo constante. Mostrar que todos los valores propios son *simples* (i.e. su espacio propio es de dimensión 1).

2. Sea $T : X \to X$ que preserva μ. Mostrar que si $T \times T$ es ergódica respecto a $\mu \times \mu$ si y solamente si T es *weak mixing*[1]. Dar un ejemplo de T ergódica tal que $T \times T$ no lo sea.

3. Sean $T : X \to X$ que preserva μ y $S : Y \to Y$ que preserva ν. Mostrar que si $T \times T$ es ergódica respecto a $\mu \times \mu$, entonces, para toda S ergódica se cumple que $T \times S$ es ergódica respecto a $\mu \times \nu$.

4. ¿Qué se puede decir del espectro de un producto? ¿de un factor[2]?

5. $(*)$ Mostrar que (T, X, μ) es weak mixing si y solamente si el operador asociado en $L^2_0(X,\mu)$ no tiene valores propios. Deducir que los iterados de una transformación weak mixing son weak mixing. (Sugerencia: Para hacer este problema se puede utilizar la caracterización de los sistemas con espectro puramente puntual y las conclusiones del ejercicio anterior.)

6. Mostrar que si a_n es una sucesión entonces son equivalentes:
   - $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |a_n - a| = 0$,
   - $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (a_n - a)^2 = 0$,
   - Existe una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ de forma tal que $\limsup_k \frac{k}{n_k} = 1$ y tal que $a_{n_k} \to a$.

   Sacar una conclusión acerca de los sistemas weak-mixing.

7. Construir un sistema ergódico con espectro mixto (con valores propios y alguna parte absolutamente continua).

8. Dar un ejemplo de un sistema con espectro singular pero sin valores propios. (Sugerencia: Buscar el ejemplo de Chacon, e.g. ejemplo 8.2.3 en el libro de Olivera-Viana.)

9. (**Joinings**) Dados dos sistemas (T, X, μ) y (S, Y, ν) decimos que una medida η es un *joining* entre T y S si η es una medida en $X \times Y$ invariante por $T \times S$ y tal que η proyecta en μ y ν respectivamente por las proyecciones canónicas. Decimos que (T, X, μ) y (S, Y, ν) son *disjuntas* si el único joining entre ellas es el *trivial* (es decir, la medida $\mu \times \nu$).

[1] En este práctico la definición que utilizaremos de weak mixing es que para todo A, B medibles se cumpla que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\mu(T^{-j}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$. Salvo para el ejercicio 5 se puede usar la equivalencia dada en ese ejercicio.

[2] Recordar que (T, X, μ) es *factor* de (S, Y, ν) si existe $\pi : Y \to X$ sobreyectiva, medible, con $\pi_*\nu = \mu$ tal que $\pi \circ S = T \circ \pi$. Similarmente, se dice que S es una *extensión* de T.

a) Mostrar que (T, X, μ) es disjunta de si misma si y solamente si $\mu = \delta$.

b) Mostrar que si $T \times S$ no es ergódica entonces las componentes ergódicas de $\mu \times \nu$ proyectan en μ y ν respectivamente. En particular, T y S no son disjuntas.

c) $(*)$ Si T es de espectro puramente puntual y S es weak mixing, entonces T y S son disjuntas.