Práctico 2

Se espera que los estudiantes trabajen todos los ejercicios del práctico. Para la aprobación del curso se deberán entregar 5 ejercicios de este práctico a elección que muestren diversidad temática.

1. Construir una medida shift invariante que sea equivalente a una rotación irracional de ángulo α. Lo mismo para un odómetro.

2. $(*)$ Construir medidas como en el ejercicio anterior de forma que el soporte admita otras medidas invariantes (resp. sea únicamente ergódico). Construir una de soporte total[1].

3. (**Khintchine**) Sea $T : X \to X$ que preserva μ de probabilidad. Sea $A \subset X$ medible y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe n_0 de forma tal que para todo $j > 0$ existe $0 \leq i \leq n_0$ de forma tal que $\mu(T^{j+i}(A) \cap A) \geq \mu(A)^2 - \varepsilon$. ¿Qué pasa si no se da el ε de 'changüí'?

4. Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva μ de probabilidad y $A \subset X$. Consideramos $r : A \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ definida como $r(x) = \text{mín}\{i \geq 1 \ : T^i(x) \in A\}$. Sea $\hat{T} : A \to A$ definida como $\hat{T}(x) = T^{r(x)}(x)$, mostrar que la medida $\hat{\mu}$ definida como $\hat{\mu}(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$ es $\hat{T}$-invariante. Mostrar que si T es ergódica entonces $\hat{T}$ también lo es. Dar un ejemplo mostrando que el recíproco no es cierto, pero si lo és asumiendo que A es una *sección de T* (es decir, A intersecta toda órbita de T). Mostrar que es posible que T sea eródica y no mixing, pero que $\hat{T}$ sea mixing.

5. Construir un homeomorfismo de un espacio métrico compacto únicamente ergódico que no es minimal (i.e. no tiene cerrados invariantes propios). Mostrar que si la única medida invariante tiene soporte total, entonces el homeomorfismo es minimal.

6. Mostrar que la transformación $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (x + \alpha, x + y)$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es únicamente ergódica.

7. (**Teorema de Weyl**) Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un poinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d$ donde $a_d \neq 0$, $d \geq 1$ y algún a_i es irracional. El objetivo de este ejercicio es mostrar que la sucesión $\{z_n\}_n \subset S^1$ dada por $z_n = P(n) (\text{mod } 1)$ es *equidistribuida*, es decir, para toda $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ continua se cumple que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(z_j) = \int \varphi(x) dx.$$

   a) Mostrar que la transformación $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ dada por $f(t_1, \ldots, t_d) = (t_1 + \alpha, t_2 + t_1, t_3 + t_2, \ldots, t_d + t_{d-1})$ con α irracional es únicamente ergódica preservando Lebesgue. (Sugerencia: Basarse en el ejercicio anterior.)

   b) Considerese los polinomios $p_d(x) = P(x)$ y recursivamente $p_{j-1}(x) = p_j(x+1) - p_j(x)$ para $j = 2, \ldots, d$. Mostrar que los polinomios p_j tienen grado j.

[1] Imagino que se puede, pero no lo aseguro :).

c) Probar que $p_1(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha = d! a_d$.

d) Mostrar que si consideramos f como encima para ese valor de α entonces

$$f^n(p_1(0), p_2(0), \dots, p_d(0)) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_d(n)).$$

e) Concluir la equidistribución asumiendo que a_d es irracional.

f) Mostrar que si a_d es racional, entonces se puede escribir $z_n = x_n + y_n$ con $x_n = a_d n^d$ y $y_n = Q(n) (\text{mod } 1)$ con $Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots, a_{d-1} x^{d-1}$.

g) Concluir la equidistribución en general asumiendo algún a_j irracional.

h) Mostrar que $\sqrt{n}(\text{mod } 1)$ es equidistribuida en S^1. ¿Qué ocurre con $\log n (\text{mod } 1)$?

8. Mostrar que si $T : X \to X$ preserva una probabilidad ergódica de soporte total, entonces T es transitivo (i.e. tiene una órbita densa). Dar un ejemplo de un homeomorfismo transitivo que no tiene medidas invariantes de soporte total.

9. (**Lema de Rohklin**) Sea $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ de forma que μ es ergódica y sin átomos. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ y $N > 0$ existe $B \subset X$ medible tal que $B, T(B), T^2(B), \dots, T^{N-1}(B)$ son dos a dos disjuntos y $\mu(B \cup T(B) \cup \ldots \cup T^{N-1}(B)) \geq 1 - \varepsilon$. Interpretar esto como que todo sistema ergódico es 'igual'a menos de un conjunto de medida ε (donde obviamente las 'cosas pasan').

10. $(*)$[2] Mostrar que los shift bilaterales de Bernoulli $B(1/2, 1/2)$ y $B(1/3, 1/3, 1/3)$ no son isomorfos. Mostrar que son espectralmente equivalentes.

11. Dar un ejemplo de una transformación mixing que no tiene espectro de Lebesgue. (Sugerencia: Buscar en algún libro los 'shifts Gaussianos'.)

12. $(*)$ Sea $f : S^1 \to S^1$ un mapa C^∞ de forma tal que $|f'(x)| > 1$ para todo $x \in S^1$. Mostrar que f preserva una única medida μ absolutamente continua con respecto a Lebesgue. ¿Qué tan regular tiene que ser la densidad?. Mostrar que f es mixing con respecto a μ.

13. Caracterizar las matrices $A \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ actuando en $\mathbb{T}^d$ que son ergódicas con respecto a la medida de Haar en términos de los valores propios de A. ¿Son todas mixing?. Dar ejemplos de matrices con esta propiedad que no tengan todos los valores propios de módulo diferente de 1. (Sugerencia: Estudiar el operador inducido en $L^2(\mathbb{T}^d, \text{Leb})$ y utilizar la descomposición de Fourier de las funciones.)

14. Mostrar que si una medida σ-invariante μ en $B(X) = X^{\mathbb{Z}}$ cumple que $\mu(C_i(A) \cap C_{i+j}(B)) = \mu(C_i(A))\mu(C_{i+j}(B))$ para todos $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 1$ y $A, B \subset X$ medibles, entonces μ es una medida producto (i.e. de Bernoulli).

15. Mostrar que si existe $k_0 \geq 2$ y una medida μ en $B(X) = X^{\mathbb{Z}}$ cumple que $\mu(C_i(A) \cap C_{i+j}(B)) = \mu(C_i(A))\mu(C_{i+j}(B))$ para todo $j \geq k_0$ y $A, B \subset X$ medibles, entonces μ es una medida de Markov. (Ver el ejercicio I.12.4 del libro de Mañé).

16. Demostrar el Teorema de Perron-Frobenius: Si A es una matriz $d \times d$ con coeficientes estrictamente positivos entonces tiene un valor propio dominante (positivo y de módulo estrictamente mayor que el resto de los valores propios). Además, su vector propio tiene todas sus entradas positivas. (Sugerencia: Pensar en el espacio proyectivo.)

[2] Este resultado será mucho más fácil al introducir la entropía, el ejercicio es mostrar esto sin usarla directamente.

17. Dar ejemplos de matrices estocásticas irreducibles pero no aperiódicas, o equivalentemente, shifts de Markov ergódicos pero no mixing.

18. (**Transformación de Gauss**) Consideramos la siguiente transformación $G : (0,1] \to (0,1]$ dada por la fórmula:
$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$
donde $[a]$ denota la parte entera del número $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Sea μ la medidda en $(0,1]$ dada por
$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{dx}{1+x}$$

    a) Mostrar que μ es una probabilidad invariante.

    b) Mostrar que μ es ergódica (de hecho es *exacta*[3]). Intentar mostrar propiedades ergódicas mayores que la ergodicidad, por ejemplo mixing.

    c) Mostrar que $h_\mu(G) = \int_{(0,1]} \log |G'(x)| d\mu(x)$.

19. (**Fracciones continuas**) Dado $x \in (0,1]$ definimos $a_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ como $\left[\frac{1}{x}\right]$ y $x_1 = \frac{1}{x} - a_1 = G(x)$ (con G la transformación de Gauss). Inductivamente, mientras $x_{n-1} \neq 0$, definimos $a_n = \left[\frac{1}{x_{n-1}}\right]$ y $x_n = G(x_{n-1})$. Si $x_n = 0$ para algún n denotamos $x = [0, a_1, \ldots, a_n]$ la *fracción continua* de x. Si $x_n \neq 0$ para todo n denotamos $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ a la fracción continua.

    a) Mostrar que
$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n + x_n}}}}$$

    b) Supongamos que $x_n \neq 0$ para todo n. Sea
$$z_n = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n}}}}$$
mostrar que $z_n \to x$. Mostrar que si $\frac{p}{q}$ es un racional cuyo denominador es menor o igual que el de z_n entonces $|x - z_n| \leq |x - \frac{p}{q}|$ (i.e. es la mejor aproximación de x).

    c) Mostrar que la transformación de Gauss es un shift en la fracción continua.

    d) Calcular el promedio de los a_i para un punto geérico de $(0,1]$ con respecto a Lebesgue.

20. Mostrar que si $T : X \to X$ es una transformación medible que no es invertible entonces existen conjuntos medibles A, B de medida positiva tal que $T(A) = T(B)$. (Por las dudas, aclaramos que X tiene que ser un espacio de Lebesgue; y si ayuda, X es un espacio mtrico separable con la sigma algebra de Borel.)

[3]Propiedad más fuerte que ser Kolmogorov.