Práctico 1

Se espera que los estudiantes trabajen todos los ejercicios del práctico. Para la aprobación del curso se deberán entregar 3 ejercicios de este práctico a elección que muestren diversidad temática.

1. *a*) Sea $f : U \to U$ un difeomorfismo de un abierto de $\mathbb{R}^d$. Mostrar que f preserva Lebesgue si y solamente si para todo $x \in U$ se cumple que $|\det(D_x f)| = 1$.

   b) Dada una variedad Riemanniana M, definir el concepto de determinante respecto a la forma de volumen inducida por la métrica de forma tal que la parte anterior se extienda a variedades.

   c) Encontrar un concepto similar para flujos involucrando la divergencia del campo que genera el flujo.

2. (**Teorema de Kač**) Sea $T : X \to X$ que preserva μ de probabilidad. Dado $E \subset X$ medible, definimos $\rho_E : E \to \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ tal que $\rho_E(x)$ es el minimo $n \geq 1$ tal que $T^n(x) \in E$. Sea $\hat{E}$ el conjunto de puntos de X tal que $\rho_E(x) = \infty$. Entonces:

$$\int_E \rho_E d\mu = 1 - \mu(\hat{E})$$

   en particular ρ_E es integrable en E.

3. Para $T : X \to X$ continua decimos que $x \in X$ es *no-errante* (y lo notamos $x \in \Omega(T)$) si para todo entorno U de x existe $n > 0$ tal que $T^n(U) \cap U$. Mostrar que si T preserva μ de probabilidad, entonces $\operatorname{sop}(\mu) = \{x \in X \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \mu(B_\varepsilon(x)) > 0\}$ está contenido en $\Omega(T)$.

4. Mostrar que si $T : [0,1] \to [0,1]$ es medible y preserva Lebesgue entonces casi todo punto $x \in [0,1]$ cumple que $\operatorname{liminf}_n (n|T^n(x) - x|) \leq 1$.

5. Mostrar que la medida de Haar en un grupo de Lie compacto existe y es única. Construir la medida de Haar para un odómetro y mostrar que es única.

6. Sea $T : X \to X$ transformación continua que preserva μ de probabilidad.

   a) Mostrar que si existe $\mathcal{D} \subset L^1(X, \mu)$ denso tal que para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ existe una constante c_φ tal que $\frac{1}{n} S_n \varphi \to c_\varphi$ entonces μ es ergódica. Recordar que $S_n\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i(x))$.

   b) Mostrar que existen funciones $T : X \to X$ continuas preservando μ (de soporte total si se puede) de forma que no son ergódicas y tal que toda función continua T-invariante es constante.

   c) Buscar una razón por la cual las dos partes anteriores están en el mismo ejercicio.

7. (**Pablo Lessa**) Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas tal que $f_n \to f$ en μ-ctp. Mostrar que si $T : X \to X$ preserva μ entonces para μ-casi todo $x \in X$ se cumple que existe el límite $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_n(T^i(x))$.

8. Probar el Teorema de Birkhoff para flujos. Si $\varphi_t : X \to X$ preserva μ (i.e. $(\varphi_t)_*\mu = \mu$ para todo t) y $\psi \in L^1(X, \mu)$ entonces la función

$$\tilde{\psi}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\varphi_t(x))dt.$$

está definida en μ-casi todo punto y se cumple que $\int \tilde{\psi} d\mu = \int \psi d\mu$.

9. Dada μ invariante para $T : X \to X$ denotamos

$$B(\mu) = \{x \in X \ : \ \frac{1}{n} S_n\varphi(x) \to \int \varphi d\mu \ , \ \forall \varphi \in C^0(X, \mathbb{R})\}$$

Mostrar que $B(\mu)$ es T-invariante y que μ es ergódica si y solo si $\mu(B(\mu)) = 1$.

10. Mostrar que Lebesgue casi todo punto $x \in [0, 1)$ verifica que si $0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ es su expansión decimal, entonces se cumple que $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \to \frac{9}{2}$.

11. Construir medidas invariantes ergódicas por $x \mapsto 3x$ (mod1) en S^1 que no sean Lebesgue, ni atómicas. ¿Es posible construir de forma que tengan soporte total?

12. *a*) Mostrar que si μ y ν son medidas ergódicas entonces son mutuamente singulares.

    b) Sea $T : X \to X$ continua que preserva una medida ergódica μ y sea η una medida (posiblemente no T-invariante) absolutamente continua respecto a μ. Mostrar que $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T^i)_*\eta$ converge a μ con la topología débil estrella.

13. Mostrar que si $\mu \times \mu$ es ergódica para $T \times T : X \times X \to X \times X$ entonces T^k es ergódica respecto a μ para todo $k \geq 1$. Mostrar que de hecho es weak-mixing. Dar ejemplo donde T^k es ergódica para todo $k \geq 1$ pero $T \times T$ no es ergódica respecto a $\mu \times \mu$.

14. Sea $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ una matriz invertible de coeficientes enteros con un valor propio λ de módulo 1 y ángulo racional. Mostrar que existe una función $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ no constante e invariante por la transformación inducida por A en $\mathbb{T}^d$.

15. Mostrar que si $T : X \to X$ es continua y preserva μ de forma que para una cierta función continua φ se tiene que $\int \varphi d\mu \geq 0$ entonces existe μ' ergódica tal que $\int \varphi d\mu' \geq 0$.

16. Mostrar que si $T : X \to X$ preserva μ y $\varphi \in L^1(X, \mu)$ entonces $\frac{1}{n}\varphi \circ T^n \to 0$ para μ-casi todo punto $x \in X$. (Sugerencia: Usar el Teorema de Birkhoff. Provocación: Intentar demostrarlo usando Borel-Cantelli en lugar del Teorema de Birkhoff para mostrar que el conjunto de puntos para los cuales $\varphi \circ T^n(x) \geq \varepsilon n$ para infinitos valores de n tiene medida cero.)

17. (**Sustituciones**) Sea $A = \{0, 1\}$ un alfabeto y consideramos dos palabras finitas s_0 y s_1 con letras en A. Inductivamente, podemos construir una palabra p_k comenzando con $p_0 = 0$ y construyendo p_k mediante la sustitución de cada 0 en p_{k-1} por s_0 y cada 1 en p_{k-1} por s_1. Asumimos que s_0 y s_1 cumplen tienen ambas letras (en particular, son de longitud mayor que 1; una propiedad un poco más general llama *sustitución primitiva o aperiódica*, ver Ejemplo 6.3.10 en el Libro de Viana y Oliveira). Para cada $\{a_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definimos $S(\{a_n\})$ como la sucesión obtenida cambiando cada a_n por s_{a_n}.

    a) Si s_0 comienza con 0 y tiene más de una letra. Probar que S tiene un único punto fijo que empieza con 0.

b) Sea X la clausura de la órbita de dicho punto fijo por el shift. Mostrar que es un conjunto invariante minimal.

c) Mostrar que para la sustitución $s_0 = 01$ y $s_1 = 10$ obtenemos un conjunto minimal y únicamente ergódico.

18. Sea $T : X \to X$ que preserva μ en un espacio métrico X. Mostrar que μ es mixing si y solo si para toda ν absolutamente continua respecto a μ se cumple que $(T^n)_*(\nu) \to \mu$ en la topología débil $*$.

19. Mostrar que las rotaciones irracionales son ergodicamente equivalentes si y solamente si son espectralmente equivalentes.

20. Intentar una clasificación espectral y/o ergódica de las translaciones en toros de dimensión mayor.

21. Sea $T : X \to X$ transformación invertible que preserva μ (que no tiene átomos). Mostrar que para todo $\lambda \in S^1$ existe sucesión $\varphi_n \in L^2(\mu)$ tal que $\|U_T(\varphi_n) - \lambda\varphi_n\|_2 \to 0$. Deducir que el espectro de U_T coincide con el círculo unitario.

22. Mostrar que se puede definir una noción de *cantidad de preimagenes* para transformaciones medibles y demostrar que es un invariante por equivalencia ergódica. Concluir que el shift bilateral no es ergodicamente equivalente al shift unilateral.