RIGIDEZ DE VALORES PROPIOS EN REPRESENTACIONES DE HITCHIN

S superficie cerrada.

$\rho : \pi_1(S) \to PSL(2,\mathbb{R})$ morfismo fiel y discreto corresponde a dar métrica hiperbólica a S. Se llaman representaciones Fuchsianas.

La componente conexa de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), PSL(2,\mathbb{R}))/_{PSL(2,\mathbb{R})}$ correspondiente es homeomorfa a una bola de dimensión $6g-6 = |\chi(S)| \dim(PSL(2,\mathbb{R}))$.

Hitchin estudio representaciones de $\pi_1(S)$ en $PSL(d,\mathbb{R})$ (y otros grupos de Lie) e identifico componentes conexas particulares que contienen "naturalmente" a las Fuchsianas.

Factoriza como: $\pi_1(S) \xrightarrow{\text{Fuchsiana}} PSL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{Veronese}} PSL(d,\mathbb{R})$: se llaman tb Fuchsianas

(Veronese: $a_1 x^{d-1} + a_2 x^{d-2} y + \ldots + a_{d-1} x y^{d-2} + a_d y^{d-1}$ y actúo pensando $x = \binom{1}{0}$, $y = \binom{0}{1}$ ...)

Teorema (Hitchin) La componente conexa de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), PSL(d,\mathbb{R}))/_{PSL(d,\mathbb{R})}$ que contiene a las Fuchsianas es homeomorfa a una bola de dimensión $|\chi(S)| \cdot \dim(PSL(d,\mathbb{R}))$

Pregunta: ¿Interpretación geométrica?

$d=3$ (Choi-Goldman) Estructuras proyectivas de S.

$d>3$ (Labourie) Si ρ es de Hitchin $\Rightarrow$ actua propia y discontinuamente en el espacio simétrico X de $PSL(d,\mathbb{R})$ y existe una superficie mínima en el cociente (no se sabe si única)

(Guichard-Wienhard) ρ de Hitchin determina estructuras geométricas en un sentido abstracto (generalizan eso a Representaciones de Anosov)

Sea X el espacio simétrico de $PSL(d,\mathbb{R})$ (i.e. $X = PSL(d,\mathbb{R})/SO(d,\mathbb{R})$) y d_X una distancia $PSL(d,\mathbb{R})$-invariante normalizada para que el encaje de $PSL(2,\mathbb{R})$ de curvatura constante $=-1$. El <u>exponente crítico</u> de ρ se define como:

$$h_X^{\rho} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \#\{\gamma : d_X(\rho\gamma\cdot o, o) \leq T\}.$$

Relacionado con el área de la superficie mínima. Labourie conjeturó que $h_X^{\rho} \leq 1$ y la igualdad se da sólo en las Fuchsianas.

<u>Teorema</u> (con Sambarino) $\forall \rho$ repr. de Hitchin se cumple que $h_X^{\rho} \leq 1$ y la igualdad se da solamente cuando ρ es Fuchsiana.

§ <u>VALORES PROPIOS</u> Sea $\rho : \pi_1(S) \to PSL(d,\mathbb{R})$ de Hitchin.

Para $\gamma \in \pi_1(S)$ denotamos $\lambda(\rho\gamma) = (\lambda_1(\rho\gamma), \ldots, \lambda_d(\rho\gamma))$

Donde $\lambda_i(\rho\gamma)$ es el log del módulo del i-ésimo valor propio.

Labourie mostró que $\operatorname{Im}\lambda \subseteq \overset{\mathfrak{a}^+}{\overbrace{\{(a_1,\ldots,a_d) \in \mathbb{R}^d : \underbrace{a_1+\cdots+a_d=0}_{\det=1} \text{ y } a_1>a_2>\cdots>a_d\}}}$

Sea $\mathcal{L}_\rho$ = clausura (cono generado por $\lambda(\rho\gamma) : \gamma\in\pi_1(S)$) cono límite

Si φ es una forma lineal positiva en $\mathcal{L}_\rho$ se define su <u>ENTROPÍA</u>

$$h_\rho^{\varphi} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \#\{[\gamma] \in [\pi_1 S] : \varphi(\lambda(\rho\gamma)) \leq T\}$$

<u>Obs</u>: Si φ no es positiva en $\mathcal{L}_\rho \Rightarrow$ da infinito

Consideramos $\mathcal{D}_\rho = \{\varphi : h_\rho^{\varphi} \in (0,1]\}$

Teorema (Quint/Sambarino) $h_X(\rho)$ está relacionado con la distancia de 0 a $\mathcal{D}_\rho$.

Nos interesa entonces entender la geometría de $\mathcal{D}_\rho$.

Teorema (Sambita) $\mathcal{D}_\rho$ es convexo. El borde $\partial\mathcal{D}_\rho$ es una subvariedad analítica de codimensión 1 y si no es estrictamente convexa hay una especie de "rigidez"

Idea: La clave es relacionar con el formalismo termodinámico de flujos de Anosov.

Sea $\phi = \{\phi_t : M \to M\}$ flujo (métricamente) Anosov y $\eta : M \to \mathbb{R}_{>0}$ función Hölder $\Rightarrow$

$$P(\phi, \eta) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^\phi} \left\{ h(\phi, \mu) + \int \eta \, d\mu \right\}$$

Lema: $P(\phi, -s\eta) = 0 \iff s = h_{top}(\phi^\eta)$ con ϕ^η es reparametrizar por η.

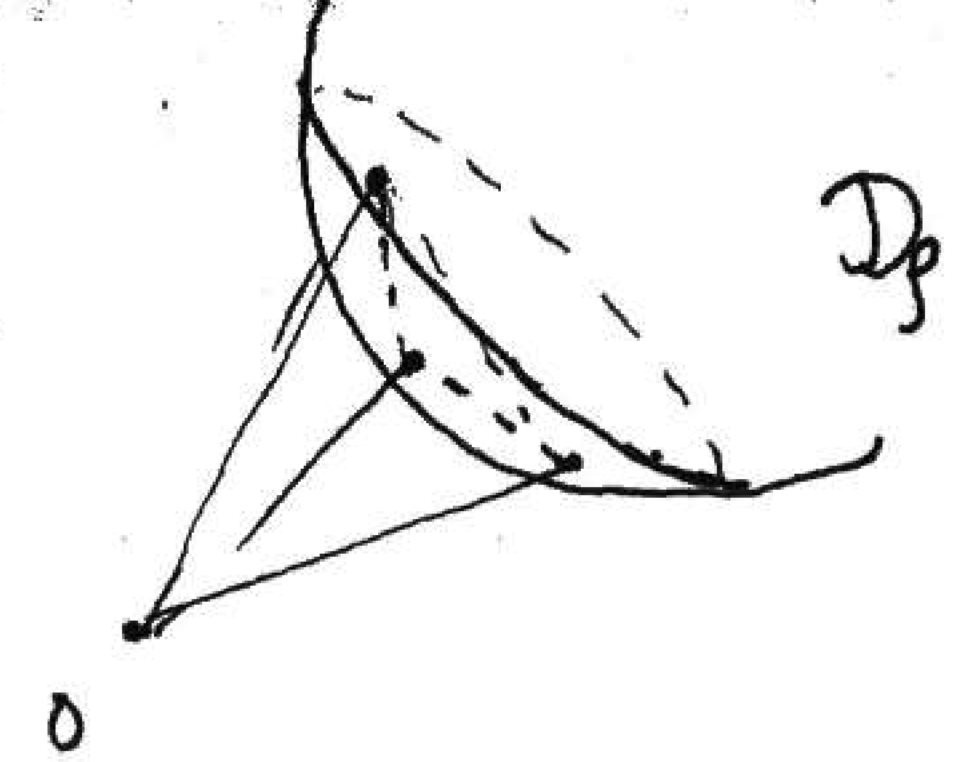
Por otro lado: Bowen-Margulis: $h_{top}(\phi^\eta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \#\{\text{period de long} \leq T\}$

Además, la función $\eta \mapsto P(\phi, \eta)$ es analítica y se cumple que y se pueden calcular las derivadas (varios resultados, van hasta Ratner)

Consideramos el flujo geodésico en S con alguna métrica y se puede considerar que cada φ que cuenta los valores propios determina una reparam.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D}_\rho = \{ \varphi : P(\phi, -\varphi\circ\lambda) \leq 0 \} \Rightarrow \text{convexo} \ldots$$

<u>Idea:</u> Truncar D_ρ: independientemente de ρ.

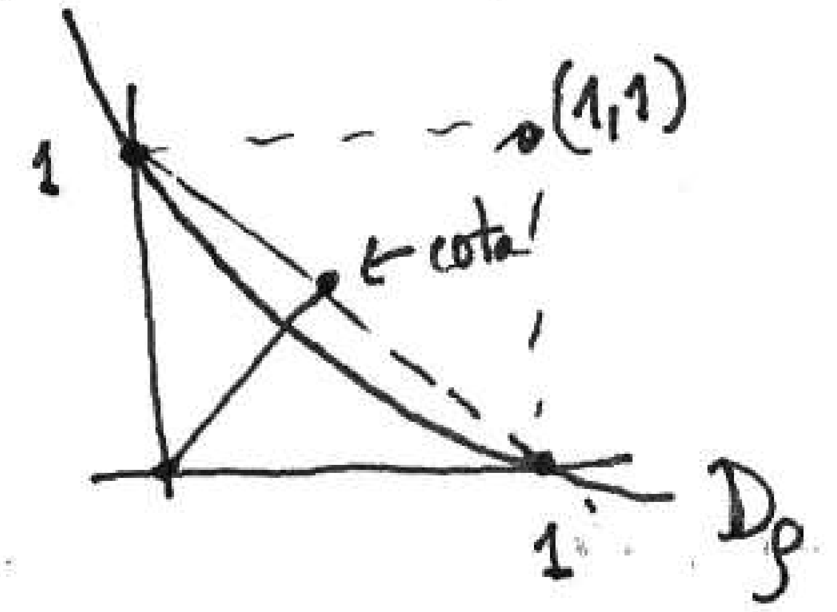


<u>Bishop-Steeger / Burger</u>: Sea $\rho : \pi_1(S) \to PSL(2,\mathbb{R}) \times PSL(2,\mathbb{R})$ dos geometrías en S

Queremos ver como es $\lim \frac{1}{T} \log \#\{\gamma : l_{g_1}(\gamma) + l_{g_2}(\gamma) \leq T\}$

Sabemos, que indep de ρ vale que: $\lim \frac{1}{T} \log \#\{\gamma : l_g(\gamma) \leq T\} = 1$. $\forall g$ métrica hip.

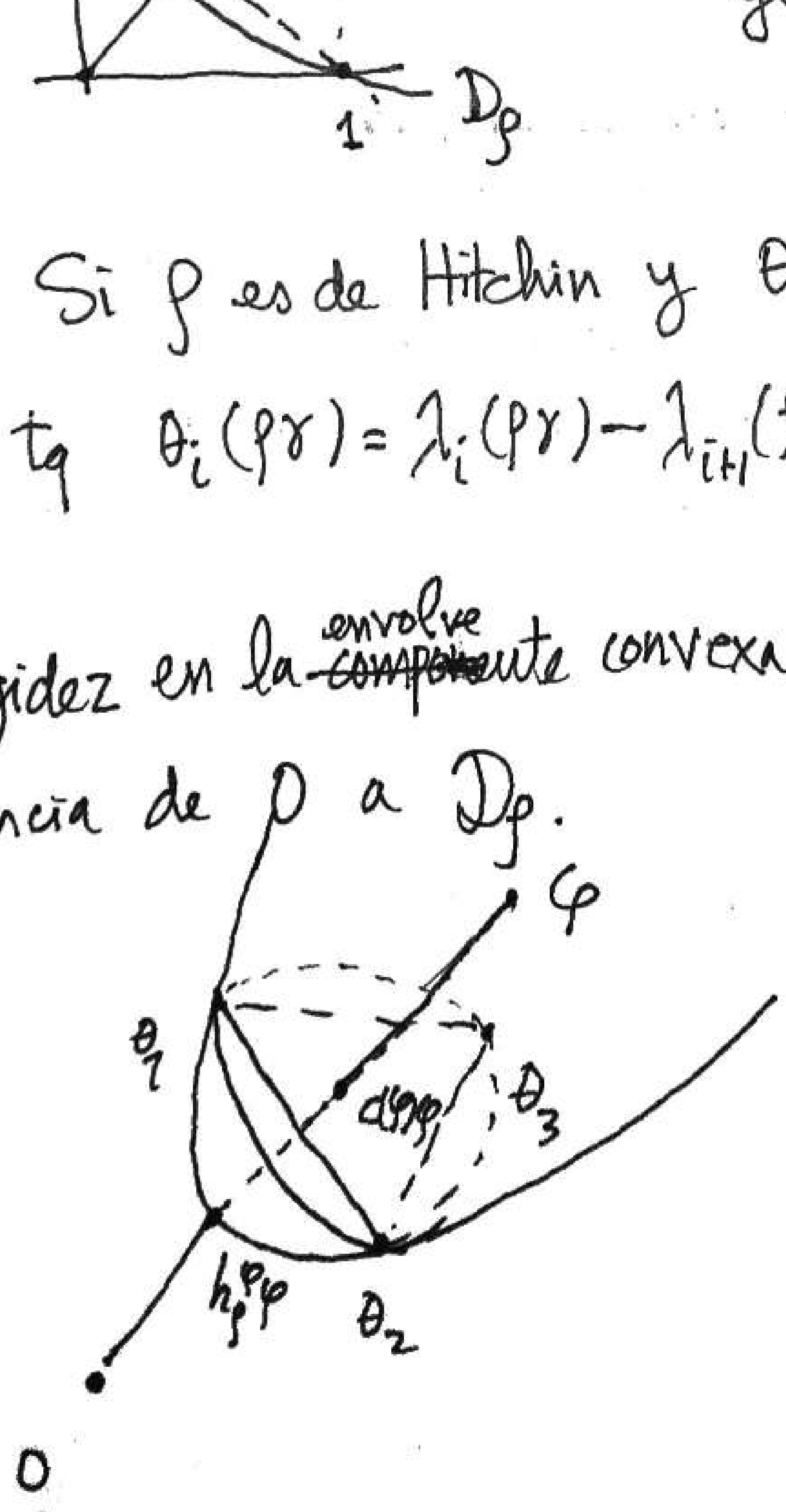
$\Rightarrow$



y si son iguales $\Rightarrow$ todas las geodésicas "miden lo mismo" $\Rightarrow$ $g_1 = g_2$.

<u>Teorema Clave</u> Si ρ es de Hitchin y $\theta_i : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ es la forma lineal tq $\theta_i(\rho\gamma) = \lambda_i(\rho\gamma) - \lambda_{i+1}(\rho\gamma) \Rightarrow h_\rho^{\theta_i} = 1 \quad \forall \rho$.

Obtenemos rigidez en la ~~componente~~ envolvente convexa de $\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}$ y en la distancia de ρ a D_ρ.



IDEA DE LA PRUEBA: Nos restringimos a $PSL(3,\mathbb{R})$

(Labourie) Las representaciones de Hitchin son CONVEXAS ANOSOV.

$$\exists\ \xi, \xi^*: \partial\pi_1(S) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)\ (\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*}))$$ Hölder y equivariante tal que

$$\forall\ x \neq y \in \partial\pi_1(S) \text{ se tiene } \xi(x) \pitchfork \xi(y)^* \quad (\text{i.e. } \xi^*(y)(\xi(x)) \neq 0).$$

(Una consecuencia: Toda matriz $\rho\gamma$ tiene espectro simple)

Además, vale que $$\lim_{\substack{(y,z)\to x \\ y\neq z\neq x}} \xi(y) \oplus \xi(z) = \ker \xi^*(x).$$

Esto dice esencialmente que $\xi(\partial\pi_1(S))$ es una subvariedad de clase C^1 (de hecho $C^{1+\alpha}$ pues su derivada es Hölder)

La clave es que $\partial^{(2)}\pi_1(S) \times \mathbb{R} \sim T^1S$ y se pueden construir acciones equivariantes de $\pi_1(S)$ que dan el flujo geodésico.

Definiéndolo (con alguna astucia) en un fibrado M_ρ sobre $L = \{(\xi(x), \xi^*(y)) \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{d*})\}$

definido como $M_\rho = \{(a, b, v, \varphi) : a = \xi(x),\ b = \xi^*(y)$ con $x \neq y$ y $v \in \xi(x)$, $\varphi \in \xi^*(y)$ con $\varphi(v) = 1\}$.

Obtenemos un flujo de Anosov $C^{1+\alpha}$ donde la expansión a lo largo de la dirección inestable en el período es $\theta_1(\rho\gamma)$

Como la medida SRB de un tal flujo de Anosov cumple $P(-\lambda^u) = 0$

Obtenemos que $h_\rho^{\theta_1} = 1$.

Comentar como sigue.