DEFORMACIONES DE SUBGRUPOS DISCRETOS DE GRUPOS DE LIE

$$\left.\begin{array}{l} GL(d,\overset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}}) = \{\text{matrices } d\times d \text{ invertibles}\} \\ SL(d,\mathbb{R}) = \{A\in GL(d,\mathbb{R}) \ \det A = 1\} \\ SO(p,q) = \{\text{preservan } x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+q}^2\} \quad p+q=d \\ \text{etc} \end{array}\right\} = G \text{ (grupo de Lie)}$$

Sean $A_1,\dots,A_k\in G$ y $\Gamma = \{A_{i_1}^{\sigma_1}\cdots A_{i_\ell}^{\sigma_\ell} : i_j\in\{1,\dots,k\},\ \sigma_j\in\{\pm 1\}\}$

Observan que si $\rho_0 : \underset{\langle a_1,\dots,a_k \mid \emptyset\rangle}{\overset{}{\mathbb{F}_k}} \to G$ es el morfismo de grupos tq $\rho_0(a_i) = A_i$

$$\mathbb{F}_k = \langle a_1,\dots,a_k \mid \emptyset\rangle \quad\Rightarrow\quad \Gamma \cong \mathbb{F}_k/\operatorname{Ker}\rho_0$$

<u>Interés</u>: → Permite entender tanto de la geometría de Γ (sobre todo si es discreto) como de la estructura algebraica de G.

→ G y sus lattices muchas veces están relacionados a construcciones aritméticas

⇒ el encaje de Γ en G puede tener interés en teoría de números.

→ <u>Dinámica</u>: Hay fuerte vínculo entre dinámica de grupos y pseudogrupos. y "cociclos sobre shifts".... todavía no se entiende del todo bien

<u>PREGUNTA GUÍA</u> Como es el espacio de representaciones de Γ en G (i.e. $\operatorname{Hom}(\Gamma,G)/_{\Gamma}$)? Que vínculo tiene con la "geometría" de Γ?

Particular importancia tiene el caso en que $\Gamma\subseteq G$ es discreto (Id es aislado)

<u>Ejemplos</u>:
1) $\operatorname{Teich}(\Sigma) \simeq \operatorname{Rep}(\pi_1(\Sigma), PSL(2,\mathbb{R}))$ fieles & discretas

2) $\operatorname{Rep}(\pi_1(\Sigma), PSL(3,\mathbb{R}))$ son geometrías de Hilbert en Σ.

3) $\operatorname{Rep}(\pi_1(\Sigma), PSL(2,\mathbb{C})) \supseteq$ Quasi-Fuchsianas (Pares de geometrías hip. en Σ)

4) M variedad hiperbólica $\dim M = d \Rightarrow \operatorname{Rep}(\pi_1(M), SO(1,d))$ es un punto (Mostow)

5) (Benoist, Johnson-Millson) $\operatorname{Rep}(\pi_1(M), PSL(d+1,\mathbb{R}))$ geometrías de Hilbert

6) $\mathbb{F}_2 \to G$ grupos de Schottky

Nos vamos a interesar en 2 preguntas:

(I) Como determinar si una representación es fiel y discreta?

(II) Como detectamos si una deformación es verdaderamente una deformación?

↑ densidad de Zariski

(I) Pregunta 1: Ser fiel y discreta es propiedad abierta?

Teorema (Weil) $\Gamma \subseteq G$ fiel, discreta y cocompacta es propiedad abierta.

Sin embargo en la componente conexa de $\pi_1(\Sigma) \to PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{C})$ hay repr. que no son discretas (y ser fiel & discreta es propiedad cerrada)

Las Quasi-Fuchsianas son el interior de las fieles & discretas.

Representaciones Labourie-Anosov

Sea Γ un grupo hiperbólico ($\Gamma = \pi_1(\Sigma)$, $\pi_1(M)$ o $\mathbb{F}_k$ para esta charla) y sea $\partial\Gamma$ su borde y $\partial^{(2)}\Gamma = \partial\Gamma \times \partial\Gamma \setminus \text{diagonal}$.

En $\widetilde{U\Gamma} = \partial^{(2)}\Gamma \times \mathbb{R}$ se define $\tilde{\phi}_t(x,y,t) = (x,y,t+s)$

Prop (Gromov, Mineyev) $\exists\, c: \Gamma \times \partial^{(2)}\Gamma \to \mathbb{R}$ cociclo Hölder tq:

- $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ $\quad c(\gamma_1\gamma_2, x, y) = c(\gamma_2, \gamma_1 x, \gamma_1 y) + c(\gamma_1, x, y)$
- La acción $\Gamma \curvearrowright \widetilde{U\Gamma}$ dada por $\gamma \cdot (x,y,t) = (\gamma x, \gamma y, s - c(\gamma, x, y))$ es libre, propia y cocompacta

Definimos $U\Gamma = \widetilde{U\Gamma}/\Gamma$ (el fibrado unitario de Γ, que coincide si $\pi_1(\Sigma)$ o $\pi_1(M)$) y $\tilde{\phi}_t$ induce $\phi_t: U\Gamma \to U\Gamma$ que llamamos el flujo geodésico.

Prop ϕ_t es "topologicamente" Anosov.

Ejemplos: → $\pi_1(\Sigma)$ y $\pi_1(M)$ flujo geodésico y c. es cociclo de Buseman.

→ $\Gamma = \mathbb{F}_2$ entonces $\partial\Gamma$ son palabras semiinfinitas y si $\gamma = a, b, a^{-1}$ o b^{-1} $\quad c(\gamma, x, y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y \text{ empieza con } \gamma^{-1} \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$

$\rho : \Gamma \to G \; (= SL(d,\mathbb{R}))$ es i-Labourie Anosov (def. ad hoc)

si $\exists\, \xi_1 : \partial\Gamma \to Gr_i(\mathbb{R}^d)$ y $\xi_2 : \partial\Gamma \to Gr_{d-i}(\mathbb{R}^d)$ tq

$\xi_1(x) \oplus \xi_2(y) = \mathbb{R}^d \quad \forall\, x \neq y \in \partial\Gamma$ y cumple:

(1) (Equivariancia) $\xi_i(\gamma x) = \rho(\gamma)\xi_i(x) \quad i=1,2$

(2) (Contracción) Definiendo $\tilde{\psi}^t : \widetilde{U\Gamma} \times \mathbb{R}^d \circlearrowleft$ como $\tilde{\psi}^t(p,v) = (\tilde{\phi}_t(p), v)$.
que baja a ψ^t en $E_\rho = \widetilde{U\Gamma} \times \mathbb{R}^d / \Gamma$ con $\gamma \cdot (p,v) = (\gamma\cdot p, \rho(\gamma) v)$
se cumple que ψ^t posee un conjunto hiperbólico que fibra sobre ϕ_t. (asumiendo ϕ_t flujo de Anosov).

Prop (Labourie, Guichard-Wienhard) Ser representación de Anosov es una propiedad abierta. Además, implica que la representación es fiel & discreta.

Objetivo: (Trabajo en curso con J. Bochi & A. Sambarino)
(i) Obtener definición equivalente independiente del flujo geodésico
(ii) Vincular con teoría de cociclos sobre shifts de Markov

Recientemente aparecieron trabajos relacionados de Kapovich-Leeb-Porti y Gueritat-Guichard-Kassel-Wienhard. (Por ahora difíciles de leer).

Proposición: Ser i-Labouvie Anosov es equivalente a que $\exists\, C, \lambda > 0$ tales que $\forall\, \gamma \in \Gamma$ se cumple:
$$\frac{\theta_{i+1}(\rho(\gamma))}{\theta_i(\rho(\gamma))} < C e^{-\lambda|\gamma|}$$

Aquí $|\gamma|$ denota la longitud de palabra de γ y θ_i es el i-ésimo valor singular de $\rho(\gamma)$. [Explicar virtudes del enunciado]

Idea principal: Utilizar un resultado de Bochi-Gourmelon que vincula la descomposición dominada con la separación de los valores singulares y relacionar la definición de i-Labourie Anosov a la descomposición dominada ... del flujo geodésico de Γ

(II) Como detectar las "verdaderas" deformaciones.

Tenemos $\rho : \Gamma \to G$ y denotamos como X su espacio simétrico asociado.

(Comentar las (G, X)-estructuras, etc...) $\to$ M admite una (G, X) estructura si hay un atlas con cartas en X y cambio de cartas en G.

Sea $h_\rho := \lim_n \frac{1}{n} \log \#\{\gamma \in \Gamma : d_X(0, \gamma \cdot 0) \leq n\}$ entropía de ρ

Objetivo: Resultados del tipo, h_ρ verifica una desigualdad y si esta desigualdad es una igualdad $\Rightarrow$ rigidez (e.g. $\exists\, \hat{G} < G$ subgrupo de Lie tq $\rho(\Gamma) \subseteq \hat{G}$).

Ejemplos: $\to$ Bowen $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow h_\rho$ es la dimensión de Hausdorff de la curva límite. Si la curva límite es absolutamente continua $\to \rho$ preserva una copia de $\mathbb{H}^2$ en $\mathbb{H}^3$ (espacio simétrico de $PSL(2, \mathbb{C})$).

$\to$ Crampon: $\rho : \pi_1(M) \to PSL(d+1, \mathbb{R})$ convexo divisible (geometría de Hilbert)

$\Rightarrow h_\rho$ es la entropía topológica del flujo geodésico.

Se cumple $h_\rho \leq (d-1)$ y la igualdad $\Rightarrow$ Riemanniana

Benoist, Quint y luego Sambita comenzaron a estudiar otros indicadores de crecimiento relacionados a los valores propios de $\rho(\gamma)$ con $\gamma \in \Gamma$.

Sean $\lambda_i(\gamma)$ los valores propios de $\rho(\gamma)$ con $\lambda_1(\gamma) \geq \dots \geq \lambda_d(\gamma)$

Fijada $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineal se puede mirar el valor

(hay que tomar clases de conj)

$$h_\rho^\theta := \lim_n \frac{1}{n} \log \#\{[\gamma] \in [\Gamma] : \theta(\lambda_1(\gamma), \dots, \lambda_d(\gamma)) \leq n\}$$

Significa: "Crecimiento exponencial de los valores propios en cierta dirección"

Teorema (Quint, Sambarino) Si conoces los h_ρ^θ para todos los θ que tenga sentido $\Rightarrow$ conoces h_ρ.

(CONO LÍMITE)

Usando el formalismo termodinámico y sus propiedades

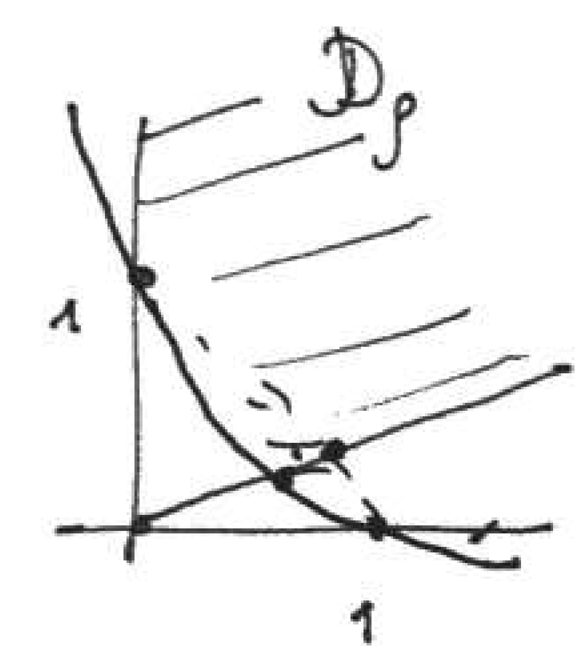
<u>Teorema</u> (Sambita) $\mathcal{D}_\rho = \{ \theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \ : \ h_\rho^\theta \in (0,1] \}$ es un convexo de $(\mathbb{R}^d)^*$ y $h_\rho^{t\theta} = h_\rho^\theta / t$. ⌟

Usando estas propiedades, <u>con Sambita</u> pudimos probar una <u>desigualdad</u> rígida en una clase de representaciones, llamadas de Hitchin:

$$\text{Componente conexa de } \rho_0 : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow PSL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow PSL(d,\mathbb{R})$$

<u>Idea</u>: Independientemente de ρ, hay ciertas formas lineales (de hecho, son $\theta_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ (≥ 0.) ← (en el cono límite, gracias a Labourie) y que son Anosov.

tal que su entropía siempre vale $= 1$.



Entonces, $\mathcal{D}_\rho$ es convexo que pasa por ahí $\Rightarrow$ OK

Para probar que la entropía es siempre $= 1$ usamos dos cosas:

1) (BCLS) La funcion $\rho \mapsto h_\rho^\theta$ es analítica.

2) En un entorno de las Fuchsianas podemos construir un flujo $\underbrace{\text{de Anosov de clase } C^{1+\alpha}}_{\text{(PESO TÉCNICO)}}$ cuyo Jacobiano inestable es θ_i en las órbitas periódicas ($[\gamma]$ con $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$)

Reparametrizando y usando la propiedad SRB se obtiene lo deseado.

Finalmente, si $\mathcal{D}_\rho \subsetneq$ Subespacio afín $\Rightarrow$ hay relaciones algebraicas $\Rightarrow$ no es Zariski denso (un poco + de laburo $\rightarrow$ Fuchsiana).