Medida:

Un rectángulo R en $\mathbb{R}^d$ es un conjunto de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

Definimos $|R| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$

Un rectángulo Q es un cubo de lado l si $b_i - a_i = l \quad \forall i$

$$\Rightarrow |Q| = l^d.$$

Una ~~unión~~ flia de rectángulos $\{R_i\}$ se dice casi disjunta si $\forall i \neq j \quad \mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$

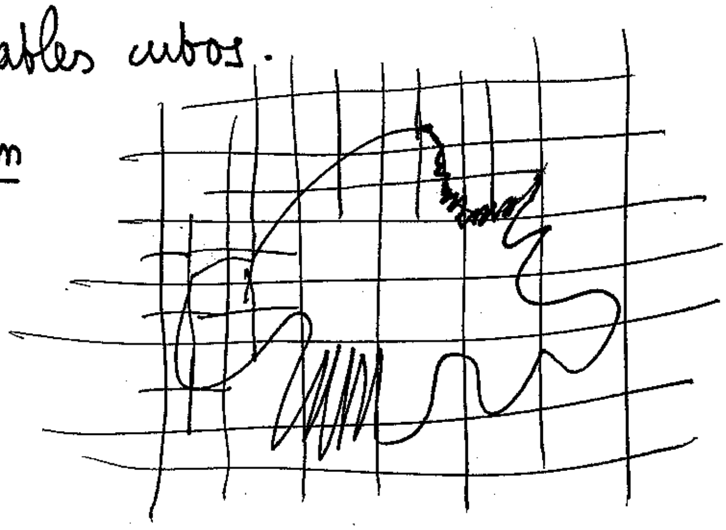
Prop: Si un rectángulo R es unión casi disjunta de rectángulos $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i \Rightarrow |R| = \sum_{i=1}^{N} |R_i|$.

dem: Ejercicio (Nota, integral de Riemann) ---

Similarmente, si $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} R_i \Rightarrow |R| \leq \sum_{i=1}^{N} |R_i|$

Obs: Todo abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ es unión casi-disjunta de numerables cubos.

dem



Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ definimos:

$$m_*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \ : \ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad Q_j \text{ cubos} \right\}$$

si fueran finitos, es las definición de Riemann... (muchos problemas)

e.g. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ con finitos mide 1.

Entonces $0 \leq m_*(E) \leq \infty$.

<u>Nota</u>: $m_*(R) = |R|$

<u>dem</u>: $m_*(R) \leq |R|$ al menos para R cubo es obvio, sino cubrir R por cubos a menos de ε...

$|R| \leq m_*(R)$ por la propiedad de antes (y compacidad...)

//

<u>Propiedades</u>:

<u>0</u>. $m_*(\emptyset) = 0$, $m_*(\mathbb{R}^d) = \infty$.

<u>1</u>. (Monotonicidad) $E_1 \subseteq E_2$; $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$

<u>2</u>. (Subaditividad) Si $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$
(ε-room...)

<u>3</u>. (Abiertos) Si $E \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow m_*(E) = \inf\{ m_*(\mathcal{O}) : E \subseteq \mathcal{O} \text{ ab} \}$

<u>dem</u>: $m_*(E) \leq \inf m_*(\mathcal{O})$ por monot.

Para la otra, sea $\varepsilon > 0$ y $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ con

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_i| \leq m_*(Q_i) + \varepsilon/2$$

Tomamos cubos abiertos $\widehat{Q}_i \supseteq Q_i$ con $|\widehat{Q}_i| \leq |Q_i| + \varepsilon/2^{i+1}$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \bigcup \widehat{Q}_i \supseteq E \quad \text{y} \quad m_*(\mathcal{O}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{Q}_i| \leq m_*(E) + \varepsilon.$$

4. Si $E = E_1 \cup E_2$ con $d(E_1, E_2) > 0$

$$\Rightarrow \quad m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$$

dem: $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$ ok.

Fijamos $\delta > 0$ tq $d(E_1, E_2) > \delta$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_i$ cubos cerrados tq $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_i| < m_*(E) + \varepsilon$.

Podemos subdividir los cubos y suponer diam $Q_i < \delta/10$ $\forall i$

Si $J_1 = \{i \text{ tq } Q_i \cap E_1 \neq \emptyset\}$
$J_2 = \{i \text{ tq } Q_i \cap E_2 \neq \emptyset\}$ $\Rightarrow J_1 \cap J_2 = \emptyset$

$$E_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} Q_j \Rightarrow m_*(E_i) \leq \sum_{j \in J_i} \underbrace{m_*(Q_j)}_{= |Q_j|}$$

$\Rightarrow$ ok.

5. (Medida de abiertos bien def)

Si E es union numerable de cubos casi disjuntos $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ (c.d)

$\Rightarrow m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ (en part, vale para abiertos)

Fijamos $\epsilon > 0$ y tomamos $\hat{Q}_i \subseteq \operatorname{int} Q_i$ con $|\hat{Q}_i| > |Q_i| - \varepsilon/2^i$

$\Rightarrow$ aplicamos 4 inductivo y tenemos

$$m_*(E) \geq \left|\sum_{j=1}^{N} |Q_i|\right| - \varepsilon \quad \forall N, \epsilon \Rightarrow m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

Por la subaditividad tenes la otra desigualdad $\Rightarrow$ ok.

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{O}$ abierto con $E \subseteq \mathcal{O}$ tq

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon.$$

En este caso, denotamos $m(E) = m_*(E)$.

Propiedades:

1. Abiertos son medibles.
2. Si $m_*(E) = 0 \Rightarrow E$ es medible
3. Union numerable de medibles es medible (ε-room)
4. Cerrados son medibles

4.1 Alcanza compacto K (cerrados son unión numerable de compactos)

4.2 Sea $\mathcal{O} \supseteq K$ tq $m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(K) + \varepsilon$

$$\Rightarrow \mathcal{O} \setminus K \text{ es abierto y lo escritimos } \mathcal{O} \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty}{}^{(c.d.)} Q_i$$

Para N-fijo $\bigcup_{i=1}^{N} Q_i = C_N$ es compacto $\Rightarrow$

$$d(C_N, K) > 0 \Rightarrow m_*(\mathcal{O}) \overset{\text{monot.}}{\geq} m_*(K) + m_*(C_N) = m_*(K) + m_*(C_N)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{N} m_*(Q_i) \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(K) < \varepsilon \quad \forall N$$

$$\Rightarrow m_*(\mathcal{O} \setminus K) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_i) < \varepsilon.$$

5. (COMPLEMENTOS) Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible $\Rightarrow E^c$ tb.

dem: $\mathcal{O}_n \supseteq E$ tq $m_*(\mathcal{O}_n \setminus E) < 1/n$.

Tomamos $S = \bigcup_n \mathcal{O}_n^c \subseteq E^c$

Observamos que $E^c = S \cup \underbrace{E^c \setminus S}$.

unión num de cerrados $\Downarrow$ medible

$m_*(E^c \setminus S) \leq m_*(\mathcal{O}_n^* \setminus E) \; \forall n$.

6. (Intersecciones numerables)

Leyes de de Morgan.

COROLARIO: $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible con medida finita $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$
$\exists K \subseteq E \subseteq \mathcal{O}$ con K compacto y $\mathcal{O}$ abierto tal que
$m(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$. (en part $m(K) + \varepsilon \geq m(E) \geq m(\mathcal{O}) - \varepsilon$)

También es obvio que $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $\varepsilon > 0$
existe una union finita de cubos $F \subseteq \mathbb{R}^d$ tq

$$m(E \Delta F) < \varepsilon. \quad (E \Delta F = E \setminus F \cup F \setminus E)$$

Teorema (Aditividad) Sean $\{E_i\}_{i \geq 1}$ medibles disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i m(E_i)$$

dem: Podemos suponer todos miden finito $\Rightarrow$ tomamos $\varepsilon > 0$
y compactos K_i en E_i con $m(K_i) > m(E_i) - \varepsilon/2^i$

Para cualquier $N > 0$ obtenemos que $\sum_{i=1}^{N} m(E_i) \leq m(E)$ ...

Propiedad conveniente $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ medibles de $\mathbb{R}^d$

(i) Si $E_m \nearrow E$ ($E_m \subseteq E_{m+1}$ $\forall m$ y $E = \bigcup_m E_m$) $\Rightarrow m(E) = \lim_m m(E_m)$

(ii) Si $E_m \searrow E$ ($E_m \supseteq E_{m+1}$ $\forall m$ y $E = \bigcap_m E_m$) y $m(E_n) < \infty$ para algún n $\Rightarrow m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_m)$

dem: ejercicio. Hacer contraej de (ii) si $m(E_m) = \infty$ $\forall m$. //

Propiedades de invariancia:

1 – Por traslaciones es fácil.

2 – Transf lineales diagonales, es fácil que se mult. por determinante.

3 – Rotaciones $(SO_m(\mathbb{R}))$: Opciones: → Riemann. → Ponerle ganas....

CONJUNTO NO MEDIBLE: (VITALI) ← (todo E.V. tiene base, pensar en $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-e.v.)

Consideramos $\sim$ en $[0,1]$ dado por $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

Ej: $\sim$ es rel. de equiv.

Elegimos $N \subseteq [0,1]$ un conjunto tq tiene 1 punto de cada clase de equivalencia. (Ax. de elección.) ← e.g. hacemos un buen orden en $[0,1]$ y tomamos el menor de cada clase.

Tenemos que $\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $N \cap N+q = \emptyset$.

Se cumple $m_*(N) = m_*(N+q)$ $\quad [0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} N+q \subseteq [-1,2]$

Si N medible $\Rightarrow m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} N+q\right) \in [1,3]$

por otro lado $m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} N+q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \overset{m(N)}{\overset{\shortparallel}{m(N+q)}} = \begin{cases} 0 & \text{o} \\ \infty & . \end{cases}$ ↯

Funciones medibles

Denotamos $\mathcal{L} = \{E \subseteq \mathbb{R}^d : E \text{ es medible}\}$ (es σ-álgebra, no importa por ahora...)

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ es <u>medible</u> si

$\forall a \in \mathbb{R}$ vale que:

$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\}$ $\in \mathcal{L}$. está en $\mathcal{L}$.

(idem $f : E \subseteq \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ con $E \in \mathcal{L}$)

<u>Notación</u> $f^{-1}([-\infty, a)) = \{f < a\}$. (idem otras notaciones)

<u>Obs</u>: f medible $\iff$ $\forall \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ abierto, $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{L}$ $\iff$ $\forall F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ cerrado, $f^{-1}(F) \in \mathcal{L}$ ...

<u>e.g.</u> $\{f \leq a\} = \bigcap_{n>0} \{f < a + 1/n\}$, $\{f < a\} = \bigcup_n \{f \leq a - 1/n\}$

$\{f \geq a\} = \{f < a\}^c$, etc...

<u>Obs 2</u>: <u>Composición es un poco más delicado</u>: Si f medible y Φ continua

$\boxed{\forall}$ $\Rightarrow$ $\Phi \circ f$ es medible, pero $f \circ \Phi$ no necesariamente....

Borel-Lebesgue vs Borel-Borel o Lebesgue-Lebesgue.

<u>Propiedad</u>: Si $\{f_n\}$ son funciones medibles $\to$

(i) $\sup_n f_n$, (ii) $\inf_n f_n$ (iii) $\limsup_n f_n$ (iv) $\liminf f_n$ tb.

($\Rightarrow$ cuando lim existe, tb)

<u>dem</u>: $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$

$\limsup f_n = \inf_k \sup_{n>k} f_n$ ....

Prop 2: Las operaciones OK: Si f, g medibles (vamos a suponer siempre que $m(f^{-1}(\pm\infty)) = 0$)
(composición NO)

$\Rightarrow$ (i) $f \cdot g$ (ii) $f+g$ son medibles

dem: $\{f+g>a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f>a-q\}\cap\{g>q\}$

$$f\cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$ como si φ medible φ^2 medible (se puede ver fácil)

queda.

CONCLUSION: Las funciones medibles son un álgebra.

Decimos que $f=g$ ctp $\Leftrightarrow m(\{x : f(x)\neq g(x)\})=0$

Si f medible y $f=g$ ctp $\Rightarrow g$ es medible $\Rightarrow$ todo lo anterior vale c.t.p.

Ejemplo importante: Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ definimos $\chi_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ /

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in E \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$ medible $\Leftrightarrow$ E medible

Funciones simples: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se dice simple si

$\exists E_1, \dots, E_K$ medibles disjuntos 2 a 2 (acotados) y números $a_1, \dots, a_K \in \mathbb{R}$ diferentes 2 a 2 tq

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} a_i \chi_{E_i}$$

Ejercicio: Si $f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \chi_{F_i}$ con $b_i \in \mathbb{R}$ y F_i medibles $\Rightarrow f$ es simple.

// $\mathcal{M}$

<u>Teorema</u> (aproximación por simples) $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible.
Existe sucesión $\{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ sucesión creciente de simples no-negativas tq

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \quad \forall x \quad y \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \forall x.$$

<u>dem</u>: Sea $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|>k \\ k & \text{si } |x|\leq k \text{ y } |f(x)|\geq k \\ f(x) & \text{si no.} \end{cases}$

Entonces, $f_k \to f$ en t.p. (incluso si f pudiese valer $+\infty$)

Tomamos $\varphi_k(x) = \dfrac{\lfloor f_k(x)\cdot k \rfloor}{k}$ ← parte entera.

quizas cambiar k por 2^k

Entonces $|\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq 1/k \quad \forall x\in\mathbb{R}^d$

Con lo cual $\varphi_k(x) \to f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ (el tiempo depende de la convergencia de f_k a f)

Por otro lado, $\varphi_{k+1}(x) \geq \varphi_k(x)$ ← (usa que es 2^k) sino hay pequeño lio

<u>Obs</u>. Podemos adaptar para que si $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible $\Rightarrow$
$\exists\{\varphi_k\}$ simples con $|\varphi_k| \leq |\varphi_{k+1}|$ tq $\varphi_k \to f$ en t.p. (puntualmente)

<u>Teorema</u> (aproximación por escalones) $\forall f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible existe $\{\psi_n\}$ funciones escalon tq $\psi_n \to f$ Leb-ctp.

<u>dem</u>: Basta aproximar $f = \chi_E$ con E medible.
Tomamos F_n union finita de cubos disjuntos tq $m(E \Delta F_n) < 1/n$
y definimos $\psi_n = \chi_{F_n}$. Tomamos ψ_{2^n} → el error es sumable...

Los 3 principios de Littlewood

(i) Todo conjunto es "casi" una unión finita de cubos.

(ii) Toda función es "casi" continua.

(iii) Toda sucesión convergente (c.t.p) de funciones es "casi" uniformemente convergente.

Para (i), mostramos

Prop (i): $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible con $m(E)<\infty$ y $\varepsilon>0$ $\exists F=\overset{N}{\underset{i=1}{\textcircled{d}}} Q_i$ unión disjunta de cubos tq $m(E \Delta F)<\varepsilon$.

Es práctico mostrar (ii) usando (iii) (aunque se puede hacer directo)

Teorema (Egorov (iii)) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ funciones de $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible con $m(E)<\infty$ tq $f_k \longrightarrow f$ m-ctp en E. Entonces, $\forall \varepsilon>0$ $\exists A_\varepsilon \subseteq E$ compacto con $m(E \setminus A_\varepsilon)<\varepsilon$ tq $f_k \longrightarrow f$ uniformemente en A_ε.

dem: Sin pérdida de generalidad suponemos $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in E$ (sacando conj de medida 0)

Para todo $n,k>0$ $\quad E_k^n=\{x \in E / \ |f_j(x)-f(x)|<1/n \ \forall j>k\}$

Fijado n, tenemos $E_k^n \subseteq E_{k+1}^n$ y $E_k^n \underset{k}{\nearrow} E \Rightarrow \forall n>0 \ \exists k_n$ tq $m(E \setminus E_{k_n}^n)<1/2^n$.

Sea $N>0$ tq $\sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n<\varepsilon/2$ y $\tilde{A}_\varepsilon=\bigcap_{n \geq N} E_{k_n}^n$

Entonces $m(E \setminus \tilde{A}_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E \setminus E_{k_n}^n)<\varepsilon/2$

Dado $\delta>0$, sea $n \geq N$ tq $1/n<\delta \Rightarrow$ como $\tilde{A}_\varepsilon \subseteq E_{k_n}^n$ tenemos que si $j>k_n \Longrightarrow |f_j(x)-f(x)|<\delta$ $\forall x \in \tilde{A}_\varepsilon$ y tenemos la convergencia uniforme.

Luego, $A_\varepsilon \subseteq \tilde{A}_\varepsilon$ compacto tq $m(\tilde{A}_\varepsilon \setminus A_\varepsilon)<\varepsilon/2$ ya lo hicimos. //

Teorema (Luisin (ii)) Sea $f: E \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible con $m(E) < \infty$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon \subseteq E$ compacto con $m(E \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tal que $f|_{F_\varepsilon}$ es continua.

OJO: No estamos diciendo que f es continua en los puntos de F_ε!
(sin embargo, se puede probar como ejercicio desafiante, que $\exists g$ continua que coincide con f en F_ε).

dem: Sean $\{f_n\}$ funciones escalon tq $f_n \to f$ m-ctp.

Podemos encontrar E_n tq $m(E_n) < 1/2^n$ y f_n es continua fuera de E_n

Tomamos $A_{\varepsilon/3}$ por Egorov donde $f_n \rightrightarrows f$ y $m(E \setminus A_{\varepsilon/3}) < \varepsilon/3$

Sea $N > 0$ tq $\sum_{n>N} 1/2^n < \varepsilon/3$ y $F' = A_{\varepsilon/3} \setminus \bigcup_{n \geq N} E_n$

$\Rightarrow$ por conv. unif de continuas ...

Ahora $F_\varepsilon \subseteq F'$ compacto ... //

"Prueba del Ejercicio" Lo hacemos para $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ medible y acotada.

1ero Aproximamos f por continuas m-ctp.

$f_n \to f$ m-ctp funciones escalón, $g_k^n \to f_n$ continuas m-ctp

2do: Dado $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ $\exists g$ continua tq $f - g$ es menor que ε en un conjunto cuyo complemento mide menos que δ.
y tq $|g(x)| \leq \sup |f(x)|$ $\forall x$.

3ero $f = g_1 + f_1$ con g_1 continua y $|f_1| < 1/2$ en E_1 tq
$$m(E \setminus E_1) < \varepsilon/2.$$

$f_1 = g_2 + f_2$ con g_2 continua y $|f_2| < 1/4$ en E_2 tq $m(E_1 \setminus E_2) < \varepsilon/4$
.... Si miramos $\sum g_n$ converge unif. a f en $E \setminus \bigcup E_n$ //

BRUNN-MINKOWSKI

$$A+B=\{x\in\mathbb{R}^d : x=x'+x'' \text{ con } x'\in A,\ x''\in B\}$$

Ejemplo: Es posible que $m(A)=m(B)=0$ pero $m(A+B)>0$. ← ejemplo, conjunto de cantor usual

Teorema: Si $A, B, A+B \subseteq \mathbb{R}^d$ son medibles $\Rightarrow$ $m(A+B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}$

Intuición: Si A es convexo $\Rightarrow$ $A+\lambda A = (1+\lambda)A$

(pues si $x = x' + \lambda x''$ con $x', x'' \in A \Rightarrow \exists y \in [x', x'']$ tq $x = (1+\lambda)y$.)

$$x'+\lambda x'' = (1+\lambda)\cdot\left(\frac{x'}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}x''\right)$$

Notar que en $\mathbb{R}^d$ $\quad m(\eta\cdot A) = \eta^d\cdot m(A)$ $\quad$ (η^d = det de homotecia)

Como $(a+b)^\gamma \geq a^\gamma + b^\gamma$ siempre que $\gamma \geq 1$, $a,b>0$. (trivial para γ entero por binom. de Newton) sino, integrando.

la desigualdad es al reves si $\gamma \leq 1$

Por la "intuicion" queda $(1+\lambda)^{d\alpha} \geq 1+\lambda^{d\alpha}$ (notar que queremos el menor α posible...)

esto se cumple si $\alpha \geq 1/d$ (y es falso sino) ya que $(a+b)^\gamma \geq a^\gamma + b^\gamma$ si $\gamma \geq 1$ implica que si vale pa α, vale para los mayores.

$\Rightarrow$ es sharp si o si. Considerando $B=\{x_0\}$ vemos que la constante sharp de $m(A+B)^\alpha \geq c_\alpha\, m(A)^\alpha + m(B)^\alpha$

es $c_\alpha = 1$. Esto dice que el enunciado es el "mejor posible".

dem: Primero para rectángulos A y B con lados de long $\{a_i\}_{i=1}^d$ y $\{b_i\}_{i=1}^d$ resp.

Podemos suponer, haciendo homotecias a A y B de la misma razón (que sale lo mismo de ambos lados)

que $a_i+b_i=1$ $\forall i$. Reemplazamos a_i, b_i por $\lambda_i a_i$, $\lambda_i b_i$. $\Rightarrow$

ambos lados de la igualdad se multiplican por $(\lambda_1 \cdots \lambda_d)^{1/d}$.

Notar ahora que si x_i son numeros positivos $\Rightarrow$ la media aritmetica es mayor que la geométrica $\Rightarrow$

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{d} a_i\right)^{1/d} \quad y \quad \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} b_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{d} b_i\right)^{1/d}$$

que sumando da

$$\underset{\substack{\| \\ m(A+B)^{1/d}}}{1} \geqslant \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{d} a_i\right)^{1/d} + \left(\prod_{i=1}^{d} b_i\right)^{1/d}}_{\substack{\| \\ m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}}}$$

aca usamos que la suma de rectangulos es rectangulo con lados = suma de lados

Ahora; A y B son uniones de rectángulos casi-disjuntos.

Se hace por inducción en el número de rectángulos con algún truco astuto (pag 37)

Dps se pasa a abiertos y luego a medibles en gral.
(ver libro x detalles)

INTEGRAL DE LEBESGUE (RECORDAR APROXIMACIÓN X SIMPLES tanto por abajo, como en módulo)

Primer paso: Funciones simples: $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ con a_i dist. 2 a 2 y E_i disjuntos

$$\Rightarrow \int \varphi\, dm = \sum_{i=1}^{k} a_i m(E_i) \qquad \left(\text{notación } \int_E \varphi\, dm = \int \varphi \chi_E\, dm\right)$$

Propiedades: (1) Lineal: $\int a\varphi + b\psi = a\int\varphi + b\int\psi$

(2) Aditiva en dominio: $\int_{E\cup F}\varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi$ si $E\cap F = \emptyset$.

(3) Monotonía: Si $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int\varphi \leq \int\psi$

(4) Desigualdad triangular: $\left|\int\varphi\right| \leq \int|\varphi|$.

dem: La clave es que la integral no depende del representante.

Si definimos en gral para $\varphi = \sum a_i \chi_{E_i}$ $\quad \int \varphi = \sum a_i m(E_i)$

indep que a_i son distintos y/o E_i disjuntos

Hay que ver que si $\varphi = \sum a_i \chi_{E_i} = \sum b_i \chi_{F_i} \Rightarrow \sum a_i m(E_i) = \sum b_i m(F_i)$

Pero para eso, vemos que $\varphi = \sum_{i,j} a_i \chi_{E_i \cap F_j}$ (pues en $E_i \cap F_j$ $a_i = b_j$)

y $m(E_i) = \sum_j m(E_i \cap F_j)$ pq son iguales. (esto si E_i y F_j son 2 a 2 disj.)

etc...

El resto es inmediato.

Paso dos Funciones acotadas de soporte acotado

$sop(f) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ medible si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible.

Suponemos que $m(sop(f)) < \infty$ y que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ y $M > 0$.

Entonces, $\exists \varphi_n \longrightarrow f$ en todo punto y tq $|\varphi_n| \leq M$ $\forall n, x$.

Lema: Sea f medible y acotada y $m(sopf) < \infty$ y sea φ_n simples unif. acotadas tq $\varphi_n \longrightarrow f$ m-ctp, entonces:

(i) existe $\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n$ $\quad$ (ii) Si $f = 0$ m-ctp $\Rightarrow \lim \int \varphi_n = 0$

Obs: El punto (ii) y la linealidad dan que el límite está bien definido y podemos definir $\int f = \lim \int \varphi_n$.

Tb lo podríamos hacer considerando $\varphi_n, \varphi_n' \longrightarrow f$ y considerando la sucesion "alternada" y la parte (i).

dem: Usamos Egorov.

Fijamos $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, F \subseteq E$ compacto con $m(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2M}$ ← $\max_{n,x} |\varphi_n(x)|$

tq $\varphi_n \rightrightarrows f$ en F.

Ahora $\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| \leq \int |\varphi_n - \varphi_m| = \underbrace{\int_F |\varphi_n - \varphi_m|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\int_{E \setminus F} |\varphi_n - \varphi_m|}_{\leq \varepsilon/2}$.

Propiedades f, g acotadas medibles y soporte de medida finita $\Rightarrow$

(i) Lineal $\int (af + bg) = a\int f + b\int g$.

(ii) Aditiva $\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$ si $E \cap F = \phi$.

(iii) Monótona si $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

(iv) Desig. triangular: $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

dem: Por definición.

Teorema (Convergencia acotada) Sea $\{f_n\}$ medibles unif. acotadas y soportadas en E con $m(E) < \infty$ tq $f_n \to f$ m-ctp.

Entonces $\int |f_n - f|\, dm \to 0$ (en particular $\int f_n \to \int f$)

$\boxed{\lim \int f_n = \int \lim f_n}$

dem: Egorov, usando las propiedades de ahí.

Obs importante: Si $f \geq 0$ y $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$ m-ctp en E.

(sino, $\exists\, n > 0$ y E_n con $m(E_n) > 0$ tq $f > 1/n$ en $E_n \Rightarrow \frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq f$.)

Funciones Riemann integrables: Acabamos de ver que las integrables Riemann son medibles y las integrales coinciden.

Además, las integrables Lebesgue (al menos acotadas de sop. acotado) son cerradas por límites puntuales, incluso ctp.

PASO 3 Funciones no negativas

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ medible

definimos $$\int f\,dm = \sup\left\{ \int g\,dm : \ g \leq f \ \text{medible, acotada de soporte acotado (o de medida finita)} \right\}$$

Decimos que f es integrable si $\int f\,dm < \infty$

Propiedades: Sean f, g medibles no negativas;

(i) $\int (af+bg) = a\int f + b\int g \quad \forall\, a,b \geq 0.$

(ii) $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$

(iii) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g.$

(iv) triangular no tiene sentido acá; pero

- g integrable y $0 \leq f \leq g \Rightarrow f$ tb
- f integrable $\Rightarrow m(f=\infty)=0$
- Si $\int f = 0 \Rightarrow f=0$ m-ctp.

dem: Hay que probar (i) (resto obvio)

Mult. por escalares es obvio $\Rightarrow$ miramos $\int f+g = \sup\{\int \hat{\varphi} : \hat{\varphi} \leq f+g \cdots\}$

Sean $\varphi \leq f$, $\psi \leq g \Rightarrow \varphi + \psi \leq f+g \Rightarrow \int f+g \geq \int f + \int g.$

Para la otra, fijamos ε y $\eta \leq f+g$ tq $\int f+g \leq \left(\int \eta\right) + \varepsilon$

Sea $\eta_1 = \min\{f, \eta\}$ y $\eta_2 = \eta - \eta_1 \leq g$

$$\Rightarrow \int f + \int g \geq \int \eta_1 + \int \eta_2 = \int \eta \geq \left(\int f+g\right) - \varepsilon \quad //$$

<u>Ejemplo peligroso</u> $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$\Rightarrow \int f_n = 1 \quad \forall n \quad$ pero $\int \lim f_n = 0.$

<u>Teorema</u> (Lema de Fatou) $\{f_n\}$ medibles no negativas y sea $f = \liminf f_n$

Entonces $\int f \leq \liminf \int f_n.$

<u>dem</u>: Tomando $\hat{f}_n = \inf_{k \geq n} f_k$ tenemos que $\hat{f}_n \longrightarrow f$ m-ctp

Por otro lado, $\int \hat{f}_n \leq \int f_n \Rightarrow$ OK.

Sea $0 \leq g \leq f$ acotada sop. acot. tq $\int g \geq \int f - \varepsilon.$

Si $g_n = \min\{g, \hat{f}_n\} \Rightarrow g_n \longrightarrow g$ m.ctp.

$\Rightarrow \int g_n \longrightarrow \int g$ (conv. acotada)

$g_n \leq \hat{f}_n \Rightarrow \int g \leq \liminf \int \hat{f}_n \leq \liminf \int f_n. \quad \forall \varepsilon \Rightarrow$ OK. //

<u>Corolario</u> (Convergencia Monótona) Si $f_n \leq f \;\forall n$ (funciones medibles y positivas)

y $f_n \to f$ m-ctp $\Rightarrow \lim \int f_n = \int f.$

(en part, si $f_n \nearrow f \Rightarrow$ vale eso)

<u>Ejemplo</u>: OJO $f_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \int f_n = -\infty \quad \forall n$ pero $\int \lim f_n = 0.$

<u>Corolario</u> a_n funciones medibles $\geq 0 \Rightarrow$

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n(x)\, dm(x).$$

ÚLTIMO PASO ~~fuera~~

Primero $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible $\Rightarrow$

$$f = f^+ - f^- \quad \text{con} \quad f^+ = \max\{f,0\} \quad f^- = \max\{-f,0\}$$

~~Decimos que~~ Si f^+ o f^- son integrables, ~~se~~

$$\int f\,dm = \int f^+ - \int f^-$$

$f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$
$\Rightarrow f_1 + g_2 = g_1 + f_2 \Rightarrow \int f_1 + \int g_2 = \int f_2 + \int g_1$
$\Rightarrow$ OK.
$\Downarrow$
da aditividad

(Nota: Si $f = g - h$ con $g \geq 0$ y $h \geq 0$ $\Rightarrow$ la integral da lo mismo)
y una de las dos integr.

Def: f es integrable si $|f| = f^+ + f^-$ lo es. $(f \in L^1(\mathbb{R}^d, m))$
(def. mod 0)

Prop: Lineal, aditiva, monótona y cumple desig Δ.

Prop: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d, m) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$:

(1) $\exists B \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita tq $\displaystyle\int_{B^c} |f| < \varepsilon$ (de hecho, B puede ser $B(0,N)$ para N suf. gde)

(2) $\exists \delta > 0$ tq $\displaystyle\int_E |f| < \varepsilon$ si $m(E) < \delta$. (CONTINUIDAD ABSOLUTA)

dem: (1) Suponemos $f \geq 0$ $\Rightarrow$ por aditividad $\displaystyle\int_{B(0,N+1)\setminus B(0,N)} f$ es serie convergente.

(2) $f \geq 0$ $f_N = \min\{f(x), N\} \Rightarrow f_N \nearrow f \Rightarrow \exists E_N$ tq $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d \setminus E_N} f - f_N \leq \varepsilon/2$.

Ahora $\delta < \varepsilon/4N \Rightarrow$ si $m(E) < \delta$

~~$\Rightarrow \int_E f = \int_{E\cap E_N} f + \int_{E\cap E_N^c} f$~~ $\displaystyle\int_E f = \int_E f - f_N + \int_E f_N < \varepsilon.$ //

Teorema (Convergencia dominada)

Sea $\{f_n\}$ medibles con $f_n \to f$ m.c.t.p y tq $|f_n| \leq g$ con $g \in L^1(\mathbb{R}^d, m)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| \, dm \longrightarrow 0 \quad \left(\text{en particular } \int f_n \longrightarrow \int f.\right)$$

dem: $\forall N > 0 \quad E_N = \{x : |x| \leq N \text{ y } g(x) \leq N\}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tq $\displaystyle\int_{E_N^c} g \, dm < \varepsilon/4$

En E_N, f_n estan todas acotadas por N

$$\Rightarrow \int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon/2 \quad \text{si } n \text{ es gde.}$$

$$\Rightarrow \int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2\int_{E_N^c} g \underset{\text{si } n \text{ gde.}}{\leq} \varepsilon$$

//

Nota: Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \Rightarrow f(x) = u(x) + i v(x)$

decimos $f \in L^1(\mathbb{R}^d, m)$ si $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ es integrable

y $\displaystyle\int f = \int u + i \int v.$

Como $|f + g| \leq |f| + |g|$ tenemos que $L^1(\mathbb{R}^d, m)$ es e.v.

tanto en $\mathbb{C}$ como en $\mathbb{R}$.

El espacio $L^1(\mathbb{R}^d, m)$

Definimos una norma: $\|f\| = \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, dm$

Si miramos las funciones medibles, esto no es una norma pues no cumple que $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$ (el resto de las prop. es fácil)

Para eso, notamos que $\hat{O} = \{ f$ medible e integrable $: \|f\| = 0\}$ es un subespacio y formalmente definimos $L^1(\mathbb{R}^d, m) = \{f \text{ integrable}\} / \hat{O}$.

En el cociente, $\|\cdot\|$ sí es una norma. (Side remark: convergencia c.t.p. es como top prod. No metrizable siquiera)

<u>Teorema</u>: $L^1(\mathbb{R}^d, m)$ es completo para $\|\cdot\|$ (i.e. es un espacio de Banach)

<u>dem</u>: $\{f_n\}$ cauchy para $\|\cdot\|$. Problema, encontrar candidato a límite.

Truco principal, considerar subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tq $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1} < 2^{-k}$.

Tomamos $f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ que a priori no sabemos esté definida m-ctp (si no converge, hacemos que valga 0)

Sea $g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

Por convergencia monótona tenemos que $\int g < \infty \Rightarrow g < \infty$ m-ctp

$\Rightarrow f$ bien definida m-ctp (pues series convergen absolutamente)

Además $\left| f_{n_1} + \sum_{k=1}^{N} f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| \leq g \;\; \forall N$ $\Rightarrow$ por convergencia dominada tenemos que f es límite de f_{n_k} en L^1 $\Rightarrow$ es límite de f_n tb. //

<u>Consecuencia</u>: Si $f_n \to f$ en L^1 $\Rightarrow$ subsucesión que converge c.t.p.

Si $f_n \to f$ ctp + dominada $\Rightarrow$ converge en L^1.

<u>Ej</u>: Simples, escalones y continuas de soporte compacto son densas en L^1.

Convergencia en medida

$f_n \to f$ en medida si $\forall \varepsilon > 0 \quad m(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n]{} 0$

Ejercicio: . $f_n \to f$ en medida $\Rightarrow$ $\exists$ subsucesion que converge m-ctp.

- $f_n \to f$ m-ctp $\Rightarrow$ converge en medida.
  ~~sop~~ soporte de todas medida finita

Mostrar los contraejemplos.

- $\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ en medida o m-ctp} \\ \text{y dominada} \end{array}\right\} \Rightarrow$ converge en L^1.

DIGRESION MENOR SOBRE ESPACIOS L^p en GRAL

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado, completo para la norma.

[CRITERIO ABSTRACTO Un espacio vectorial normado V es de Banach si y solo si
$\forall \{a_n\} \subseteq V$ tq $\sum_n \|a_n\| < \infty \quad \exists a \in V$ tq $\sum_{n=1}^{N} a_n \xrightarrow[N]{} a$.]

dem: ($\Rightarrow$) Obvio pues $\sum_{n=1}^{N} a_n$ es de Cauchy.

($\Leftarrow$) Si $\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow$ tiene subsucesión tq $\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < 1/2^k$

$\Rightarrow a_{n_j} = a_1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_{n_{j+1}} - a_{n_j}$ es convergente pues $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\| < \infty$. //

Ejemplo de Espacio de Banach: . $C^0(X) \leftarrow$ las continuas de un e.m. compacto con

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

- Espacios ℓ^p con $1 \le p \le \infty$ es $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones complejas (o reales)

tq $\quad \|a\|_p = \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad (\|a\|_\infty = \sup |a_n|)$

(el $1/p$ afuera es pa que sea norma)

En ℓ^∞ hay subespacios cerrados: $c = \{$sucesiones con límite$\}$ $\quad c_0 = \{$sucesiones con límite $0\}$

Dibujar las bolas en $\mathbb{R}^n$, ver las diferencias.

¿Pq ℓ^2 es el único Hilbert?

Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$L^p(E,dx) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R}) \text{ medibles tq } \int_E |f|^p < \infty \right\} \Big/ \{f = g \text{ m-ctp}\}$$

Definimos $\quad \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} \quad$ o $\quad \|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ m-ctp}\}$

Es una norma (no trivial para $1 < p < \infty$)

Teorema (desigualdad de Minkowski) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Para $1<p<\infty$ la igualdad se verifica si y solo si f y g son colineales.

dem: Supongamos primero que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$

queremos ver que $\|tf + (1-t)g\|_p \leq 1 \quad \forall t \in (0,1)$

pero $\displaystyle \int |tf + (1-t)g|^p \overset{\text{convex de } x^p}{\leq} \int t|f|^p + (1-t)|g|^p \leq 1$

(si $p>1$ la desigualdad es rígida)

Ahora, si f y g son cualquiera

$$\Rightarrow \hat{f} = \frac{f}{\|f\|_p} \text{ y } \hat{g} = g/\|g\|_p \Rightarrow \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} = \hat{f} \cdot \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \hat{g} \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$$

y se obtiene lo deseado. //

Obs: Si $m(E) < \infty \Rightarrow L^\infty(E) \subseteq L^p(E) \subseteq L^q(E) \subseteq L^1(E)$

si $\infty > p > q > 1$.

Si $m(E) = \infty$ ninguna inclusión. (Ancho vs. Alto)

Por otro lado $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q \subset \ell^p \subseteq \ell^\infty$.

Teorema Para todo $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(E)$ es un espacio de Banach.

dem: Ya vimos que es un e.v. normado

Sea $\{f_n\}$ tq $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty$

Minkowski + conv. monótona

Sea $F(x) = \sum_{n\geq 0} |f_n(x)| \Rightarrow \|F\|_p \leq \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty$

$\Rightarrow F \in L^p$ y es finita m-ctp

$\Rightarrow f = \sum f_n$ tb es finita m-ctp pues $|f(x)| \leq F(x)$

Por otra parte $\|f - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_p \leq \sum_{N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \longrightarrow 0$.

Obs: Las funciones simples son densas en $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$.

$\boxed{\text{escalón, continuas, suaves}}$ ← comentar como se simplifica ahora.

En L^∞ solo las simples si $m(E) < \infty$. Sino, las continuas son un cerrado.

Se cumple que se pueden distinguir via los "duales":

Thm (Riesz) Si $p \neq \infty$ y q es tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (i.e. si $p = 1 \Rightarrow q = \infty$)
Entonces $(L^p)^* \cong L^q$

o L^p con $1 < p < \infty$ (pues son reflexivos)

Esto permite distinguir L^1 de L^2 .... pero L^p de L^q hay que trabajar un poco más

Espacios de Hilbert son todos iguales...

Teorema de Fubini

Sea $d = d_1 + d_2$ con $d_1, d_2 \geq 1$

Escribimos $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ y escribimos $(x,y) \in \mathbb{R}^d$ con $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$

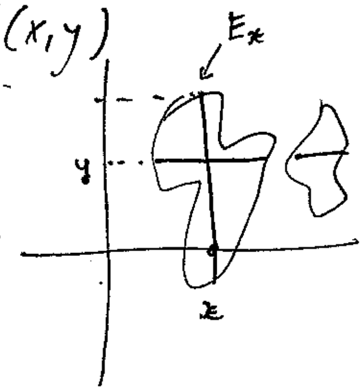
Para $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, definimos, para $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ la función

$$f^y : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C} \quad tq \quad f^y(x) = f(x,y).$$

<u>Nota</u>: No tiene pq estar definida si f está definida c.t.p. ya que $m(\mathbb{R}^{d_1} \times \{y\}) = 0$.

Definimos análogamente $f_x : \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{C} \ / \ f_x(y) = f(x,y)$

Para conjuntos (o func. características) definimos



$$E \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow \begin{array}{l} E^y = \{x : (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \\ E_x = \{y : (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{d_2} \end{array}$$

<u>Teorema</u> (Fubini) Supongamos $f: \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{C}$ es integrable (en part medible)

entonces, para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$:

(i) f^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$

(ii) La función $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dm_1(x)$ es integrable en $\mathbb{R}^{d_2}$

Y de hecho, se cumple que:

(iii) $$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dm_1(x) \right) dm_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dm(x,y)$$

(Obviamente, el teo es simétrico en x e y ...)

dem: Lo más difícil es mostrar que las funciones características verifican el teorema, luego, es cuestión de tomar ~~funciones~~ funciones simples y pasar al límite. Nota, no vamos a trabajar en L^1 a priori, eso queda pronto a posteriori.

Paso 1: Las características de cubos verifican el teorema. (lo mismo rectángulos, en particular, bordes de cubos)

dem: Trivial, si se quiere, aplicar calculo 2. //

Para mejorar la eficiencia de la prueba, consideramos $\mathcal{F} = \{ f \text{ tq vale el teorema} \}$

Acabamos de ver que $\mathcal{F}$ contiene las características de los cubos.

Paso 2: $\mathcal{F}$ es cerrado por combinaciones lineales.

dem: La funcion $(\alpha f + g)^y = \alpha f^y + g^y \Rightarrow$ todo camina. //

Podemos todo el tiempo pensar que f va a $\overline{\mathbb{R}}$ (dps tomamos parte real e imag)

Paso 3: Si $f_n \nearrow f$ (todo pto) y f_n ~~cumple ...~~ $\in \mathcal{F} \Rightarrow f \in \mathcal{F}$. (similar $f_n \searrow f$)

dem: Podemos suponer $f_n \geq 0$ reemplazando por $f_n - f_1 \nearrow f - f_1$

Por cada n, tenemos A_n de medida 0 tq afuera f_n^y es integrable (en part. medible)

Si $y \notin \bigcup A_n \Rightarrow f_n^y \nearrow f^y$ medible e integrable (podría integrar ∞ por TCM).

Por otro lado $f_n \nearrow f \Rightarrow \int f_n \nearrow \int f$ (TCM)

Si $g_n(y) = \int f_n^y \, dx \Rightarrow g_n \nearrow g = \int f^y$ (TCM)

Como $\int g_n(y) \, dy = \int f_n$ tenemos que $\int g_n(y) \to \int g \, dy$ (TCM)

$\searrow \int f$

Entonces completamos esto. Si f es integrable $\Rightarrow$ todo es finito y listo.

(nota: si f es positiva e integra ∞, este arg. tb da info) //

Paso 4: Las características de abiertos pertenecen a $\mathcal{F}$.

dem: Los abiertos son unión casi-disjunta de cubos. $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ (cd)
Los bordes de los cubos tb pertenecen a $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ las sumas parciales estan en $\mathcal{F}$
y crecen a $\chi_{\mathcal{O}}$ $\Rightarrow$ TCM. y listo.
(o el paso anterior)

Paso 5: Si E tiene medida finita y es intersección de abiertos (numerable) $\Rightarrow$ $\chi_E \in \mathcal{F}$.

dem: $E = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{O}_n$ (podemos suponer $m(\mathcal{O}_1) < \infty$ tomando un abierto de medida finita que contenga a E)

Entonces, $\underbrace{\chi_{\bigcap_{n=1}^{k} \mathcal{O}_n}}_{\in \mathcal{F}} \searrow \chi_E$ y son integrables $\Rightarrow$ $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Paso 6: Si $m(E)=0 \Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}$.

dem: Tomamos $\mathcal{O}_n \supseteq E$ tq $m(\mathcal{O}_n) < 1/n \Rightarrow G = \bigcap_n \mathcal{O}_n \supseteq E$
y G mide 0. Como es int. de abiertos, $\chi_G \in \mathcal{F}$. Por otro lado
$0 \leq \chi_E \leq \chi_G \Rightarrow \chi_E^y$ integra 0 para m_2-ctp y ...

Paso 7: Para todo E medible, con medida finita, $\chi_E \in \mathcal{F}$.

dem: Sea $\mathcal{O}_n \supseteq E$ tq $m(\mathcal{O}_n - E) < 1/n \Rightarrow G = \bigcap \mathcal{O}_n \supseteq E$
y se cumple $m(G \setminus E) = 0$, entonces χ_G y $\chi_{G-E} \in \mathcal{F}$
y $\chi_E = \cancel{\chi_{G\setminus E}}\ \chi_G - \chi_{G\setminus E}$

Paso final: Toda f integrable.

dem: Por linealidad, podemos suponer $f \geq 0$. Aproximamos por simples que están en $\mathcal{F}$ y listo.

De hecho, la prueba da el siguiente teorema que a veces es útil para usar el otro (aplicándolo a $|f|$)

Teorema (Tonelli) Sea $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ medible $\Longrightarrow$ para m_2-ctp y vale que: (i) f^y es medible en $\mathbb{R}^{d_1}$

(ii) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es medible en $\mathbb{R}^{d_2}$

y se cumple que: (iii) $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f$ (donde el valor puede ser $+\infty$)

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ~~medible~~ $\in L^1(\mathbb{R}^d, dm)$ definida m-ctp.

¿Podemos "conocer" el valor de f?

Prop: Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua $\to$ $f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dm(y)$

dem: Una función continua es constante a pequeña escala. //

¿Será que algo parecido ocurre para $f \in L^1$ cualquiera? Obviamente solo puede dar info m-ctp. (Idea obvia; usar Luisin....)

Dificultad: Interacción de parte de continuidad y no continuidad. En definitiva, las bolas tienen una componente geométrica. (Recordar conjunto que mide positivo y complemento tb en toda bola.)

Para controlar el "error" se usa la llamada "desigualdad maximal"

Son desigualdades 'a priori' que permiten luego obtener lo deseado.

La función maximal de Hardy-Littlewood:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dm)$, definimos:

$$f^*(x) = \sup_{\substack{x\in B \\ B \text{ bola}}} \left\{ \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,dy \right\} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^d$$

[Nota: En las bolas se juega la geometría. Es claro que alguna restricción hay que poner (sino f^* sería constante!), luego discutiremos cuales tienen sentido.

comparar con Tchevichev: Si $f \in L^1$ $\Rightarrow m(\{|f|>\alpha\}) \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$.

[Teorema: f^* es medible, ~~integrable~~ cumple $f^* < \infty$ m-ctp y cumple:

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \qquad \forall \alpha > 0$$

(donde A se puede elegir como 3^d)]

[Nota: Esperamos que en gral (m-ctp) vale $f^* \geq |f|$. Lo que dice el teorema es que no es mucho más grande. (Aunque no prueba que $\int f^* < \infty$!!)]

dem: f^* medible es fácil: $\{f^* > \alpha\}$ es de hecho abierto. (es supremo)

La ~~integrabilidad~~ finitud de f^* va a ser consecuencia de la desigualdad pues

$$\{f^* = \infty\} \subseteq \{f^* > \alpha\} \ \ \forall \alpha \ \Rightarrow \ m(\{f^* = \infty\}) \leq m(\{f^* > n\}) \ \ \forall n \underset{}{\to} 0.$$

[Lema (cubrimiento 1) Sea $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$ colección de bolas en $\mathbb{R}^d$ entonces, $\exists$ subcolección de bolas disjuntas $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k} \in \mathcal{B}$ tal que:

$$m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) = 3^d\, m\left(\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}\right)$$
]

dem: Argumento codicioso:

Se basa en la siguiente observación sencilla: si radio $B' \leq$ radio B y $B \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow B' \subseteq 3B$ (bola de igual centro y 3 veces el radio)

Entonces, tomamos B_{i_1} como una bola de $\mathcal{B}$ de radio maximal.

luego B_{i_2} como de radio maximal dentro de las que no cortan B_{i_1} ....

y B_{i_j} como la de radio maximal dentro de las que no cortan $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_{j-1}}\}$.

El proceso se acaba por ser $\mathcal{B}$ finita.

Por la observación inicial, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} 3B_{i_j}$ que da lo deseado.
$(m(3B) = 3^d m(B))$

Ahora podemos mostrar el teorema:

Sea $x \in \{f^* > \alpha\} \Rightarrow \exists B_x$ bola que contiene a x tal que

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dm(y) > \alpha$$

$$\left(\Rightarrow m(B_x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\, dm(y) \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}\right)$$

Sea $K \subseteq \{f^* > \alpha\}$ compacto cualquiera $\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{x \in \{f^* > \alpha\}} B_x$ (Obvio)

$\Rightarrow$ hay subcubrimiento finito y por lema de cubrimiento vemos que

$$m(K) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{x_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_j}} |f(y)|\, dm(y) \overset{\text{disjuntas}}{=}$$

$$= \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup B_{x_j}} |f(y)|\, dm(y) \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$ Esto es indep del compacto

$\Rightarrow$ OK.

Teorema (Diferenciación de Lebesgue)

Si f es integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dm(y) = f(x) \quad \text{para } m\text{-ctp } x.$$

dem: Sea $$h(x) = \limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dm(y) - f(x)\right|$$

que es medible y ≥ 0. Entonces, alcanza ver que

$$m(\{h>\alpha\}) = 0 \quad \forall\, \alpha>0. \quad \text{Fijamos entonces } \alpha>0.$$

Tomamos $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1}} f$ funciones continuas de soporte compacto.

Sabemos que $\forall n$, $$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B g_n(y)\,dm(y) = g_n(x) \quad \forall x.$$

Escribimos (sumando y restando $g_n(x)$ y $\frac{1}{m(B)}\int g_n(y)$)

$$\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dm(y) - f(x) = \frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-g_n(y))\,dm(y) + \overbrace{\frac{1}{m(B)}\int_B g_n(y)\,dm(y) - g_n(x)}^{\to 0}$$

$$+\,g_n(x) - f(x)$$

Entonces, $h(x) \leq (f-g_n)^*(x) + |g_n(x) - f(x)|$

func. maximal.

$$\Rightarrow \{h>\alpha\} \subseteq \underbrace{\{(f-g_n)^*>\alpha\}}_{A_\alpha} \cup \underbrace{\{|g_n-f|>\alpha\}}_{B_\alpha}.$$

Por H-L $\quad m(A_\alpha) < \frac{3^d}{\alpha}\|f-g_n\|_{L^1}$

Tchevichev: $\quad m(B_\alpha) < \frac{\|g_n-f\|_{L^1}}{\alpha}$

//

Algunos comentarios/consecuencias:

1) Vale para $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^d, dm)$ (i.e. tq $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists B_x$ bola tq $f\chi_{B_x} \in L^1$) pues es resultado local.

2) Vale para conjuntos que "se achican regularmente"

$\{U_\alpha\} \to x$ regularmente si
- $\operatorname{diam} U_\alpha \to 0$
- $U_\alpha \to x$
- $m(U_\alpha) > c\, m(B)$ con B bola centrada en x que contiene a U_α. (c indep de α)

3) No vale para cualquier conjunto: (hay ejemplo concreto en el práctico, pero explican el fenomeno) ← e.g. homeos que llevan conj de medida 0 en >0. aunque esto no da el asunto. Conjuntos de Nikodym, Bases de Vitali.... etc

4) Se deduce un corolario muy interesante por si mismo:

Teorema (densidad de Lebesgue) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible $\Rightarrow$ casi todo punto de E es de densidad

Si $\{U_\alpha\} \to x$ regular

$$\Rightarrow \frac{m(E \cap U_\alpha)}{m(U_\alpha)} \xrightarrow[\alpha]{} 1$$

no hay conjuntos "equiprobables"

Se puede demostrar directamente. La desig. de H-L. es crucial en part. cuando f es no acotada. Si E medible y F unión de cubos que aproxima, queda cota con $m(E\Delta$

DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}$

Hay funciones (continuas) que no son derivables en ningún punto, se pueden construir abstracta o bastante concretamente (ver práctico).

Así como vimos que $\forall f \in L^1$ se cumple que $\frac{d}{dt}\int f = f$ (Teo de dif de Lebesgue)

queremos el análogo de $f = \int f'$, pero por las consideraciones encima, esto es más delicado.

Vamos a introducir las funciones de variación acotada.

Motivación: ¿Cómo se define la "longitud de una curva"? ¿Qué pasa si da ∞?
Esto es un poco análogo, pues $\int \sqrt{1+(f')^2}\,dt$ da la "longitud" del gráfico de f.... cual es la clase natural de funciones donde esto tiene sentido.
El concepto de rectificabilidad es pertinente (dice que el gráfico tiene long. bien definida)

$$\updownarrow$$

Variación acotada

Sea $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, si $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ es una partición,

definimos $\quad Var\{F, \{t_0, \dots, t_N\}\} = \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$

$$y \quad Var(F) = \sup_{a=t_0<\dots<t_N=b} \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \in [0, +\infty].$$

Decimos que F es de variación acotada si $Var(F) < \infty$.

Obs: • Var es una norma en el e.v. de funciones de variación acotada / constantes (tienen variación $= 0$.)
(ejercicio: demostrar esto; ¿es completa?)

• Variación acotada no implica continua (ej: calcular $Var(\chi_{[0,1]})$)

• Si pensamos en F como la parametrización de una curva en $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ tenemos que la curva es rectificable $\Leftrightarrow$ F es de variación acotada.

Prop: Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ no decreciente (i.e. $t\leq s \Rightarrow F(t)\leq F(s)$)
entonces $\mathrm{Var}(F) = F(b)-F(a)$ (si es no-creciente $\Rightarrow \mathrm{Var}\,F = F(a)-F(b)$)

dem: Ejercicio; para toda partición da igual. //

Prop: Si $F = \int_a^t f(s)\,ds$ con $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ integrable

$\Longrightarrow$ F es de variación acotada y $\mathrm{Var}\,F = \int_a^b |f| = \|f\|_{L^1}$.

dem: No lo vamos a usar todavía $\Rightarrow$ ejercicio. //
(que es variación acotada es fácil.)

La propiedad clave de las funciones de variación acotada es:

Teorema: $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada si y solo si $\exists\, F^{\uparrow}$ y $F^{\downarrow}$ funciones no-decrecientes acotadas tq $F = F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$. (caso complejo es análogo con partes real e imaginaria)

dem ($\Leftarrow$) Obvio.

($\Rightarrow$) Definimos
$$F^{\uparrow}(x) = \left[\sup_{a=t_0<\dots<t_N=x} \sum_{j=1}^{N} \max\{F(t_j)-F(t_{j-1});0\}\right] + F(a)$$
y
$$F^{\downarrow}(x) = \sup_{a=t_0<\dots<t_N=x} \sum_{j=1}^{N} \max\{-(F(t_j)-F(t_{j-1}));0\}$$

Ambas son obviamente no decrecientes.

Afirmamos que $F(x) = F^{\uparrow}(x) - F^{\downarrow}(x)$; para esto basta notar que un refinamiento de la partición hace crecer las cantidades en ambos supremos, entonces, fijando $\varepsilon>0$, tomamos partición común que se acerque al supremo a menos de ε y cuando los sumamos queda la igualdad (a menos del 2ε) por una suma telescópica que cancela los términos //

Nota: $\boxed{\mathrm{Var}(F) = F^{\uparrow}(b) + F^{\uparrow}(b) - F(a)}$ $\leftarrow$ ejercicio

Teorema: Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) de variación acotada $\Rightarrow$

F es <u>derivable</u> m-ctp. ~~y se cumple que~~

Por el Teorema anterior, esto se deduce del siguiente Teorema (que tiene más información):

Teorema(*): Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ no-decreciente ~~y~~ entonces F es derivable m-ctp y se cumple que $\int_a^b F' \leq F(b)-F(a)$ (en particular, $F'\in L^1([a,b])$)
(con derivada ≥ 0)

<u>Nota</u>: Este es uno de los teoremas más profundos del curso!

- Función de Cantor muestra que la desigualdad puede ser estricta (en ese caso $F'\equiv 0$ m-ctp)

Vamos a usar un refinamiento del lema de cubrimiento de Vitali: (vale en $\mathbb{R}^d$, pero lo enunciamos solo en $\mathbb{R}$)
ponerle nombre "cubrim. de Vitali"

Teorema (Vitali) Sea $E\subseteq\mathbb{R}$ de medida finita y positiva y sea $\mathcal{B}$ un <u>cubrimiento por ~~abiertos~~ intervalos de E</u> tq para todo $x\in E$ y $r>0$ $\exists I\in\mathcal{B}$ tq $I\subseteq(x-r,x+r)$. Entonces, $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ colección finita $\{I_1,\dots,I_N\}$ de intervalos <u>disjuntos</u> tq $m(E\,\Delta\,\bigcup_{i=1}^N I_i)<\varepsilon$.

<u>dem</u>: Escribimos $K\subseteq E\subseteq\mathcal{O}$ con K compacto, $\mathcal{O}$ abierto y $m(\mathcal{O}\setminus K)<\varepsilon/10$.
Eliminando intervalos de $\mathcal{B}$ tenemos que es cubrimiento de K de forma tal que todo intervalo está contenido en $\mathcal{O}$.
~~Tomamos cubrimiento finito de K y con finitos intervalos disjuntos cubrimos $m(K)/3$. Sacando los intervalos tenemos un nuevo compacto $K_1 \subset K$ volcubierto que si estamos dispuestos a patch~~ Podemos ordenar los intervalos de $\mathcal{B}$ en orden decreciente de longitud (podemos suponer sin pérdida de gen de $\#\mathcal{B}=\#\mathbb{N}$) y aplicar el algoritmo indefinidamente; o bien en <u>finitos pasos</u> cubrimos K, o bien continua para siempre. Afirmo que la unión de los intervalos

con los extremos agregados cubre a K. ~~pues esto~~

Notar que como $\# \mathcal{B} = \# \mathbb{N}$ sabemos que la longitud tiende a 0 entonces, si hubiese un punto fuera de la unión, como ~~...~~ esta en algún intervalo de $\mathcal{B}$ con cierta longitud y disjunto de la union de los escogidos, lo tendríamos que haber elegido antes $\Rightarrow$ absurdo.

CONCLUSIÓN $K \subseteq \bigsqcup_n^{disj} I_n \ (\mathrm{mod}\ 0)^{\subseteq G}$ con $I_n \in \mathcal{B}$.

Entonces, una suma finita cubre a menos de ε. //

Demostración de (*): $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no-decreciente.

Para $I = (x,y) \subseteq [a,b]$ definimos $D(I) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Notar primero que F tiene a lo sumo numerables puntos de discontinuidad.

Suponemos primero que F es continua entonces y consideramos

$E = \{x \in (a,b) : F' \text{ no existe}\}$ $\left(\text{Recordar: } F'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right.$ contamos $F' = \infty$ como existir notar que $\left.\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \geq 0 \ \forall h.\right)$

$E = \bigcup_{r<s} E_{r,s}$ con $r,s \in \mathbb{Q}$ y $E_{rs} = \{x : \exists x \in I_i, J_j \text{ y } D(I_i) < r < s < D(J_j)\}$

cubrimientos de Vitali por I_i y J_j

Afirmación: $m(E_{r,s}) = 0 \ \forall r<s$.

dem: Vamos a mostrar que $s\, m(E_{rs}) \leq m(F(E_{rs})) \leq r\, m(E_{rs})$ que implica lo deseado pues $s > r$.

Tenemos un cubrimiento de Vitali (como en el Teorema) de E_{rs} por intervalos I tq $D(I) < r$. Consideramos $\varepsilon > 0$ y union finita tq $m(E_{rs} \triangle \bigcup_{i=1}^N I_i) < \varepsilon$

$\Rightarrow m(E_{rs}) + \varepsilon > \sum_{i=1}^N m(I_i)$

Aplicamos (esto es crucial) Vitali al cubrimiento por J's en $E_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^N I_i \Rightarrow$

Obtenemos unión disjunta de J's contenidos en $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ de forma que

$$\sum_{j=1}^{N'} m(J_j) > m(E_{rs}) - 2\varepsilon.$$

Por definición, obtenemos $D(J) \geq s$.

$$s\sum m(J_j) \overset{D(J)\geq s}{\leq} \sum m(F(J_j)) \overset{\text{por estar contenidos}}{\leq} \sum m(F(I_i)) \overset{D(I)\leq r}{\leq} r\sum m(I_i)$$

Obtenemos $$\frac{m(E_{rs})-2\varepsilon}{m(E_{rs})+\varepsilon} \leq \frac{\sum m(J_j)}{\sum m(I_i)} \leq \frac{r}{s} < 1 \quad \forall \varepsilon$$

$$\Longrightarrow m(E_{rs}) = 0.$$

De esto deducimos que $m(E)=0 \Rightarrow F'$ existe m-ctp. (puede ser ∞)

Por otra parte, un argumento similar da que $F' < \infty$ m-ctp

(pues por Vitali, dado $\varepsilon > 0$, si miramos $E_N = \{x : F'(x) > N\}$ y $N_\varepsilon >> F(b)-F(a)$ vemos que $m(E_N) < \varepsilon$. ...)

Para ver que vale la desigualdad, usamos Fatou. definimos $F(x)=F(b)$ si $x>b$.

Acabamos de ver que $F_n = [F(x+1/n) - F(x)]n \longrightarrow F'$ m-ctp.

$$\Rightarrow \lim \int F_n \geq \int F' \quad \text{y} \quad \int F_n = n\left[\int_a^b F(x+1/n) - \int_a^b F(x)\right] = n\left[\int_b^{b+1/n} F(b) - \int_a^{a+1/n} F(x)dx\right]$$

$$= F(b) - n\int_a^{a+1/n} \underbrace{F(x)}_{\text{no decreciente}}dx \leq F(b) - F(a)$$

Falta tratar los <u>numerables saltos</u>: tienen medida 0 y no afectan el resto.

Continuidad absoluta

con 1 intervalo es la continuidad uniforme.

$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>absolutamente continua</u> si $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$

de forma tal que si (a_i,b_i) son intervalos disjuntos tales que $\sum(b_i-a_i)<\delta \Rightarrow \sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$

(<u>Nota</u>: Es a priori un poco más fuerte que decir que si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tq $E\subseteq[a,b]$ cumple que $m(E)<\delta \Rightarrow m(f(E))<\varepsilon$. Pero ~~como~~ a posteriori f es de variación acotada $\Rightarrow$ diferencia de crecientes y para esas coincide, es lo mismo).

<u>Ejercicio</u>: • Si $f\in L^1([a,b]) \Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es abs. continua.

- Si f es abs. continua $\Rightarrow$ es de variación acotada ($\rightarrow f'$ existe m-ctp)
- Si no se pide que los intervalos sean disjuntos $\Rightarrow \sqrt{x}$ que es abs. cont no sería. (ver práctico.)

<u>Resultado clave es</u>:

> <u>Teorema</u>: Si F es absolutamente continua en $[a,b]$ y $F'(x)=0$ m-ctp
> $\Rightarrow F$ es constante.

<u>dem</u>: Fijamos $\varepsilon>0$ y $c\in[a,b]$. Tenemos un cubrimiento de Vitali de $[a,c]$ por intervalos $I=(x,y)$ tal que $D(I)=\dfrac{|F(y)-F(x)|}{y-x}<\dfrac{\varepsilon}{(c-a)2}$

Elegimos δ de cont. absoluta tq toda flia de int. disjuntos (a_i,b_i) de long total $<\delta$ cumple que $\sum|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon/2$

($I_i=(x_i,y_i)$ ordenados)

Por el <u>Teo de Vitali</u> $\exists\ I_1,\dots,I_N$ tales que $[a,c]\setminus\bigcup_{i=1}^N I_i$ mide $<\delta$

Entonces, tenemos que la variación total de F en esa partición es $<\varepsilon$, es decir:

$$|F(c)-F(a)|\le \underbrace{\sum_{i=1}^N|F(y_i)-F(x_i)|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{\sum_{i=2}^N|F(x_i)-F(y_{i-1})|+|F(x_1)-F(a)|+|F(c)-F(y_N)|}_{<\varepsilon/2}$$

$\Rightarrow$ ok. //

<u>Corolario</u>: Si $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) absolutamente continua $\Rightarrow$ F' existe m-ctp

y se tiene que $$F(x)=\int_a^x F'(t)\,dt + F(a)$$

<u>dem</u>: Ya ~~vimos que~~ $Var(F)<\infty \Rightarrow F'$ existe m-ctp y está en L^1

Para ver lo otro, sea $g(x)=\int_a^x F'(t)\,dt \overset{\text{abs. cont.}}{\Rightarrow}$ (pues $\int_a^b |F'(x)|dx \leq Var(F)$)

~~Flaz~~ la funcion $h=F-g$ es absolutamente continua

y $h'=0$ m-ctp $\Rightarrow h$ es constante como buscamos //

<u>Obs</u>: Lo que probamos da una biyeccion lineal

$$L^1([a,b],dm) \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{funciones abs. continuas} \\ \text{de } [a,b] \text{ tq } f(a)=0 \end{array} \right\}$$

via integración (siendo la inversa la derivada).

Es notable que esta biyeccion lineal es una isometría si dotamos L^1 con la norma $\|\cdot\|_{L^1}$ y las absolutamente continuas con $\|f\| = Var(f)$.

En particular muestra que las absolutamente continuas son completas con $Var(f)$.

(<u>Nota aparte</u>: Si restringimos a L^∞, manda a las funciones Lipschitz con la norma Lipschitz, ver práctico....)

MEDIDA ABSTRACTA

X conjunto.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un <u>álgebra</u> si es cerrado por complementos y uniones finitas ($\Rightarrow$ intersecciones finitas)

contienen $\{\emptyset, X\}$

una <u>σ-álgebra</u> cerrada por complementos y uniones numerables ($\Rightarrow$ intersecciones numerables)

Una <u>medida</u> (positiva) es una función:

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que si $E_1, \dots, E_n, -$ disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

(<u>Nota</u>: en particular, $\mu(\emptyset) = 0$)

<u>Ejemplos</u>: $\rightarrow$ La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ con σ-álgebra de Lebesgue o de Borel. Si $f \geq 0$ medible $\mu_f(E) = \int_E f \, dm$ es medida $m = \mu_{\mathbb{1}}$

$\rightarrow$ X conjunto, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y μ es la medida de <u>conteo</u> es decir $\mu(E) = \# E$. (con esta medida, las sumas son "integrales")

$\rightarrow$ Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es espacio de medida, podemos definir

$$\hat{\mu}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(E) = 0 \\ \infty & \text{si } \mu(E) > 0 \end{cases}$$

chequear que es medida. (pensar en $f \equiv \infty$ en el ejemplo 1)

Definimos μ siendo <u>σ-finita</u> si $X = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ con $\mu(A_n) < \infty$.

Para construir medidas, vamos a "copiar" lo hecho para la medida de Lebesgue...

Sea X un conjunto.

Una <u>medida exterior</u> μ_* en X es una función

$$\mu_*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty] \text{ tal que:}$$

(i) $\mu_*(\emptyset) = 0$

(ii) Si $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$

(iii) Si $E_1, \dots, E_n, \dots \Rightarrow \mu_*\left(\bigcup_{i\geq 0} E_i\right) \leq \sum_{i\geq 0} \mu_*(E_i)$

Dada una medida exterior μ_* en X decimos que un conjunto $E \subseteq X$ es <u>Caratheodory medible</u> (o medible) si se cumple que:

$$\mu_*(A) = \mu_*(E\cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \qquad \forall A \subseteq X$$

(<u>Ejercicio</u>: Chequear que la condición que pusimos para que un conjunto sea Lebesgue medible es equivalente a esta.)

<u>Nota</u>: . $\mu_*(A) \leq \mu_*(E\cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$ $\forall A$ por subaditividad siempre

$\Rightarrow$ para mostrar la medibilidad alcanza mostrar la otra desigualdad.

- Si $\mu_*(E) = 0 \Rightarrow$ es <u>medible</u> (pues $\mu_*(E\cap A) \leq \mu_*(E) = 0$
$\Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*(E\cap A) + \mu_*(E^c\cap A)$.)

<u>Teorema</u> Si μ_* es medida exterior $\Rightarrow$ el conjunto $\mathcal{Q} = \{E \subseteq X : E \text{ es medible}\}$ es una σ-álgebra y $\mu_*|_{\mathcal{Q}}$ es una medida.

$\boxed{\text{dem}}$: $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{Q}$ obviamente y es cerrado por complementos tb obvio.

Primero vamos a tomar uniones finitas de conjuntos ~~disjuntos~~, si $E_1, E_2 \in \mathcal{Q}$ ~~disjuntos y~~ $A \subseteq X \Rightarrow$

$$\mu_*(A) = \mu_*(E_1\cap A) + \mu_*(E_1^c \cap A) = \mu_*(E_1\cap E_2\cap A) + \mu_*(E_1\cap E_2^c\cap A) + \mu_*(E_1^c\cap E_2\cap A) + \mu_*(E_1^c\cap E_2^c \dots$$

Por subaditividad, usamos $(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$.

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cap E_2 \cup (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_1^c \cup E_2)$$

$$\Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu_*((E_1 \cup E_2)^c \cap A)$$

Esto muestra (por inducción) que $\mathcal{Q}$ es un álgebra.

Veamos que si $E_1 \cap E_2 = \phi \Rightarrow \mu_*$ es aditiva:

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \overset{\text{pues } E_1 \in \mathcal{Q}}{=} \mu_*(\underbrace{E_1 \cap (E_1 \cup E_2)}_{= E_1}) + \mu_*(\underbrace{E_1^c \cap (E_1 \cup E_2)}_{= E_2 \text{ por ser disj}})$$

$$= \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2)$$

De nuevo, pasa a uniones finitas disjuntas por inducción.

Para σ-álgebra ahora alcanza ver que es cerrado por uniones numerables disjuntas (pues ya es álgebra $\Rightarrow$ si $E_1, \ldots, E_N, \ldots$ conjuntos

$$\Rightarrow \bigcup E_i = \bigcup F_i \quad \text{con} \quad F_i = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j \;)$$

Sea entonces $\{E_i\}$ disj 2 a 2, definimos

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{y} \quad F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{. Sabemos que } F_n \in \mathcal{Q}\ \forall n.$$

y $\forall A \subset X$ vale $\mu_*(A \cap F_n) = \mu_*(E_n \cap (A \cap F_n)) + \mu_*(E_n^c \cap (A \cap F_n)) =$

$$= \mu_*(E_n \cap A) + \mu_*(F_{n-1} \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A \cap E_i)$$

Como $F^c \subseteq F_n^c\ \forall n$ vale que

$$\mu_*(A) = \mu_*(F_n \cap A) + \mu_*(F_n^c \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F_n^c \cap A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F^c \cap A)$$

Tomando límites se ve que

$$\mu_*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F^c \cap A) \geq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A) \geq \mu_*(A)$$

Entonces $F \in \mathcal{Q}$.

Tomando $A = F$ obtenemos ~~de~~ que $\mu_*(F) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E_i) \geq \mu_*(F)$ obteniendo la aditividad numerable.

Obs: La σ-álgebra de Carateodory tiene la propiedad de ser "Completa" respecto a $\mu = \mu_*|_{\mathcal{Q}}$; es decir si $\mu(F) = 0$ y $E \subseteq F \Rightarrow E \in \mathcal{Q}$. (Relacionado a la completitud de $L^p(X, \mu)$ a ser definido dps.

Esta no es exactamente la manera que definimos la σ-álgebra de Lebesgue, pero es equivalente.

Si μ_* es una medida exterior en un espacio métrico (X, d), decimos que es métricamente exterior si cumple que

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \quad \text{siempre que } d(A, B) > 0.$$

Teorema Si μ_* es una medida métricamente exterior, entonces los Borelianos de X son Caratheodory medibles ($\Rightarrow \mu_*$ induce una medida posta en la σ-álgebra de Borel)

dem: Alcanza ver que los cerrados son medibles. Sea F cerrado y $A \subseteq X$ cualquiera con $\mu_*(A) < \infty$. Sea

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : d(x, F) \geq 1/n\}$$

Como F es cerrado, tenemos que $F^c \cap A = \bigcup_n A_n$ ← que es una unión creciente.

Como $d(F\cap A, A_n) \geq 1/n$ tenemos

$$\mu_*(A) \overset{\text{monotonía}}{\geq} \mu_*((F\cap A)\cup A_n) \overset{\text{metric. ext.}}{=} \mu_*(F\cap A) + \mu_*(A_n)$$

(notar que $\mu_*(A) \leq \mu_*(F\cap A) + \mu_*(F^c\cap A)$ es siempre gratis)

Alcanza entonces ver que $\lim \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c\cap A)$

Sea $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$ las "coronas"

Entonces, $d(B_{n+1}, A_n) > 0$

Como $\bigcup_n B_{2n}$ y $\bigcup_n B_{2n+1} \subseteq F^c \cap A$ que tiene medida finita, tenemos que

$\sum_n \mu_*(B_n)$ es convergente.

Por otro lado

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c\cap A) \leq \mu_*(A_n) + \sum_{n+1}^{\infty} \mu_*(B_m)$$

lo que completa la prueba.

∎

[**Def**: Una medida en los Borelianos se llama usualmente <u>medida de Borel</u>.
Se dice que es de <u>Radón</u> si es finita en ~~bolas cerradas finitas~~ compactos.]

Prop: Sea μ medida de Borel finita en bolas de X de radio finito $\Rightarrow \forall E$ boreliano y $\varepsilon>0$ existe $F \subseteq E \subseteq \mathcal{O}$ con $\mathcal{O}$ abierto y F cerrado tq $\mu(\mathcal{O}\setminus F) < \varepsilon$.

<u>dem</u>: Veamos que los conjuntos que cumplen la proposición son una σ-álgebra. Cerrado por complementos es obvio y $\emptyset$ pertenece tb.
Para ver las uniones numerables, los abiertos no son problema, pero para los cerrados necesitamos la hipótesis:

<u>Af</u>: Si $\{F_n\}_n$ son cerrados $\Rightarrow \forall\varepsilon\ \exists \hat{F}$ cerrado tq $m(\bigcup_n F_n \setminus \hat{F}) < \varepsilon$.

<u>dem</u>: Notar que si $C_n = \overline{B_n} \setminus B_{n-1}$ con $B_n = B(x_0, n)$ con x_0 fijo

$$\Rightarrow \bigcup_n C_n = X. \text{ Además, } \mu(C_n) < \infty \ \forall n \text{ por hipótesis.}$$

Consideramos $n_K > 0$ tq $\mu\left(C_K \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) - \mu\left(C_K \cap \bigcup_{n=1}^{n_K} F_n\right) < \varepsilon/2^K$

Ahora $\hat{F} = \bigcup_K C_K \cap \bigcup_{i=1}^{n_K} F_n$ es un cerrado en $\bigcup_n F_n$

que cumple lo deseado. ∎

Ahora, si tenemos una unión numerable E_n de conjuntos que cumplen y fijamos $\varepsilon>0$ podemos fácilmente encontrar el cerrado y el abierto.
De forma similar, si E es abierto, tomamos $E = \mathcal{O}$ y para F tomamos puntos a distancias positivas de $\mathcal{O}^c$ que dependen de en que C_n estás y listo. (Usa de nuevo que es finita en bolas)
$C_n = \overline{B_n}\setminus B_{n-1}$ ∎

Teorema de Extensión

Un álgebra en X es una flia de subconjuntos de X que contiene al ϕ y es cerrada por uniones finitas & complementos.

Una premedida en un álgebra $\mathcal{A}$ es $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ que cumple que:

(i) $\mu_0(\phi) = 0$

(ii) Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2 tq $\bigcup E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$$\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

(en particular, μ_0 es finitamente aditiva y monótona)

La clave es que con una premedida podemos definir una medida exterior fácilmente.

Lema Si $\mu_* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ definida como:

$$\mu_*(E) = \inf\left\{ \sum_n \mu_0(E_n) : E \subseteq \bigcup_n E_n \text{ y } E_n \in \mathcal{A} \ \forall n \right\}$$

Entonces: (i) μ_* es medida exterior.

(ii) $\mu_* = \mu_0$ en $\mathcal{A}$

(iii) Los conjuntos de $\mathcal{A}$ son todos Caratheodory medibles

dem: (i) es fácil, (ii) tb.

Para mostrar (iii) hay que ver que si $E \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq X$ cualquiera

$\Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A^c) - \varepsilon$.

Para eso cubrimos A por conjuntos de $\mathcal{A}$ a menos de $\varepsilon > 0$ (notar que se puede suponer $\mu_*(A) < \infty \Rightarrow$ cola convergente y dps se usa aditividad finita.) $\boxtimes$

<u>Def</u>: Una medida μ es <u>σ-finita</u> si $X = \bigcup_n A_n$ con $\mu(A_n) < \infty$

<u>Teorema</u> Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y μ_0 una premedida. ~~que es σ-fin~~
Entonces existe una extensión de μ_0 a una medida μ en la σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{A}$. Además, esta medida es única si es σ-finita.

<u>dem</u>: La extensión es obvia pues μ_0 define medida exterior y los Caratheodory medibles son σ-álgebra que contiene $\mathcal{A}$ (Lema anterior).

Para la unicidad queremos ver que las medidas ν que extienden μ_0 a $\mathcal{M}$ coinciden con μ_* en los conjuntos de medida exterior finita.

Ver que $\nu \leq \mu_*$ es general pues por monotonía se aproxima por conjuntos de $\mathcal{A}$ y ahí tenes la desigualdad.

Por otro lado si $F \in \mathcal{M}$ cumple que $\mu_*(F) \geq \mu_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) - \varepsilon$ con $F \subseteq \bigcup E_i$ con $E_i \in \mathcal{A}$ entonces, claramente $\mu_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ por ser límite de unión creciente de tipos en $\mathcal{A}$

$$\Rightarrow \mu_*(F) \leq \mu_*(\overset{\bigcup E_i}{\overset{\shortparallel}{E}}) = \nu(E) = \nu(F) + \nu(E-F) \leq$$

$$\nu(F) + \mu(E \setminus F) \leq \nu(F) + \varepsilon.$$

Queda probado lo deseado. ∎

Integración en general

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si $f^{-1}([-\infty, a)) = \{f < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

~~Propiedades~~ Decir que $f = g$ μ-ctp significa $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Tenemos las siguientes propiedades con la misma prueba que en $\mathbb{R}^d$:

1) Las funciones medibles son un álgebra con las operaciones punto a punto.
2) El límite puntual de funciones medibles (idem limsup, liminf, sup, inf) es medible.

Si $\mathcal{A}$ es <u>completa</u> (i.e. si $E \subseteq F$ con $\mu(F) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{A}$) entonces el límite casi todo punto tb.

Para integrar entonces la clave eran las funciones simples y el Teo de Egorov:

Def: f es simple si es medible, con soporte de medida finita y tomando finitos valores: $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ con $\mu(E_i) < \infty \ \forall i$.

Cuando $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es σ-finito tenemos que:

Prop: Toda función medible es límite puntual de simples. Si es positiva, el límite es creciente y en gral, las simples se pueden tomar de módulo menor que el límite (i.e. módulo creciente)

Para integrar, la clave era la aproximación por simples y el

Teorema (Egorov) Si $f_n \to f$ μ-ctp ~~[illegible]~~ con $\operatorname{sop} f_n \subseteq \operatorname{sop} f$ de medida finita $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E \subseteq X$ tq $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ y tq $f_n \rightrightarrows f$ en E.

dem: Idéntica a $\mathbb{R}^d$. $E \supseteq \operatorname{sop} f_n$ $\forall n$. con $\mu(E) < \infty$

$$E_k^n = \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < 1/n \ \ \forall j > k\}$$

Para n fijo, $\bigcup_k E_k^n = E$ (mod 0) y es unión creciente.

Entonces, existe k_n tq $\mu(E \setminus E_{k_n}^n) < \varepsilon/2^n$

Tomando $A = \bigcap_n E_{k_n}^n$ tenemos $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$ y en A tenemos convergencia uniforme. ∎

Para definir la integral seguimos entonces los mismos 4 pasos:

1) Funciones simples
2) Funciones acotadas con soporte de medida finita
3) Funciones positivas
4) Funciones en general con $\int |f| \, d\mu < \infty$ (reales o complejas)

Se cumplen:

Prop: Linealidad, monotonía, desigualdad triangular

Teoremas de Convergencia: $\{f_n\}$ funciones medibles

(Fatou) Si f_n no negativas $\Rightarrow$ $\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \left(\int f_n \, d\mu\right)$

(Conv. Monótona) f_n no negativas y $f_n \nearrow f$ $\Rightarrow$ $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

(Conv. Dominada) $f_n \to f$ μ-ctp y $\exists g \in L^1$ tq $|f_n| \leq g$ $\Rightarrow$ $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$. (de hecho $\lim \int |f_n - f| \, d\mu = 0$)

Se pueden definir idénticamente los espacios $L^p(X,\mu)$ y hablar de convergencia μ-ctp, en L^p, en medida, etc.

Conviene revisitar todas las propiedades (e.g L^p es completo) para ver que nunca usamos que $X=\mathbb{R}^d$ y μ = Lebesgue.

[Nota: En ocasiones implícitamente estamos asumiendo que (X,μ) es σ-finita aunque no lo digamos. Algunos resultados pueden ser ligeramente más delicados si no. ¿Quién es $L^p(X,\mu)$ si μ es la medida de conteo? ¿Es separable? ....]

Teorema de Fubini

Vamos a construir, para espacios $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ una σ-álgebra y una medida en $X_1 \times X_2$.

Esto generaliza a productos finitos de espacios.

[Nota: Esto tb se puede intentar en productos infinitos (numerables) y es muy importante en Probabilidad (caminatas al azar, procesos estocásticos, mov. browniano) y tiene sobre todo sentido para espacios de probabilidad como veremos pronto.]

Vamos a asumir que ambos espacios son σ-finitos (y comentaremos que se complica si no lo son)
completos

Definimos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ los conjuntos que son uniones finitas de rectángulos (i.e. conjuntos de la forma $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$)

Chequear: $\mathcal{A}$ es un álgebra.

Nota: Esto no es difícil, pero tiene cierto trabajo, e.g. la unión de dos rectángulos se escribe como seis rectángulos disjuntos, el complemento como 3 ...

Definimos, para un rectángulo $A\times B$

$$\mu_0(A\times B) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)$$

<u>Prop</u>: Si $A\times B = \bigcup_n^{(\text{disj})} A_n\times B_m \Rightarrow \mu_0(A\times B) = \sum_{n} \mu_0(A_n\times B_m)$

(Nota: Esto implica que μ_0 define premedida en $\mathcal{A}$)

<u>dem</u>: Dado $x_1\in A$, por ser unión disjunta, si $x_2\in B$ entonces (x_1, x_2) pertenece a un único $A_n\times B_m$

Entonces, $B = \bigcup\{B_n : x_1\in A_n\}$ y esta unión es disjunta

$$\Rightarrow \chi_A(x_1)\mu_2(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x_1)\cdot\mu_2(B_j)$$

Integrando en x_1 (resp $d\mu_1$) obtenemos (tb por conv. monótona para sacar la serie)

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(A_j)\mu_2(B_j)$$

$\blacksquare$

Con esto podemos extender μ_0 a una medida $\mu := \mu_1\times\mu_2 \overset{\text{ó}}{=} \mu_1\otimes\mu_2$ en la σ-álgebra $\mathcal{Q}$ generada por $\mathcal{A}$. en $X_1\times X_2$.

⟶ nota, tomamos la generada, no su completación.

Sea $E\in\mathcal{Q} \Rightarrow E_{x_1} = \{x_2\in X_2 : (x_1,x_2)\in E\}$; $E^{x_2} = \{x_1\in X_1 : (x_1,x_2)\in E\}$

Lo mismo, podemos definir, si $f: X_1\times X_2 \to \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~ las funciones

$f_{x_1}(x_2) = f(x_1,x_2)$ de X_2 en $\mathbb{R}$

$f^{x_2}(x_1) = f(x_1,x_2)$ de X_1 en $\mathbb{R}$

que a priori no tienen pq ser medibles.

Teorema (Fubini) Si $f: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es integrable en $(X_1 \times X_2, \mathcal{Q}, \mu)$ entonces: (i) para μ_2-ctp $x_2 \in X_2$ vale que f^{x_2} es integrable en $(X_1, \mathcal{Q}_1, \mu_1)$

(ii) $x_2 \longmapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1)\, d\mu_1(x_1)$ es integrable en $(X_2, \mathcal{Q}_2, \mu_2)$

(iii) $$\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f^{x_2}(x_1)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2)$$

dem: $\mathcal{F}$ la clase de funciones que lo cumple. Contiene χ_E con $E \in \mathcal{A}$.

Es cerrado por combinaciones lineales finitas ($\Rightarrow$ podemos restringir a mostrar que vale para $f \geq 0$). Por convergencia monótona, alcanza chequearlo para funciones simples, ergo, para características. (recordar prueba en $\mathbb{R}^d$, es idéntico)

Para características veamos primero que anda para rectángulos.

Dps que anda para uniones numerables disjuntas (conv. monótona) y para intersecciones numerables es similar (aunque aquí es crucial que sea σ-finita. Recordar de nuevo el caso de $\mathbb{R}^d$)

Con esto se ve que los conjuntos de medida nula tb cumplen pq están contenidos en intersección de uniones de rectángulos.

Finalmente, todo conjunto medible difiere de una intersección num de uniones numerables por un conj de medida nula. $\blacksquare$

Obs: Tb hay analogo de Tonelli. Siempre es importante σ-finitud.

E.g: Tomar ([0,1], Lebesgue) y ([0,1], conteo)

Sea $f = \chi_{\text{diagonal}} \implies \iint f \, d\text{conteo}\, d\text{Leb} = 1$

$\iint f \, d\text{leb}\, d\text{conteo} = 0.$

$\int f \, d(\text{Leb} \times \text{Conteo}) = \text{Leb} \times \text{Conteo}(\text{Diagonal}) \overset{?}{=} \infty$

MEDIDAS SIGNADAS

Las medidas como venimos trabajando son un "cono convexo", las podemos sumar y multiplicar por numeros positivos.

Dado que no las podemos restar, no son un E.V. y muchas veces eso ayuda. Siempre es bueno tener una definición independiente del objeto y luego ver que efectivamente es el E.V. generado.

Sea X espacio y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una sigma algebra.

$\nu : \mathcal{Q} \to (-\infty, +\infty]$ es una <u>medida signada</u> si

es numerablemente aditiva: si $\{E_n\}$ disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \nu(E_n)$$

<u>Obs</u>: Hay que notar que en particular implica que la suma tiene que ser indep. del reordenamiento ($\Rightarrow$ si $\nu(\bigcup E_n) < \infty$ la serie converge absolutamente).

<u>Ejemplo</u>: Sea μ medida (positiva) y $f \in L^1(X, \mu)$ (no nec. positiva) entonces $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ es medida signada (~~[illegible]~~ que toma valores en $[-M, M]$ con $M \leq \int |f|$

Si $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$ (notación: $d\nu = f \, d\mu$) es claro que

ν es menor o igual que una medida positiva que es (en cierto sentido) la menor con esta propiedad,

es $d|\nu| = |f| \, d\mu$. Nos gustaría generalizar esto.

Es decir, encontrar la "mejor" medida positiva tq $-|\nu| \leq \nu \leq |\nu|$

Def: Sea ν una medida signada en $(X,\mathcal{A})$, definimos $|\nu|$ en $(X,\mathcal{A})$ como
$$|\nu|(E) = \sup\left\{ \sum_n |\nu(E_n)| \ : \ E = \bigcup^{(disj)} E_n \,, \text{ con } E_n \in \mathcal{A} \right\}$$
Llamamos $|\nu|$ la variación total de ν

Prop: $|\nu|$ es una medida y cumple $\nu \leq |\nu|$ (y $-|\nu| \leq \nu$)

dem: Sea $\{E_n\}_n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos. y sea $E = \bigcup E_n$.

Veamos primero que (1) $\sum |\nu|(E_n) \leq |\nu|(E)$

Fijamos $\varepsilon_n > 0$ arbitrarios (e.g $\varepsilon_n < \varepsilon/2^n$)

y tomamos $\{F_i^n\}$ disjuntos dos a dos tq $E_n = \bigcup_i F_i^n$

y tq $|\nu|(E_n) - \varepsilon_n \leq \sum |\nu(F_i^n)|$

Entonces
$$\sum_n \left(|\nu|(E_n) - \varepsilon_n\right) \leq \sum_{i,n} |\nu(F_i^n)| \overset{\text{por def.}}{\leq} |\nu|(E)$$

Como los ε_n son arbitrarios obtenemos lo deseado. (1)

Para ver (2) $|\nu|(E) \leq \sum_n |\nu|(E_n)$ fijamos $\varepsilon > 0$ y.

consideramos $E = \bigcup^{(disj)} F_k$. tq $\sum |\nu(F_k)| \geq |\nu|(E) - \varepsilon$

Ahora,
$$\sum_k |\nu(F_k)| \underset{\substack{\nu \text{ es m.sign.} \\ \text{y desig. } \Delta}}{\leq} \sum_k \sum_n |\nu(F_k \cap E_n)| \underset{\substack{\text{se reordenar} \\ \text{usando C.A.}}}{=} \sum_n \sum_k |\nu(F_k \cap E_n)|$$
$$\overset{\text{def de } |\nu|}{\leq} \sum_n |\nu|(E_n)$$ que como ε es arbitrario da (2).

Ahora, si escribimos

(nota: si $\nu(E)=+\infty \Rightarrow \nu^-(E)=0$, recordar que $\nu(E)$ siempre es $>-\infty$

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu|+\nu) \quad y \quad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu|-\nu)$$

se cumple que ν^+ y ν^- son medidas positivas y (ejercicio fácil)

tenemos que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ mientras $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

Def: Decimos que dos medidas positivas ~~signadas~~ μ_1 y μ_2 son mutuamente singulares (notación $\mu_1 \perp \mu_2$) si $\exists A \in \mathcal{a}$ tq $\mu_1(A)=0$ y $\mu_2(A^c)=0$.

Decimos que μ_1 es absolutamente continua respecto a μ_2 (notación $\mu_1 \ll \mu_2$) si $\forall E \in \mathcal{a}$ tq $\mu_2(E)=0$, se cumple que $\mu_1(E)=0$.

Dos medidas positivas μ_1, μ_2 son equivalentes (not: $\mu_1 \sim \mu_2$) si tienen los mismos conjuntos de medida nula (es decir $\mu_1 \ll \mu_2$ y $\mu_2 \ll \mu_1$)

Obs: Estas nociones son más delicadas de definir para medidas signadas pues puede ser que $\nu(E)=0$ pero tenga subconjuntos de medida positiva o negativa. Las definiciones son entonces: con la variación total

$$\nu_1 \perp \nu_2 \iff |\nu_1| \perp |\nu_2|$$

$$\nu_1 \ll \nu_2 \quad \text{si} \quad |\nu_1| \ll |\nu_2|$$

Proposición: $\nu^+ \perp \nu^-$ (Decimos que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es la Descomposición de Jordan)

Adicionalmente, la descomposición $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es única en escribir ν como resta de medidas positivas y mutuamente singulares.

dem: Consideramos el caso que ν es finita (i.e. toma valores en $[-M, M]$, sino se adapta pq como no toma $-\infty$ está bien. ya que el argumento usa solo una de las cotas)

$$\text{Sea } \alpha = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{Q}\} \geq 0.$$

Af: Existe $P \in \mathcal{Q}$ tq $\nu(P) = \alpha$. (consecuencia, todo subconj de P mide >0)

dem: Nos gustaría tomar E_n con $\nu(E_n) \geq \alpha - 1/n$ y considerar $P = \bigcup E_n$ pero esto no camina pues podemos estar considerando partes de E_n con medida negativa ($\Rightarrow \nu(P)$ no tiene porque valer α)

Vamos entonces a sacarle a E_n la parte negativa:

- Sea $E \in \mathcal{Q} \Rightarrow \exists A_E \subseteq E$ con $\nu(A_E) \geq \nu(E)$ y tq $\nu(F) \geq 0 \ \forall F \subseteq A_E$ (decimos que A_E es Positivo)

Para ver esto, sea $B_1 \subseteq E$ con $\nu(B_1) \leq 0$ y $\nu(B_1) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq E\} + 1$.

Entonces, $A_1 = E \setminus B_1$ mide $\geq E$. Ahora, $B_2 \subseteq A_1$ de medida ≤ 0 y $\nu(B_2) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq A_1\} + 1/2$ $\overset{A_2 = A_1 \setminus B_2 \cdots}{\cdots\cdots}$ $B_n \subseteq A_{n-1}$ " " y $\nu(B_n) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq A_{n-1}\} + 1/2^n$ y $A_n = A_{n-1} \setminus B_n$

Como los B_n son disjuntos y ν no toma $-\infty$ tenemos $\sum -\nu(B_n) < \infty \Rightarrow \nu(B_n) \to 0$

Entonces, tomando

$$A_E = \bigcap_n A_n \subseteq E \quad \text{tenemos que} \quad \nu(A_E) \geq \nu(E)$$

y como $A_E \subseteq A_n$ tenemos que $\inf\{\nu(B) : B \subseteq A_E\} \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq A_n\}$ $\forall n$.

pero tenemos que $\inf\{\nu(B) : B \subseteq A_n\} \leq |\nu(B_n)| + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n]{} 0$

Obteniendo lo deseado.

Ahora, tomando $P = \bigcup_n A_{E_n}$ sí obtenemos el conjunto deseado para la afirmacion.

$\blacksquare$

(<u>Nota</u>: Si ν es medida signada, la descomposición $P \cup P^c$ se llama DESCOMPOSICIÓN DE HAHN.)

Afirmamos ahora que $\nu^-(P) = 0$ y $\nu^+(P^c) = 0$.

Supongamos $\nu^+(P^c) > 0$. Entonces, existe $E \subseteq P^c$ tq

$$\nu^+(E) = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu)(E) > 0 \Rightarrow \nu(E_0) > 0.$$ para algún subconjunto E_0 de E

(recordar $|\nu| \leq \nu$)

Pero entonces $\nu(P \cup E_0) > \nu(P) = \alpha$ contradicción.

En resumen, esta descomposición parte ν en su parte positiva y su parte negativa. (unicidad es fácil) $\blacksquare$

ν signada $\Rightarrow$

<u>HAHN</u>: $\exists\, P \cup N = X$ tq P es POSITIVO $(\nu(E) \geq 0 \;\; \forall E \subseteq P)$

disjuntos

N es negativo $(\nu(E) \leq 0 \;\; \forall E \subseteq N)$

la desc. es única a menos de conj de medida $|\nu|$ nula

<u>JORDAN</u>: $\nu = \nu^+ - \nu^-$ de forma única con $\nu^\pm$ medidas positivas mutuam. sing.

La prueba hecha tiene la ventaja de introducir nociones útiles, pero tb se puede probar mediante la siguiente

Prop: Sea ν medida signada y μ medida positiva tq $\forall E \in \mathcal{Q}$ vale que $\mu(E) \geq \nu(E) \Rightarrow \mu(E) \geq \nu^+(E)\ \forall E \in \mathcal{Q}$.

dem: Tenemos que $|\nu|(E) = \sup\{\sum |\nu(E_n)| : \bigcup_{(disj)} E_n = E\}$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y $E = \bigcup_{(disj)} E_n$ tq $\sum_n |\nu(E_n)| > |\nu|(E) - \varepsilon$

Consideramos entonces $\hat{E} = \bigcup_{n:\nu(E_n)\geq 0} E_n$ con lo cual $\nu(\hat{E}) \sim |\nu|(\hat{E})$ (a menos de ε)

Por lo tanto $\nu^+(\hat{E}) \sim \nu(\hat{E}) \leq \mu(\hat{E})$

Como $|\nu^+(E \setminus \hat{E})| < \varepsilon$ obtenemos que $\nu^+(E) \leq \mu(E) + 2\varepsilon$ con ε arbitrario.

■

De esto tb sale que $\nu^+ \perp \nu^-$ pues si no, podemos restar un cacho de medida a ambas y obtener medida positiva $\geq \nu$.

Ahora queremos estudiar el caso de medidas absolutamente continuas a una de referencia.

Recordar que si ν signada y μ positiva, decimos $\nu \ll \mu$ si

$\forall E \in \mathcal{Q}$ tq $\mu(E) = 0$ vale que $\nu(E) = 0$.

Teorema (Radon-Nykodim, versión AC) Sea ν ~~signada~~ positiva y μ positivas tal que $\nu \ll \mu \Rightarrow$ existe $f \geq 0$ tal que

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

dem: Miramos la medida signada $\nu - \alpha\mu$ (las asumimos finitas, dps pasamos al caso σ-finito)

La desc. de Hahn dice que $X = P_\alpha \cup P_\alpha^c$ con $(\nu-\alpha\mu)(E) \geq 0$ $\forall E \subseteq P_\alpha$, $(\nu-\alpha\mu)(E) \leq 0$ $\forall E \subseteq P_\alpha^c$

Se tiene que cumplir entonces que $f \geq \alpha$ en P_α y que $f \leq \alpha$ en P_α^c.

Notar que $P_\alpha \subseteq P_\beta^{(\text{mod}\,0)}$ si $\beta \leq \alpha$. (esto quiere decir que $\mu(P_\beta \setminus P_\alpha) = 0 \rightarrow \nu(P_\beta \setminus P_\alpha) = 0$)

Consideramos $P_\alpha : \alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ con $P_0 = X$.

y definimos $f(x) = \sup\{\alpha : x \in P_\alpha\}$

Sea η medida tq $\eta(E) = \int_E f \, d\mu$.

Queremos ver que $\eta - \nu \equiv 0$. Para eso, consideramos E conjunto y lo descomponemos como $E_k = E \cap (P_{k/n} \setminus P_{\frac{k+1}{n}})$

Entonces, $|\eta - \nu(E)| = \left|\sum_k (\eta-\nu)(E_k)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_k \mu(E_k) = \frac{1}{n}\mu(E)$ ▨

Ahora, si μ es una medida positiva cualquiera (siempre σ-finita) y ν una medida signada $\Rightarrow$

<u>Teorema</u> (Radon-Nykodym, General) $\nu = \nu_a + \nu_s$ con $\nu_a \ll \mu$ y $\nu_s \perp \mu$ de forma única y $\exists f \in L^1(X,\mu)$ tq $d\nu_a = f\,d\mu$

<u>dem</u>: Miramos $\pi = \mu + \nu \Rightarrow \nu \ll \pi$
(suponemos ν positiva)

Escribimos $d\nu = g\,d\pi$. y $d\mu = f\,d\pi$.

Entonces $\nu_s = \nu\big|_{\{f=0\}}$ $\quad \nu_a = \nu\big|_{\{f>0\}}$

Tenemos que $d\nu_a = \dfrac{g}{f}\,d\mu$. ∎

Ahora vamos a intentar entender el espacio de todas las medidas signadas en (X,d) espacio métrico compacto. Si hay medida de referencia μ entonces $L^1(X,\mu)$ es un subespacio, pero como hay medidas singulares claramente no es todo (y la topología no necesariamente es la misma)

Vamos a denotar: $\mathcal{M}(X) = \{\nu$ medida signada de Borel en $X\}$

Es un $\mathbb{R}$-e.v. (similar, se puede tomar medidas complejas)

<u>Ejercicio</u>: $\|\nu\| = |\nu|(X)$ es una norma en $\mathcal{M}(X)$.

Denotamos $\mathcal{M}^+(X) < \mathcal{M}(X)$ las medidas positivas.

<u>Teorema</u> (Riesz positivo) Sea $\phi : C^0(X) \to \mathbb{R}$ lineal tal que si $f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$. Entonces, existe una única medida de Borel μ en X tal que $\phi(f) = \int f \, d\mu \quad \forall f \in C^0(X)$

(y de hecho ϕ es continua resp. topología de conv. uniforme en $C^0(X)$)

<u>dem</u>: Vamos a definir una medida métricamente exterior en (X, d) y eso va a alcanzar.

Primero veamos que ϕ es <u>continua</u>:

Sea $K_0 = \phi(1) \Rightarrow \phi(1/n) = \frac{K_0}{n}$. Por otro lado, por linealidad,

si $f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$.

Dada $f \in C^0(X)$ tenemos $f = f^+ - f^-$ funciones positivas

y $\|f\| \leq \max\{\|f^+\|, \|f^-\|\} \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(\|f\|) \leq \|f\| \cdot K_0$.

Eso da la continuidad.

Definimos $\mu_*(K) = \inf\{\phi(f) : f \geq 0, f|_K \geq 1\}$ para K compactos.

Ahora, si O es abierto, definimos $\mu_*(O) = \phi(1) - \mu_*(K) \geq 0$

μ_* es claramente medida exterior y por teoremas de separación es ($\mu_*(E) = \inf\{\mu_*(O) : E \subseteq O \text{ abierto}\}$) métricamente exterior.

Se concluye que μ_* restringe a una medida en los borelianos.

Para ver que $\phi(f) = \int f \, d\mu$, fijamos un compacto K y tomamos f_n continuas que decrecen a χ_K puntualmente $\Rightarrow \phi(f_n)$ ~~$= \int f_n d\mu$~~

~~y por convergencia dominada~~ converge a $\int \chi_K \, d\mu = \mu(K) = \mu_*(K)$ por ser $\phi(f_n)$ <u>positiva</u>. Por convergencia dominada podemos aproximar χ_K por f con $\phi(f) \sim \int f d\mu$

Recuperamos las simples y dps seguimos.

Teorema de Riesz Las medidas signadas con la norma de la variación total son el dual continuo de $C^0(X)$. (Similar, medidas complejas).
En particular $(\mathcal{M}(X), |\cdot|(X))$ es un espacio de Banach.

dem: Sea $\phi : C^0(X) \to \mathbb{R}$ lineal y continua.

Se puede escribir $\phi = \phi^+ - \phi^-$ con $\phi^\pm$ positivas. (Ya hicimos varias veces)
Dps es aplicar lo anterior.

$\boxtimes$

Consecuencia: La bola es débil-$*$ compacta

Esto es, para la convergencia: $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ si

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu \quad \forall f \in C^0(X).$$

Pero notar que no es compacta para la topología de la norma:

Ejemplo: $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k/n}$ son medidas atómicas en $[0,1]$.

Tenemos que $\|\mu_n\| = 1 \ \forall n$ y que $\|\mu_n - \mu_m\| \not\to 0$ con n, m.
(nota: esto implica que $C^0(X)$ no es Hilbert) (se puede calcular explícito)

Sin embargo: $\mu_n \to Leb_{[0,1]}$ en topología w^*

(Ejercicio.)

MEDIDA DE HAUSSDORFF

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\alpha \geq 0$ (Notar que se puede reemplazar $\mathbb{R}^d$ por cualquier espacio métrico.)

Definimos $$m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\inf \left\{ \sum_k (\operatorname{diam} U_k)^\alpha : E \subseteq \bigcup_k U_k \text{ y } \operatorname{diam} U_k \leq \delta \ \forall k \right\}}_{\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \text{ (crece con } \delta \downarrow 0)}$$

No es difícil ver que $\forall \alpha \geq 0$ m_α^* es una medida métricamente exterior.

Podemos entonces definir $\{m_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ una familia de medidas de Borel en $\mathbb{R}^d$.

Nota: Son todas invariantes por traslaciones, pero solo m_d es σ-finita y no nula (a chequear luego) con lo cual m_d es un múltiplo de Lebesgue.

De hecho, es tb invariante por isometrías en gral (preservan el diametro) y escala: $m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E)$ $\forall \lambda > 0$.

Algunas propiedades: (1) m_0 es la medida de conteo.

(2) Si $m_\alpha^*(E) < \infty$ y $\beta > \alpha \Rightarrow m_\beta^*(E) = 0$

(3) Si $m_\alpha^*(E) > 0$ y $\beta < \alpha \Rightarrow m_\beta^*(E) = \infty$

Esto nos dice que dado $X \subseteq \mathbb{R}^d$ podemos definir

$$\dim_H(X) = \inf\{\alpha : m_\alpha^*(X) = 0\} = \sup\{\alpha : m_\alpha^*(X) = \infty\}$$

la dimensión de Haussdorff de X.

Si $\alpha = \dim_H(X)$ puede ser que $m_\alpha^*(X)$ sea $0, \infty$ o finita, saber eso es tb importante.

[**Teorema**: El conjunto de Cantor usual tiene dimensión $\frac{\log 2}{\log 3}$ y medida de Hausdorff finita & positiva.]

Hay una cota sencilla, si $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow m_\alpha(\mathscr{C}) \leq 1$

(siempre es más fácil acotar por arriba pues basta encontrar buenos cubrimientos, por abajo hay que ver que esos cubrimientos son óptimos.)

Recordar que $\mathscr{C} = \bigcap \mathscr{C}_K$ donde $\mathscr{C}_K$ son 2^K intervalos de longitud 3^{-K}.

Entonces, fijado $\delta > 0$, tomamos $3^{-K} < \delta$ y ese cubrimiento nos da
$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathscr{C}) \leq 2^K (3^{-K})^\alpha \qquad \text{pero } 3^\alpha = 2$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathscr{C}) \leq 1 \quad \forall \delta \quad \text{que prueba lo deseado.}$$

[Nota: Dado que esto implica que $\dim_H(\mathscr{C}) < 1$, para ver que $\mathscr{C}$ es un "FRACTAL" basta ver que $\dim_H(\mathscr{C}) > 0$ (es fácil ver $m_0(\mathscr{C}) = \infty$ pero eso no alcanza)]

Hay muchas formas de probar esto, vamos a empezar por una que usa un resultado de interés independiente para la teoría:

Recordar que $f: (X, d) \to (Y, d')$ es γ-Hölder si $\exists\, C_\gamma > 0$ tq
$$d'(f(x), f(y)) \leq C_\gamma\, d(x, y)^\gamma \quad \forall x, y \in X.$$

Prop: Si $f: E \to F$ es γ-Hölder con constante $C>0$ entonces: $m_\beta(f(E)) \leq C^\beta m_\alpha(E)$ si $\beta = \alpha/\gamma$

(En particular, $\dim_H f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_H E$.)

La prueba es inmediata de la definición.

Notar que si logramos ver que la función de Cantor Lebesgue es γ-Hölder con $\gamma = \frac{\log 2}{\log 3}$ se completa la prueba (pero alcanza ver que es Hölder para algún exponente para chequear que es fractal.)

Conjuntos Autosimilares

$F \subseteq \mathbb{R}^d$ es auto-similar si; $\exists \{S_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\}_{i=1}^k$

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_k(F) \quad \text{con}$$

$S_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ SIMILITUDES (translaciones con rotohomotecias;
$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x-y|$
con r_i la ~~tasa~~ de similitud

Vamos a mirar conjuntos autosimilares con mismo r_i.

Ejemplos:
- → Cantor.
- → Sierspinsky.
- → Van Koch
- → Convoluciones de Bernoulli
- → No ejemplos pero casi (atractores conformes, etc...)

Para cálculos, ver Capítulo 7, sección 2.2 del Stein-Shakarchi