INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

RAFAEL POTRIE

ABSTRACT. Estas notas sirven para hacer un seguimiento del curso de Introducción a las ecuaciones diferenciales para la Licenciatura en Matemática el segundo semestre 2016, pero de ninguna manera reemplazan la bibliografía, en particular, recomendamos [Ar, deG, Sot, Tes] y, para los últimos temas de ecuaciones diferenciales ordinarias [Sam, Tes, Rob, KaH]. Los temas relacionados a ecuaciones en derivadas parciales y series de Fourier pueden ser consultados en el excelente libro [SS], pero hay también otras referencias. Consultas, errores, comentarios, enviar a rpotrie@cmat.edu.uy.

CONTENTS

Estas son notas informales, no revisadas. Pueden contener muchos errores, usar a riesgo propio.

1. Introduccion

Las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen por todas partes en matemática y otras ciencias. Permiten describir la evolución temporal de procesos deterministas cuyos espacios de fase son finito-dimensionales y suaves.

Por espacio de fase entendemos el conjunto de los posibles estados del sistema y el determinismo refiere a que existe una ley precisa que nos indica la variación de los estados conociendo la posición actual del sistema. Por suaves, nos referimos a que tienen la estructura de una variedad diferenciable donde es posible realizar las operaciones usuales del cálculo diferencial de forma de presentar la ley de evolución como una condición infinitesimal.

Una propiedad notable del tratamiento puramente matemático de este problema es que sistemas físicos (u de otras naturalezas) completamente no relacionados pueden ver su dinámica gobernada por las mismas ecuaciones. Un ejemplo notorio es el caso de los circuitos RLC y los sistemas masa-resorte amortiguados que responden a ecuaciones idénticas siendo sistemas físicos completamente diferentes.

En este curso pretendemos dar un tratamiento exhaustivo de varias de las propiedades básicas de estas ecuaciones, a saber, la existencia y unicidad de las soluciones, la variación con respecto a las condiciones iniciales así como el estudio de la estabilidad de estas. Profundizaremos también en una familia particularmente importante de sistemas, los sistemas lineales. En buena parte del curso trabajaremos con sistemas autónomos, donde la ley de evolución no depende del tiempo.

Al final, haremos una breve introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales, centrándonos en ejemplos concretos, lineales, intentando imitar lo hecho para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Los apéndices incluyen resultados laterales pero fundamentales para el estudio de las ecuaciones diferenciales. En particular, hay un apéndice dedicado a una introducción minimalista a las series de Fourier.

2. Definiciones básicas

2.1. **Ecuaciones diferenciales.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^d\mathbb{R}^d$ una función continua. Nos vamos a interesar por la siguiente ecuación:

$$x' = f(t, x) \tag{2.1.1}$$

A la ecuación (2.1.1) la llamaremos *ecuación diferencial ordinaria.* A esta forma particular se le conoce también como *ecuación diferencial ordinaria de orden uno en n-variables,* pues solo aparece la primer derivada respecto al tiempo. Se llama *ordinaria* por tener como incógnita una función en una sola variable (las ecuaciones funcionales cuya incógnita es una función de varias variables e involucran sus derivadas se conocen como *ecuaciones en derivadas parciales*).

Observación 2.1. Si tenemos una ecuación del tipo $x^{(n)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{n-1})$ podemos reducir a una ecuación de la forma (2.1.1) mediante la elección de variables: $y_0 = x, y_1 = x', \dots, y_{n-1} = x^{(n-1)}$ y obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_0' & = & y_1 \\ y_1' & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' & = & F(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{array} \right.$$

Vale la pena mencionar que se pueden definir ecuaciones diferenciales en variedades de forma análoga. Si M es una variedad diferenciable y $\Omega \subset \mathbb{R} \times M$ un abierto, podemos definir un *campo vectorial* en M como una función $X : \Omega \to TM$ donde $X(t, p) \in T_pM$ para todo $(t, p) \in \Omega$. De esta forma, la ecuación:

$$x' = X(t, x) \tag{2.1.2}$$

se puede traducir, en cada carta de M, a una ecuación del tipo (2.1.1).

Una familia particular de ecuaciones diferenciales, que llamamos *ecuaciones diferenciales autónomas* son aquellas en las cuales la ecuación es de la forma:

$$x' = f(x) \tag{2.1.3}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Observación 2.2. En ocasiones utilizaremos el hecho que toda ecuación diferencial de la forma (2.1.1) se puede llevar mediante el cambio de variables $y = (t, x)$ y la función $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida como $F(y) = (1, f(t, x))$ a una ecuación como:

$$y' = F(y),$$

que es de la forma (2.1.3). Está claro que una función $\varphi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$ cumple que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ si y solamente si la función $\psi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dada por $\psi(t) = (t, \varphi(t))$ cumple que $\psi'(t) = F(\psi(t))$.

2.2. **Ejemplos.** Vamos a presentar dos ejemplos sencillos que nos ayuden a buscar una buena definición de solución para la ecuación (2.1.1).

Ejemplo 2.3. Consideramos $f(t, x) = g(t)$, es decir, una ecuación donde la función f no depende de la coordenada "espacial". Las soluciones de $x' = f(t, x)$ son entonces de la forma:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

Ejemplo 2.4. Consideramos $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Las función constante igual a 0 es solucion de $x' = 3x^{2/3}$. También, para $a \in \mathbb{R}$ las funciones de la forma:

$$\varphi_a(t) \left\{ \begin{array}{ccc} (t-a)^3 & \text{si} & t \geq a \\ 0 & \text{si} & t \leq a \end{array} \right.$$

y de la forma $-\varphi_a$ son soluciones de la ecuación. Notar que por $(t, 0)$ pasan infinitas soluciones diferentes.

2.3. **Soluciones.** Una solución a la ecuación (2.1.1) será una función de un intervalo de los reales en $\mathbb{R}^n$ que la verifique. Como las funciones quedan determinadas por su dominio, deberemos dar algunas definiciones extras para hablar de unicidad, etc.

Definición 2.5. Un par (φ, I) donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 se dice *solución* de (2.1.1) si cumple las condiciones siguientes:

- para todo $t \in I$ se cumple que $(t, \varphi(t)) \in \Omega$,
- $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo[1] $t \in I$.

Como ya se puede ver en el ejemplo más sencillo (el ejemplo 2.3, que proviene del cálculo diferencial e integral), incluso ignorando el problema del intervalo de definición de la solución hay pocas esperanzas de tener unicidad de la solución. Inspirados en el problema análogo en cálculo diferencial e integral, consideramos el llamado *Problema de Cauchy*, para $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ y $(t_0, x_0) \in \Omega$ consideramos la ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Una solución a la ecuación (2.3.1) será un par (φ, I) como en la definición 2.5 que además cumpla que $t_0 \in I$ y que $\varphi(t_0) = x_0$. También llamaremos a una solución de (2.3.1) una solución con *condición inicial* (t_0, x_0).

La ecuación (2.3.1) admite una forma integral.

Proposición 2.6. *Una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ cuyo gráfico está contenido en Ω es solución de* (2.3.1) *si y solamente si se cumple la ecuación*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds. \tag{2.3.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es el teorema fundamental del cálculo.

□

Para poder definir correctamente la unicidad de soluciones, tenemos que poder resolver el problema del dominio. Una forma (que no siempre utilizaremos) es como sigue.

Definición 2.7. Una solución (φ, I) de la ecuación (2.3.1) es *extendible* si existe una solución (ψ, J) donde $I \subset J$ estrictamente y $\psi|_I = \varphi$, en este caso, decimos que (ψ, J) *extiende* a (φ, I). Una solución se dice *maximal* si no es extendible.

Proposición 2.8. *Toda solución de la ecuación* (2.3.1) *que no es maximal es extendible a una maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos ordenar parcialmente las soluciones de (2.3.1) de la forma siguiente: $(\varphi, I) \le (\psi, J)$ si (ψ, J) extiende a (φ, I).

Para probar la existencia de una solución maximal recurrimos al Lema de Zorn[2]. Basta mostrar que toda cadena creciente $(\varphi_\alpha, I_\alpha)$ con $\alpha \in \mathscr{A}$ es acotada por la solución (ψ, J) donde $J = \bigcup_\alpha I_\alpha$ y ψ está definida como $\psi(t) = \varphi_\alpha(t)$ cuando $t \in I_\alpha$. Esto completa la prueba.

□

Ejercicio 1. Describir las soluciones maximales por $(0,0)$ del Ejemplo 2.4.

[1]Si t es un extremo de I se entiende la derivada como siendo la derivada lateral correspondiente.

[2]Ejercicio: Adaptar la prueba para no tener que recurrir al Lema de Zorn.

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

3.1. **Teorema de Peano sobre existencia.**

Teorema 3.1 (Peano)**.** *Sea $f:\Omega\to\mathbb{R}^d$ continua con $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ un abierto y sea $(t_0,x_0)\in\Omega$. Entonces, existe una solución (φ,I) al problema de Cauchy* (2.3.1) *definida en un intervalo I que contiene a t_0 en su interior.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $a>0$ tal que $A_a=[t_0-a,t_0+a]\times\overline{B_a(x_0)}\subset\Omega$. Siendo A_a compacto, tenemos que $\|f(t,x)\|\le C_a$ para $(t,x)\in A_a$.

Vamos a definir una solución (φ,I_α) donde $I_\alpha=[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ y $\alpha<\min\{a,a/C_a\}$. La construiremos en $[t_0,t_0+\alpha]$, en el intervalo $[t_0-\alpha,t_0]$ la construcción es análoga y como las derivadas laterales van a coincidir, no hay problemas en su definición.

Para $k>0$ definimos la *poligonal de Euler*[3]:

$$\varphi_k(t)=\begin{cases} x_0 & \text{si} \quad t_0\le t\le t_0+\frac{1}{k}\\ x_0+\int_{t_0}^{t-\frac{1}{k}} f(s,\varphi_k(s))ds & \text{si} \quad t_0+\frac{1}{k}\le t\le t_0+\alpha\end{cases}$$

Notar que para definir $\varphi_k(t)$ en $[t_0+\frac{i}{k},t_0+\frac{i+1}{k}]$ necesitamos haberla definido previamente en $[t_0,t_0+\frac{i}{k}]$ anteriormente. Pero es no es problema pues así lo hicimos.

Notar que como $\|f(t,x)\|\le C_a$ en A_a y por como fue elegido se cumple que:

$$\|\varphi_k(t)-x_0\|\le a\ ,\ \ \forall t\in[t_0,t_0+\alpha]\ ,\ \forall k,$$

y además se cumple que para todo k y $t,t'\in[t_0,t_0+\alpha]$:

$$\|\varphi_k(t)-\varphi_k(t')\|\le C_a|t-t'|.$$

Esto nos dice que la familia $\{\varphi_k\}_k$ es *equicontinua* y *equiacotada* y por lo tanto aplica el Teorema de Arzelá-Ascoli (ver Teorema A.1). Esto nos da una subsucesión φ_{k_j} que converge uniformemente a una función $\varphi:[t_0,t_0+\alpha]\to\overline{B_a(x_0)}$; es decir, para todo $\varepsilon>0$, existe j_0 tal que si $j>j_0$ se cumple que $\|\varphi_{k_j}(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon$ para todo $t\in[t_0,t_0+\alpha]$.

Veamos que φ es solución de (2.3.1) verificando que cumple la ecuación (2.3.2).

Notar que se puede escribir:

$$\varphi_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds-\int_{t-\frac{1}{k}}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

Como φ_{k_j} converge uniformemente a φ_k y la continuidad de f tenemos que, para todo $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ vale que[4]:

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{k_j}(s))ds\to\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds,$$

mientras que el hecho que f está acotada da que:

[3]En realidad, la poligonal de Euler es un poco diferente, esta formulación es más sencilla para las cuentas que haremos luego. La poligonal de Euler es, para $k>0$ la curva que pasa por los puntos (t_i,x_i) donde $t_i=t_0+\frac{i}{k}$ y el punto x_i se define inductivamente mediante $x_0=x_0$ y $x_i=x_{i-1}+\frac{1}{k}f(t_{i-1},x_{i-1})$. Es un buen ejercicio mostrar que tomando estas poligonales también se llega a la conclusión. Ver sino [Tes, Sección 2.5].

[4]Ver Proposición A.2.

$$\Big|\int_{t-\frac{1}{k}}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds\Big| \leq C_a\frac{1}{k} \to 0.$$

Concluimos que para todo $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ vale que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

como buscabamos.

□

Observación 3.2. Observar que la prueba del teorema permite estimar el tamaño del intervalo donde la solución está definida y que este tamaño es relativamente estable cuando variamos (t_0,x_0) un poco. Veremos luego que las soluciones maximales están definidas mientras pertenezcan a Ω.

3.2. **Escape de compactos y soluciones maximales.** El Teorema de Peano garantiza que si $f:\Omega\to\mathbb{R}^d$ es continua, entonces por todo punto $(t_0,x_0)\in\Omega$ existe una solución al Problema de Cauchy (2.3.1) cuyo intervalo de definición contiene a t_0 en su interior. La Proposición 2.8 garantiza que existe al menos una solución maximal. Nos interesa mostrar que dicha solución necesariamente tiene un dominio de definición lo suficientemente grande como para que llegue al "borde" de Ω.

Teorema 3.3 (Escape de Compactos)**.** *Sea $f:\Omega\to\mathbb{R}^d$ una función continua y $K\subset\Omega$ un compacto. Para todo $(t_0,x_0)\in\Omega$ se cumple que cualquier solución maximal (φ,I) del Problema de Cauchy* (2.3.1) *verifica que existen $t_1,t_2\in I$, con $t_1<t_0<t_2$ y tal que $(t_1,\varphi(t_1)),(t_2,\varphi(t_2))\notin K$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando que f es continua y K compacto, vamos a considerar $C>0$ de forma tal que $\|f(t,x)\|\leq C$ para todo $(t,x)\in K$.

Vamos a suponer por absurdo que no existe un tal $t_2>t_0$.

Podemos suponer que $I=(a,b)$ con $b>t_0$ pero $b<+\infty$ pues K es acotado (en particular, lo es en su primer coordenada). Notar también que el Teorema de Peano asegura que por toda condición inicial pasa una solución, lo cual implica que el intervalo maximal tiene que ser abierto, justificando nuestra suposición.

Queremos mostrar que $(b-\alpha_n,\varphi(b-\alpha_n))$ converge a un punto $(b,x)\in K$ independientemente de $\alpha_n\to 0$. Para eso, teniendo en cuenta que K es compacto, podemos suponer por contradicción que existen dos límites diferentes para sucesiones diferentes, es decir, $(b-\alpha_n,\varphi(b-\alpha_n))\to(b,x)\in K$ y $(b-\beta_n,\varphi(b-\beta_n))\to(b,y)\in K$ con $x\neq y$. Consideramos n_0 suficientemente grande de forma tal que si $n>n_0$ tenemos que:

- $|\alpha_n-\beta_n|<\frac{\|x-y\|}{4C)}$,
- $\|\varphi(b-\alpha_n)-x\|<\frac{\|x-y\|}{4}$ y $\|\varphi(b-\beta_n)-y\|<\frac{\|x-y\|}{4}$.

En particular, si $n>n_0$ usando la desigualdad triangular, vemos que $\|x-y\|\leq\|\varphi(b-\alpha_n)-x\|+\|\varphi(b-\beta_n)-y\|+\|\varphi(b-\beta_n)-\varphi(b-\alpha_n)\|$ con lo cual $\|\varphi(b-\beta_n)-\varphi(b-\alpha_n)\|>\frac{\|x-y\|}{2}$.

Por otro lado, el Teorema del valor medio nos da que existe t entre $b-\alpha_n$ y $b-\beta_n$ de forma tal que:

$$\|f(t,\varphi(t))\| = \|\varphi'(t)\| = \frac{\|\varphi(b-\beta_n)-\varphi(b-\alpha_n)\|}{|\alpha_n-\beta_n|} > 2C$$

contradiciendo que $\|f(t,x)\| \leq C$ en K. Esto prueba que la sucesión $(b-\alpha_n, \varphi(b-\alpha_n))$ converge a un punto $(b,x) \in K$ independientemente de $\alpha_n \to 0$.

Ahora, podemos aplicar el Teorema de Peano al punto (b,x) para extender la solución para $t > b$ contradiciendo el hecho que (φ, I) era la solución maximal. Esto completa la demostración.

□

3.3. **Soluciones completas.** Una solución (φ, I) del Problema de Cauchy (2.3.1) se dice *completa* si se cumple que $I = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.4. Para la ecuación diferencial $x' = x^2$ en $\mathbb{R}$ se tiene que, si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\varphi_a(t) = -\frac{1}{t+a}$ son soluciones. Notar que por cada a, esto da lugar a dos soluciones maximales, una definida en el intervalo $(-\infty, -a)$ y otra en el intervalo $(-a, +\infty)$. Ninguna de ellas es completa. Por otro lado, la solución de equilibrio $\varphi(t) = 0$ definida en todo $\mathbb{R}$ si es una solución maximal completa.

Ejercicio 2. Encontrar una ecuación diferencial donde *ninguna* solución maximal sea completa.

El teorema de escape de compactos nos da condiciones sobre las cuales toda solución es completa. Para ello es muy útil el siguiente lema de analisis que volveremos a utilizar más adelante.

Lema 3.5 (Lema de Gronwall)**.** *Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ y $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que cumplen para todo $t \in [a,b]$:*

$$y(t) \leq k + \int_a^t g(s)y(s)ds. \tag{3.3.1}$$

Entonces, para todo $t \in [a,b]$ se cumple que:

$$y(t) \leq k e^{\int_a^t g(s)ds}. \tag{3.3.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que si $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ son funciones C^1 tal que $u'(t) \leq u(t)v(t)$ para todo $t \in [a,b]$ entonces $u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t v(s)ds}$ para todo $t \in [a,b]$. En efecto, sea $h(t) = u(a)e^{\int_a^t v(s)ds} \geq 0$ entonces se cumple que $h'(t) = h(t)v(t)$.

Consideramos la función $t \mapsto \frac{u(t)}{h(t)}$ y tenemos que:

$$\left(\frac{u(t)}{h(t)}\right)' = \frac{u'(t)h(t) - u(t)h'(t)}{h(t)^2} = \frac{u'(t)h(t) - u(t)h(t)v(t)}{h^2(t)} = \frac{u'(t) - u(t)v(t)}{h(t)} \leq 0.$$

Como la derivada es no positiva, obtenemos que $\frac{u(t)}{h(t)} \leq \frac{u(a)}{h(a)} = 1$ y por lo tanto $u(t) \leq h(t)$ como buscábamos.

Para probar entonces que si se cumple (3.3.1) tendremos (3.3.2), procedemos como sigue: Definimos $u(t) = k + \int_a^t g(s)y(s)$, tenemos que $u(a) = k$ y $u'(t) = g(t)y(t) \leq g(t)u(t)$ (pues por (3.3.1) se tiene $y(t) \leq u(t)$). Por lo anterior, deducimos que $y(t) \leq u(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)ds}$ que establece (3.3.2).

□

Obtenemos la siguiente consecuencia del teorema de escape de compactos (Teorema 3.3) que incluimos para dar un ejemplo de como se utiliza.

Proposición 3.6. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua con la propiedad de que $\|f(t,x)\| \leq C(t)\|x\| + b(t)$ para todo (t,x) donde $C, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Entonces, toda solución maximal de la ecuación* (2.1.1) *es completa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y sea (φ, I) una solución maximal con condición inicial (t_0, x_0). Por la Proposición 2.6 tenemos que:

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (|C(s)| \|\varphi(s)\| + |b(s)|) ds.$$

Ahora, si queremos ver que el intervalo $[-n, n]$ está contenido en I donde $n > |t_0|$, podemos, usando la compacidad de $[-n, n]$ suponer que $|C(t)|, |b(t)| < M$ para todo $t \in [-n, n]$. Obtenemos:

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} M\|\varphi(s)\| ds + M|t - t_0| \quad , \quad \forall t \in [-n, n].$$

Sea $k = \|x_0\| + 2Mn$ entonces podemos aplicar el Lemma de Gronwall y obtenemos:

$$\|\varphi(t)\| \leq ke^{2Mn} \quad , \quad \forall t \in [-n, n].$$

Considerando el compacto $K = [-n, n] \times \overline{B_{2ke^{2Mn}}(0)}$ podemos aplicar el Teorema 3.3 para concluir que la solución maximal está definida para tiempos $t_1 < -n$ y $t_2 > n$. Esto completa la demostración.

□

Un caso particularmente importante de esta proposición que revisitaremos luego es el de las ecuaciones diferenciales lineales.

Corolario 3.7. *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ continua y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ continua. Entonces, la ecuación diferencial lineal*

$$x' = A(t)x + b(t). \tag{3.3.3}$$

definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tiene todas sus soluciones maximales completas.

3.4. **La condición de Lipschitz.** Como se vio en el ejemplo 2.4, la continuidad de f no es suficiente para garantizar unicidad de las soluciones maximales para el problema de Cauchy (2.3.1). En esta sección veremos una condición de regularidad un poco más restrictiva que si nos va a permitir garantizar unicidad. Es bastante notable que la condición de regularidad es relativamente débil.

La condición es la bien conocida condición de Lipschitz que permite tener un control lineal del módulo de continuidad. La necesidad de la regularidad solo interviene en la variable espacial y no temporal, con lo cual definiremos la condición de Lipschitz para la "segunda variable". Por otro lado, es claro que la unicidad de soluciones es algo que se puede detectar localmente, con lo cual es natural que la condición sea impuesta solo en entornos de los puntos.

Definición 3.8 (Localmente Lipschitz)**.** Decimos que una función continua $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es *localmente Lipschitz en la segunda variable* si se cumple que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe $U \subset \Omega$ entorno de (t_0, x_0) y una constante $k_U > 0$ tal que si $(t, x), (t, y) \in U$ entonces se tiene que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_U \|x - y\|.$$

Si la constante k_U se puede elegir independiente de U, entonces decimos que f es *Lipschitz en la segunda variable.* Cualquier constante $k > 0$ que verifique $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$ para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega$ se llama *constante de Lipschitz* de f.

Ejercicio 3. Mostrar que las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como $f_1(t,x) = x^2$ y $f_2(t,x) = 3x^{2/3}$ no son Lipschitz en la segunda variable. Mostrar que sin embargo f_1 es localmente Lipschitz.

Observación 3.9. Si una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continua y C^1 en la segunda variable, entonces es localmente Lipschitz en la segunda variable. En particular, las ecuaciones lineales como en (3.3.3) son localmente Lipschitz en la segunda variable.

Ejercicio 4. Mostrar que si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es localmente Lipschitz en la segunda variable y $K \subset \Omega$ es compacto, entonces existe $k > 0$ tal que $(t,x),(t,y) \in K$ entonces se tiene que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|.$$

3.5. **El Teorema de Picard de existencia y unicidad.** La prueba del teorema que sigue no asume el Teorema de Peano[5] .

Teorema 3.10 (Picard)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema de Cauchy* (2.3.1) *tiene una única solución maximal.*

Para (t_0, x_0) denotaremos entonces como $J(t_0, x_0)$ a su *intervalo maximal*, es decir, el dominio de su solución maximal $\varphi_{(t_0,x_0)}$.

Vamos a dividir la prueba en etapas. Primero trataremos el problema local, y luego veremos como implica la unicidad de las soluciones maximales.

Presentamos primero la idea asumiendo que f esá definida globalmente en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y en las condiciones de la Proposición 3.6 de forma de no tener que preocuparnos por los dominios de definición. Vamos a considerar una función continua cualquiera $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ y definir un mapa T en el espacio de las funciones continuas mediante:

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Está claro que un punto fijo de T será una solución al problema de Cauchy. Si mostraramos que la transformación T es una contracción en un espacio de funciones con una distancia que lo haga completo, podríamos aplicar el Teorema B.1 para obtener la existencia y unicidad de soluciones. La condición de Lipschitz será central para establecer la propiedad de contracción de T.

Ejercicio 5.
- Mostrar que si f es de la forma $f(t,x) = g(t)$ entonces $T\varphi$ es solución de la ecuación.
- Hallar las aproximaciones sucesivas para la ecuación diferencial $x' = ax$ con $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Comparar con el método de la poligonal de Euler y concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) = e^t.$$

Comenzaremos por mostrar la existencia y unicidad en su versión local. Este enunciado tiene la ventaja de ser más preciso y en ocasiones eso será útil.

[5]Se puede dar una prueba "directa" de la unicidad utilizando la existencia que sigue la siguiente idea: Si $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^d$ son soluciones que coinciden en un punto, primero, podemos hacer un "cambio de coordenadas" para que $\varphi(t) = 0$ para todo t y luego, vemos que en cualquier parte compacta de I se cumple que $f(t,0) = 0$ con lo cual $\|\psi'(t)\| \leq C\|psi(t)\|$ por la condición de Lipschitz. Asumiendo que $\psi(t_0) \neq 0$ se puede ver que eso implica (comparando con la ecuación $x' = -Cx$) que el tiempo que sería necesiario para llegar a valer 0 es infinito, lo cual da la prueba. Puede ser un buen ejercicio intentar implementar esta demostración.

Teorema 3.11 (Picard, versión local)**.** *Sea $f : \Omega_{a,b} := (t_0 - a, t_0 + a) \times B_b(x_0) \to \mathbb{R}^d$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable que además verifica que $\|f(t,x)\| < C$ para todo $(t,x) \in \Omega_{a,b}$. Entonces, existe una única solución (φ, I_α) de la ecuación $x' = f(t,x)$ con condición inicial (t_0, x_0) definida en el intervalo $I_\alpha := (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ donde $\alpha =$* $\min\{a, b/C\}$.

Observación 3.12.
- La unicidad es más fuerte, de hecho, toda solución definida en un subintervalo I de I_α conteniendo a t_0 es la restricción de φ a I. Esto sigue de la demostración, pero también puede ser deducido del hecho establecido en el Teorema 3.3 y la unicidad en el intervalo I_α.
- Notar que también da un tamaño uniforme de las soluciones, de hecho, dado $\varepsilon > 0$ pequeño, es posible, mediante disminuir α obtener que para toda condición inicial (t,x) que cumpla $\|(t,x) - (t_0, x_0)\| < \varepsilon$ se tiene unicidad de solución de tamaño α.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X := C^0(I_\alpha, B_b(x_0))$ el espacio de funciones continuas de I_α en $B_b(x_0)$. Este espacio es un espacio métrico completo tomando $d(\varphi,\psi) = \sup_{t \in I_\alpha} \|\varphi(x) - \psi(x)\|$ (ver Ejercicio 13).

Definimos $T : X \to X$ de la siguiente forma: si $\varphi \in X$ definimos $T\varphi : I_\alpha \to B_b(x_0)$ como

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Primero tenemos que chequear que T está bien definida (i.e. que $T\varphi$ efectivamente pertenece a X). El hecho que $T\varphi$ es continua es inmediato desde que tanto φ como f lo son y la fórmula que define $T\varphi$. Por otro lado, como $\|f(t,x)\| < C$ en $\Omega_{a,b}$ tenemos que

$$\|T\varphi(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\| ds < C\alpha \le b.$$

Notar que, como fue mencionado encima, la Proposición 2.6 implica que una función $\varphi \in X$ es solución si y solamente si es punto fijo de T.

Ahora veamos que T es una contracción. Afirmamos que si k es una constante de Lipschitz para f, entonces si $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ entonces

$$\|T^n\varphi_1(t) - T^n\varphi_2(t)\| \le \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) \quad , \quad \forall t \in I_\alpha. \tag{3.5.1}$$

Probaremos (3.5.1) por inducción, siendo trivial para $n = 0$. En general,

$$\|T^{n+1}\varphi_1(t) - T^{n+1}\varphi_2(t)\| = \|T(T^n\varphi_1)(t) - T(T^n\varphi_2)(t)\| \le$$
$$\le \int_{t_0}^{t} \|f(s, T^n\varphi_1(s)) - f(s, T^n\varphi_2(s))\| ds \le \int_{t_0}^{t} k\|T^n\varphi_1(s) - T^n\varphi_2(s)\| ds \le$$
$$\le k\int_{t_0}^{t} \frac{k^n|s - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds = \frac{k^{n+1}|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Completando la demostración de (3.5.1).

Como $\frac{k^n|t-t_0|^n}{n!} \le \frac{k^n\alpha^n}{n!} \to 0$ tenemos que existe n_0 tal que T^{n_0} es una contracción. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema B.1 y concluir que existe una única solución como buscabamos.

□

Observación 3.13. Este teorema también nos ofrece una forma de buscar la solución, dado que el Teorema B.1 nos dice que no importa con que φ comencemos, tendremos que $T^n\varphi$ va a converger a la solución.

Para la unicidad de las soluciones maximales utilizaremos la siguiente proposición que es levemente más general.

Proposición 3.14. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua con la propiedad que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución*[6] *de $x' = f(t, x)$ con condición inicial (t_0, x_0) definida en un intervalo $I(t_0, x_0)$. Entonces, para todo (t_0, x_0) existe una única solución maximal $\varphi_{(t_0,x_0)} : J(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^d$.*

En este caso, tiene sentido hablar del *intervalo maximal* por ser la solución maximal única y así le llamaremos al intervalo $J(t_0, x_0)$ que contiene a t_0 en su interior.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $J(t_0, x_0)$ como siendo la unión de todos los intervalos I_ψ donde (ψ, I_ψ) es solución de $x' = f(t, x)$ con condición inicial (t_0, x_0) (i.e. del problema de Cauchy (2.3.1)).

Definimos $\varphi_{(t_0,x_0)}(t) = \psi(t)$ si $t \in I_\psi$. La unicidad dice que esta definición es posible, en efecto, si $\psi_1 : I_{\psi_1} \to \mathbb{R}^d$ y $\psi_2 : I_{\psi_2} \to \mathbb{R}^d$ son soluciones, entonces el conjunto $J = \{t \in I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2} \ : \ \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$ es cerrado por definición y abierto por la unicidad de las soluciones. Por conexidad, si es no vacío es todo y eso completa la demostración.

□

Podemos ahora terminar la prueba del Teorema 3.10

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.10. Como f es localmente Lipschitz, en todo punto podemos conseguir un entorno en las hipotesis del Teorema 3.11 y por lo tanto se aplica la Proposición 3.14. Esto concluye la prueba.

□

4. DEPENDENCIA DE LAS CONDICIONES INICIALES

El objetivo de esta sección es probar un resultado de continuidad con respecto a las condiciones iniciales así como a pequeñas variaciones en la ley que gobierna el sistema (o en otras palabras, a la ecuación (2.1.1)).

Consideraremos entonces ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Consideramos la ecuación diferencial:

$$x' = f(t, x, \lambda) \tag{4.0.1}$$

Obtenemos, para cada λ y cada (t_0, x_0) tal que $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$, gracias al Teorema de Picard (Teorema 3.10) una única solución maximal

$$\varphi_{(t_0,x_0,\lambda)} : J(t_0, x_0, \lambda) \to \mathbb{R}^d.$$

Podemos entonces pensar que φ es una función de $2 + n + m$-variables definida en

$$\hat{\Omega} := \{(t, t_0, x_0, \lambda) \ : \ (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega \ , \ t \in J(t_0, x_0, \lambda)\}. \tag{4.0.2}$$

Escribiremos también $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) := \varphi_{(t_0,x_0,\lambda)}(t)$ dependiendo del contexto.

[6] Nos referimos a unicidad en el sentido fuerte indicado en la Observación 3.12.

Nos interesa estudiar la regularidad de φ respecto a sus variables.

Antes de comenzar con el estudio teórico, pongamos un ejemplo de una ecuación diferencial paramétrica para ilustrar lo que se busca. La familia de ecuaciones diferenciales que sigue se conoce como "las ecuaciones de Lorenz" y son sumamente conocidas (recomendamos buscar "Lorenz attractor" o "Lorenz systems" en google). Fueron propuestas por el meteorólogo Edward Lorenz como un modelo simplificado para un modélo climático.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{cases}$$

Ejercicio 6. Escribir la ecuación de encima como $x' = f(t,x,\lambda)$ con $(t,x,\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Los parámetros más famosos son $\rho = 28$, $\sigma = 10$ y $\beta = \frac{8}{3}$. Se necesitaron casi 40 años para mostrar rigurosamente que para dichos parámetros la ecuación diferencial presenta *sensibilidad a las condiciones iniciales*[7], una propiedad que parece ir en contra de nuestro objetivo en esta sección (mostrar que cambiar poco las condiciones iniciales cambia poco las soluciones). Esperamos que quede claro al finalizar la sección porque no hay una contradicción, de hecho, si bien escapa a estas notas, paradójicamente es importante conocer esta continuidad con respecto a las condiciones iniciales para mostrar la caoticidad del ejemplo en esos parámetros.

4.1. **Enunciados.** Queremos probar los siguientes resultados. Para mantener los enunciados simples no trataremos con derivadas de orden superior si bien dichos enunciados se deducen de los que presentamos mediante algunos trucos astutos. (Ver por ejemplo [Sot].)

Teorema 4.1 (Continuidad con respecto a las condiciones iniciales)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces, el conjunto $\hat{\Omega}$ definido en* (4.0.2) *es abierto y la solución $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ de la ecuación* (4.0.1) *es continua.*

La demostración que daremos da incluso algunas formas de estimar el módulo de continuidad pero con el objetivo de dejar el enunciado simple esconderemos estos hechos en la sección donde hacemos la demostración.

Notar la siguiente consecuencia:

Corolario 4.2. *Sea $x' = f(t,x)$ una ecuación diferencial con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ localmente Lipschitz en la segunda coordenada y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y $T \in J(t_0, x_0)$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)\| < \delta$ entonces:*

$$\|\varphi(T, t_0, x_0) - \varphi(T, t_1, x_0)\| \leq \varepsilon.$$

Más aún, si $I \subset J(t_0, x_0)$ es un intervalo compacto cualquiera, entonces existe $\delta' > 0$ tal que si $\|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)\| < \delta$ entonces para todo $t \in I$ se cumple

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_1, x_0)\| \leq \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.

□

Es importante aclarar que la hipotesis de ser localmente Lipschitz está incluida para garantizar la unicidad de soluciones via el Teorema 3.10. Notar que, por ejemplo, la

[7] Popularmente conocido como *el efecto mariposa.*

ecuación que aparece en el ejemplo 2.4 no goza con una propiedad de continuidad con respecto a las condiciones iniciales.

Asumiendo que la ecuación goza de una mayor regularidad, se puede mejorar el resultado de la siguiente forma.

Teorema 4.3 (Diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ *continua y* C^1 *en las últimas dos variables*[8]*. Entonces, la solución* $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ *a la ecuación* (4.0.1) *es* C^1 *respecto a las últimas dos variables.*

Observar que en la primer variable la función φ es C^1 por definición. Lo mismo puede ser notado acerca de la segunda variable dado que, por unicidad de las soluciones, se cumple:

$$\varphi(t_1, t_0, x_0, \lambda) = \varphi(t_1 - t, t_0 + t, \varphi(t, t_0, x_0), \lambda)$$

cuando tiene sentido. Volveremos a esta fórmula más adelante, en particular, cuando tratemos *ecuaciones diferenciales autónomas.*

El Teorema 4.3 admite versiones con otros grados de regularidad cuyas pruebas se pueden reducir a este caso, en estas notas nos contentaremos con ese resultado y referimos al lector a [Sot, Capítulo II.3] por refinamientos de estos resultados.

4.2. **Reducción a las condiciones iniciales.** Notar que si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, podemos considerar la función $F : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ definida como $F(t, x, \lambda) = (f(t, x); 0)$. En este caso, las soluciones de $y' = F(t, y)$ donde $y = (x, \lambda)$ con condiciones iniciales (t_0, y_0) donde $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ serán de la forma:

$$\Phi(t, t_0, y_0) = (\varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0).$$

Esta observación nos permite reducir la prueba de los teoremas 4.1 y 4.3 al caso sin parámetros (i.e. a la ecuación (2.1.1)).

4.3. **Continuidad.** Por lo visto en la sección 4.2 alcanza trabajar con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y definir el conjunto $\hat{\Omega}$ y la función $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ como encima eliminando la dependencia en λ.

Para dar un argumento heurístico de la validez del Teorema 4.1 o del Corolario 4.2 observemos lo siguiente: La solución con condición inicial (t_0, x_0) es el (único) punto fijo del operador: $T_{(t_0,x_0)}$ definido como $T_{(t_0,x_0)}\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$; la continuidad de alguna forma está vinculada al hecho que al modificar el operador $T_{(t_0,x_0)}$ el punto fijo no puede alejarse mucho.

Ejercicio 7. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $T(x) = \frac{x}{2}$.

(1) Mostrar que T es una contracción y por lo tanto tiene un único punto fijo $T(0) = 0$.
(2) Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $|g(t)| \leq \delta|t| + \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces el mapa $T + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene al menos un punto fijo y que todo punto fijo de $T + g$ pertenece a $B_\varepsilon(0)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1.. Fijamos $(t_0, x_0) \in \Omega$ y $[a, b] \subset J(t_0, x_0)$ un subintervalo compacto del intervalo maximal.

Fijamos $\varepsilon > 0$ pequeño de forma tal que

[8]Esto quiere decir que existen y son continuas las derivadas parciales respecto a las variables x_i y λ_j donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

$$K_\varepsilon := \{(t,x)\ :\ \exists s \in [a,b]\ ,\ \|(t,x) - \varphi_{(t_0,x_0)}(s)\| \leq \varepsilon\} \subset \Omega,$$

es un entorno compacto de $\varphi_{(t_0,x_0)}([a,b])$. Por compacidad, existe $C > 0$ tal que $\|f(t,x)\| < C$ para todo $(t,x) \in K_\varepsilon$.

Supondremos por absurdo que existe una sucesión $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0)$ de forma tal que existe $a_n \in [a,b]$ tal que $\varphi(a_n,t_n,x_n) \notin K_\varepsilon$. Por el teorema de escape de compactos (Teorema 3.3) está claro que si la solución por (t_n,x_n) no se mantiene en K_ε se puede encontrar un tal a_n en $J(t_n,x_n)$. Sin perdida de generalidad supondremos que $a_n > t_0$ y consideramos s_n como el primer $t \in [t_0,a_n]$ tal que $\varphi(s_n,t_n,x_n) \in \partial K_\varepsilon$. Tomando una subsucesión suponemos que $s_n \to s$.

Obtenemos que para n suficientemente grande se cumple:

$$\|\varphi(s,t_n,x_n) - \varphi(s,t_0,x_0)\| \geq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notar que esto implica que $|s - t_0| > \frac{\varepsilon}{C}$. Como $\|f(t,x)\| < C$ en K_ε sabemos que las funciones $\varphi_n : [t_0,s] \to K_\varepsilon$ definidas como $\varphi_n(t) = \varphi(t,t_n,x_n)$ son equicontinuas y equiacotadas. Por lo tanto aplica el Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema A.1) y, tomando una subsucesión podemos suponer que $\varphi_n \to \psi$ uniformemente.

Utilizando la forma integral de las soluciones (Proposición 2.6) vemos que ψ tiene que ser solución de la ecuación con condición inicial (t_0,x_0) ya que:

$$\psi(t) = \lim_n \varphi_n(t) = \lim_n \left(x_n + \int_{t_n}^t f(u,\varphi_n(u))du \right) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u,\psi(u))du.$$

Como tenemos que $\psi(s) \neq \varphi(s)$ esto contradice la unicidad de las soluciones y completa la demostración.

□

El lema de Gronwall (Lema 3.5) nos permite obtener una estimativa más precisa del módulo de continuidad.

Proposición 4.4. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que es Lipschitz en la segunda variable con constante de Lipschitz $k > 0$. Entonces, para $(t_0,x_0),(t_0,y_0) \in \Omega$ se cumple que si $t \in J(t_0,x_0) \cap J(t_0,y_0)$ entonces*

$$\|\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)\| \leq e^{k|t-t_0|}\|x_0 - y_0\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la forma integral de las soluciones vemos que

$$\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t \big(f(s,\varphi(s,t_0,x_0)) - f(s,\varphi(s,t_0,y_0))\big)ds.$$

Usando la condición de Lipschitz deducimos

$$\|\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t k\|\varphi(s,t_0,x_0) - \varphi(s,t_0,y_0)\|ds.$$

Esto nos pone en las condiciones del lema de Gronwall (Lema 3.5) que implica

$$\|\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\|e^{k|t-t_0|}.$$

□

Observación 4.5. Notar que las soluciones son C^1 en la primer variable, y según el truco al final de la subsección 4.1 vemos que es C^1 en todas las variables temporales. Juntando todo, vemos que la función solución $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ es localmente Lipschitz en todas las variables. No utilizaremos este hecho.

4.4. **Diferenciabilidad.** Demoraremos la demostración del Teorema 4.3 hasta la sección 6.4 donde mostraremos el resultado para ecuaciónes autónomas. Mediante la observación 2.2 y algunas consideraciones que haremos allí, eso no representa una pérdida de generalidad.

Adelantamos que la derivada con respecto a la condición inicial va a satisfacer una ecuación diferencial lineal no autónoma (incluso si el sistema es autónomo) y esa es otra razón para demorar su demostración hasta luego de discutir las ecuaciones diferenciales lineales.

5. Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son una clase particularmente importante de ecuaciones. Su importancia trasciende el estudio de las ecuaciones lineales propiamente dichas ya que muchas veces son utilizadas como aproximación de ecuaciones no lineales más generales en el mismo espiritú con el cual uno reduce problemas de cálculo a problemas de álgebra lineal. Empezaremos con algo de la teoría general de estas ecuaciones y luego nos concentraremos en el caso de ecuaciones autónomas (con coeficientes constantes). Eso nos llevará a definir la exponencial de una matriz, objeto cuya importancia aparece también ligado a áreas que hoy son independientes de las ecuaciones diferenciales como los grupos y algebras de Lie (por más que en su origen estaban muy cercanamente ligados a las ecuaciones diferenciales).

Recomendamos al lector, antes de entrar en esta sección, que recuerde (o busque en sus cuadernos de cálculo) la solución general para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en dimensión 1, es decir, para funciones $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la ecuación:

$$x' = a(t)x + b(t).$$

5.1. **Ecuaciones lineales generales.** Consideramos funciones continuas $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Una *ecuación diferencial lineal* es una ecuación diferencial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ con la siguiente forma:

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{5.1.1}$$

Vimos en el Corolario 3.7 que sin importar las condiciones iniciales, toda solución maximal de la ecuación (5.1.1) tiene como intervalo de definición todos los reales. Siendo, para $t \in \mathbb{R}$ fijo el mapa $x \mapsto A(t)x + b(t)$ de clase C^∞ tenemos que por la observación 3.9 la ecuación verifica las hipótesis del teorema de Picard (Teorema 3.10) y por lo tanto hay existencia y unicidad de las soluciones para cada condición inicial $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. También aplica el Teorema 4.3.

Tenemos entonces que la solución φ está definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y es C^1.

5.2. **Ecuación homogénea.** Para comprender la ecuación (5.1.1) comenzaremos por estudiar la llamada *ecuación lineal homogénea*:

$$x' = A(t)x \tag{5.2.1}$$

La importancia de estas ecuaciones es que sus soluciones también tienen una estructura lineal. Resolverlas permite atacar la resolución de las ecuaciones generales.

Proposición 5.1. *El conjunto $\mathscr{S} \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ de soluciones maximales de la ecuación* (5.2.1) *es un espacio vectorial de dimensión d.*

Aquí estamos sobre-entendiendo que las operaciones entre funciones son las usuales:

$$(\varphi + \alpha\psi)(t) = \varphi(t) + \alpha\psi(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para ver que es un espacio vectorial, basta ver que si $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ son soluciones de (5.2.1) y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que $\varphi + \alpha\psi$ también lo es. Eso es inmediato ya que:

$$\frac{d}{dt}(\varphi + \alpha\psi)(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) + \alpha\frac{d}{dt}\psi(t) = A(t)\varphi(t) + \alpha A(t)\psi(t) =$$
$$= A(t)(\varphi(t) + \alpha\psi(t)) = A(t)(\varphi + \alpha\psi)(t).$$

Para ver que $\dim \mathscr{S} = d$ basta ver que el siguiente mapa es un isomorfismo lineal entre $\mathbb{R}^d$ y $\mathscr{S}$:

$$x \mapsto \varphi(\cdot, 0, x).$$

La linealidad es consecuencia de que $\mathscr{S}$ es un espacio vectorial y la unicidad de las soluciones. De la misma forma, por unicidad se tiene que el mapa es sobreyectivo. Como se cumple que $\varphi(0,0,x) = x$ se tiene que el mapa es inyectivo.

□

5.3. **Solución fundamental.** Decimos que una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ de clase C^1 es una *solución fundamental* de la ecuación homogénea (5.2.1) si se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$. (Aquí convenimos que la derivada de la matríz es derivar coordenada a coordenada.)
(2) Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0)$ es de rango n. (Por lo tanto, $\forall t \in \mathbb{R}$ la matriz $\phi(t)$ es de rango n, c.f. demostración de la Proposición 5.1.)

Observación 5.2. Si $\phi(t)$ es solución fundamental y $B, C \in \mathscr{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ son matrices, entonces $\psi(t) = B\phi(t)C$ cumple $\psi'(t) = A(t)\psi(t)$. Si B y C son invertibles, entonces ψ es también solución fundamental.

Ejercicio 8. Si $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ y $\psi'(t) = A(t)\psi(t)$ y ϕ es fundamental entonces existe $B \in \mathscr{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = \phi(t)B$. Además, ψ es fundamental si y solamente si B es invertible.

En particular, hay una única solución fundamental tal que $\phi(0) = \mathrm{id}$.

Cerramos esta subsección con un resultado que a veces nos cuentan en álgebra lineal y suena un poco críptico: "la traza es la derivada del determinante".... Esto se justifica con el siguiente resultado clásico (y útil más allá de las ecuaciones lineales):

Proposición 5.3 (Liouville)**.** *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ una solución de la ecuación diferencial homogénea $x' = A(t)x$. Entonces, se cumple que*

$$\det\phi(t) = \det(\phi(t_0))e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}.$$

DEMOSTRACIÓN. Alcanza considerar el caso en que ϕ es solución fundamental (pues sino su determinante es nulo para todo $t \in \mathbb{R}$). Para probar el resultado, alcanza mostrar que $t \mapsto \det(\phi(t))$ es solución de $x' = \operatorname{tr}(A(t))x$.

Pensamos $\varphi(t) = \det(\phi(t)) = \det(\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t))$ donde $\phi_i(t)$ son las columnas de $\phi(t)$ y pensamos det como la única forma multilineal alternada que vale 1 en la base canónica orientada.

Tenemos que

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(\phi_1(t), \ldots, \phi_i'(t), \ldots, \phi_d(t)) = \sum_{i=1}^{d} \det(\phi_1(t), \ldots, A(t)\phi_i(t), \ldots, \phi_d(t)).$$

Como, para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t)\}$ es una base de $\mathbb{R}^d$ podemos escribir $A(t)\phi_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}(t)\phi_j(t)$. Obtenemos que $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{ij}$ en la base $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t)\}$ y como la traza no depende de la base tenemos $\operatorname{tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{ii}(t)$. Por otro lado,

$$\det(\phi_1(t), \ldots, A(t)\phi_i(t), \ldots, \phi_d(t)) = \alpha_{ii}(t)\det(\phi_1(t), \ldots, \phi_i(t), \ldots, \phi_d(t)) = \alpha_{ii}(t)\varphi(t).$$

Esto completa la prueba.

□

Esto permitirá dar condiciones en un campo de vectores para que preserve el volúmen.

5.4. **Ecuación lineal no homogénea.** Como consecuencia directa de la Proposición 5.1 obtenemos:

Corolario 5.4. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ una solución de la ecuación* (5.1.1). *Entonces toda solución de* (5.1.1) *es de la forma $\varphi + \psi$ donde ψ es una solución de la ecuación homogénea* (5.2.1).

DEMOSTRACIÓN. Sean φ, ψ dos soluciones de (5.1.1) entonces:

$$\frac{d}{dt}(\varphi - \psi)(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) - A(t)\psi(t) - b(t) = A(t)(\varphi - \psi)(t).$$

□

Es posible, utilizando la solución fundamental, obtener un resultado un poco más satisfactorio, al menos teóricamente.

Teorema 5.5. *Si $\phi(t)$ es solución fundamental de la ecuación lineal homogenea $x' = A(t)x$ (c.f.* (5.2.1)*) entonces la solución $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ de la ecuación lineal $x' = A(t)x + b(t)$ (c.f.* (5.1.1)*) con condición inicial (t_0, x_0) está dada por la siguiente fórmula:*

$$\varphi(t) = \phi(t)\Big(\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,ds\Big).$$

En particular, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Una vez “adivinada” la fórmula, es muy sencillo demostrar el resultado sustituyendo en la ecuación y apelando a la unicidad de soluciones.

Sin embargo, expliquemos porque es natural llegar a la fórmula, que es motivada en el método de “variación de constantes” que posiblemente fue vista en un curso de cálculo para resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en dimensión uno. Claramente, conocer el Corolario 5.4 ayuda a buscar esta solución.

Supongamos que $\varphi(t) = \phi(t)C(t)$ entonces tenemos que

$$A(t)\varphi(t) + b(t) = \varphi'(t) = \phi'(t)C(t) + \phi(t)C'(t) = A(t)\phi(t)C(t) + \phi(t)C'(t).$$

Entonces, esencialmente lo que buscamos es $C'(t) = \phi^{-1}(t)b(t)$ e integrando obtenemos la fórmula buscada.

□

5.5. **Coeficientes constantes.** El caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes (i.e. donde la función $A(t)$ es constante igual a $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$) es tan importante que merece un tratamiento aparte. Su relevancia viene vinculada al hecho que es posible obtener una fórmula precisa para la solución fundamental y a que su estudio es importante para la comprehension de ecuaciones diferenciales autónomas no-lineales. En vista del Teorema 5.5, el objetivo que tendremos es obtener una solución fundamental para la ecuación diferencial:

$$x' = Ax \qquad , \qquad A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) \tag{5.5.1}$$

El objeto de esta sección es hallar la fórmula precisa de la solución fundamental de la ecuación (5.5.1). En analogía con el caso unidimensional, donde, si $a \in \mathbb{R}$ tenemos que $x' = ax$ tiene como solución $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}$ vamos a buscar definir la *exponencial de una matriz* de forma de que la solución fundamental $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ sea exactamente: $\phi(t) = e^{At}$. Eso requiere algunas consideraciones previas de álgebra lineal con las cuales comenzaremos. Luego mostraremos ejemplos en bajas dimensiones para luego dar una respuesta completa al problema.

5.5.1. *Exponencial de una matriz y solución fundamental.* La definición de la exponencial de una matriz se hará en analogía a su definición para números reales la cual involucra considerar una serie de potencias.

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots = \lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Para hacerlo, debemos dar sentido a estos límites. Como antes, dado $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ denotamos $A^0 = \mathrm{id}$ y si $n > 0$ la matriz $A^n = \underbrace{A\cdots A}_{n \text{ veces}}$. Queremos definir:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathrm{id} + A + \frac{A^2}{2} + \ldots.$$

Para eso, consideramos la matriz $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ y notamos que si $n < m$:

$$\|A_n - A_m\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \to_{n\to\infty} 0.$$

En particular, sabemos que existe una matriz e^A de forma tal que $A_n \to e^A$. Además, la estimativa implica que, fijado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sabemos que la convergencia

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} = e^{tA},$$

es uniforme en $[a, b]$. Es entonces sencillo demostrar:

Proposición 5.6. *Para $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$ *y* $e^{0A} = \mathrm{id}$ *(i.e.* $\phi(t) = e^{tA}$ *es solución fundamental de* (5.5.1)*),*
(2) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$*,*
(3) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$*,*
(4) *si* $A = PBP^{-1}$ *con* $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *entonces* $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$*.*
(5) *si* $AB = BA$ *entonces* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$*.*

DEMOSTRACIÓN. La propiedad (1) es consecuencia directa de la convergencia uniforme. De hecho, basta ver que $\frac{d}{dt}\frac{A^k t^k}{k!} = A\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}$ lo cual es directo de chequear. La propiedad (2) es fácil de demostrar directamente (ejercicio), o se puede ver como consecuencia directa de (5) que sigue[9] de

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B^\ell}{\ell!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i B^{n-i}}{i!(n-i)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!}.$$

La propiedad (3) es consecuencia de (1) y (2). Finalmente, si P es invertible y $A = PBP^{-1}$, tenemos que para todo $k > 0$ vale que:

$$(PBP^{-1})^k = PBP^{-1}PBP^{-1}\dots PBP^{-1} = PB^kP^{-1},$$

entonces

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(PBP^{-1})^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}P\frac{B^k t^k}{k!}P^{-1} = Pe^{tB}P^{-1}.$$

□

Observación 5.7. La propiedad (5) no caracteriza las matrices que conmutan (i.e. no vale el recíproco) ni la propiedad vale sin asumir $AB = BA$ (ejercicio).

5.5.2. *Primeros ejemplos.* Vamos a calcular algunos ejemplos que completan el panorama para sistemas de dos variables.

Ejemplo 5.8. Consideramos la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Notar que $A^n = \left(\begin{smallmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n\end{smallmatrix}\right)$ de donde obtenemos que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{tb}\end{pmatrix}.$$

Por la propiedad (4) de la Proposición esto permite calcular la exponencial de cualquier matrix de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que sea diagonalizable en $\mathbb{R}$. De hecho, está claro que el argumento no precisa que la matriz sea 2×2 y funciona en general.

Ejemplo 5.9. Consideramos la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ para la cual se cumple que $A^2 = 0$. Obtenemos entonces que:

$$e^{tA} = \mathrm{id} + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Notar que si $B = b\cdot\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$ entonces se cumple que $AB = BA$ con lo cual las matrices de Jordan del tipo $J := A + B = \left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$ cumplen que:

$$e^{tJ} = e^{tA}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{bt} & te^{tb} \\ 0 & e^{tb}\end{pmatrix}.$$

[9]La última igualdad es consecuencia de la fórmula $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}A^iB^{n-i}$ que solo es válida asumiendo $AB = BA$ pues eso permite reordenar los productos.

De nuevo, la propiedad (4) de la Proposición esto permite calcular la exponencial de cualquier matrix de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con forma de Jordan no trivial.

Ejemplo 5.10. Consideramos ahora la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ cuyos valores propios son imaginarios puros $\pm bi$. Notar que para $n \geq 0$ vale que:

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n b^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n b^{2n} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} b^{2n+1} \\ (-1)^n b^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que:

$$e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n} A^{2n}}{2n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt) \\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Notar que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ conmuta con A, entonces si consideramos $C = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, tenemos que:

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\operatorname{sen}(bt) \\ e^{at}\operatorname{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Lo mismo se aplica para matrices conjugadas a matrices de la forma de C gracias a la propiedad (4) de la Proposición .

5.5.3. *Forma de Jordan.* En dimensiones mayores, las exponenciales son muy similares al caso de dimensión 2. Siempre se puede llevar la matriz a su forma de Jordan cuya exponencial es relativamente sencilla de calcular. Nos limitaremos a hacer algunas observaciones:

- En el caso que haya valores propios complejos, es más simple en algunos casos notar que los resultados de la Proposición 5.10 son válidos en el caso complejo. Entonces se puede diagonalizar o llevar a su forma de Jordan conjugando con una matriz compleja y aplicar los resultados. Los números complejos en este caso sirven como herramienta, y aparecen en el proceso, pero vale la pena hacer ejemplos para ver como desaparecen para el resultado final. Conviene hacer el ejemplo 5.10 como ejercicio de esta manera.
- Las matrices con forma de Jordan se tratan de una forma similar al ejemplo 5.9. Los bloques se pueden tratar separadamente como en el caso de matrices diagonales y los bloques de Jordan se escriben como suma entre una matriz nilpotente y una que es un número por la identidad. Estas matrices conmutan y se pueden aplicar razonamientos similares.

La mejor forma de familiarizarse con esto es hacer varios ejemplos por cuenta propia.

5.5.4. *Sistemas lineales hiperbólicos.* Ver [Sam, Capítulo 4].

5.6. **Sistemas de segundo orden forzados.** Tanto el sistema masa resorte amortiguado con una fuerza externa como el circuito eléctrico RLC con una fuente de voltaje variable en el tiempo responden a la ecuación diferencial:

$$ax'' + bx' + cx = d(t) \tag{5.6.1}$$

Particularmente en el caso del sistema eléctrico, pero también en otros casos, es natural considerar en especial el caso de funciones $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódicas. Veremos como esto lleva naturalmente al estudio de las *Series de Fourier* que se analizan en detalle en el apéndice C.

Primero notemos que el sistema (5.6.1) es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + d(t) \end{array}\right. \tag{5.6.2}$$

O equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d(t) \end{pmatrix}.$$

Utilizando los resultados de este capítulo, particularmente la construcción de la exponencial de la matriz y el Teorema 5.5 obtenemos que para resolver completamente esta ecuación será necesario hacer un cambio de coordenadas adecuado para el cual la función $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ d(t) \end{smallmatrix}\right)$ se transformará en una función $\left(\begin{smallmatrix} \hat{d}_1(t) \\ \hat{d}_2(t) \end{smallmatrix}\right)$ y luego habrá que calcular integrales de la forma:

$$\int_{t_0}^{t} e^{a_i s} \hat{d}_i(s) ds \tag{5.6.3}$$

con $a_i \in \mathbb{C}$. Teóricamente eso es posible, pero resulta que calcular esas integrales directamente puede ser muy complejo en la práctica. Es por eso que se utiliza el método de superposición, teniendo en cuenta que es relativamente sencillo calcular las integrales siguientes:

$$\int_{t_0}^{t} e^{as} e^{i\alpha s} ds = \int_{t_0}^{t} e^{(a+i\alpha)s} ds = \frac{1}{a+i\alpha}(e^{(a+i\alpha)t} - e^{(a+i\alpha)t_0}).$$

Las series de Fourier nos permitirán, cuando $d(t)$ es periódica (digamos de período 2π para simplificar), escribir:

$$\hat{d}_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^i e^{int}.$$

Donde $c_n^i \in \mathbb{C}$. Referimos al lector al apéndice por una breve introducción a las series de Fourier.

6. Ecuaciones diferenciales autónomas

En esta sección trabajaremos directamente con ecuaciones diferenciales autónomas de la forma:

$$x' = f(x). \tag{6.0.1}$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una función localmente Lipschitz. Como ya explicamos en la Observación 2.2, toda ecuación diferencial se puede llevar a la forma de la ecuación (6.0.1).

6.1. **Invariancia por translaciones temporales.** Una particularidad importante de las ecuaciones diferenciales autónomas es que las soluciones son invariantes por translaciones temporales. Si $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$ es solución de (6.0.1) y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\varphi^c : (a-c, b-c) \to \mathbb{R}^d$ definida como $\varphi^c(t) = \varphi(t+c)$ es también solución.

En particular, el intervalo maximal $J(t_0, x_0)$ cumple que $J(t_1, x_0)$ es su traslación por $t_1 - t_0$. Podemos plantear entonces el Problema de Cauchy para $t_0 = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & f(x) \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{6.1.1}$$

Denotaremos entonces la solución general $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ donde $\hat{\Omega} = \{(t,x) \ : \ x \in \Omega \ , \ t \in J(0,x_0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

6.2. **Propiedad de flujo.**

Proposición 6.1. *Sea $\varphi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ la solución general de* (6.1.1)*. Entonces, se cumple que si $s, t \in \mathbb{R}$ son tal que $s, t+s \in J(0,x_0)$ entonces*

$$\varphi(t+s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)).$$

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio.

□

Fijado $t \in \mathbb{R}$ denotamos $\Omega_t = \{x \in \Omega \ : \ t \in J(0,x)\}$ y consideramos:

$$\varphi_t : \Omega_t \to \Omega \ , \ \ \varphi_t(x) = \varphi(t,x).$$

Por la continuidad con respecto a las condiciones iniciales (Corolario 4.2), sabemos que φ_t es un homeomorphismo sobre su imagen. Si se cumple que $\Omega_t = \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$ obtenemos lo que se llama un *grupo a un parámetro* de homeomorfismos de Ω. El teorema de escape de compactos (Teorema 3.3) por ejemplo permite verificar estas condiciones cuando se tienen ecuaciones diferenciales (campos vectoriales) en variedades compactas.

Ejercicio 9 (Orbitas periódicas)**.** Si $p \in \Omega$ es tal que que existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$ entonces, se cumple que la solución maximal está definida en $\mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\varphi_{nt}(p) = p$. Mostrar que si $f(p) \neq 0$ entonces hay un primer $t_0 > 0$ con la propiedad de que $\varphi_{t_0}(p) = p$ y que se cumple que $\varphi_t(p) = p$ si y solamente si $t = nt_0$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

6.3. **Diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales.** En esta subsección mostraremos el siguiente Teorema que implica[10] el Teorema 4.3 (tener en cuenta las observaciones de la subsección 4.4). Lo interesante del enunciado que mostraremos es que también da una fórmula para la derivada como solución de una ecuación diferencial lineal (no autónoma).

Teorema 6.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una función C^1 y sea $x_0 \in \Omega$ de forma tal que* $[0,T] \subset J(0,x_0)$*. Entonces, existe U entorno de x_0 en Ω tal que para todo $x \in U$ se cumple que la solución de $x' = f(x)$ con condición inicial x está definida en* $[0,T]$ *(i.e.* $[0,T] \subset J(0,x)$*) y la función $x \mapsto \varphi_t(x)$ es de clase C^1 en U para todo $t \in [0,T]$. Además, se cumple que la derivada $A_t = D_{x_0}\varphi_t$ es la solución fundamental de la ecuación diferencial lineal*

$$X' = D_{\varphi_t(x_0)} f(X), \tag{6.3.1}$$

tal que $A_0 = \mathrm{id}$.

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $\varphi_t(x) = x + \int_0^t f(\varphi_s(x))ds$ con lo cual

$$\varphi_t(x_0 + hv) - \varphi_t(x_0) = hv + \int_0^t (f(\varphi_s(x_0+hv)) - f(\varphi_s(x_0)))ds.$$

Aquí denotamos v al un vector cualquiera y $h > 0$.

Escribimos $f = (f_1, \dots, f_d)$ en sus coordenadas, entonces, si h es suficientemente pequeño, usando la continuidad con respecto a las condiciones iniciales y el teorema del

[10] Quizas ajustando levemente las hipótesis de dicho Teorema....

valor medio, encontramos para todo $s \in [0,t]$ e $i = 1,\dots,d$ algún $\hat{x}_i^s(h)$ en el segmento entre $\varphi_s(x_0)$ y $\varphi_s(x_0+hv)$ tal que $D_{\hat{x}_i^s(h)} f_i(hv) = \varphi_t(x_0+hv) - \varphi_t(x_0)$. Se cumple que $\hat{x}_i^s(h) \to x_0$ cuando $h \to 0$.

Sea $B_h(s)$ la matriz cuyas filas son los diferenciales $D_{\hat{x}_i^s(h)} f_i$. Por lo mencionado, tenemos que $s \mapsto B_h(s)$ converge uniformemente a $s \mapsto D_{\varphi_s(x_0)} f$ uniformemente en $[0,t]$ cuando $h \to 0$.

Obtenemos que

$$\varphi_t(x_0+hv) - \varphi_t(x_0) = hv + \int_0^t B_h(s)(\varphi_s(x_0+hv) - \varphi_s(x_0))ds,$$

o lo que es lo mismo, llamando $\psi_h(t) = \frac{\varphi_t(x_0+hv)-\varphi_t(x_0)}{h}$:

$$\psi_h(t) = v + \int_0^t B_h(s)\psi_h(t)ds$$

La familia $\{\psi_h\}_{0<h<\varepsilon}$ es equicontinua y equiacotada, entonces, si ψ es un punto de acumulación de la familia (c.f. Teorema A.1) con $h \to 0$ entonces

$$\psi(t) = v + \int_0^t D_{\varphi_s(x_0)} f \psi(t)ds,$$

con lo cual ψ es solución de $x' = D_{\varphi_t(x_0)} f x$ con condición inicial $x(0) = v$. Por unicidad de la solución con condición inicial $x(0) = v$ vemos que $\psi_h \to \psi$ (no siendo necesario tomar subsucesiones).

Para ver que $D_{x_0}\varphi_t v = \psi(t)$ notemos que:

$$\left\| \frac{\varphi_t(x_0+hv)-\varphi_t(x_0)}{h} - \psi(t) \right\| \le \int_0^t \|B_h(s)\psi_h(t) - D_{\varphi_s(x_0)} f\psi(t)\| ds \to 0.$$

□

Corolario 6.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de clase C^1 verifica que* $\operatorname{div} f = 0$ *entonces φ_t preserva volumen.*

DEMOSTRACIÓN. Basta combinar la ecuación (6.3.1) con la Proposición 5.3 y el teorema de cambio de variable de cálculo.

□

6.4. **Teorema del Flujo Tubular.** Mostraremos el siguiente resultado:

Teorema 6.4 (Flujo tubular)**.** *Sea $x' = f(x)$ una ecuación diferencial autónoma con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de clase C^1 y $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces, existen $\delta, \varepsilon > 0$ un entorno U de x_0 y $h : U \to (-\delta,\delta) \times B_\varepsilon^{d-1}(0)$ difeomorfismo de clase C^1 de forma tal que se cumple que para todo $x \in U$ se tiene que $(-\delta,\delta) \subset J_x$ y se cumple que, si t_0 es la primer coordenada de $h(x)$ y $t \in (-\delta - t_0, \delta - t_0)$ entonces:*

$$h \circ \varphi_t(x) = h(x) + (t,0).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Podemos sin perdida de generalidad suponer que $x_0 = 0$ y que $f(x_0) = e_1$ (esto se obtiene mediante un cambio de coordenadas). Consideramos entonces la hipersuperficie D obtenida como $D = \{(0, x_2, \dots, x_d) \in$

$\mathbb{R}^d\}$. Por continuidad de f existe un entorno pequeño de 0 donde f es transversal a D, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in B_{2\varepsilon}(0)$ entonces

$$\langle f(x), e_1 \rangle > a > 0. \tag{6.4.1}$$

Sea $D_\varepsilon = D \cap B_\varepsilon(0)$ de forma tal que su clausura está en Ω. Por continuidad con respecto a las condiciones iniciales (c.f. Teorema 4.1) obtenemos que existe δ de forma tal que todo punto $x \in D_\varepsilon$ verifica que $(-\delta, \delta) \subset J_x$ y además $\varphi_t(x) \in B_{2\varepsilon}(x)$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Consideramos $U = \bigcup_{t \in (-\delta,\delta)} \varphi_t(D_\varepsilon)$ y definimos:

$$h^{-1} : (-\delta, \delta) \times B_\varepsilon^{d-1}(0) \to U \ \ , \ \ h^{-1}(t, x) = \varphi_t(x).$$

Tenemos que h^{-1} es de clase C^1 por el Teorema 6.2 y su derivada es invertible en todo punto. Como h^{-1} es biyectiva (notar que $\varphi_t(x) \notin D_\varepsilon$ si $t \in (-\delta, \delta)$ por (6.4.1)). La inversa de h^{-1} da el difeomorfismo deseado.

$\square$

Observación 6.5. Resultados análogos valen para diferentes tipos de regularidad y la prueba es escencialmente la misma. Referimos al lector a [Ar] por un desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales centrada alrededor de este resultado fundamental. Este teorema también sirve de lazo fundamental entre la teoría de ecuaciones diferenciales y la teoría de foliaciones de variedades; referimos al lector a [CaLN] por más información.

Observación 6.6. El Teorema 6.4 es útil para hablar de pull-back o push-forward de campos vectoriales. Si $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un difeomorfismo C^1 entre abiertos de $\mathbb{R}^d$, podemos definir, para un campo $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^d$ un campo $g_* f$ en Ω_2 de forma tal que $g_* f(x) = D_{g^{-1}(x)} g(f(g^{-1}(x)))$. En el enunciado del Teorema 6.4 podemos ver que h cumple que $h_* f = e_1$.

7. Estabilidad según Lyapunov

En esta sección nos vamos a restringir al estudio de ecuaciones diferenciales autónomas. Como ya hemos discutido, esto no es restricción real. Salvo que se diga lo contrario, cuando hablemos de condiciones iniciales u órbitas nos referiremos a soluciones de la ecuación (6.0.1). Llamaremos a la solución φ en el dominio correspondiente y denotaremos $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ como ya hemos hecho. Recordar que denotamos $J(x_0)$ al intervalo maximal para la solución con condición inicial x_0 para $t = 0$.

7.1. **Orbitas estables.** La continuidad con respecto a las condiciones iniciales nos permite, dada una condición inicial x_0 y cualquier tiempo finito $T > 0$ encontrar un entorno U_T de x_0 de forma tal que si $x \in U_T$ entonces la órbita por x hasta tiempo T se mantiene cerca de la órbita de x_0. Sin embargo, como se puede chequear fácilmente mirando la ecuación $x' = x$ es imposible en general encontrar un abierto que funcione para todo valor de T simultáneamente. La existencia de un tal abierto tendría consecuencias prácticas importantes, dado que nos permitiría asegurar que, incluso teniendo errores en las mediciones de la condición inicial, las soluciones se comportarán de forma similar a lo previsto. Tal es la importancia, que existe un nombre específico para las condiciones iniciales con esa propiedad:

Definición 7.1. Una condición inicial x_0 para la ecuación (6.0.1) se dice *estable Lyapunov* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0)\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Implicito en la definición está que $J(x_0) \supset [0, +\infty)$.

En muchos casos interesa estudiar una condición más fuerte:

Definición 7.2. Una condición inicial x_0 para la ecuación (6.0.1) se dice *asintóticamente estable Lyapunov* si es estable Lyapunov y además existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \varepsilon_0$ entonces $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

Por supuesto estas no son las únicas nociones posibles de estabilidad y se pueden encontrar cientos de variantes en la literatura. En este curso, nos concentraremos en estas dos nociones.

Ejercicio 10.

(1) Construir una ecuación diferencial autónoma que para cierta condición inicial x_0 se cumpla que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\|x-x_0\| < \varepsilon_0$ entonces $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$ pero que no es asintóticamente estable Lyapunov.

(2) Mostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es C^1 y $f(0) = 0$ y se cumple que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\|x\| < \varepsilon$ vale que $\|\varphi_t(x)\| \to 0$ entonces el origen es asintóticamente estable según Lyapunov. (¿Es cierto esto?, en todo caso, la prueba difícilmente sea sencilla....)

7.2. **Puntos de equilibro verificando la condición Hurwitz.** Nos interesará fundamentalmente establecer la estabilidad Lyapunov y la estabilidad asintótica para puntos de equilibrio. En ese sentido, al igual que en dimensión 1, tenemos un criterio bastante sencillo. Decimos que un punto de equilibrio x_0 para $x' = f(x)$ es *Hurwitz* si se cumple que $D_{x_0} f$ tiene todos sus valores propios con parte real negativa.

Proposición 7.3. *Los puntos de equilibrio Hurwitz son asintóticamente estables según Lyapunov.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia directa del Teorema 6.2. Queda como ejercicio. Como sugerencia, proponemos probar la siguiente propiedad:

- Sea $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de forma tal que $g(0) = 0$ y tal que $\|D_0 g\| < \lambda < 1$ entonces se cumple que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ se cumple que $g(B_\varepsilon(0)) \subset B_{\lambda\varepsilon}(0)$.

$\square$

7.3. **Los teoremas de Lyapunov.** Nos proponemos dar condiciones para la estabilidad Lyapunov de puntos de equilibrio. Referimos al lector a los textos [deG, Kh] para más información sobre esto así como sus aplicaciones a la teoría de control, de gran importancia en problemas de ingeniería.

La idea es construir *funciones de Lyapunov* que se pueden pensar como funciones de *altura*, donde se pide que las orbitas *bajen*. Cuando el origen es un mínimo local de dicha función de altura, obtendremos su estabilidad de forma bien natural. Como en todo este capítulo, trabajaremos con la ecuación (6.0.1) y haremos durante esta sección la suposición de que el orígen es un punto de equilibrio (i.e. $f(0) = 0$).

Definición 7.4. Una *función de Lyapunov* es una función $V : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 de forma tal que:

(L1) $V(0) = 0$,

(L2) existe $\delta > 0$ tal que para todo $\|x\| < \delta$ tenemos que $\frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) \leq 0$.

Se dice que la función de Lyapunov es *estricta* si la segunda condición se reemplaza por

(L2') existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \|x\| < \delta$ se cumple que $\frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) < 0$.

Observación 7.5. A primera vista, parecería que necesitamos conocer las soluciones para chequear la segunda condición. Sin embargo, una aplicación directa de la regla de la cadena muestra que las condiciónes (L2) y (L2') son equivalentes a (ejercicio):

(L2) existe $\delta > 0$ tal que para todo $\|x\| < \delta$ se tiene que $\dot{V}(x) := D_x V(f(x)) \leq 0$,
(L2') existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \|x\| < \delta$ se tiene que $\dot{V}(x) := D_x V(f(x)) < 0$.

Notar que por ser V una función de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ tenemos que $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ y que esta es una función continua de $B_\delta(0)$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 7.6 (Lyapunov I)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua tal que $f(0) = 0$ y existe una función de Lyapunov tal que $V(x) > 0$ para $0 < \|x\| < \delta$. Entonces, el orígen es un punto de equilibrio estable según Lyapunov.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a > 0$ pequeño (e.g. $a < \frac{\delta}{2}$) arbitrario.

Por la continuidad de V sabemos que para todo $a \leq \|x\| \leq \frac{\delta}{2}$ se cumple que $V(x) \geq \alpha$ para algún valor de $\alpha > 0$. Consideramos el conjunto $U_\alpha = \{x \in B_\delta(0) \ : \ V(x) < \alpha\}$. Se cumple que U_α es abierto y contiene al 0. Entonces, existe $b > 0$ tal que para todo $\|x\| < b$ se cumple que $V(x) < \alpha$.

Afirmamos que si $\|x\| < b$ entonces se cumple que $\|\varphi_t(x)\| < a$ para todo $t > 0$, lo cual completaría la demostración.

Para esto, notemos que la función real $t \mapsto V(\varphi_t(x))$ cumple que su derivada es menor o igual a cero en todo punto con lo cual, tenemos que para todo $t > 0$ se cumple que $0 \leq V(\varphi_t(x)) \leq V(x) < \alpha$. Supongamos por absurdo que existe t_0 tal que $\|\varphi_{t_0}(x)\| \geq a$, que por continuidad de la norma, podemos suponer cumple $\|\varphi_{t_0}(x)\| = a$ con lo cual obtenemos que $V(\varphi_{t_0}(x)) \geq \alpha$, una contradicción.

□

Teorema 7.7 (Lyapunov II)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua tal que $f(0) = 0$ y existe una función de Lyapunov estricta tal que $V(x) > 0$ para $0 < \|x\| < \delta$. Entonces, el orígen es un punto de equilibrio astinóticamente estable según Lyapunov.*

DEMOSTRACIÓN. La estabilidad según Lyapunov ya fue establecida en el teorema anterior, con lo cual solo queda mostrar que para condiciones iniciales suficientemente cerca del orígen, se tendrá que las órbitas convergen al origen cuando $t \to +\infty$.

Consideramos $\delta_0 > 0$ de forma tal que $\dot{V}(x) < 0$ para $0 < \|x\| < \delta_0$. Consideramos $\varepsilon > 0$ de forma tal que si $\|x\| < \varepsilon$ entonces $\|\varphi_t(x)\| \leq \delta_0$ para todo $t > 0$.

Dado $x \in B_\varepsilon(0)$ tenemos que la función $t \mapsto V(\varphi_t(x))$ es estrictamente decreciente y como $V(x) \geq 0$ en $B_{\delta_0}(0)$ tenemos que es acotada inferiormente. Afirmamos que $V(\varphi_t(x)) \to 0$ lo cual completaría la prueba dado que $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.

Supongamos entonces por contradicción que $V(\varphi_t(x)) \to b > 0$. Notar que eso significa[11] que $\dot{V}(\varphi_{t_k}(x)) \to 0$ para alguna sucesión de tiempos $t_k \to \infty$. Notar que $\{x \in \overline{B_{\delta_0}(0)} \ : \ V(x) = b\}$ es un compacto que no contiene a 0 con lo cual por ser $\dot{V}$ continua se cumple que $\dot{V} > a > 0$ lo cual nos conduce a una contradicción.

□

También hay una forma de chequear que un punto de equilibrio no es estable:

Teorema 7.8 (Cetaev)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua tal que $f(0) = 0$ y existe una función de Lyapunov estricta tal que existe $x_n \to 0$ donde $V(x_n) < 0$. Entonces, el orígen no es estable según Lyapunov.*

[11]Ejercicio!. Es simple pero vale la pena hacerlo.

DEMOSTRACIÓN. Parecido al teorema anterior. Ejercicio.

□

Ejercicio 11. (1) Usar el Teorema de Lyapunov II para demostrar la Proposición 7.3.
(2) Usar el Teorema de Cetaev para mostrar que si 0 es un punto de equilibrio y $D_0 f$ tiene un valor propio con parte real positiva, entonces el origen es inestable.

Sugerencia: Diagonalizar $D_0 f$ y considerar V siendo una forma cuadrática adecuada.

El teorema de Lyapunov admite un resultado recíproco, conocido como el Teorema de Massera. En esta versión simplificada que estamos trabajando, se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 7.9 (Massera)**.** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de clase C^1 tal que el orígen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces, existe una función de Lyapunov estricta.*

8. LINEALIZACIÓN DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

Ver [Sam, Capítulo 4].

9. FLUJOS EN SUPERFICIES

En esta sección daremos una prueba de un resultado popularmente conocido como el *teorema de la bola peluda*. Para eso, haremos uso de algunos resultados clásicos de topología de superficies que enunciaremos sin demostración. Por más resultados acerca de flujos en superficies, en particular la muy importante teoría de Poincaré-Bendixon, ver [Sam, Capítulo 3].

9.1. **Preliminares de topología de $\mathbb{R}^2$ y S^2.** Utilizaremos continuadamente el siguiente resultado clásico conocido como el teorema de la curva de Jordan. Referimos al lector a [Co] por una demostración que solamente utiliza el teorema de punto fijo de Brouwer de dimensión 2. Otra prueba en el contexto de curvas diferenciables a trozos puede ser encontrada en [GP].

Teorema 9.1 (Jordan)**.** *Sea $h : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una función continua e injectiva. Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus h(S^1)$ contiene exactamente dos componentes conexas cuyo borde es exactamente $h(S^1)$. Una de ellas acotada.*

Por supuesto, dado que $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ este teorema también es útil para analizar curvas cerradas en la esfera.

9.2. **Teorema de la bola peluda.** Mostraremos el siguiente resultado:

Teorema 9.2 (Bola Peluda)**.** *Sea $\varphi_t : S^2 \to S^2$ un flujo en la esfera proveniente de un campo de vectores X de clase C^1, entonces, tiene un punto de equilibrio.*

Si bien no hemos definido ecuaciones diferenciales en variedades el lector no debería tener problemas en dar sentido a este enunciado. En particular, mediante la Observación 6.6 se puede dar sentido a definir una ecuación diferencial en una variedad definiendola en cartas de manera tal que el cambio de cartas sea compatible con la elección de la ecuación. Otra forma es definir la ecuación a través de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ donde Ω es un entorno de la esfera pensada como $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de forma tal que $f(x) \in T_x S^2$ siempre que $x \in S^2$. Si f es de clase C^1, por unicidad de las soluciones sabemos que la esfera será un conjunto invariante para la soluciones de la ecuación diferencial y eso definirá un flujo en S^2. El lector utilizará la interpretación que le resulte más cómoda. Vayamos ahora a la prueba del teorema. Por razones de espacio, daremos solamente un breve esbozo ya que no corresponde a un resultado central en el curso. Invitamos al lector interesado a completar los detalles.

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por contradicción asumiento que φ_t no tiene puntos de equilibrio.

Como φ_t proviene de un campo X de clase C^1 podemos recurrir al Teorema 6.4 y considerar un cubrimiento finito $\{U_1, \ldots, U_k\}$ de S^2 de forma tal que cada U_i admite un difeomorfismo h_i a $(-1,1)\times(-1,1)$ que lleva las órbitas de φ_t en curvas horizontales.

Escogemos un punto $x_0 \in S^2$ arbitrario. Por compacidad se cumple que existen $t_1 < t_2$ de forma tal que para algún $i \in \{1, \ldots k\}$ se tiene que $\varphi_{t_1}(x_0), \varphi_{t_2}(x_0) \in U_i$. Utilizando el difeomorfismo h_i se puede construir un arco α transversal a las orbitas de φ_t que una $\varphi_{t_2}(x_0)$ con $\varphi_{t_1}(x_0)$. La curva $\alpha \cup \{\varphi_t(x_1)\}_{t=t_1}^{t_2}$ es una curva cerrada y por lo tanto se puede aplicar el Teorema de Jordan obteniendo dos componentes conexas.

Se cumple que una de las componentes conexas es invariante para el futuro (pues su borde consiste en un arco de orbita y un segmento transversal al flujo), llamamos V_0 a la clausura de dicha componente. Tenemos $\varphi_t(V_0) \subset V_0$ para todo $t > 0$.

Consideramos $\mathscr{F} = \{V \subset V_0$ compacto con complemento conexo $: \ \varphi_t(V) \subset V \ \forall t > 0$, o $\varphi_t(V) \subset V \forall t < 0\}$ ordenados con la inclusión. Es sencillo mostrar que una intersección decreciente de compactos invariantes al futuro es compacto e invariante al futuro, y que si todos los compactos tienen complemento conexo, la intersección también tiene esa propiedad. Como toda sucesión decreciente de conjuntos invariantes al futuro o pasado contiene una subsucesión de conjuntos que son invariantes hacia una de las direcciónes obtenemos que toda cadena decreciente está acotada y por lo tanto hay un elemento minimal en la familia.

Mostremos que dicho elemento minimal tiene que ser una singularidad. En efecto, si tuviese interior, es sencillo construir, utilizando el argumento de encima una nueva región positivamente o negativamente invariante, contradiciendo la minimalidad.

Si no tiene interior, notemos que todo punto tiene que ser de acumulación pues los puntos de acumulación son un cerrado invariante incluido en ese conjunto. Pero esto nos lleva a una contradicción si el conjunto no contiene singularidades, pues podemos considerar una órbita que no es de equilibrio ni cerrada (pues eso daría un conjunto invariante con interior por el Teorema de Jordan) y entonces podemos crear una región invariante que tiene un pedazo de órbita en el borde. Por construcción es posible eliminar ese arco de orbita y contradecir la minimalidad[12]

□

Observación 9.3. Si uno está preparado a asumir un resultado más fuerte de topología de S^2 se puede dar una prueba más directa utilizando el Teorema de Brouwer. El Teorema de Shöenflies dice que si $h : S^1 \to S^2$ es continua e injectiva, entonces existe un homeomorfismo de S^2 que lleva la imágen de h en el ecuador de S^2. De esta forma, luego de construir una región homeomorfa al disco invariante al futuro por φ_t podemos aplicar el teorema de Brouwer a $\varphi_{\frac{1}{n}}$ y, asumiendo que no hay singularidades, el punto fijo de $\varphi_{\frac{1}{n}}$ será una órbita periódica de longitud menor que a_n (con $a_n \to 0$). Aplicando iterativamente este proceso a la componente conexa cuyo diametro es menor que $2a_n$ obtenemos en el límite una singularidad.

[12]Sugerimos al lector realizar dibujos de estos argumentos para visualizarlos mejor. Referimos al lector a [KaH, Sección 14.1] o [Sam, Capítulo 3] por argumentos similares.

10. Brevísima mirada a las Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En esta sección trabajaremos brevemente algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Particularmente la ecuación de onda. Esto permitirá mostrar como la teoría de Fourier es bien adaptada al estudio de ecuaciones en derivadas parciales lineales por transformar derivadas en productos y consecuentemente transformar una ecuación donde aparecen derivadas, en una ecuación lineal donde se puede despejar las incógnitas operando de forma trivial. Esto también permitirá tener una mirada superficial en el tipo de problemas que se presentan y como estas dificultades necesitan de buenas elecciones de objetos. En particular, nos interesa mostrar que las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son mucho más complejas que las diferenciales ordinarias.

Referimos entonces al lector a [SS] por una introducción un poco mayor o directamente al libro clásico [Ev].

10.1. **Ecuación de onda.** La ecuación de onda en un intervalo es:

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial t)^2} = \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} \tag{10.1.1}$$

donde la incógnita u es una función $u(t,x)$ cuyo dominio es $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$. Referimos al lector a [SS] por la derivación física de esta ecuación (que por supuesto involucra también constantes de corrección dimensional que ignoraremos por no tener relevancia al problema puramente matemático).

Haremos algunas observaciones preliminares cuyas demostraciones son consecuencia de cálculos directos:

- Es una ecuación *lineal*, es decir, si u_1 y u_2 son soluciones y $c \in \mathbb{R}$ un número, entonces $u_1 + cu_2$ también es solución.
- La funciónes constantes son solución. Pero al haber dos derivadas, también son soluciones funciones de la forma $u(t,x) = (at+b)(cx+d)$ al igual que combinaciones lineales de ellas.
- Si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces las funciones $u(t,x) = F(x-t)$ y $v(t,x) = F(x+t)$ son soluciones de (10.1.1).

Estas consideraciones son coherentes con algo esperable: si uno busca precisar el problema de forma de tener expectativas de unicidad de soluciones uno tiene que fijar "condiciones iniciales". En EDPs, se suele llamar al equivalente a las condiciones iniciales *condiciones de borde* por razones que serán evidentes.

En este caso, las condiciones de borde a ser utilizadas son del tipo:

$$u(0,x) = f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \ , \ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{10.1.2}$$

con $f,g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$. Notar que se podría dar una condición de borde extra fijando, por ejemplo, una función $u(t,0) = h(t)$, pero no lo haremos.

La idea de como vamos a atacar el problema es muy específica del problema y es conocida como el método de *separación de variables*. Supondrémos que $u(t,x)$, la solución buscada, es de la forma $u(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$ con $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\psi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ funciones de clase C^2. De hecho, por comodidad admitiremos funciones tomando valores complejos y no solamente reales (para que sea adecuado al posterior uso de Fourier).

De esta forma, una tal solución tiene que verificar:

$$\varphi''(t)\psi(x) = \varphi(t)\psi''(x) \;\Rightarrow\; \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

Como ambos lados de la ecuación dependen de variables diferentes, se deduce que ambos lados tienen que ser constantes, con lo cual transformamos en problema en resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\varphi''(t) = \lambda\varphi(t) \quad , \quad \psi''(x) = \lambda\psi(x).$$

De esta manera, y teniendo en cuenta las condiciones de borde que piden que $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ obtenemos que los valores de λ permitidos tienen que ser cuadrados de enteros. Deducimos, que para $\lambda = n^2$ tenemos que las soluciones son de la forma:

$$u(t,x) = (a_n\cos(nt) + b_n\text{sen}(nt))\text{sen}(nx).$$

Utilizando el principio de superposición y continuando con la hipótesis de que $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ obtenemos una gran familia de soluciones de la forma:

$$u(t,x) = \sum_n (a_n\cos(nt) + b_n\text{sen}(nt))\text{sen}(nx).$$

Evaluando en $t = 0$ vemos que:

$$u(0,x) = \sum_n a_n\text{sen}(nx),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_n nb_n\text{sen}(nx).$$

Con lo cual, conociendo las series de Fourier de las funciones f y g en las condiciones de borde (10.1.2) podemos resolver la ecuación.

Observación 10.1. Notar que la regularidad de las soluciones es un tema delicado dado que los coeficientes b_n aparecen multiplicados por n con lo cual cambia su decaimiento.

10.2. **Ecuación de calor en una barra.** Consideramos la ecuación de calor en una barra:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10.2.1}$$

La función incógnita $u : [0,2\pi] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ representa la temperatura de la barra en la posición $x \in [0,2\pi]$ en el tiempo $t \in [0,\infty)$. Las condiciones de borde serán de la forma: $u(x,0) = f(x)$ y pediremos que la barra se caliente de forma constante, i.e. $u(0,t) = a$ y $u(2\pi,t) = b$. Como la función $u_0(x,t) = a + \frac{bx}{2\pi}$ es solución, utilizando la linealidad, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = b = 0$.

Separando variables como en la ecuación de onda, obtenemos que si $u(x,t) = \varphi(t)\psi(x)$ entonces:

$$\varphi''(t) = \lambda\varphi(t) \quad , \quad \psi'(x) = \lambda\psi(x).$$

Como $f(0) = f(2\pi) = 0$ obtenemos un desarrollo en series de Fourier del tipo:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n\text{sen}(nx).$$

Esto nos dice que $\lambda = n^2$ y obtenemos una solución general del tipo:

$$u(x,t)=\sum_{n\geq 1} a_n e^{-n^2 t}\operatorname{sen}(nx).$$

Es muy interesante notar que para cualquier $t>0$ se cumple que la función $x\mapsto u(x,t)$ es de clase C^∞ (ejercicio).

10.3. **Ecuación de Laplace.** Consideramos primero la ecuación de calor en el disco $\mathbb{D}^2=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$ que es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\triangle u \tag{10.3.1}$$

Notar que la incógnita es una función $u:\mathbb{R}\times\mathbb{D}^2\to\mathbb{R}$ que nos indica, en tiempo t, como se distribuye el calor en el disco. Una familia de condiciones de borde usualmente utilizada es conocer una función $\hat{u}:S^1\to\mathbb{R}$ donde $S^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}=\partial\mathbb{D}^2$ indicando la temperatura en el borde del disco y asumiendo que se mantiene fija a lo largo del tiempo (la fuente de calor). Uno espera que luego de un tiempo razonable, el sistema llegue a un equilibrio y la temperatura se mantenga constante. Con lo cual, es natural estudiar para eso la siguiente ecuación:

$$0=\triangle u \tag{10.3.2}$$

Con condición de borde $\hat{u}$ como encima. Al igual que el sistema RLC y el masa-resorte amortiguado el lector puede identificar esta ecuación como apareciendo en otros contextos (e.g. electromagnetismo, análisis complejo, etc).

Recordamos que $\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Se puede cambiar de variables a coordenadas polares y se obtiene que

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{10.3.3}$$

De la misma manera que para la ecuación de ondas (10.1.1) se puede presuponer soluciones de la forma $u(r,\theta)=F(r)G(\theta)$ donde $\hat{u}$ nos determina $u(1,\theta)$. Obtenemos que podemos separar variables y se tiene:

$$\frac{r^2F''(r)+rF'(r)}{F(r)}=-\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}.$$

Que es un tanto más complicado que la ecuación de onda pero admite un tratamiento análogo y nos conduce naturalmente a las series de Fourier (ver [SS] por más detalles).

Notar que la *unicidad* de las soluciones para la ecuación de Laplace es consecuencia de la linealidad de la ecuación y del principio del máximo: Si una función *armónica* (i.e. con laplaciano nulo) de un dominio del plano tiene un mínimo o máximo local en el interior, entonces es constante.

10.4. **Resumen.** Vimos muy brevemente ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales *lineales* y de *segundo orden.* El mundo de las ecuaciones en derivadas parciales es muy grande y como se ve en estos ejemplos, el estudio es muy *ad hoc.*

Los ejemplos que vimos son bastante paradigmáticos porque entran en la clasificación: *hiperbólico* (ecuación de onda), *parabólico* (ecuación de calor) y *elíptico* (ecuación de Laplace). Cada una de estas familias merece un curso aparte.

APPENDIX A. TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Sea $\varphi_k : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas. Decimos que son

- *equiacotadas* si existe $K > 0$ tal que $\|\varphi_k(t)\| \leq K$ para todo $t \in [a,b]$ y k,
- *equicontinuas* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| \leq \delta$ entonces $\|\varphi_k(t) - \varphi_k(t')\| \leq \varepsilon$ independientemente de k.

Recordar que φ_k converge uniformemente a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe k_0 de forma que si $k > k_0$ entonces $\|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ independientemente de $t \in [a,b]$.

Teorema A.1 (Arzelá-Ascoli)**.** *Toda sucesión $\{\varphi_k : [a,b] \to \mathbb{R}^d\}_k$ de funciones equicontinuas y equiacotadas tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

ESBOZO Esto es un argumento diagonal. Considerar $Q = \{t_i\} \subset [a,b]$ un conjunto numerable y denso. Tenemos la siguiente lista de sucesiones de $\mathbb{R}^d$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_k(t_2) & \dots \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_k(t_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_k(t_n) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right.$$

Usando que la sucesión es equiacotada, podemos considerar una subsucesión k_j^1 de forma que la primer fila sea convergente ($\varphi_{k_j^1}(t_1) \to a_1 \in \mathbb{R}^d$); luego una subsucesión k_j^2 de k_j^1 de forma que la segunda fila sea convergente y así sucesivamente. Luego, tomando la subsucesión *diagonal* k_n^n obtenemos que las funciones $\varphi_{k_n^n}(t_i) \to a_i$ para todo i y además tenemos que $\|a_i\| \leq K$ para todo i.

Ahora, utilizando la equicontinuidad podemos chequear que la sucesión $\varphi_{k_n^n}$ es de Cauchy, y por lo tanto la sucesión converge uniformemente.

□

Una propiedad útil de las sucesiones que convergen uniformemente es que se portan bien con el paso al limite y las integrales, etc. Utilizaremos:

Proposición A.2. *Sea $\varphi_k : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ y sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces:*

$$\lim_k \int_a^b f(\varphi_k(t))dt = \int_a^b f(\varphi(t))dt.$$

ESBOZO Por simplicidad suponemos $a = 0$ y $b = 1$. Notar que por φ_k converger uniformemente a φ tenemos que la union de las imagenes de las funciones es acotada, entonces la podemos incluir en un compacto de $\mathbb{R}^d$ y por lo tanto suponer que f es uniformemente continua.

Fijado $\varepsilon > 0$, usando la continuidad uniforme de f podemos considerar $\delta > 0$ tal que si dos puntos están a menos de δ sus imágenes por f están a menos de $\varepsilon/2$.

Sea k_0 y m_0 suficientemente grande de forma tal que si $k > k_0$ y $|t - t'| < \frac{1}{m_0}$ entonces $\|\varphi_k(t) - \varphi(t')\| < \delta$. Sea ahora $m > m_0$ suficientemente grande de forma tal que la integral de $f \circ \varphi$ es aproximada por la suma de Riemann obtenida al partir $[0,1]$ en intervalos de largo $\frac{1}{m}$ a menos de $\varepsilon/2$.

Estas consideraciones juntas dan que para un tal $k > k_0$ tenemos que $\left|\int_0^1 f(\varphi_k(t))dt - \int_0^1 f(\varphi(t))dt\right| < \varepsilon$ obteniendo el resultado deseado.

□

APPENDIX B. TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCIONES

Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $f : X \to X$ es una *contracción* si existe $n_0 > 0$ y $\lambda < 1$ tal que para todo par $x, y \in X$ se cumple:

$$d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Observar que f^n hace referencia al mapa definido inductivamente como $f^0 = \mathrm{id}$ y $f^n := f \circ f^{n-1}$.

Ejercicio 12. Mostrar que una contracción es continua.

Dado un mapa $f : X \to X$ decimos que $x_0 \in X$ es un *punto fijo* si se cumple que $f(x_0) = x_0$.

Teorema B.1 (Punto fijo de contracciones)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces, existe un único punto fijo $x_0 \in X$. Además, se cumple que para todo $x \in X$ se tiene que $f^n(x) \to x_0$ con $n \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero suponemos que $n_0 = 1$ en la definición de contracción. Notar que si $x_0 \in X$ es un punto fijo, entonces la unicidad y la condición de que $f^n(x) \to x_0$ con $n \to \infty$ para todo $x \in X$ son inmediatas ya que se tiene inductivamente que:

$$d(f^n(x), x_0) = d(f^n(x), f^n(x_0)) \leq \lambda^n d(x, x_0) \to 0.$$

Para probar la existencia, mostremos que dado $x \in X$, la sucesión $\{f^n(x)\}_n$ es de Cauchy. Primero, notemos que por inducción, sabemos que:

$$d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq \lambda^{n-1} d(f(x), x).$$

Ahora, si $n > m$ obtenemos que:

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \lambda^i d(f(x), x).$$

Y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(f^n(x), f^m(x)) \leq \varepsilon$. Como X es completo, la sucesión tiene límite $f^n(x) \to x_0$. Por continuidad de f obtenemos que $f^{n+1}(x) \to f(x_0)$ y por lo tanto $f(x_0) = x_0$ como buscabamos.

Finalmente, supongamos que n_0 es arbitrario. Lo probado anteriormente implica que f^{n_0} tiene un único punto fijo x_0. Supongamos por contradicción que no es un punto fijo para f, por lo tanto, tenemos que $f(x_0) \neq x_0$. Por otro lado, se cumple que $f^{n_0}(f(x_0)) = f^{n_0+1}(x_0) = f(f^{n_0}(x_0)) = f(x_0)$, mostrando que $f(x_0)$ sería un punto fijo de f^{n_0} diferente de x_0 contradiciendo el hecho que x_0 es el único punto fijo. Esto completa la prueba.

□

Ejercicio 13. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos completos de diametro acotado y $\mathscr{X} = C^0(X_1, X_2)$ el espacio de funciones continuas de X_1 en X_2. Consideramos la distancia d en $\mathscr{X}$ como $d(f,g) = \sup_{x \in X_1} d_2(f(x), g(x))$. Mostrar que $\mathscr{X}$ es un espacio métrico completo.

APPENDIX C. SERIES DE FOURIER

Este apéndice es una fugaz mirada a las series de Fourier, un tema apasionante además de infinitamente útil. Una omisión imperdonable es que no aparece en este apéndice el cálculo explícito de ninguna serie de Fourier. Recomendamos al lector consultar el excelente libro [SS], en particular los capítulos 2 y 3 por una introducción más completa.

Sea $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ una función de módulo integrable (i.e. $\int_0^{2\pi} |f(t)|dt$ tiene sentido[13] y es finito). La elección de usar como dominio $[0,2\pi]$ es arbitraria pero conveniente, el lector sabrá hacer las modificaciones necesarias en caso que el intervalo de definición sea otro (en particular, hay veces que es conveniente utilizar $[-\pi,\pi]$).

Consideramos los *coeficientes de Fourier* de f siendo:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{C.0.1}$$

Y denotamos

$$S_N^f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}.$$

El operador S_N puede ser pensado como una proyección del espacio de las funciones en el espacio generado por las funciones trigonométricas: $\{e^{int}\}_{|n|\leq N}$ que es finito dimensional. De hecho, consideraremos un producto interno para el cual $\{e^{int}\}$ será un conjunto ortonormal y donde S_N sea precisamente la proyección ortogonal. Luego, veremos que el espacio generado por las funciones trigonométricas es denso lo cual va a darnos que $S_N^f \to f$ con la distancia inducida por el producto interno. Lamentablemente, no es cierto que la sucesión S_N^f converja uniformemente a f cuando f es meramente continua (y entender finamente como es la convergencia en este caso es un tema sutil y profundo), pero mostraremos un hecho relativamente simple que muestra que la convergencia es uniforme cuando f es de clase C^2.

Este proceso va a involucrar utilizar varias nociones de convergencia, como es usual cuando uno trabaja en espacios de dimensión infinita.

Recordamos que $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, con lo cual dado que $\cos(x) = \cos(-x)$ y $\mathrm{sen}(x) = -\mathrm{sen}(-x)$ vale:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{C.0.2}$$

Observación C.1. Como comentario al margen, mencionamos que esto permite mostrar un conocido teorema de Weierstrass que afirma que los polinomios son densos en las funciones continuas. De hecho, como las funciones cos y sen son analíticas, son aproximadas por polinomios. Eso permite aproximar mediante lo comentado anteriormente que los polinomios son densos en las funciones de clase C^2 con la norma del supremo, pero al ser estas últimas densas en las funciones continuas, se completa el argumento.

C.1. **Propiedades básicas de los coeficientes de Fourier.**

Las siguientes propiedades son inmediatas:

[13]Poner tiene sentido es deliberado, en este curso, posiblemente eso signifique ser integrable Riemann, pero más adelante habrán otros sentidos posibles....

Proposición C.2 (Linealidad)**.** *Sean* $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$*,* $c \in \mathbb{C}$ *y* $h = f + cg$*. Entonces, se cumple que:*

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n) + c\hat{g}(n) \ \ , \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia directa de la linealidad de la integral.

□

Proposición C.3 (Derivadas)**.** *Si* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *es* C^1*,* $f(0) = f(2\pi)$ *y* $g = f'$ *entonces* $\hat{g}(n) = in\hat{f}(n)$.

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes, tenemos que:

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{f(t)e^{-int}}{2\pi}\Big|_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(-in)e^{-int}dt = in\hat{f}(n).$$

□

Observación C.4. Si no se tiene que $f(0) = f(2\pi)$ hay que corregir el resultado para tener:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\Big(\hat{g}(n) + \frac{f(0) - f(2\pi)}{2\pi}\Big).$$

Proposición C.5 (Funciones Reales)**.** *Si* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *integrable, entonces* $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, en particular* $\hat{f}(0) \in \mathbb{R}$.

En particular, notar que esto significa que

$$S_N^f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nt) + b_n \mathrm{sen}(nt)).$$

Proposición C.6 (Conjugada)**.** *Sea* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *integrable y sea* $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *definida como* $g(t) = \overline{f(t)}$ *entonces se cumple que* $\hat{f}(n) = \overline{\hat{g}(-n)}$.

Consideramos el conjunto $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Queremos ver que es ortonormal, para eso, consideramos el producto interno siguiente para funciones de cuadrado integrable en $[0, 2\pi]$:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt. \tag{C.1.1}$$

Ser de cuadrado integrable significa que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$ lo cual garantiza la finitud de la cantidad en la ecuación (C.1.1) gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz: si denotamos $\|f\|_2 = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ entonces

$$\langle f, g\rangle \le \|f\|_2\|g\|_2.$$

Proposición C.7. *El conjunto* $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que si $n \neq m$ entonces $e^{int} \perp e^{imt}$, para eso:

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Por otro lado,

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-int}dt = \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi.$$

□

Proposición C.8 (Proyección ortogonal)**.** *Si $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ es de cuadrado integrable, entonces S_N^f es la proyección ortogonal respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre el subespacio generado por $\{e^{int}\}_{n=-N}^N$.*

C.2. **Unicidad de los coeficientes y densidad de las funciones trigonométricas.** El resultado principal es el siguiente:

Proposición C.9. *Supongamos que $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ continua cumple que $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero suponemos que $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ y que $f(t_0) > 0$. Mostraremos que entonces algún coeficiente no se anulará. Fijamos $\delta > 0$ tal que, por continuidad, vale que si $|t - t_0| < \delta$ entonces $f(t) > \delta$.

Para esto, consideramos $p(t) = \cos(t - t_0) + \varepsilon$ donde ε es pequeño de forma tal que $|p(t)| < 1$ si se tiene que $|t - t_0| > \delta/2$. Por compacidad, tendremos que existe $\nu > 0$ tal que si $|t - t_0| \geq \delta$ entonces $|p(t)| \leq 1 - \nu$.

Notar que por la ecuación (C.0.2), tenemos que $p(t) = \frac{e^{-it_0}}{2}e^{it} + \frac{e^{it_0}}{2}e^{-it} + \varepsilon e^{i0t}$. Con lo cual por hipotesis sabemos que $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{p(t)}dt = 0$ y como p es real, $\overline{p} = p$.

Observar que dado que para todo n,m se cumple que $e^{int}e^{imt} = e^{i(n+m)t}$, si consideramos para algún $N > 0$ la función $(p(t))^N$ tendremos una función real en el espacio vectorial generado por las funciones $\{e^{int}\}_{n=-N}^N$ y por lo tanto se cumple que

$$\int_0^{2\pi} f(t)(p(t))^N dt = 0.$$

Sea $C = \max_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|$ y consideramos $N > 0$ de forma tal que $(1 - \nu)^N \ll \frac{\delta^2}{2\pi C}$ entonces, tenemos que:

$$\left|\int_0^{t_0-\delta} f(t)(p(t))^N dt + \int_{t_0+\delta}^{2\pi} f(t)(p(t))^N dt\right| \ll \delta^2$$

Por otra parte, tenemos que $\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)(p(t))^N dt \geq 2\delta^2$, contradiciendo que se cumple que $\int_0^{2\pi} f(t)(p(t))^N dt = 0$.

En el caso que f es compleja, podemos considerar $f = u + iv$. Notar que si definimos $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$ entonces tenemos que $u = \frac{f+\overline{f}}{2}$ y $v = \frac{f-\overline{f}}{2i}$ y utilizando la linealidad (Proposición C.2) y la Proposición C.6 concluimos que los coeficientes de las funciones reales u y v son todos nulos, con lo cual podemos aplicar lo anterior.

□

En particular, podemos deducir:

Proposición C.10 (Convergencia uniforme)**.** *Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de complejos de forma tal que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ entonces, la sucesión $S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$ converge uniformemente a una función continua f tal que $\hat{f}(n) = c_n$. Reciprocamente, si una función continunua f verifica que $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$ entonces S_N^f converge uniformemente a f.*

DEMOSTRACIÓN. La convergencia uniforme es inmediata dado que las funciones e^{int} tienen norma 1. El hecho que $\hat{f}(n) = c_n$ sigue directamente de calcular los coeficientes y utilizar que $\{e^{int}\}$ es un conjunto ortonormal.

Para ver el recíproco, consideramos $g = \lim_n S_N^f$ que existe por lo recién probado y es continua. Aplicando la Proposición C.9 vemos que $f = g$ y obtenemos lo deseado.

□

Esto nos va a permitir mostrar que el subespacio generado por $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en las funciones continuas, utilizando la norma $\|\cdot\|_2$ definida encima. Es decir, para cualquier función continua $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ se cumple que:

$$\|S_N^f - f\|_2 \to 0 \quad \text{con } N \to +\infty.$$

Notar que las funciones continuas con la distancia inducida por $\|\cdot\|_2$ no forman un espacio completo, con lo cual tiene sentido "completar" el espacio para cubrir todas las posibles series de Fourier de funciones que sean límites de funciones continuas con esta norma. Este espacio se denota como $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ y no lo estudiaremos en detalle en este curso, pero se cruzarán con el muchas veces más adelante[14].

Primero veamos que si f es continua los coeficientes de Fourier tiene que decaer con n.

Teorema C.11 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** *Sea* $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ *integrable*[15]*, entonces,* $\hat{f}(n) \to 0$ *con* $|n| \to \infty$.

Retardaremos la prueba de esta proposición hasta que hayamos mostrado algo más acerca de las series de Fourier. Sin embargo, es muy sencillo mostrar que para una función integrable (en particular, en este texto eso implica acotada) f se cumple que los coeficientes de Fourier están acotados.

De hecho:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|. \tag{C.2.1}$$

Como consequencia directa de la cota (C.2.1) y de las proposiciones C.3 (y la observación C.4) y C.10 obtenemos.

Corolario C.12. *Sea* $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ *una función de clase* C^2 *tal que* $f(0) = f(2\pi)$*. Entonces, se cumple que existe* $C > 0$ *tal que* $|\hat{f}(n)| < \frac{C}{|n|^2}$*. En particular* $S_N^f \to f$ *uniformemente.*

Ahora utilizamos el siguiente resultado elemental:

Lema C.13. *Las funciones de clase* C^∞ *de* $[0,2\pi]$ *en* $\mathbb{C}$ *son densas en las funciones continuas con la norma del supremo (c.f. convergencia uniforme). Además, las funciones de clase* C^∞ *de* $[0,2\pi]$ *en* $\mathbb{C}$ *que valen lo mismo en* 0 *que en* 2π *son densas en las continuas con la norma* $\|\cdot\|_2$.

[14] Si bien aquí lo estamos definiendo como la completación de las funciones continuas con una cierta distancia, el espacio admite una realización concreta, como funciones "cuadrado integrable" en el sentido de la integral de Lebesgue luego de un cociente adecuado que identifica funciones que difieren en un conjunto de medida nula.

[15] En este texto, como estamos considerando la noción de integrabilidad según Riemann, se pierden algunas sutilezas. Por simplicidad, mostaremos este resultado para f acotada, en particular, de cuadrado integrable donde el resultado es más sencillo. Cuando el estudiante aprenda lo que es el espacio $L^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ puede ser conveniente revisitar estos resultados.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ continua y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f existe $\delta > 0$ tal que si $|t-s| < 2\delta$ entonces $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/2$.

Cubrimos $[0,2\pi]$ por intervalos $I_i = ((i-1)\delta, (i+1)\delta)$ con $i = 0, \ldots 2\pi/\delta$. Consideramos una partición de la unidad φ_i subordinada al cubrimiento $\{I_i\}$, es decir, φ_i son funciones de clase C^∞ de $[0,2\pi] \to [0,1]$ tales que $\varphi_i = 0$ fuera de I_i y se cumple que para todo $t \in [0,2\pi]$ vale $\sum_i \varphi_i(t) = 1$.

Tomamos ahora la función de clase C^∞ definida como $\psi(t) = \sum_i f(\delta i)\varphi_i(t)$ que es sencillo mostrar cumple que $|\psi(t) - f(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [0,2\pi]$.

Para ver que aquellas funciones de clase C^∞ tales que $\psi(0) = \psi(2\pi)$ son densas con la norma $\|\cdot\|_2$ alcanza ver que dada una función continua f podemos tomar una sucesión ψ_n de funciones C^∞ que converge uniformemente a f. Por lo tanto, existe $K > 0$ tal que $|\psi_n(t)| \leq K$ para todo n, t. Consideramos la sucesión $\hat{\psi}_n$ definida como siendo igual a ψ_n para $t \in [0, 2\pi - 1/n]$ y "pegandola" de forma tal que $\hat{\psi}_n(2\pi) = \hat{\psi}_n(0)$. Notar que eso se puede hacer de forma tal que $\int_0^{2\pi} |\psi_n(t) - \hat{\psi}_n(t)|^2 dt \leq 4K^2/n \to 0$. Esto concluye.

□

Observación C.14. Claramente, con la prueba se ve también que las funciones de clase C^∞ que valen lo mismo en 0 y 2π son densas en las funciones continuas que valen lo mismo en 0 y 2π con la norma del supremo.

Observación C.15 (Atención!!!). Uno se ve tentado a razonar de la siguiente forma: las series de Fourier de las funciones C^2 convergen uniformemente a ellas entonces, si f es una función continua cualquiera, tomamos una sucesión f_n de funciones de clase C^2 convergiendo uniformemente a f y por lo tanto $S_N^{f_n} \to S_N^f$. Esto aparenta decir que la convergencia de S_N^f a f es uniforme lo cual no es necesariamente cierto[16]. Para entender el problema notar que, para N fijo, sabemos que $S_N^{f_n} \to S_N^f$ con $n \to \infty$, por otro lado, sabemos que $S_N^{f_n} \to f_n$ uniformemente con $N \to \infty$ y $f_n \to f$ uniformemente con $n \to \infty$. Sin embargo, para garantizar que esto implique que $S_N^f \to f$ uniformemente necesitariamos tener un control en las velocidades de convergencia con el cual no contamos (y no podemos esperar contar dado que el resultado no es cierto).

Sin embargo, cambiando la noción de convergencia, es posible demostrar:

Teorema C.16 (Densidad L^2 de la base de Fourier)**.** *Para toda función continua* $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ *se cumple que* $\|S_N^f - f\|_2 \to 0$ *con* $N \to \infty$.

Para demostrar este teorema, tendremos que realizar algunas estimativas de normas que realizaremos en la siguiente subsección.

C.3. **Identidades elementales.** Primero veremos la siguiente estimativa elemental que implica directamente el Teorema C.11[17]:

Proposición C.17 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea* $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ *acotada, entonces se cumple que:*

$$\|S_N^f\|_2^2 = \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{C.3.1}$$

En particular, $\hat{f}(n) \to 0$ *cuando* $|n| \to \infty$.

[16]Curiosidad: en el curso de Analisis Funcional se puede ver como aplicación sencilla del teorema de acotación uniforme (que es una consecuencia del teorema de Baire) que hay un residual de funciones continuas para las cuales las funciones S_N^f no convergen puntualmente en un residual de puntos de $[0,2\pi]$.

[17]Notar que como mencionamos, el Teorema C.11 es más general y no requiere que f sea acotada, pero en este texto nos restringiremos a este caso.

DEMOSTRACIÓN. Esto es esencialmente el Teorema de Pitagoras. Notar que:

$$\langle f - S_N^f, S_N^f \rangle = 0.$$

De hecho, la Proposición C.7 dice que $\{e^{int}\}_n$ es un conjunto ortonormal, por lo tanto, como

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{int} \rangle,$$

obtenemos que $f - S_N^f \perp e^{int}$ para todo $|n| \leq N$. De esto se deduce lo deseado. Ahora, el Teorema de Pitagoras garantiza que:

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_N^f\|_2^2 + \|S_N^f\|_2^2. \tag{C.3.2}$$

Que como $\|f - S_N^f\|_2 \geq 0$ nos da:

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N^f\|_2^2 = \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2.$$

□

Notar que la proposición anterior dependía exclusivamente de que $\{e^{int}\}_{|n|\leq N}$ es un conjunto ortonormal, que S_N^f es la proyección ortogonal de f sobre el espacio V_N generado por $\{e^{int}\}_{|n|\leq N}$ y el Teorema de Pitagoras. Ahora, veremos que cuando el conjunto ortonormal es "completo", la desigualdad se puede promover a una igualdad. La cota *a priori* que nos da la desigualdad de Bessel, nos permitirá mostrar que el conjunto $\{e^{int}\}_n$ es completo en este sentido.

Proposición C.18 (Identidad de Parseval). *Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ continua, entonces se cumple que:*

$$\sum_n |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2. \tag{C.3.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Lo probamos primero para funciones de clase C^∞ y luego usaremos que estas son densas con la norma $\|\cdot\|_2$ para concluir el resultado.

Sea entonces primero $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una función de clase C^∞. Por el corolario C.12 sabemos que S_N^f converge uniformemente con $N \to \infty$ a f. En particular, tenemos que (c.f. Proposición A.2):

$$\lim_N \|f - S_N^f\|_2^2 = \lim_N \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N^f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_N |f(t) - S_N^f(t)|^2 dt = 0.$$

Consideramos ahora una función continua cualquiera $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ y consideramos $f_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ funciones de clase C^∞ dadas por el Lema C.13 de forma tal que $f_k \to f$ uniformemente con $k \to \infty$. Esto implica que: e

$$\lim_k \|f_k - f\|_2^2 = \lim_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_k(t) - f(t))|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_N |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Consideramos ahora $\varepsilon > 0$ y elegimos k de forma tal que $\|f_k - f\|_2 < \varepsilon/2$ y $N > 0$ para que $\|S_N^{f_k} - f_k\|_2 < \varepsilon/2$. Obtenemos que $\|S_N^{f_k} - f\|_2 < \varepsilon$. Por la ecuación (C.3.2) tenemos que de hecho:

$$\|S_N^f - f\|_2^2 \leq \|S_N^{f_k} - f\|_2^2$$

ya que $S_N^{f_k}$ es una función en el espacio V_N generado por $\{e^{int}\}_{|n|\leq N}$ y la antedicha ecuación implica que S_N^f es la función en V_N más cercana[18] a f con la norma $\|\cdot\|_2$. Por lo tanto $\|S_N^f - f\|_2 \leq \varepsilon$ y obtenemos lo deseado aplicando nuevamente la ecuación (C.3.2).

□

Por supuesto, si consideramos una función integrable cualquiera que pueda ser aproximada por funciones continuas con la norma $\|\cdot\|_2$ entonces el resultado también será válido. De hecho, se puede mostrar que esto ocurre para cualquier función integrable.

Ejercicio 14. Mostrar que toda función continua a trozos puede ser aproximada con la norma $\|\cdot\|_2$ por funciones continuas.

C.4. **Otros resultados de convergencia.** Aquí presentamos otros resultados de convergencia de series de Fourier que pueden ser de interés. Esto no es exhaustivo y referimos al lector a [SS] por una presentación más completa. Comenzamos por un resultado que mejora el Corolario C.12. Notar que su prueba es independiente ya que utiliza la desigualdad de Bessel y no precisa de l igualdad de Parseval que si requiere el Corolario C.12 (en la prueba que realizamos aquí).

Proposición C.19. *Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ de clase C^1 tal que $f(0)=f(2\pi)$ entonces $S_N^f\to f$ uniformemente con N.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $g(t)=f'(t)$ y tenemos que $\hat{g}(n)=in\hat{f}(n)$ por la Proposición C.3.

Pensamos a las sucesiones complejas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\sum_n |a_n|^2<\infty$ como un espacio vectorial (chequear) con un producto interno $\langle\{a_n\}_n,\{b_n\}_n\rangle=\sum_n a_n\overline{b_n}$. Este espacio vectorial se conoce como ℓ^2.

Como $g(t)$ es una función continua, sabemos que, por la desigualdad de Bessel (Proposición C.17) la sucesión $\{\hat{g}(n)\}_n$ está en ℓ^2. Es trivial chequear que $\{\frac{1}{in}\}_n$ también está. Por lo tanto, las sucesiones de sus valores absolutos también están en ℓ^2. Obtenemos:

$$\sum_n |\hat{f}(n)| = \sum_n \frac{|\hat{g}(n)|}{|n|} = \langle\{|\hat{g}(n)|\}_n, \left\{\frac{1}{|n|}\right\}_n\rangle \leq \Big(\sum_n |\hat{g}(n)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_n \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} < \infty$$

donde la última desigualdad es la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Esta cuenta junto con la Proposición C.10 completa la demostración.

□

Ahora veremos un resultado de convergencia puntual[19]

Proposición C.20. *Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ una función integrable de forma tal que es Lipschitz en un entorno de un punto $x_0\in(0,2\pi)$. Entonces, $S_N^f(x_0)\to f(x_0)$ cuando $N\to\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin perdida de generalidad y por conveniencia vamos a considerar $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ y suponer que $f(0)=0$ y se cumple que si $|t|<\varepsilon$ entonces $|f(t)|<K|t|$ para un cierto valor de K. Queda como ejercicio ver que el caso general se puede reducir a este mediante operaciones sencillas.

En estas condiciones, obtenemos que

[18] Aquí es donde la prueba falla si quisieramos ver que S_N^f converge uniformemente a f.

[19] Este resultado, con una demostración similar admite enunciados más fuertes. Referimos al lector a [SS] por más información.

$$S_N^f(0) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{in0} = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)).$$

Por simetría, vemos:

$$2S_N^f(0) = \sum_{n=-N}^{N} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)).$$

Consideramos la función $g(t) = \frac{(f(t)+f(-t))}{1-e^{it}}$. Como $f(t)$ y $f(-t)$ son integrables, y como para $|t| < \varepsilon$ tenemos que $(1 - e^{it}) \sim it$ y $(1 - e^{it})$ está lejos de 0 si $|t| \geq \varepsilon$, deducimos que $g(t)$ es también una función integrable. Ahora, para $n \geq 1$:

$$\hat{f}(n)+\hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(-t))e^{-int}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)(1-e^{it})e^{-int}dt = \hat{g}(n) - \hat{g}(n-1).$$

En particular, obtenemos que:

$$2S_N^f(0) = \sum_{n=-N}^{N} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)) = \sum_{n=-N}^{N} (\hat{g}(n) - \hat{g}(n-1)) = \hat{g}(N) - \hat{g}(-N-1).$$

El Lema de Riemann-Lebesgue (Teorema C.11) implica que $\hat{g}(N) \to 0$ y que $\hat{g}(-N-1) \to 0$ y esto completa la demostración.

□

Como consecuencia obtenemos un importante resultado de localización:

Corolario C.21 (Localización)**.** *Sean $f, g : [0, 2\pi] \to \mathscr{C}$ funciones integrables tales que $f(t) = g(t)$ en un entorno de t_0. Entonces, $|S_N^f(t_0) - S_N^g(t_0)| \to 0$ con $N \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la función $f - g$ y tenemos que es derivable en t_0 entonces aplica la Proposición C.20.

□

APPENDIX D. ALGUNAS NOTACIONES

- $C^0(X, Y)$ denota el espacio de funciones continuas de X en Y. Si X e Y tienen estructura de variedades diferenciables (e.g. $\mathbb{R}^k$) entonces $C^r(X, Y)$ denota el espacio de funciones de clase C^r entre X e Y con $r \in [0, \infty]$.
- La norma en $\mathbb{R}^k$ será la usual $\|(x_1, \ldots, x_k)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$ salvo que se diga lo contrario.
- Para $x \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$ definimos $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \|y - x\| < r\}$.
- Para $A \subset \mathbb{R}^k$ definimos $\overline{A}$ su clausura, ∂A su frontera y $\mathrm{int}(A)$ su interior.
- Si escribimos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ nos referimos a que $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^d$ y $z = (z_1, \ldots, z_m)$. En este caso hablamos de la primer, segunda y tercer variable refiriendonos respectivamente a x, y, z. Lo mismo se aplica a cualquier número de variables en diferentes espacios euclideos.
- Denotaremos $B_\varepsilon(x)$ como la bola abierta de radio ε centrada en x. Algunas veces denotaremos $B_\varepsilon^d(x)$ para indicar que es la bola en $\mathbb{R}^d$.

- $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota el espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes reales pensado como espacio vectorial normado definiendo:

$$\|A\| := \sup_{\|v\|=1} \{\|Av\|\}.$$

- id denotará el mapa identidad en un dominio que quedará claro en el contexto.
- Si $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ y $x \in U$ denotamos $D_x f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ el diferencial en el punto x que identificamos con la matriz asociada en la base canónica.

References

[Ar] V. I. Arnold, *Ordinary differential equations*, MIT Press (1978)

[CaLN] C. Camacho, A. Lins Neto, *Teoria geometrica das folheacoes*, Projecto Euclides, IMPA (1979).

[Co] https://coloquiooleis.wordpress.com/2010/05/17/el-teorema-de-la-curva-de-jordan/

[deG] M. de Guzman, *Ecuaciones diferenciales ordinarias; Teoría de estabilidad y control*, Alhambra (1975)

[Ev] L. Evans, *Partial differential equations.* Graduate studies in Mathematics, AMS (1997).

[GP] V. Guillemin, V. Polack, *Differential topology,*

[KaH] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).

[Kh] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.

[Rob] C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.*, CRS Press (1994).

[Sam] M. Sambarino, *Notas Sistemas Dinámicos*

[Sot] J. Sotomayor, *Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA (1979).

[SS] E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis Vol I. Princeton University Press (2003).

[Tes] G. Teschl. *Oridinary differential equations and dynamical systems*, Graduate studies in Mathematics, AMS (2012).

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

URL: `www.cmat.edu.uy/~rpotrie`

E-mail address: `rpotrie@cmat.edu.uy`