ENTROPÍA Y TOPOLOGÍA DE VARIEDADES.

RAFAEL POTRIE

Abstract. Estas son notas fueron escritas como apoyo (a los estudiantes y al autor) al minicurso de posgrado "Entropía y topología" a ser dictado en el primer semestre de 2014. El curso trata sobre la conjetura de entropía de M.Shub ([Sh]) que vincula la complejidad dinámica de un mapa (su entropía topológica) con como el mapa deforma la variedad al nivel de la homología. Por tratarse de una propiedad conjeturada para mapas diferenciables (y falsa para mapas continuos) es natural que también propiedades geométricas e invariantes por conjugación diferenciable entren en juego junto con la entropía que es puramente topológica. El objetivo es mostrar el "estado del arte" al respecto de esta conjetura terminando por dar una prueba (casi) completa de la conjetura para mapas de clase C^∞ siguiendo [Yom_1].

VERSIÓN PRELIMINAR, COMENTARIOS BIENVENIDOS.

Keywords: Entropía topológica. Crecimiento de volúmen. Acción en homología.

Contents

Feberero 2014.

Introducción

El objetivo de estas notas es presentar una prueba relativamente completa del Teorema de Yomdin ([Yom$_1$]) que resuelve la bien conocida conjetura de entropía ([Sh]) en el caso de mapas C^∞. La conjetura continua abierta en toda su generalidad y en estas notas presentamos también un panorama de los resultados conocidos y parciales así como variados ejemplos iluminadores.

Si bien las notas son "prácticamente autocontenidas", difícilmente puedan ser seguidas sin consulta a referencias externas (fundamentalmente en lo que respecta a la teoría de homología de variedades). La sección 1 se encarga de presentar los conceptos básicos necesarios y fijar notación pero dista de ser una introducción completa a la entropía y homología, para eso recomendamos al lector la lectura de [KH, Capítulo 3] y [BT, Capítulo 1].

Como las notas son pensadas para un minicurso tienen una gran cantidad de ejercicios de variadas dificultades que a entender de quien escribe es importante dedicarles tiempo. Los ejercicios marcados con $(*)$ son más desafiantes y/o más laterales al desarrollo del texto.

Hay bastante redundancia en el texto de forma tal de facilitar (en la medida de lo posible) la lectura no lineal. En particular (salvo las secciones 8, 9 y 10 que son pensadas para leer en orden) se buscó que cada sección fuese independiente de las otras y que la notación no difiriese mucho de la literatura usual.

Hay dos apéndices, uno de ellos presentando un ejemplo que muestra que la conjetura de entropía es falsa para homeomorfismos. Dado que hay un ejemplo muy simple para mapas de S^2, a entender de quien escribe, este ejemplo (que es bien más complicado), no tenia lugar en el cuerpo central del texto. El otro apéndice da una prueba de un ejercicio que si bien no es difícil, es escencial en vincular la prueba de Yomdin con la conjetura de entropía con lo cual se presenta la prueba para quien no tuviese la paciencia de pensarlo.

La numeración de Teoremas, Proposiciones, Ejemplos, Observaciones, Definiciones, etc es lineal y coherente, los ejercicios están numerados aparte con la finalidad de facilitar la busqueda de estos.

1. Clase 1: Conceptos básicos

1.1. **Entropía topológica.** Sea $f : X \to X$ un mapa continuo donde X es un espacio métrico con métrica d. Definimos las siguientes métricas relacionadas con el mapa f:

$$d_n(x, y) := \max_{0 \le i \le n} \{d(f^i(x), f^i(y))\}$$

Denotaremos $B(x, \delta)$ las bolas de centro x y radio δ para la métrica d y $B_n(x, \delta)$ las correspondientes bolas para la métrica d_n. Notese que si $n \ge m$ se cumple que $B_n(x, \delta) \subset B_m(x, \delta)$

Ejemplo 1.1. Si $M = \mathbb{R}^d$ con la métrica usual y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es la función $x \mapsto ax$ con $a \in \mathbb{R}$ entonces:

- $d_n(x, y) = d(x, y)$ si $|a| \le 1$
- $d_n(x, y) = |a|^n d(x, y)$ si $|a| \ge 1$

Ejercicio 1.1. Con $M = \mathbb{R}^d$ y f una transformación lineal, calcular d_n.

Si $\Lambda \subset X$ es un compacto (no necesariamente invariante) definimos los siguientes números:

$$r_n(f, \varepsilon, \Lambda) = \inf\{\#E \ : \ E \subset \Lambda \text{ es } \varepsilon - \text{denso en } \Lambda \text{ para } d_n\}$$

$$s_n(f, \varepsilon, \Lambda) = \sup\{\#E \ : \ E \subset \Lambda \text{ sus puntos están 2 a 2 separados por más de } \ \varepsilon \ \text{ para } \ d_n\}$$

Ejercicio 1.2. Probar que $r_n(f, \varepsilon, \Lambda) \le s_n(f, \varepsilon, \Lambda) \le r_n(f, \frac{\varepsilon}{2}, \Lambda)$.

Los conjuntos E en la definición de r_n se llamarán (n, ε)-*generadores* (en Λ). Los conjuntos en la definición de s_n se llamarán (n, ε)-*separados* (en Λ). Si no se hace referencia a Λ se sobreentenderá que $X = \Lambda$ (en particular, X es compacto).

Ejemplo 1.2. Sea $\Lambda = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ y $f(x) = ax$ con $|a| \ge 1$. Se cumple que $r_n(f, \varepsilon, \Lambda) \sim s_n(f, \varepsilon, \Lambda) \sim \left(\frac{|a|^n}{\varepsilon}\right)^d$.

Definición 1.3 (Entropía topológica)**.** Para $f : X \to X$ continuo y $\Lambda \subset X$ compacto:

$$h_{top}(f, \Lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(f, \varepsilon, \Lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, \Lambda)$$

Si X es compacto, definimos $h_{top}(f) := h_{top}(f, X)$.

Algunas veces, utilizaremos la *entropía a escala* ε del mapa $f : M \to M$ (con M compacto) que es:

$$h_{top}(f, \varepsilon) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(f, \varepsilon, M)$$

que es una cantidad que depende de la métrica en cuestión. Sin embargo, al hacer que $\varepsilon \to 0$ la dependencia en la métrica desaparece.

Proposición 1.4. *La entropía de f es un invariante por conjugaciónes topológicas*[1].

Demostración. La clave es la compacidad que permite encontrar un módulo de continuidad uniforme. Luego, si g es conjugado a f por un homeomorfismo h ($h \circ f = g \circ h$) se cumple que existe $\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ homeomorfismo creciente tal que

$$r_n(f, \varepsilon, \Lambda) \leq r_n(g, \delta(\varepsilon), h(\Lambda)) \leq r_n(f, \frac{\varepsilon}{2}, \Lambda)$$

Los detalles quedan de ejercicio para el lector.

□

Ejercicio 1.3. Si $\pi : \tilde{M} \to M$ es un cubrimiento y $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ levanta a f y se cumple que $\tilde{\Lambda}$ es un compacto tal que $\pi(\tilde{\Lambda}) = \Lambda$ y cada punto de Λ tiene finitas preimagenes en $\tilde{\Lambda}$ por π, mostrar que $h_{top}(\tilde{f}, \tilde{\Lambda}) = h_{top}(f, \Lambda)$. Deducir que si π es un cubrimiento finito de X compacto y $\tilde{f}$ un levantado entonces $h_{top}(f) = h_{top}(\tilde{f})$.

Ejemplo 1.5. (1) La identidad en X tiene entropía cero.
(2) Sea $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una transformación lineal dada por una matríz $d \times d$. Sea $\Lambda = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$. Se cumple que $\mathbb{R}^d = E^{cs} \oplus E^u$ donde E^{cs} es el subespacio propio correspondiente a valores propios de módulo ≤ 1 y E^u correspondiente a los valores propios de módulo ≥ 1. Usando el Teorema de Jordan vemos que $A^n|_{E^{cs}}$ expande distancias a lo sumo polinomialmente con lo cual la métrica d_n no aumenta (más que polinomialmente) en esa dirección. Por otro lado, para cubrir una bola de radio 1 en E^u por bolas de radio ε luego de n iterados se necesitan aproximadamente $\frac{1}{\varepsilon^{\dim E^u}}(|\lambda_1|^n \cdot \ldots \cdot |\lambda_{\dim E^u}|^n)$ bolas, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\dim E^u}$ son los valores propios de módulo mayor que uno. Deducimos que:

$$h_{top}(A, \Lambda) = \sum_{i=1}^{\dim E^u} \log |\lambda_i|$$

(3) Como aplicación del ejemplo anterior y el ejercicio previo vemos que si A es una matriz $d \times d$ con coeficientes enteros, el mapa inducido en $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/_{\mathbb{Z}^d}$ tiene entropia dada por la suma de los logaritmos de los módulos de los valores propios de módulo mayor que 1.

Ejercicio 1.4. (a) Probar que $h_{top}(f^k) = |k| h_{top}(f)$.
(b) Probar que $h_{top}(f, \Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \max\{h_{top}(f, \Lambda_1), h_{top}(f, \Lambda_2)\}$.

En algunos casos es útil reducir el cálculo de la entropía a los lugares donde existe recurrencia.

Proposición 1.6. *Si $f : X \to X$ un mapa continuo de un espacio métrico compacto y sea $\Omega(f)$ su conjunto* no errante[2] *entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(f, \Omega(f))$$

[1]Decimos que $g : Y \to Y$ es *conjugado* a f si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Notar que si f se ve como homeomorfismo tanto de (X, d) y (X, d') donde d y d' son métricas dando lugar a la misma topología, entonces $id : (X, d) \to (X, d')$ es un homeomorfismo que conjuga las dinámicas.

[2]Un punto $x \in \Omega(f)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que $f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Notar que $h_{top}(f, \Omega(f)) = h_{top}(f|_{\Omega(f)})$.

Demostración. La prueba no es trivial pero queda como ejercicio (desafiante). Esto será consecuencia también del principio variacional de la entropía que se mencionará más adelante.

□

Ejemplo 1.7. (4) El shift de dos símbolos es el homeomorfismo $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ que "corre" la sucesión un lugar. Es sabido que considerando la métrica:

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

se obtiene la topología producto. Notar que fijado $\varepsilon < 1$, y $n \geq 0$ grande, se pueden escoger $\sim 2^n$ sucesiones de forma tal que cualquier sucesión en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ coincide con alguna de esas en sus primeros n términos. Esto muestra que esa elección es (n, ε)-generadora. Por otro lado, se ve fácilmente que son (n, ε)-separados ya que en algún término difieren. La conclusión es que $h_{top}(\sigma) = \log 2$.

(5) Es bien sabido que se puede hacer un difeomorfismo de la esfera S^2 de forma tal que su conjunto no errante consista de exactamente un punto fijo atractor, uno repulsor y un conjunto cuya dinámica es conjugada al shift de dos símbolos. Este difeomorfismo es usualmente llamado la *herradura de Smale*. Es recomendable ver imágenes ([SSh]). La entropía es $\log 2$.

(6) El mapa $z \mapsto z^2$ se extiende a un mapa de $S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$. El conjunto no errante coincide con el 0 y el infinito (puntos fijos atractores) y el ecuador (círculo repulsor) donde la dinámica es como $x \mapsto 2x(mod 1)$ en el círculo. Usando que la entropía coincide con la del conjunto no-errante y el ejemplo (3) obtenemos que $h_{top}(f) = \log 2$.

(7) El mapa $z \mapsto \frac{z^2}{2|z|}$ en $\mathbb{C}$ también se extiende a un mapa continuo de *grado 2* de la esfera S^2. Se cumple que el conjunto no errante consiste del 0 y el ∞ donde 0 es un punto atractor y ∞ un punto repulsor. Notar que f es diferenciable en todos lados menos en 0 y en ∞.

1.2. **Homología.** Sea M una variedad de dimensión d. Siempre que sea necesario y que olvidemos de mencionarlo, asumiremos que M tiene una métrica riemanniana y que es orientable, compacta, conexa, etc.

Consideramos $\sigma : \Delta^k \to M$ un mapa de clase C^1 (*simplejo singular*) donde $\Delta^k \subset \mathbb{R}^N$ ($N \gg k$) es la envolvente convexa orientada de $k+1$ puntos que no están en el mismo $k-1$-plano. Denotamos $\Lambda^k = [x_0, \dots, x_k]$ cuando queremos ser explícitos en cuanto a que simplejo es.

Definimos un espacio vectorial que codifica todos los posibles mapas como σ, es decir, $C_k(M)$ es el espacio vectorial generado por todos los posibles mapas $\sigma : \Delta^k \to M$. Para $\sigma \in C_k(M)$ un simplejo singular, definimos[3]:

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma|_{[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k]} \in C_{k-1}(M)$$

[3]La notación $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k]$ denota el $k-1$ simplice definido por los puntos $x_0, \dots, x_k$ al remover x_i en el orden ("orientación") que aparecen.

y extendemos ∂ a todo C_k obteniendo un mapa lineal $\partial_k : C_k(M) \to C_{k-1}(M)$.

No es difícil ver que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ para todo k (o más sucintamente, $\partial^2 = 0$). Entonces se pueden definir los siguientes subespacios vectoriales de $C_k(M)$:

$$Z_k(M) = \ker \partial_k \quad ; \quad B_k(M) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

Que nos permite definir la *homología* k-dimensional de M como el cociente:

$$H_k(M) = \frac{Z_k(M)}{B_k(M)}$$

Si $f : M \to N$ es un mapa C^1 entre variedades, se ve fácilmente que induce mapas lineales en $C_k(M, \mathbb{R})$ que respetan (conmutan con) ∂_k con lo cual se puede hablar del mapa inducido:

$$f_{*,k} : H_k(M) \to H_k(N)$$

que si $c = \sum_{i=0}^m a_i\sigma_i \in Z_k(M)$, cumple que $f_{*,k}([c]) = [\sum_i a_i f \circ \sigma_i] \in H_k(N)$.

Teorema 1.8. *Si M es variedad compacta orientable y conexa de dimensión d se cumple que:*

- $\dim H_k(M) < \infty$ *para todo k*
- $H_k(M) = 0$ *si $k \geq d$.*
- *(Dualidad de Poincare) $H_{d-k}(M) \cong H_k(M)$.*
- $H_0(M) \cong H_d(M) \cong \mathbb{R}$.
- *Si $f, g : M \to M$ son* homotópicos *entonces $f_{*,k} = g_{*,k}$ para todo k.*

Estas propiedades serán más visibles con la cohomología de de Rham.

Ejercicio 1.5. Mostrar que si $f : M \to M$ es un mapa C^1 entonces $f_{*,d}$ es multiplicar por el grado de f.

Ejercicio 1.6. Mostrar que $Z_1(M)$ corresponde con curvas cerradas en M y que si γ y γ' son curvas homotópicas entonces representan el mismo elemento en $H_1(M)$. Tratar de caracterizar $H_1(M)$.

1.3. **Cohomología de de Rham.** Consideraremos M una variedad orientable.

Sea $\Omega_k(M) = \{k-\text{formas diferenciales en } M\}$. Definimos $d_k : \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M)$ la derivada exterior. se cumple de nuevo que $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Podemos entonces definir $Z^k(M) = \ker d_k$ y $B^k(M) = \operatorname{Im} d_{k-1}$. Definimos la k-ésima *cohomología de de Rham* de M como el cociente:

$$H^k_{dR}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

Teorema 1.9 (de Rham)**.** $H_k(M) \cong H^k_{dR}(M)$.

Esbozo Definimos $\Psi : H^k_{dR}(M) \to (H_k(M))^*$ como

$$\Psi(\omega)([c]) = \int_c \omega$$

donde si $c = \sum a_i\sigma_i$ entonces $\int_c \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega$.

El Teorema de Stokes implica que Ψ está bien definido (ejercicio). Para probar que es un isomorfismo se utiliza la llamada sucesión de Mayer-Vietoris y el siguiente hecho[4]:

Lema 1.10. *Si M es una variedad y $\mathcal{U}$ una familia de abiertos tales que:*

(i) *Si U es difeomorfo a un convexo de $\mathbb{R}^d$ entonces $U \in \mathcal{U}$.*
(ii) *Si U, V y $U \cap V$ pertenecen a $\mathcal{U}$ entonces $U \cup V$ también.*
(iii) *Si $\{U_\alpha\} \subset \mathcal{U}$ son disjuntos dos a dos, entonces su union pertenece a $\mathcal{U}$.*

Entonces M pertenece a $\mathcal{U}$.

□

Nota, el Teorema de dualidad de Poincare también sigue de una estrategia similar. Ver el libro [BT].

Ejercicio 1.7. Calcular $H_i(S^d)$ y $H_i(\mathbb{T}^d)$.

1.4. **Radio espectral y enunciado de la conjetura.** Si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal, definimos su *radio espectral* como

$$s(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

que se puede ver no depende de la norma y coincide con el módulo del mayor valor propio de T.

Sea $f : M \to M$ un mapa de clase C^1. Llamamos

$$f_* : \bigoplus_{i=0}^{d} H_i(M) \to \bigoplus_{i=0}^{d} H_i(M)$$

al mapa suma de los $f_{*,k}$. Se cumple entonces que:

$$s(f_*) = \max_{0\le i\le d} s(f_{*,i})$$

Conjetura (Conjetura de Entropia [Sh]). *Sea $f : M \to M$ un mapa C^1 de una variedad compacta M. Entonces, $h_{top}(f) \geq \log s(f_*)$.*

Ejercicio 1.8. (i) Mostrar que los ejemplos de 1.7 que son de clase C^1 verifican la conjetura de entropía.
(ii) Mostrar que el ejemplo (7) allí no es diferenciable y no la verifica.
(iii) Mostrar la conjetura de entropía para mapas C^1 del círculo.
(iv) Mostrar que un homeomorfismo del círculo tiene entropía nula.
(v) Mostrar que si $f : M \to M$ es un cubrimiento continuo, entonces $h_{top}(f) \geq \log|\deg(f)|$.

[4]Si el lector encuentra molesto que hayamos definido la homología utilizando simplejos de clase C^1 puede intentar dar una prueba de que la homología definida con simplejos C^0 es la misma utilizando este lema.

2. Clase 2: Motivaciones y Panorama

Predecir el futuro conociendo el presente es quizás el objetivo principal de los sistemas dinámicos. Es por eso que cualquier información *a priori* que tengamos acerca de la complejidad de la distribución asintótica de las órbitas de un sistema es invaluable en la tarea del dinamista.

Información a priori es un concepto vago que vale la pena precisar, pero sea cual sea, las propiedades topológicas del mapa, y fundamentalmente las más groseras como la manera que el mapa "enrolla" a la variedad en si misma son definitivamente información a priori. Esta claro que no podemos esperar conocer la dinámica precisamente con solo entender esta información, pero la idea de que esto nos puede dar cotas inferiores a la complejidad es un hecho notable.

La conjetura de entropía también puede ser incluida en preguntas más generales. Por más problemas relacionados con el vínculo entre la dinámica de un mapa y su información en el nivel de la topología algebraica de la variedad, ver [Sh, Sh_2].

A pesar que la conjetura de entropía se encuentra abierta en toda generalidad, avances considerables se han obtenido desde su formulación a principios de los años 70. El más notable de todo es su resolución completa en el caso de mapas C^∞ debida a Yomdin [Yom_1, Yom_2](ver también [Gr]).

Es también importante mencionar varios resultados parciales como por ejemplo el resultado de Manning ([Man]) que asegura que el logaritmo del radio espectral de la acción en el primer grupo de homología es siempre cota inferior a la entropía de mapas continuos. También se cumple que si $f : M \to M$ es un mapa C^1 de una variedad cerrada entonces el logaritmo del grado es cota inferior de la entropía ([MP_1]). Estos resultados son presentados en estas notas en la sección 3.

Hay variedades cuya sencilla topología nos permite probar la conjetura de entropía. Para mapas C^1 de las esferas d-dimensionales, es consecuencia del resultado de Misiurewicz-Przytycki mencionado encima ([MP_1]). Misiurewicz y Przytycki también logran probar que la conjetura de entropía se verifica para mapas continuos del toro d-dimensional [MP_2]. Este resultado ocupa la sección 4 de estas notas junto con el cálculo de la homología del toro. Vale remarcar que estas ideas han sido extendidas recientemente y se conocen otras variedades que verifican la conjetura de entropía (incluso para mapas continuos), ver [MaP].

El resto de las notas se ocupa de estudiar vínculos entre como varía el volumen de las bolas de Bowen y el de los iterados de subvariedades encajadas y encontrar vínculos con la entropía del mapa. Un hecho notable es que la variación de volumen de una subvariedad es un invariante por conjugación diferenciable mientras que la entropía es un invariante de conjugación topológica. En la sección 5 mostramos una propiedad sencilla que garantiza que un difeomorfismo cumpla la conjetura de entropía y la utilizamos para mostrar que los difeomorfismos de Anosov la verifican. En la sección 6 presentamos una breve introducción a algunas herramientas de teoría ergódica diferenciable para mostrar como en algunos casos el estudio de medidas invariantes permite obtener información relevante acerca de la entropía (sobre todo via el Principio Variacional). En dicha sección se da un esbozo de la prueba de un teorema debido a Gromov ([Gr_2]) que muestra que para mapas racionales de la esfera de riemann la entropía se puede conocer a priori exactamente via la acción en homología.

Las secciones 7,8,9 y 10 se encargan de presentar y demostrar el Teorema de Yomdin. Además, en la sección 7 se presenta un resultado debido a Newhouse y se muestran otras aplicaciones de la teoría de Yomdin a la continuidad de la entropía. La prueba del Teorema de Yomdin está escencialmente contenida en las secciones 8 y 9 módulo un resultado de geometría subalgebraica real que se presenta en la sección 10.

Cerramos esta sección mencionando que la conjetura de entropía sigue dando lugar a trabajos de investigación que buscan comprender mejor como eliminar la hipótesis de alta regularidad impuesta por Yomdin en su trabajo y algunos resultados recientes han logrado avanzar en algunos casos particulares. Referimos al lector a [SX, LVY] por nuevos resultados y otras referencias relevantes.

3. Clase 3: Algunos resultados parciales

3.1. **Entropía y grupo fundamental.**

Sea $a_1, \dots, a_m$ un generador (simétrico)[5] de $\pi_1(M)$. Para $a \in \pi_1(M)$ denotamos $\varphi_n(a)$ como el menor número de elementos necesarios para escribir $f_*^n(a)$ en los generadores $a_1, \dots, a_n$ y consideramos $GF(a) = \limsup_n \frac{1}{n} \log \varphi_n(a)$.

Ejercicio 3.1. Mostrar que $GF(a)$ no depende del generador escogido. Mostrar que $\log s(f_{*,1}) \leq \max_{a\in\pi_1(M)} GF(a)$. Mostrar que alcanza tomar el máximo en los elementos de un generador.

Teorema 3.1 (Manning [Man]). *Sea $f : M \to M$ un mapa continuo, entonces $h_{top}(f) \geq \log s(f_{*,1})$.*

De hecho, la prueba muestra que para cualquier $a \in \pi_1(M)$ se cumple que $h_{top}(f) \geq GF(a)$. Este resultado se debe independientemente (por lo menos) a Bowen, Gromov, Katok, Manning y Shub (según [KH]).

Demostración. Sea $\sigma : [0, 1] \to M$ una curva suficientemente pequeña y $\varepsilon > 0$. Vamos a mostrar que existe $c := c(\sigma, \varepsilon)$ constante tal que para todo $n \geq 0$ se cumple que la curva $f^n \circ \sigma$ es homotópica a extremos fijos a una curva cuya longitud es menor o igual a $cr_n(f, \varepsilon)$.

De esta forma, si γ es una curva cerrada cualquiera, podemos partirla en $\hat{c} := \hat{c}(\gamma)$ curvas pequeñas $\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{c}}$ como arriba y obtenemos que dado $\varepsilon > 0$ la curva $f^n \circ \gamma$ será homotópica a una curva de longitud a lo sumo $\hat{c} \max_{\sigma_i}\{c(\sigma, \varepsilon)\} r_n(f, \varepsilon)$ que nos da $h_{top}(f) \geq GF([\gamma])$.

Fijamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que toda bola de radio menor o igual a 2δ en M sea contractible. Consideramos K usando la continuidad uniforme de f de forma tal que toda curva contenida en una bola de radio menor o igual a $\frac{\delta}{K}$ verifica que su imágen es homotópica a una curva de longitud menor o igual a δ.

Sea $\sigma : [0, 1] \to M$ una curva cuya imágen está contenida en una bola de radio δ y sea $\varepsilon > 0$.

Podemos suponer que ε es suficientemente pequeño de forma tal que si $x, y \in M$ cumplen que $d(x, y) \leq 4\varepsilon$ entonces se pueden unir en una bola de radio menor que $\frac{\delta}{K}$.

Fijaremos de ahora en más $n \geq 0$ y la métrica $d_n(x, y) = \max_{0\geq i\geq n} d(f^i(x), f^i(y))$. Consideramos Q_n una ε-red con respecto a la métrica d_n en M que tenga exactamente $r_n(f, \varepsilon)$ elementos.

Notamos la concatenación de curvas como $*$ y subdividimos $\sigma = [z_0, z_1] * \dots * [z_{s-1}, z_s]$ de forma tal que existen puntos $x_i \in Q_n$ tal que para todo $0 \leq i \leq s - 1$ se cumple que $[z_i, z_{i+1}]$ está contenido en $B_n(x_i, \varepsilon) \cup B_n(x_{i+1}, \varepsilon)$.

[5]Es generador y si un elemento pertenece, entonces su inverso también.

Consideramos curvas $[x_i, z_i]$ y $[z_i, x_i]$ contenidas en $B_n(x_i, \varepsilon)$ y orientadas de la forma natural y tenemos que si consideramos la curva

$$\sigma' = [z_0, x_0] * [x_0, z_0] * [z_0, z_1] * \ldots * [z_{i-1}, z_i] * [z_i, x_i] * [x_i, z_i] * \ldots * [z_{s-1}, z_s] * [z_s, x_s] * [x_s, z_s]$$

que es homotópica a extremos fijos a σ y está contenida en una bola de radio a lo sumo 2δ. Si hay puntos $x_i = x_j$ con $i \neq j$ se cumple que σ' contiene algun lazo, pero como σ' está en una bola de radio 2δ ese lazo tiene que ser contractible necesariamente y tenemos entonces que eliminando algunos de los segmentos de σ' obtenemos una curva σ'' homotópica a extremos fijos a σ que tiene curvas de la forma $[z_i, z_{i+1}]$, $[x_i, z_i]$ y $[z_i, x_i]$. En particular, σ'' tiene a lo sumo $3r_n(f, \varepsilon)$ segmentos de dichos tipos.

Ahora, sea $\eta = [y, y']$ un segmento de los de σ'', vamos a ver que $f^n \circ \eta$ es homotópico a extremos fijos a una curva de longitud menor o igual a $\frac{\delta}{K}$.

Para eso, sabemos que η lo es, y asumamos que $f^i \circ \eta$ es homotópico a extremos fijos a un arco η_i de longitud menor o igual a $\frac{\delta}{K}$. Tenemos entonces que $f^{i+1}(\eta)$ es homotópico a extremos fijos a $f \circ \eta_i$ y como los extremos $f^{i+1}(y)$ y $f^{i+1}(y')$ están a menos de 4ε obtenemos la curva η_{i+1} deseada.

Obtuvimos que $f^n \circ \sigma$ es homotópico a extremos fijos a una curva de longitud menor o igual a $3\delta r_n(f, \varepsilon)$ que da el resultado deseado.

□

Observación 3.2. Notar que la prueba da que si $f : M \to M$ es un mapa continuo, entonces existe ε (que sólo depende de la métrica en M y los módulos de continuidad uniforme de f) de forma tal que $h_{top}(f, \varepsilon) \geq GF(a)$ para todo $a \in \pi_1(M)$.

3.2. **Grado y entropía.** En esta sección probaremos un resultado de [MP$_1$] (ver también [Ka]). Recordar que $s(f_{*,d}) = |\deg(f)|$ donde $\deg(f)$ denota el grado topológico del mapa f.

Teorema 3.3 (Misiurewicz-Przytycki)**.** *Sea $f : M \to M$ un mapa C^1 de una variedad compacta (orientable) M, entonces $h_{top}(f) \geq \log|\deg(f)|$.*

La hipótesis de ser C^1 es escencial, recordar el ejemplo $z \mapsto \frac{z^2}{2|z|}$ en la esfera de Riemann. Para un mapa C^1 en una variedad M definimos $\text{Jac}_x(f)$ como el volumen (orientado) en $T_{f(x)}M$ de la imágen por $D_x f$ del cubo de de lado 1 en $T_x M$.

Observación 3.4. Este teorema implica que la conjetura de entropía se verifica para mapas C^1 de la esfera S^d para cualquier d.

Demostración. Sea $N = |\deg(f)|$ y sean $\alpha \in (0, 1)$ y $L = \max_x |\text{Jac}_x(f)|$. Fijamos $\delta = L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$.

Consideramos $B = \{x \in M \ : |\text{Jac}_x(f)| \geq \delta\}$ compacto (con interior). Podemos cubrir B por abiertos donde f es un difeomorfismo local y consideramos $\varepsilon > 0$ el número de Lebesgue del cubrimiento, en particular:

– Si $x, y \in B$ cumplen que $d(x, y) \leq \varepsilon$ entonces $f(x) \neq f(y)$.

Ahora fijaremos $n \geq 0$ y consideramos el conjunto A de los puntos $x \in M$ tal que no más de αn de los puntos $x, \ldots, f^{n-1}(x)$ pertenecen a B.

Supongamos que $x \in A$, entonces:

$$|\operatorname{Jac}_x f^n| = \prod_{j=0}^{n-1} |\operatorname{Jac}_{f^j(x)} f| < \delta^{(1-\alpha)n} L^{\alpha n} \leq (\delta^{1-\alpha} L^{\alpha})^n \leq 1$$

Con lo cual obtenemos que $\operatorname{Vol}(f^n(A)) < \operatorname{Vol}(M)$. En particular, $M \setminus f^n(A)$ tiene medida positiva y el Teorema de Sard[6] implica que hay valores regulares en $M \setminus f^n(A)$.

Sea $x \in M \setminus f^n(A)$ un valor regular de f^n (y por lo tanto de f). Vamos a construir $Q_n \subset f^{-n}(\{x\})$ un conjunto (n, ε)-separado tal que contenga aproximadamente $N^{\alpha n}$ puntos (notar que $\# f^{-n}(\{x\}) \geq N^n$ por ser x valor regular).

Construiremos $Q^{(i)} \subset f^{-i}(\{x\})$ inductivamente de la siguiente forma:

- $Q^{(0)} = \{x\}$.
- Para cada $y \in Q^{(i-1)}$ hacemos lo siguiente: si $f^{-1}(\{y\})$ tiene N puntos en B, elegimos esos N puntos (que necesariamente están a más de ε), si no, elegimos una preimagen cualquiera de y que no esté en B (notar que siempre y tiene al menos N preimagenes por ser x valor regular de f^n). Llamamos al primer caso una *buena transición*.
- Definimos $Q_n = Q^{(n)} \subset f^{-n}(\{x\})$.

En primer lugar, Q_n es (n, ε)-separado pues si $y \neq y' \in Q_n$ entonces $f^n(y) = f^n(y') = x$. Consideramos $k \geq 1$ el primer entero tal que $f^k(y) = f^k(y')$. Notar que por como fue elegido Q_n se cumple que $f^{k-1}(y)$ y $f^{k-1}(y')$ pertenecen a B de donde, por la elección de ε, tenemos que $d(f^{k-1}(y), f^{k-1}(y')) > \varepsilon$.

Ahora, si consideramos m como el mayor entero menor que αn, afirmamos que $\# Q_n \geq N^m$.

Para ver esto, consideramos $y \in Q_n$ entonces, como $x \notin f^n(A)$ se cumple $y \notin A$ y entonces se cumple que por lo menos αn iterados futuros de y intersectan B. Eso quiere decir que en el futuro de y se pasa por al menos αn buenas transiciones. Esto da al menos[7] $N^{\alpha n}$ puntos en Q_n.

Obtuvimos que $s_n(f, \varepsilon) \geq N^{\alpha n}$ para todo n con lo cual $h_{top}(f) \geq \alpha \log N$. Como α era arbitrario, obtenemos lo deseado.

□

Pregunta. *Sea $f : S^2 \to S^2$ de clase C^1 y grado 2. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $h_{top}(f, \varepsilon) \geq \log 2$?*

Ejercicio 3.2. Mostrar que si $f : M \to M$ es de clase C^1 y cumple que un conjunto de medida total en M tiene al menos d preimagenes entonces $h_{top}(f) \geq \log d$. Dar un ejemplo que muestre que este enunciado es más general que el teorema anterior (nota: esto también fue mostrado en [MP$_1$]).

Ejercicio 3.3. Entender como y que falla en el ejemplo 1.7 (7). Mostrar que dicho ejemplo se puede hacer de forma tal de ser diferenciable en el atractor pero no en el repulsor.

[6] Recordar que para mapas de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$ el teorema de Sard vale C^1.

[7] Recordar que cada buena transición implica que las N preimagenes se toman en B. Entonces, tenemos que cada camino de x a un punto de Q_n pasa por al menos αn bifurcaciones en N puntos diferentes, esto implica que hay $N^{\alpha n}$ puntos en Q_n al menos.

Ejercicio 3.4. Mostrar, usando los resultados de esta sección y la dualidad de Poincare, que la conjetura de entropía se cumple para mapas C^1 de variedades de dimensión ≤ 2 y homeomorfismos de variedades de dimensión ≤ 3.

,

4. Clase 4: Conjetura de entropia en $\mathbb{T}^d$

4.1. **La homología de $\mathbb{T}^d$.** Primero veamos la homología de S^1. Las 0-formas son las funciones $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ y son cerradas si son constantes. Las 1-formas son de la forma $\varphi(x)dx$, son todas cerradas y son exactas si y solo si $\int_{S^1} \varphi(x)dx = 0$ (notar que en este caso $\varphi(x)dx = h'(x)dx$ con $h(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(s)ds$ bien definida).

Como conclusión obtenemos que:

$$H^0_{dR}(S^1) \cong \{[const]\} \cong \mathbb{R}$$
$$H^1_{dR}(S^1) \cong \{[adx] \ : \ a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

Consideramos $\mathbb{T}^d = S^1 \times \ldots \times S^1$. Las 0-formas son funciones $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ y son cerradas si son constantes ($\Rightarrow H^0_{dR}(\mathbb{T}^d) \cong \mathbb{R}$). Las 1-formas son de la forma:

$$\omega = f_1(x_1, \ldots, x_d)dx_1 + \ldots + f_d(x_1, \ldots, x_d)dx_d$$

Afirmación. *Toda 1-forma cerrada es cohomologa a una de la forma $a_1dx_1 + \ldots + a_ddx_d$.*

Demostración. Sea ω una 1-forma cerrada. Consideramos γ_i curva cerrada homotópica a $\{(0, \ldots, t, \ldots, 0) : t \in [0, 1]\}$ (i.e. $\{0\}^{i-1} \times S^1 \times \{0\}^{d-i-1}$) y los números

$$a_i = \int_{\gamma_i} \omega$$

que como ω es cerrada no depende de la elección de γ_i.

Sea $\hat{\omega} = a_1dx_1 + \ldots + a_ddx_d$ y $\eta = \omega - \hat{\omega}$.

Definimos $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \int_{\gamma_x} \eta$ donde γ_x es una curva que une 0 con x. Como η integra 0 en todo camino cerrado se ve que $h(x)$ está bien definida y se chequea fácilmente que $dh = \eta$. Esto prueba la afirmación.

$\diamondsuit$

Por otro lado, las formas $\sum a_idx_i$ son claramente cerradas y si algún $a_i \neq 0$ entonces integran diferente de cero en una curva cerrada. Deducimos que $H^1_{dR}(\mathbb{T}^d) \cong \mathbb{R}^d$.

Proposición 4.1. *Una base de $H^k_{dR}(\mathbb{T}^d)$ está dada por las k-formas $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \ : \ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d\}$. En particular $H^k_{dR}(\mathbb{T}^d) \cong \mathbb{R}^{\binom{d}{k}}$.*

De la prueba se desprende que los elementos de $H_k(\mathbb{T}^d)$ se pueden representar a través de encages canónicos $i : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^d$.

Demostración. La prueba es escencialmente igual pero integrando en toros k-dimensionales generados por las direcciones $x_1, \ldots, x_d$. Notar que la prueba de "sobreyectividad" será neesariamente más tediosa pues hay que construir una k-forma cuya derivada exterior coincide con $\omega - \hat{\omega}$. La clave se puede ver en el siguiente:

Ejercicio 4.1. Sea $f(x,y)dx \wedge dy$ una 2-forma en $\mathbb{T}^2$ (f es $\mathbb{Z}^2$-periódica). Mostrar que si $a = \int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)dx \wedge dy$ entonces $(f(x,y)-a)dx \wedge dy$ es exacta. (Sugerencia: Buscar 1-formas del tipo $h(x)dy + g(x,y)dx$ donde h se elige de forma tal que $\int_0^1 (f(x,y) - h'(x))dy = a$ para todo x).

Este resultado también es consecuencia de una construcción más general. Buscar la formula de Kuneth en [BT].

□

4.2. **Entropia de mapas del toro.**

Ejercicio 4.2. Mostrar que si $f_A : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ es el mapa inducido en $\mathbb{T}^d$ por la matriz $A \in M_{d\times d}(\mathbb{Z})$ entonces se cumple que $(f_A)_{*,1} = A$ y que $h_{top}(f_A) = \log s((f_A)_*))$. (Ojo: $(f_A)_* \neq A$).

Mostraremos que la conjetura de entropía es cierta (incluso sin necesidad de que el mapa sea C^1) para mapas del toro d-dimensional siguiendo [Ka].

Teorema 4.2 (Misiurewicz-Przytycki [MP$_2$])**.** *Para todo $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ continuo se cumple que $h_{top}(f) \geq \log s(f_*)$.*

Demostración. Fijamos $k \geq 1$ y veremos que $h_{top}(f) \geq \log s(f_{*,k})$ que es obviamente suficiente.

Consideramos $\mathcal{B}$ una base de $H_k(\mathbb{T}^d)$ de forma tal que para todo $\alpha \in \mathcal{B}$ tenemos $i_\alpha : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^d$ un encaje lineal. Consideramos $h_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^k$ la proyección que logra que $h_\alpha \circ i_\alpha = id$. Utilizaremos también los mapas $\pi_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ el cubrimiento estandar y denotaremos con tildes los levantados al cubrimiento universal (por ejemplo tenemos que $\pi_k \circ \tilde{h}_\alpha = h_\alpha \circ \pi_d$).

La matriz de $f^n_{*,k}$ en la base $\mathcal{B}$ se tiene coordenadas:

$$c^n_{\alpha\beta} = \deg(h_\beta \circ f^n \circ i_\alpha) \qquad ; \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{B}$$

Sea $Y_k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ un dominio fundamental de π_k. Definimos entonces:

$$Q_n(x) = (\tilde{h}_\beta \circ \tilde{f}^n \circ \tilde{i}_\alpha(Y_k)) \cap \pi_k^{-1}(\{x\})$$

Como el volumen k-dimensional de $\tilde{h}_\beta \circ \tilde{f}^n \circ \tilde{i}_\alpha(Y_k)$ es mayor o igual a $|\deg(h_\beta \circ f^n \circ i_\alpha)|$ sabemos que existe $x \in \mathbb{T}^k$ tal que $\#Q_n(x) \geq |c^n_{\alpha\beta}|$.

Ejercicio 4.3. Corroborar las afirmaciones precedentes:

(i) Mostrar que $|\deg(h_\beta \circ f^n \circ i_\alpha)|$ es menor o igual que el volumen k-dimensional de $\tilde{h}_\beta \circ \tilde{f}^n \circ \tilde{i}_\alpha(Y_k)$.
(ii) Mostrar que eso implica la existencia de x con $\#Q_n(x) \geq |c^n_{\alpha\beta}|$.

Para cada $y \in Q_n(x)$ elegimos $z(y) \in (\tilde{h}_\beta \circ \tilde{f}^n \circ \tilde{i}_\alpha)^{-1}(\{y\})$ y consideramos $K_n = \bigcup_{y \in Q_n(x)} i_\alpha \circ \pi_k(z(y))$.

Vamos a mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que para $y \neq y' \in Q_n(x)$ se cumple que $d_n(i_\alpha \circ \pi_k(z(y)), i_\alpha \circ \pi_k(z(y'))) \geq \varepsilon$. En particular, K_n tiene al menos $|c^n_{\alpha\beta}|$ elementos y es un conjunto (n,ε)-separado.

Para eso, escogemos ε de forma tal que para que en el cubrimiento universal dos puntos se separen a distancia mayor que 1 se necesita que tengan un iterado a distancia entre 2ε y $1/2$. Como y, y' son puntos diferentes en $Q_n(x)$ se deduce que tienen un iterado entre 0 y n a distancia entre 2ε y $1/2$ lo cual prueba lo deseado.

Esto muestra que

$$h_{top}(f) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \log \max_{\alpha,\beta\in\mathcal{B}} |c^n_{\alpha\beta}| = \log s(f_{*,k})$$

□

Ejercicio 4.4. Pensar ejemplos en $\mathbb{T}^d$ donde vale la igualdad $h_{top}(f) = \log s(f_*)$ y donde la desigualdad es estricta. Para todo $1 \leq k \leq d$ dar ejemplos donde $h_{top}(f) = \log s(f_{*,k})$.

El resultado anterior deja la pregunta acerca de en que situaciones la diferenciabilidad se hace escencial.

Conjetura (Katok [Ka])**.** *Si M es una variedad tal que $\tilde{M} = \mathbb{R}^d$ y $f : M \to M$ es un mapa continuo, entonces $h_{top}(f) \geq \log s(f_*)$.*

En [MaP] se confirma esta conjetura para mapas de nilvariedades.

5. Clase 5: Dilatación, entropía y volumen

5.1. **Primeras estimativas de volumen.** Sean V_0 y V_1 espacios vectoriales con producto interno de la misma dimensión d. Denotamos $\bigwedge^* V_i = \bigoplus_{k=1}^d \bigwedge^k V_i$.

Si $A : V_0 \to V_1$ es una transformación lineal, podemos definir una transformación inducida $\bigwedge^* A : \bigwedge^* V_0 \to \bigwedge^* V_1$ tal que $\bigwedge^* A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_k$ y se extiende por linealidad.

En $\bigwedge^* V_i$ hay un producto interno natural que hace todos los $\bigwedge^k V_i$ ortogonales y tal que $\|v_1 \wedge \ldots \wedge v_k\|$ es el volúmen k-dimensional del paralelogramo generado por dichos vectores.

Definimos $J^u(A) = \| \bigwedge^* A\|$.

Ejercicio 5.1.
(i) Para A matriz diagonal de $\mathbb{R}^d$ con el producto interno usual mostrar que $J^u(A)$ es igual al producto de los modulos de los valores propios de módulo mayor o igual a 1.
(ii) Calcular $J^u(A)$ para matrices con forma de Jordan.

En [FSh] se utilizan estas herramientas para formular una propiedad que implica la conjetura de entropía. Dado f un mapa C^1 de una variedad M decimos que *cumple la propiedad* (V) si:

(V) Para todo $\delta > 0$ existe $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in M$ y $n \geq 0$ se cumple que:

$$\mathrm{Vol}(B_n(x,\varepsilon)) \leq C\frac{(1+\delta)^n}{J^u_x(f^n)}$$

Donde para $g : M \to M$ de clase C^1 denotamos $J^u_x(g) = J^u(D_x g)$.

Proposición 5.1 ([FSh])**.** *Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo de clase C^1 que cumple la propiedad (V) entonces $h_{top}(f) \geq \log s(f_*)$.*

Esta proposición reduce el problema al estudio de una propiedad "local"[8] de como se pierde volumen.

Antes de dar la prueba, veremos algunos preliminares. Sea ω una k-forma diferencial. Denotamos $|\omega_x| = \sup \frac{|\omega_x(v_1,\dots,v_k)|}{\|v_1\wedge\dots\wedge v_k\|}$ y $\|\omega\|_\infty = \sup_x |\omega_x|$.

Ejercicio 5.2. Definimos para $c \in H^k_{dR}(M)$ el valor $\|c\| = \inf_{[\omega]=c} \int_M |\omega_x| d\operatorname{Vol}(x)$. Probar que $\|\cdot\|$ es una norma en $H^k_{dR}(M)$.

Ejercicio 5.3. Probar la siguiente desigualdad para $\omega \in \Omega^k(M)$, $f : M \to M$ y $A \subset M$ medible:

$$\int_A |f^*\omega_x| d\operatorname{Vol}(x) \leq \|\omega\|_\infty \int_A J^u_x(f) d\operatorname{Vol}(x)$$

Demostración de la proposición:. Asumimos que M es orientable y consideraremos la cohomología de de Rham. Sea λ un valor propio de f^* y $c \in H^k_{dR}(M)$ un vector propio. Consideramos ω una k-forma cerrada tal que $[\omega] = c$.

Tenemos que (usando la norma de $H^k_{dR}(M)$ definida en el ejercicio 5.2):

$$|\lambda|^n \|c\| = \|[(f^n)^*\omega]\| \leq \int_M |((f^n)^*\omega)_x| d\operatorname{Vol}(x)$$

Fijamos δ arbitrario. Sea ε suficientemente chico para que (usando la propiedad (V)) se cumpla que para todo $y \in M$ tenemos

$$\operatorname{Vol}(B_n(y, 2\varepsilon)) J^u_y(f^n) \leq C(1+\delta)^n$$

Para $x \in M$, como $B_n(x,\varepsilon) \subset B_n(y, 2\varepsilon)$ para cualquier $y \in B_n(x,\varepsilon)$ obtenemos

$$J^u_y(f^n) \leq C\frac{(1+\delta)^n}{\operatorname{Vol}(B_n(x,\varepsilon))} \quad ; \quad \forall y \in B_n(x,\varepsilon)$$

Por lo tanto, utilizando el ejercicio 5.3

$$\int_{B_n(x,\varepsilon)} |((f^n)^*\omega)_y| d\operatorname{Vol}(y) \leq \|\omega\|_\infty \int_{B_n(x,\varepsilon)} J^u_y(f^n) d\operatorname{Vol}(y) \leq \|\omega\|_\infty C(1+\delta)^n$$

Sea S un conjunto (n,ε)-generador con $\#S = r_n(f,\varepsilon)$. Se cumple que $M = \bigcup_{x\in S} B_n(x,\varepsilon)$. Entonces:

$$|\lambda|^n \|c\| \leq \int_M |((f^n)^*\omega)_y| d\operatorname{Vol}(y) \leq \sum_{x\in S} \int_{B_n(x,\varepsilon)} |((f^n)^*\omega)_y| d\operatorname{Vol}(y) \leq \#S \|\omega\|_\infty C(1+\delta)^n$$

con lo cual

$$\log|\lambda| \leq h_{top}(f) + \log(1+\delta) \qquad \forall \delta > 0$$

□

[8] Por supuesto que no es magia, es algo local en todos lados y es por eso que permite recuperar un resultado global.

5.2. **Difeomorfismos de Anosov.** En esta sección veremos como se aplica el resultado de la sección anterior para probar que algunas clases de difeomorfismos verifican la conjetura de entropía. La prueba se extiende en general a difeomorfismos *estructuralmente estables* ([ShW, FSh]) e incluso en algunos casos permite probar que no solo se cumple la conjetura de entropía sino que ciertos mapas realizan la entropía que predice la conjetura (ver [RS, Ka]). Remitimos al lector a las referencias citadas para ver esos resultados ya que involucran muchas nuevas definiciones y se apartaría de los objetivos del curso.

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1. Decimos que f es un *difeomorfismo de Anosov* si $TM = E^s \oplus E^u$ es una descomposición continua y Df-invariante tal que existe una métrica riemanniana tal que

$$||D_x f|_{E^s_x}|| < 1 \ \text{ y } \ ||D_x f^{-1}|_{E^u_x}|| < 1 \qquad \forall x \in M$$

Teorema 5.2. *Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo de Anosov entonces f cumple la propiedad (V), en particular cumple la conjetura de entropía.*

Esbozo Podemos suponer (cambiando la métrica) que E^u_x es ortogonal a E^s_x en todo punto.

Fijamos $\delta > 0$. Si consideramos ε y α suficientente chico, por la continuidad de Df obtenemos que si $d(x, y) < \varepsilon$ y $E \subset T_y M$ es un subespacio de la misma dimensión que E^u_x se cumple que

$$\text{Jac}(D_x f|_{E^u_x}) \leq (1 + \delta)\,\text{Jac}(D_y f|_E)$$

y además se cumple que $J^u_x(f)$ es muy cercano a $\text{Jac}(D_x f|_{E^u_x})$ (por la propiedad Anosov).

Descomponiendo $B_0(x, \varepsilon)$ en variedades "tangentes" a subespacios transladados de E^u_x tenemos que al iterar, en cada una de estas variedades, el volumen perdido está relacionado con $\text{Jac}(Df|_{E^u_x})$ con un error no mayor a $(1 + \delta)$.

Un argumento de tipo Fubini inductivo nos da la propiedad deseada.

□

Ejercicio 5.4. (∗) Probar que si $f : M \to M$ es Morse-Smale entonces $\log s(f_*) = 0$. (Si no se conoce la definición de Morse-Smale, parte del ejercicio es averiguarla.)

Pregunta. *Hay algún difeomorfismo $f : M \to M$ que no cumpla la propiedad (V) ?*

5.3. **La importancia de la regularidad y un ejemplo importante.** Presentaremos un ejemplo atribuido a Margulis en [Ka] y [Yom_1]. En [Yom_1] se puede ver como generalizar a dimensiones mayores. La idea es construir un difeomorfismo de forma tal que el volúmen de subvariedades crece más rápido de lo "esperable". Este ejemplo reaparecera varias veces en lo que sigue. Aparece aquí para mostrar que hacer un argumento tipo Fubini para probar la propiedad (V) sin tener cuidado no funciona.

Consideramos en S^2 un difeomorfismo[9] que extiende a ∞ el mapa de $\mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \mapsto (x/2, 2y)$. Consideramos una métrica riemanniana en S^2 que hace que $B = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ es

[9]Este difeomorfismo se puede hacer tan diferenciable como se desee (incluso real analitico) y se puede hacer que sea Morse-Smale haciendo una variación en un entorno de ∞.

isométrico a su imágen en S^2. Llamamos $f : S^2 \to S^2$ al difeomorfismo que acabamos de considerar.

Consideramos la función $g : [0,1] \to [-1,1]$ dada por

$$g(t) = t^{k+\varepsilon} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

que es una función de clase C^k pero no C^{k+1}. Sea $Y = \{(t, g(t)) \ : \ t \in [0,1]\} \subset [-1,1]^2 \subset S^2$. Nos interesa saber como crece la longitud de $f^n(Y)$. Tenemos que:

$$f^n(Y) = \{(t/2^n, 2^n g(t)) \ : \ t \in [0,1]\} = \{(s, g_n(s)) \ : \ s \in [0, 1/2^n]\}$$

donde $g_n(s) = 2^n(2^n s)^{r+\varepsilon} \sin(1/2^n s) = 2^{n(r+1+\varepsilon)} s^{r+\varepsilon} \sin(1/2^n s)$. Para calcular $\operatorname{long} f^n(Y)$ vamos a dividir $[0, 1/2^n] = I_1^n \cup I_2^n$ donde

$$I_1^n = \left[0, 2^{-n\frac{(r+\varepsilon+1)}{r+\varepsilon}}\right] \quad \text{y} \quad I_1^n = \left[2^{-n\frac{(r+\varepsilon+1)}{r+\varepsilon}}, 2^{-n}\right]$$

Se cumple que $|g_n(s)| \leq 1$ para $s \in I_1^n$. Como $g_n(s)$ es oscilante y alcanza los máximos locales en puntos de la forma

$$\bar{s}_k = \frac{1}{2^n(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$$

Tenemos que existe $C > 0$ (independiente de n) tal que $|g_n(\bar{s}_k)| \leq 2^n C(\frac{1}{k})^{r+\varepsilon}$. Obtenemos que la longitud de $f^n(Y)$ está acotada por

$$\operatorname{long}(f^n(Y) \cap I_1^n \times [-1,1]) \leq 4 \sum_{k \geq K_0} g_n(\bar{s}_k)$$

donde K_0 es el primer k tal que $|g_n(\bar{s}_k)| \leq 1$. Esto implica que en I_1^n la longitud de $f^n(Y)$ está acotada uniformemente por una constante C_0 independiente de n.

Asumiendo que la métrica de S^2 es razonable y f también fuera de $[-1,1]^2$ podemos asumir que las componentes conexas de $f^n(Y)$ que salen de $[-1,1]^2$ tienen longitud menor que 10. En $[-1,1]^2$ cada oscilación de $g_n(s)$ que se "sale" tiene longitud de al menos 2. Por lo tanto, si contamos cuantos máximos locales hay en I_2^n obtenemos que la longitud de $f^n(Y)$ en I_2^n está comprendida entre 2 y 20 veces la cantidad de máximos locales.

Para eso, alcanza estimar cuantos enteros hay en el intervalo comprendido entre 1 y $(2^n(2^{-n\frac{(r+\varepsilon+1)}{r+\varepsilon}}))^{-1}$. Es decir, que hay del orden de $2^{\frac{n}{r+\varepsilon}}$ máximos locales.

Obtuvimos que:

$$C_0 + 2^{\frac{n}{r+\varepsilon}} \leq \operatorname{long}(f^n(Y)) \leq C_0 + 20 \cdot 2^{\frac{n}{r+\varepsilon}}$$

Esto nos da que $\limsup_n \frac{1}{n} \log \operatorname{long}(f^n(Y)) = \frac{1}{r+\varepsilon} \log 2$. Perfectamente podríamos haber considerado f de forma tal que $2 = \max_x \|D_x f\|$.

Notar que Y es de clase C^k. Para hacer Y de clase C^∞ podemos conjugar f por un difeomorfismo de clase C^k que "enderece" Y, en revancha, obtenemos un difeomorfismo de clase C^k (vamos a ver más adelante explicaciones para esto).

6. Clase 6: Pantallazo de teoría ergódica diferenciable

6.1. **Entropia métrica y exponentes de Lyapunov.** Por más información ver por ejemplo [KH] capítulo 4 y suplemento.

Sea $f : M \to M$ un mapa (por ahora sólo continuo) y μ una probabilidad f-invariante (i.e. $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo A medible).

Se dice que μ es *ergódica* si todo conjunto f-invariante medible A cumple que $\mu(A)$ es igual a 0 o 1.

Ejercicio 6.1. Mostrar que si μ es ergódica y $\varphi \in L^1(\mu)$ cumple $\varphi \circ f = \varphi$ entonces φ es constante μ-ctp.

Definición 6.1. Si μ es una medida ergódica, definimos[10]

$$h_\mu(f) = \sup_{\varepsilon>0}\left(\limsup_n \left(-\frac{1}{n}\log \mu(B_n(x,\varepsilon))\right)\right)$$

La definición tiene sentido a pesar de que el término a la derecha dependa a priori de x.

Ejercicio 6.2. Probar que la función $x \mapsto \sup_{\varepsilon>0}\limsup_n \left(-\frac{1}{n}\log \mu(B_n(x,\varepsilon))\right)$ pertenece a $L^1(\mu)$ y es f-invariante.

Teorema 6.2 (Principio Variacional)**.** $h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) \ : \ \mu \textit{ ergodica }\}$.

Ejercicio 6.3. Probar la desigualdad $h_\mu(f) \leq h_{top}(f)$ para μ ergódica.

A partir de ahora consideraremos $f : M \to M$ de clase C^1 al menos. Definimos:

$$R(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\max_x \|D_x f^n\|$$

Ejercicio 6.4.
(i) Probar que si a_n es una sucesión tal que $a_{n+m} \geq a_n + a_m$ entonces existe $\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, \infty)$.
(ii) Mostrar que $R(f)$ está bien definido.
(iii) Demostrar que si $d = \dim M$ entonces $h_{top}(f) \leq dR(f)$.

Las medidas ergódicas son muy similares a los puntos periódicos:

Teorema 6.3 (Oseledets)**.** *Sea $f : M \to M$ un mapa C^1 y μ una medida ergódica. Existe $\ell \in \mathbb{Z}^+$ subespacios $\{0\} = E^0_x \subsetneq E^1_x \subsetneq \ldots \subsetneq E^\ell_x = T_xM$ definidos μ-ctp $x \in M$ que varian mediblemente y que verifican que $D_x f E^i_x \subset E^i_{f(x)}$. Además, existen números $-\infty \leq \chi_1 < \ldots < \chi_\ell < \infty$ tal que para μ-ctp $x \in M$ tenemos que si $v \in E^i_x \setminus E^{i-1}_x$ entonces*

$$\exists \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_x f^n v\| = \chi^i$$

Los números χ_i (a veces $\chi_i(\mu)$ para hacer referencia a la medida) se llaman *exponentes de Lyapunov* de μ y llamamos $m_i := \dim E^i - \dim E^{i-1}$ a su multiplicidad.

Ejercicio 6.5.
(i) Demostrar que $R(f) \geq \chi_\ell(\mu)$ para toda medida ergódica.
(ii) $(*)$ Investigar la ecuación $R(f) = \sup \chi_\ell(\mu)$ con μ-ergódicas.

[10]Creo que esta definición de entropía métrica es debida a Brin-Katok.

(iii) (∗) Dar una prueba del Teorema de Oseledets como fue enunciado cambiando límite por límite superior (sugerencia: Los vectores que tienen el mismo limsup son un subespacio....).
(iv) Dar un enunciado de Oseledets para difeomorfismos que introduzca la aplicación del Teorema para f^{-1} y probar dicho enunciado.

Se puede acotar la entropía de mejor manera que con $dR(f)$:

Teorema 6.4 (Ruelle-Margulis). *Sea $f : M \to M$ un mapa C^1 y μ una medida ergódica. Entonces,*

$$h_\mu(f) \leq \sum_{\chi_i > 0} m_i \chi_i$$

Corolario 6.5. *Si μ es una medida con entropía positiva, entonces tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo.*

6.2. **Mapas racionales y algunas desigualdades.** En esta sección daremos un ejemplo de un caso de una familia de mapas (interesantes por si mismos) donde la conjetura de entropía no solo vale si no que provee una igualdad. El resultado es una versión simplificada de un Teorema de Gromov ([Gr_2, New_1]) con una prueba simplificada también[11].

Teorema 6.6 (Gromov). *Sea $P/Q : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un mapa racional de la esfera de riemann. Entonces $h_{top}(P/Q) = \log \deg(P/Q)$.*

Estamos entendiendo $\deg(P/Q)$ como el grado topológico del mapa (que es positivo por preservar orientación) pero es posible dar una fórmula en función de los grados de P y Q como polinomios (en particular, si $Q = 1$ es exactamente el grado de P como polinomio).

Esbozo Por el Teorema de Misiurewicz-Przytycki (Teorema 3.3) sabemos que $h_{top}(P/Q) \geq \log \deg(P/Q)$, entonces alcanza mostrar la otra desigualdad.

Ejercicio 6.6. (i) Usar el teorema fundamental del Álgebra para ver que $\#Fix((P/Q)^n) \leq (\deg(P/Q))^n$.
(ii) Demostrar que si μ es P/Q-invariante y ergódica y tiene un exponente de Lyapunov positivo entonces ambos exponentes de Lyapunov son positivos (sugerencia: utilizar que P/Q es conforme).

Ahora, supongamos que $h_{top}(P/Q) > \log \deg(P/Q)$. Entonces, por el Principio Variacional tenemos que existe una medida ergódica μ tal que $h_\mu(P/Q) > \log \deg(P/Q)$.

Por el Corolario 6.5 y el ejercicio 6.6 (ii) tenemos que ambos exponentes de Lyapunov de μ son positivos.

Un célebre teorema de Katok (ver [KH] Suplemento) dice que entonces se tiene que $\#Fix((P/Q)^n) \geq \exp(nh_\mu(P/Q) - \varepsilon)$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y $n \geq n_0 := n_0(\varepsilon)$. Esto contradice el ejercicio 6.6 (i).

□

Hay otras formas de acotar la entropía por debajo y por encima. El lector interesado debería consultar textos relacionados con la llamada Igualdad de Pesin y la Fórmula de Leddrappier-Young. Para dar un "sabor" de ese tipo de resultados, dejamos el siguiente:

[11] Yo la aprendí de E. Pujals.

Ejercicio 6.7. Sea $f : (X, d) \to (X, d)$ un homeomorfismo de (X, d) espacio métrico compacto. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ y $K > 1$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple:

$$\max\{d(f(x), f(y)), d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))\} \geq \min\{\varepsilon, Kd(x, y)\}$$

(i) Probar que f es expansivo[12]
(ii) Probar que la entropía de f es finita.
(iii) (Fathi) Probar que

$$\dim_H(X, d) \leq 2\frac{h_{top}(f)}{\log K}$$

7. Clase 7: Volumen y entropía

7.1. **Enunciados.** Dado $\sigma : [0,1]^\ell \to M$ definimos $v(\sigma)$ como su volúmen ℓ-dimensional. Está dado por integrar la forma de volumen generada por el pullback por σ de la métrica riemanniana de M. Denotamos esta forma como $\overline{v}(d\sigma)$ con lo cual notaremos $v(\sigma) = \int_{[0,1]^\ell} \overline{v}(d\sigma)$.

Definiremos:

$$v(f, n, \sigma) = v(f^n \circ \sigma)$$

Sea $\Sigma(k, \ell) = \{\sigma : [0,1]^\ell \to M \ : \ \sigma \in C^k\}$.

Definición 7.1. Para $k \geq 1$ y $\ell \leq d = \dim M$ definimos:

$$v_{k,\ell}(f) = \sup_{\sigma \in \Sigma(k,\ell)} \limsup_n \frac{1}{n} \log v(f, n, \sigma)$$

Recordemos que para $f : M \to M$ de clase C^1 definimos $R(f) = \lim_n \frac{1}{n} \log \max_x \|D_x f^n\|$.

Ejercicio 7.1. (i) Probar $v_{k,\ell}(f) \leq \ell R(f)$.
(ii) $(*)$ $\log s(f_{*,\ell}) \leq v_{k,\ell}$.
(iii) Probar que $v_{k,\ell}(f^m) = m v_{k,\ell}(f)$.
(iv) Probar que $v_{k,\ell}(f)$ es un invariante por conjugación C^k. ¿Es invariante por conjugación C^1? ¿ y C^0?.

Teorema 7.2 (Newhouse [New$_1$]). *Si $f \in C^{1+\theta}$ con $\theta > 0$ y $k > 1$ entonces* $h_{top}(f) \leq \max_\ell v_{k,\ell}(f)$.

Teorema 7.3 (Yomdin [Yom$_1$, Yom$_2$]). *Si $f \in C^k$ con $k \geq 1$ entonces*

$$v_{k,\ell}(f) \leq h_{top}(f) + \frac{\ell}{k} R(f)$$

Observación 7.4. – Si $k = 1$ el Teorema de Yomdin es vacío por el ejercicio 7.1 (i).
– Con $k = \infty$ el Teorema de Yomdin implica la conjetura de entropía para mapas de clase C^∞ gracias al ejercicio 7.1 (ii).

[12]Fathi de hecho muestra que la existencia de un métrica con esa propiedad es equivalente a la expansividad.

7.2. **El teorema de Newhouse.** En esta sección indicaremos la prueba del Teorema de Newhouse (teorema 7.2) para difeomorfismos de Anosov y luego daremos alguna idea de como se pasa al caso general (en particular de porque es necesario pedir que el mapa sea $C^{1+\theta}$ para que la prueba funcione). Observamos aquí que los resultados de [New$_1$] son más generales y referimos al lector a dicho paper por más información.

Ejercicio 7.2. Sea μ una medida ergódica y Λ un conjunto tal que $\mu(\Lambda) > 0$. Entonces, $h_{top}(f,\Lambda) \geq h_\mu(f)$.

Vamos entonces a asumir que $f : M \to M$ es un difeomorfismo de Anosov. Fijamos $\varepsilon > 0$ y μ una medida ergódica tal que $h_{top}(f) < h_\mu(f) + \varepsilon$.

Como en la sección 5.2 vamos a asumir que E^s_x y E^u_x son ortogonales y que en bolas de radio $\delta > 0$ pequeño tenemos una *estructura de producto local uniforme*, con esto nos referimos a que todo par de puntos a menos de δ corresponde un único punto que es la intersección entre sus variedades estables e inestables (por estos conceptos, referimos al lector a [KH] Capítulo 6).

Para algún $x \in M$ se cumple que $\mu(B(x,\delta)) > 0$ entonces $h_{top}(f, B(x,\delta)) \geq h_\mu(f)$.

Consideramos $\hat{\delta}$ de forma tal que existen conjuntos E_n que son $(n,\hat{\delta})$-separados contenidos en $B(x,\delta)$ y tal que para n suficientemente grande tenemos:

$$\#E_n \geq e^{n(h_\mu(f)-\varepsilon)}$$

Ahora veremos que el volúmen $\dim E^u$-dimensional de $f^n(\mathcal{W}^u_{loc}(x))$ crece con al menos esa tasa.

Para eso, notamos que en una caja de estructura de producto local de radio δ cada variedad inestable que atraviesa tiene volumen acotado por debajo por una constante positiva η.

Proyectando E_n en $\mathcal{W}^u_{loc}(x)$ a lo largo de variedades estables sabemos que si dos puntos en la inestable se separan más de δ entonces nunca más vuelven a estar cerca (en la topología de la hoja). En consecuencia, se deduce que:

$$\mathrm{Vol}(f^n(\mathcal{W}^u_{loc}(x))) \geq (\#E_n)\eta$$

Esto implica que $v_{k,\dim E^u}(f) \geq h_\mu(f) - 2\varepsilon$ con ε arbitrario. Esto concluye la prueba del Teorema 7.2 en el caso que f es Anosov.

Ahora mencionaremos brevemente algunas ideas que permiten extender este argumento a casos más generales:

7.2.1. *Piezas básicas:* No utilizamos realmente el hecho de que f sea Anosov. La misma prueba se extiende más o menos directamente al caso en que existe Λ compacto invariante uniformemente hiperbólico (ver [KH] Capítulo 6) tal que $h_{top}(f,\Lambda) = h_{top}(f)$.

7.2.2. *Caso "Parcialmente hiperbólico":* Si en Λ hay una dirección central donde si bien puede que no contraiga exponencialmente se cumple que no expande exponencialmente (es decir, puede expandir a lo sumo polinomial o subexponencialmente) entonces el argumento se puede adaptar con alguna dificultad técnica (se dificulta al proyectar) pero sin mayores problemas. En particular, en este caso tampoco es necesario utilizar que f sea $C^{1+\theta}$.

7.2.3. *Caso general:* Involucra el uso de la llamada *teoria de Pesin* para reducir a los casos anteriores (aquí Newhouse tiene que adaptar varios de los resultados clásicos del caso difeomorfismos al caso de mapas).

La idea fundamental es que si bien en el Teorema de Oseledets los objetos (subespacios) varían sólo mediblemente, se puede eliminar conjuntos de medida arbitrariamente pequeña para tener continuidad uniforme (teorema de Luisin). En esos conjuntos se trabaja.

Técnicamente la dificultad también aparece en que si bien los subespacios en ese conjunto varían continuamente, los entornos donde los argumentos del tipo transformada del gráfico, etc se extienden pueden ser muy pequeños. La clave de la regularidad Holder de la derivada es que permite mostrar que se pueden considerar entornos de tamaño que decrezca a lo sumo subexponencialmente en la orbita de puntos genéricos para μ. Esto permite adaptar casi todos los argumentos de la teoría uniformemente hiperboólica (ver [KH] Suplemento).

La prueba del Teorema 7.2 en este caso termina siendo muy similar al caso Anosov (pero por supuesto bastante más tediosa).

7.3. **Propiedades de continuidad de la entropía.** En esta sección repasaremos muy brevemente los resultados de [New$_2$] que están de alguna forma vinculados a esta teoría en que se apoyan fuertemente en los resultados de Yomdin. Mencionamos que varios de estos resultados han sido mejorados y en cierto sentido clarificados, ver [Buz]. El objetivo es dar más motivaciones (como si no fueran suficientes) para entender el Teorema de Yomdin.

Teorema 7.5 (Newhouse [New$_2$])**.** *Si $f \in C^\infty(M)$ entonces $\mu \mapsto h_\mu(f)$ es semicontinua superior en el espacio de medidas invariantes con la topología débil-$*$. Es decir, si $\mu_n \to \mu$ entonces* $\limsup_n h_{\mu_n}(f) \leq h_\mu(f)$.

Ejercicio 7.3. Dar un ejemplo donde $\lim h_{\mu_n}(f) < h_\mu(f)$ para $\mu_n \to \mu$.

Como el espacio de medidas invariantes es compacto, el teorema anterior implica que, para mapas C^∞ existen *medidas de entropía maximal*. Notar que si f es C^k hay contraejemplos en todas las dimensiones (Misiurewicz y Buzzi).

Teorema 7.6 (Newhouse [New$_2$])**.** *El mapa $f \mapsto h_{top}$ es semicontinuo superior en C^∞. Es decir, si $g_n \to f$ en C^∞ entonces* $\limsup_n h_{top}(g_n) \leq h_{top}(f)$.

Corolario 7.7 (Newhouse/Katok [New$_2$])**.** *El mapa $f \mapsto h_{top}(f)$ es continuo en* $\mathrm{Diff}^\infty(M^2)$.

Ejercicio 7.4. Dar ejemplo de $g_n \to f$ en C^∞ tal que $\limsup_n h_{top}(g_n) \leq f$. Hacer el ejemplo en dimensión 3 y difeomorfismos.

Una nota relevante es que el teorema de la semicontinuidad superior de la entropía topológica también requiere escencialmente el hecho de estar en la topología C^∞ ya que se puede hacer ejemplos de difeomorfismos en superficies (con tangencias *flat*) de forma que una perturbación C^k arbitrariamente pequeña crea entropía del orden de $\frac{\log R(f)}{k}$.

La idea atrás de estos resultados es estimar el defecto de semicontinuidad superior de los mencionados mapas a traves de acotar este defecto con entropias locales bien definidas. Luego, utilizar la idea del Teorema de Newhouse de la sección anterior (Teorema 7.2) para acotar dicho defecto por crecimientos locales de volumen de subvariedades. Luego, las estimativas de Yomdin permiten probar que en caso que el mapa sea suficientemente regular, el defecto de semicontinuidad es arbitrariamente pequeño.

8. Clase 8: Teorema de Yomdin: reducción a versión local y el caso $\ell = 1$

El objeto de esta sección es reducir la prueba del Teorema 7.3 a una versión local que involucra el estudio del crecimiento de volúmen en bolas de Bowen y no globalmente. Luego, veremos la prueba para el caso $\ell = 1$ que simplifica enormemente los problemas técnicos[13]

8.1. **Reducción a volumenes locales.** Recordemos que $\Sigma(k,\ell) = \{\sigma : [0,1]^\ell \to M \ : \ \sigma \in C^k\}$. Si $S \subset [0,1]^\ell$ definimos:

$$v(f,n,\sigma,S) = \int_S \overline{v}(d(f^n \circ \sigma))$$

con la notación de la sección anterior. Sea $\mathcal{B}_n^\varepsilon$ el conjunto de todas las bolas de radio ε para la métrica d_n en M (también llamadas *bolas de Bowen*), definimos:

$$v^0(f,n,\sigma,\varepsilon) = \sup_{B \in \mathcal{B}_n^\varepsilon} v(f,n,\sigma,\sigma^{-1}(B))$$

Denotaremos $\log^+(a) = \max\{0, \log a\}$ para $a \in \mathbb{R}^+$.

Definición 8.1.

$$v^0_{k,\ell}(f,\varepsilon) = \sup_{\sigma\in\Sigma(k,\ell)} \limsup_n \frac{1}{n} \log^+ v^0(f,n,\sigma,\varepsilon)$$

Teorema 8.2 (Yomdin). *Si $f \in C^k$ entonces*

$$v^0_{k,\ell}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} v^0_{k,\ell}(f,\varepsilon) \le \frac{\ell}{k} R(f)$$

El teorema 7.3 es consecuencia del teorema 8.2 y la siguiente:

Proposición 8.3. *Si $f \in C^k$ se cumple que $v_{k,\ell}(f) \le h_{top}(f) + v^0_{k,\ell}(f)$.*

Demostración. Sea $N_f(n,\varepsilon) = \inf \#\{\text{ cubrimiento por } \varepsilon\text{-bolas de } d_n\}$.

Ejercicio 8.1. Mostrar que $h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log N_f(n,\varepsilon)$.

Fijado $\sigma \in \Sigma(k,\ell)$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que $v(f,n,\sigma) \le N_f(n,\varepsilon) v^0(f,n,\sigma,\varepsilon)$ con lo cual

$$v_{k,\ell}(f) \le h_{top}(f) + v^0_{k,\ell}(f)$$

□

Ya vimos en la sección 5.3 que el Teorema 8.2 es óptimo en el caso $\ell = 1$. Una idea muy similar permite ver que es óptimo para todo ℓ (ver [Yom$_1$]).

---

[13]Si bien en términos de la conjetura de entropía el caso $\ell = 1$ no aporta mucho, el resultado es no trivial y tiene consecuencias por ejemplo para los resultados de Newhouse sobre continuidad de la entropía. Por ejemplo, el corolario 7.7 solo utiliza esta versión de los resultados de Yomdin.

8.2. **Tamaño C^k.** Un concepto (técnico) importante en las pruebas de estos resultados es el de tamaño C^k de un mapa. Eso involucra introducir alguna notación que juntamos en esta sección para futura referencia.

Sea $s = (s_1, \dots, s_d)$ un multíndice. Denotamos $|s| = s_1 + \dots + s_d$ y si $h : M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^{|s|}$ denotamos

$$\partial^s h = \frac{\partial^{|s|} h}{(\partial x_1)^{s_1} \dots (\partial x_d)^{s_d}}$$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ es una función $h = (h_1, \dots, h_{d'})$ denotaremos $\partial^s h = (\partial^s h_1, \dots, \partial^s h_{d'})$.

Ejercicio 8.2. Sea $h : [0,1]^d \to \mathbb{R}^{d'}$ y $\varphi : [0,1]^d \to [0,1]^d$ un mapa afín de la forma $\varphi(x) = ax + b$ con $a \in (0,1)$ y b de forma tal que la imágen de φ este contenida en $[0,1]^d$. Demostrar que $\|\partial^s (h \circ \varphi)\| = a^{|s|} \|\partial^s h\|$.

Definición 8.4. Sea $h : C \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ un mapa de clase C^k. Definimos su *tamaño C^k* como:

$$\|h\|_k := \sup_{1 \leq |s| \leq k \ ; \ x \in C} \|\partial^s h(x)\|$$

Notar que no hacemos uso de la norma C^0 (es decir, a $\|h(x)\|$). Como toda variedad es encajable en algun $\mathbb{R}^d$ y todo mapa extendible a un entorno, vamos a considerar la norma C^k para entornos fijados a priori para no entrar en técnicismos de definir intrinsecamente estas cantidades. Es bien claro lo que significa, es el máximo de todas las posibles derivadas hasta orden k. El tamaño C^1, $\|f\|_1$ es exactamente $\max_{x \in M} \|D_x f\|$ que ya hemos utilizado varias veces. (En particular $R(f) = \lim_n \frac{1}{n} \log \|f^n\|_1$.)

Ejercicio 8.3.

(i) Sea $f : B(0,1) \to M \subset \mathbb{R}^d$ un mapa de clase C^k. Mostrar que existe $a > 0$ tal que si consideramos el mapa $\hat{f} : B(0,a) \to M$ dado por $\hat{f} = f(\frac{x}{a})$ se cumple que $\|\hat{f}\|_k \leq 1$

(ii) Sea $f : B(0,1) \to M \subset \mathbb{R}^d$ un mapa de clase C^k. Mostrar que existe $a > 0$ tal que si consideramos el mapa $\hat{f} : B(0,a) \to a \cdot M \subset \mathbb{R}^d$ definido por $\hat{f} = af(\frac{x}{a})$ entonces se cumple que $\|\hat{f}\|_k \leq \|\hat{f}\|_1 = \|f\|_1$.

(iii) Mostar que si $\sigma : [0,1]^\ell \to M$ de clase C^k verifica que $\|\sigma\|_1 \leq 1$ entonces $v(\sigma) \leq 1$.

8.3. **Prueba en dimensión uno.** En esta sección probaremos el Teorema 8.2 para el caso $\ell = 1$.

Consideramos $f : M \to M$ un mapa de clase C^k. Sea $L := L(f) = \max_{x \in M} \|D_x f\| = \|f\|_1$. La clave es probar lo siguiente:

Proposición 8.5. *Existen constantes $\mu := \mu(k)$ y $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(f)$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $\sigma : [0,1] \to M$ es de clase C^k existe $c := c(\sigma, \varepsilon)$ tal que para todo $x \in M$ se cumple que:*

$$v(f^n \circ \sigma, \sigma^{-1}(B_n(x,\varepsilon))) = \operatorname{long}(f^n \circ \sigma|_{\sigma^{-1}(B_n(x,\varepsilon))}) \leq c \mu^n L^{n/k}$$

Es escencial que los valores de c y de μ no dependen de f (en particular de n).

Antes de probar la proposición veremos como implica el Teorema 8.2 para $\ell = 1$. Para eso, fijamos σ y $\delta > 0$, elegimos entonces $m > 0$ tal que se cumpla:

$$\left|\frac{1}{m}\log L(f^m) - R(f)\right| < \frac{k\delta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\log \mu}{m} < \frac{\delta}{2}$$

Elegimos entonces $\varepsilon < \varepsilon_0(f^m)$ (notar aquí la dependencia de ε respecto a δ) y aplicamos la proposición a todos los $x \in M$ (y el ejercicio 7.1 (iii)) obteniendo:

$$m v^0_{k,1}(f,\varepsilon) = v^0_{k,1}(f^m,\varepsilon) \leq \frac{1}{k}\log L(f^m) + \log \mu$$

con lo cual

$$v^0_{k,1}(f,\varepsilon) \leq \frac{1}{k}\log R(f) + \delta$$

Como δ era arbitrario esto concluye la prueba del Teorema 8.2 en el caso $\ell = 1$ asumiendo la Proposición 8.5.

Ejercicio 8.4. Seguir la prueba de la proposición 8.5 para el caso particular del ejemplo de la sección 5.3.

Demostración de la proposición 8.5:. A lo largo de esta prueba $d = \dim M$.

Primero, utilizando el ejercicio 8.3 (ii), fijamos $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(f)$ de forma tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ y consideramos $x \in M$ existe $\varphi_x : \mathbb{R}^d \to B(x,(L+1)\varepsilon)$ difeomorfismo de forma tal que $\varphi_x(B(0,1)) = B(x,\varepsilon)$ y el mapa $f_x : B(0,2) \to \mathbb{R}^d$ definido como

$$f_x = \varphi^{-1}_{f(x)} \circ f \circ \varphi_x$$

está bien definido y cumple que $\|f_x\|_k \leq L = \|f\|_1$.

Fijado $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $\sigma : [0,1] \to M$ de clase C^k podemos subdividir $[0,1]$ en $c := c(\sigma,\varepsilon)$ subintervalos de forma tal que al reparametrizar los subintervalos a longitud uno y obtener (ver el ejercicio 8.3 (i)) que cada uno de ellos verifica que su tamaño C^k es menor que 1 y su imágen contenida en una bola de radio ε. Podemos entonces reducir al caso en que $\sigma : [0,1] \to M$ tiene su imágen contenida en una bola de radio 2ε y cumple que $\|\sigma\|_k \leq 1$.

La proposición sigue de un argumento inductivo y el siguiente resultado (completamente geométrico y no dinámico) de reparametrización de mapas C^k:

Afirmación (Reparametrización por contracciones). *Fijado $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\mu := \mu(k)$ de forma tal que si $g : B(0,2) \to \mathbb{R}^d$ es un mapa de clase C^k con $\|g\|_k \leq L$ y $\sigma : [0,1] \to B(0,2)$ es un mapa C^k tal que $\|\sigma\|_k \leq 1$ entonces existe $\kappa \leq \mu(k)L^{1/k}$ y mapas $\psi_i : [0,1] \to [0,1]$ con $i = 1,\dots,\kappa$ de forma tal que:*

(1) *Los mapas ψ_i son difeomorfismos sobre su imágen*[14].
(2) $S := (f \circ \sigma)^{-1}(B(0,1)) \subset \cup_{i=1}^{\kappa} \mathrm{Im}(\psi_i)$ *y* $\mathrm{Im}(\psi_i) \subset B(0,2)$.
(3) $\|g \circ \sigma \circ \psi_i\|_k \leq 1$ *para todo* $i = 1,\dots,\kappa$.

Utilizando los mapas f_x definidos encima, un argumento inductivo y el ejercicio 8.3 (iii) no es dificil ver que $[0,1]$ puede ser dividido en a lo sumo $\mu^n L^{n/k}$ intervalos de forma tal que la

[14]De hecho, son afines en este caso.

longitud de cada uno al ser mapeados por $f^n \circ \sigma$ es menor que 1 y de forma tal que cubren $\sigma^{-1}(B_n(x, \varepsilon))$. Esto demuestra la proposición, por lo tanto resta sólo probar la afirmación.

Demostración. Utilizando la regla de la cadena iterativamente[15], vemos que existe $\mu_1 := \mu_1(k)$ de forma tal que:

$$\|g \circ \sigma\|_k \leq \mu_1(k)L$$

Sea $I \subset [0,1]$ segmentos de longitud menor que $(10\mu_1(k)L^{1/k})^{-1}$. Utilizando el ejercicio 8.2 vemos que eligiendo una reparametrización afin $\varphi : [0,1] \to I$ se cumple que si $|s| \leq k$ se cumple:

$$\|\partial^s(g \circ \sigma\varphi)\| \leq \frac{1}{10}L^{1-\frac{s}{k}}$$

Podemos cubrir $[0,1]$ con no más de $\mu_2(k)L^{1/k}$ intervalos I_i con $i = 1, \dots, L^{1/k}$ de forma tal que cada uno tiene longitud menor que $(10\mu_1(k)L^{1/k})^{-1}$. Consideramos $\varphi_i : [0,1] \to I_i$ las reparametrizaciones afines y $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ dadas por $h_i = g \circ \sigma \circ \varphi_i$ obtenemos de la estimativa anterior

$$\|\partial^s h_i\| \leq L \ \text{ si } \ |s| < k \ \text{ y } \ \|\partial^s h_i\| \leq \frac{1}{10} \ \text{ si } \ |s| = k$$

Observación 8.6. Es en este punto exactamente donde se ve que considerar k grande da una mejor estimativa: Para reducir la derivada k-ésima alcanza dividir en $\sim L^{1/k}$ subintervalos.

Sea ahora p_i el polinomio de Taylor de orden $(k-1)$ de h_i centrado en $1/2$. La formula del resto nos da que[16]:

$$\max_{x\in[0,1]} \|h_i(x) - p_i(x)\| \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k \max_{|s|=k\ ,\ x\in[0,1]} \|\partial^s h_i(x)\| \leq \frac{1}{10}$$

Entonces, tenemos que si $h_i(x) \in B(0,1)$ entonces $\|p_i(x)\| \leq \frac{11}{10}$. Por otro lado, tenemos que si $\|p_i(x)\| \leq \frac{11}{10}$ entonces $h_i(x) \in B(0,2)$. Esto indica que los puntos que estamos buscando (el conjunto S definido en el punto (2) de la afirmación) verifica

$$I_i \cap S \subset S_i' := \{\varphi_i(x) \ : \ \|p_i(x)\|^2 \leq \frac{121}{100}\}$$

y además se cumple que $g \circ \sigma(S_i') \subset B(0,2)$.

La gracia es que ahora tenemos que $\|p_i(x)\|^2$ es un polinomio de grado menor o igual a $2k-2$ definido en el intervalo. Por lo tanto, existen a lo sumo k subintervalos de $[0,1]$ donde la desigualdad $\|p_i(x)\| \leq \frac{11}{10}$ se cumple. Llamamos esos subintervalos J_j con $j = 1, \dots, r \leq k$ y tenemos las reparametrizaciones afines $\xi_j : [0,1] \to J_j$ tal que se verifica que si $h_{ij} : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ son los mapas $h_{ij} = h_i \circ \xi_j$.

[15]La derivada de $g \circ \sigma$ respecto a s con $|s| \leq k$ se puede escribir como una suma de productos de las derivadas de g de orden $\leq |s|$ por polinomios en las derivadas de orden $\leq |s|$ de σ que son universales, en el sentido que no dependen de nada más que los ordenes de las derivadas.

[16]Notar que también se pueden aproximar las derivadas, pero no lo utilizaremos por ahora.

Se cumple que $\mathrm{Im}(h_{ij}) \subset B(0,2)$ y al mismo tiempo tenemos que $\|\partial^s h_{ij}(x)\| \le \frac{1}{10}$ si $|s| = k$ y $x \in [0,1]$.

Ejercicio 8.5. Mostrar que existe $C > 1$ tal que si $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^k tal que $|\varphi(x)| \le 1$ y $|\varphi^{(k)}(x)| \le 1$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $|\varphi^{(i)}(x)| \le C$ para todo $x \in [0,1]$ e $i = 1, \dots, k$ (o equivalentemente, $\|\varphi\|_k \le C$).

La misma idea del ejercicio anterior (que mostraremos en más generalidad en la sección siguiente) nos dice que al haber acotado la función y las derivadas k-ésimas por un valor (independiente de L) obtenemos una cota uniforme $\mu_3 := \mu_3(k)$ de forma tal que $\|h_{ij}\|_k \le \mu_3$.

Subdividiendo nuevamente cada uno de los intervalos en μ_3 intervalos iguales y haciendo las reparametrizaciones afines obtenemos a lo sumo $(\mu_2 L^{1/k}) 2k\mu_3$ mapas afines ψ_i (con $i = 1, \dots, \kappa \le \mu(k) L^{1/k}$) de forma tal que se verifican todas las condiciones de la afirmación.

□

9. Clase 9: Teorema de Yomdin: prueba módulo lema algebraico

En esta sección mostaremos una versión un poco más débil del Teorema de Yomdin para ℓ arbitrario.

Teorema 9.1 (Yomdin). *Si $f : M \to M \in C^k$ entonces*

$$v^0_{k,\ell}(f) \le \frac{2\ell}{k} R(f)$$

La dimensión $d = \dim M$ será fijada en toda la sección (para no tener que escribir la dependencia de las constantes en ella y alivianar la notación). Como en la sección anterior notaremos $L := L(f) = \|f\|_1$.

Notar que es más débil que el Teorema 8.2 y no es óptimo pero es suficiente para todas sus aplicaciones a mapas C^∞. Vamos a seguir la prueba de Yomdin, en particular, utilizaremos su versión del Lema Algebraico (que luego fue mejorado considerablemente por Gromov, ver [Gr, Bur]). Probar esta versión levemente más débil elimina algunas dificultades técnicas.

Al igual que en el caso que $\ell = 1$, tenemos que el teorema se reduce a probar la siguiente:

Proposición 9.2. *Dado $f : M \to M$ de clase C^k existen constantes $\mu := \mu(k,\ell)$, $\nu := \nu(k,\ell)$ y $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(f)$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $\sigma : [0,1]^\ell \to M$ es de clase C^k existe $c := c(\sigma,\varepsilon)$ tal que para todo $x \in M$ se cumple que:*

$$v^0(f,n,\sigma,\varepsilon) \le c\mu^n (\log(L))^{n\nu} L^{2n\ell/k}$$

Si bien las estimativas son más tediosas, la forma de probar el teorema a partir de la proposición es prácticamente igual al caso $\ell = 1$.

Ejercicio 9.1. Probar el Teorema 9.1 a partir de la Proposición 9.2.

Mirando la prueba de la Proposición 8.5 se observa que el único lugar donde se utiliza de forma importante que $\ell = 1$ es en la afirmación de reparametrización. Cuando ℓ es arbitrario, esto también ocurre.

Proposición 9.3 (Reparametrización por contracciones). *Fijado $k \in ZZ^+$ y $1 \leq \ell \leq d$ existen $\mu := \mu(k,\ell)$ y $\nu := \nu(k,\ell)$ de forma tal que si $g : B(0,2) \to \mathbb{R}^d$ es un mapa de clase C^k con $\|g\|_k \leq L$ y $\sigma : [0,1]^\ell \to B(0,2)$ es un mapa C^k tal que $\|\sigma\|_k \leq 1$ entonces existe $\kappa \leq \mu(\log L)^\nu L^{2\ell/k}$ y mapas $\psi_i : [0,1]\ell \to [0,1]^\ell$ con $i = 1,\dots,\kappa$ de forma tal que:*

(1) *Los mapas ψ_i son difeomorfismos sobre su imágen*[17].
(2) *$S := (f \circ \sigma)^{-1}(B(0,1)) \subset \cup_{i=1}^{\kappa} \mathrm{Im}(\psi_i)$ y $\mathrm{Im}(\psi_i) \subset B(0,2)$.*
(3) *$\|g \circ \sigma \circ \psi_i\|_k \leq 1$ para todo $i = 1,\dots,\kappa$.*

Ejercicio 9.2. Siguiendo la prueba de la sección anterior, probar la Proposición 9.2 a partir de la Proposición 9.3.

9.1. **Prueba de la reparametrización módulo un lema algebraico.** La prueba sigue exactamente la misma estrategia que en el caso de $\ell = 1$ salvo en una parte: El conjunto de puntos donde un polinomio definido en $[0,1]^\ell$ es menor que un cierto numero deja de ser una union finita (que depende solo del grado del polinomio) de sub-cubos. Es por ello que hay que entrar más delicadamente en lo que se llama *geometría subalgebraica* (la geometría de conjuntos definidos por ecuaciones e inecuaciones con polinomios).

Comenzamos aplicando la regla de la cadena iteradamente como antes para ver que existe $\mu_1 := \mu_1(k,\ell)$ de forma tal que

$$\|g \circ \sigma\|_k \leq \mu_1 L$$

Tenemos entonces $\mu_2 := \mu_2(k,\ell)$ de forma tal que podemos dividir $[0,1]^\ell$ en cubos Q_i de lado menor o igual a $\frac{1}{10}L^{1/k}$ de forma tal que no hay más de $\mu_2 L^{\ell/k}$ cubos y se cumple que si $\varphi_i : [0,1]^\ell \to Q_i$ es la reparametrización afin (con $1 \leq i \leq \mu_2 L^{\ell/k}$) obtenemos que el mapa $h_i = g \circ \sigma \circ \varphi_i$ cumple que

$$\|\partial^s h_i\| \leq L \ \text{ si } \ |s| < k \ \text{ y } \ \|\partial^s h_i\| \leq \frac{1}{10} \ \text{ si } \ |s| = k$$

Considerando p_i el polinomio de Taylor de grado $k-1$ centrado en el medio de $[0,1]^\ell$ obtenemos que

$$\max_{x \in [0,1]^\ell} \|h_i(x) - p_i(x)\| \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{\sqrt{\ell}}{2^\ell}\right)^k \max_{|s|=k\ ,\ x \in [0,1]} \|\partial^s h_i(x)\| \leq \frac{1}{10}$$

El conjunto que nos interesa es entonces $S_i' = \{x \in [0,1]^\ell \ : \ \|p_i(x)\|^2 \leq \frac{121}{100}\}$ que claramente verifica que $(\varphi_i)^{-1}(S) \subset S_i'$ y que si $x \in S_i'$ entonces $h_i(x) \in B(0,2)$.

La clave entonces está en el siguiente resultado (que citando a Yomdin [Yom$_1$] "pertenece enteramente a la geometría subalgebraica real")

Teorema 9.4 (Lema Algebraico-Versión 1). *Dados $\ell,\delta,k \in \mathbb{Z}^+$ existen $c_1 := c_1(\delta,k,\ell)$, $c_2 := c_2(\delta,k,\ell)$ tal que si $C > 0$ y $A \subset [0,1]^\ell$ un conjunto definido por una ecuación $P \geq 0$ donde P es un polinomio de grado δ entonces existe $\tau \leq c_1(\log C)^{c_2}$ y subconjuntos $A_j \subset A$ con $1 \leq j \leq \tau$ tal que $A = \bigcup_{j=1}^{\tau} A_j$ y cada uno de los A_j verifica una de las siguientes:*

(1) *o bien A_j está contenido en un cubo de lado $1/C$ ó*

[17]En este caso no son necesariamente afines. Se puede ver que son algebraicos.

(2) *Existe un mapa analitico y semialgebraico* $\phi_j : [0,1]^\ell \to A_j$ *que es un difeomorfismo* C^k *tal que* $\|\phi_j\|_k \leq 1$.

Por una definición precisa de mapa *semialgebraico* consultar [Bur] y las referencias allí contenidas. Ahora veamos como esto permite concluir la prueba.

Vamos a aplicar el Lema Algebraico con $C \sim L$ al conjunto S'_i. De esa forma, en los A_j que caen en la opción (1) del Lema tenemos ya controlado y sabemos que al reparametrizar afinmente esos cubos de lado $1/C$ tenemos $\|h_{ij}\|_k \leq 1$.

Consideramos ahora $h_{ij} : [0,1]^\ell \to \mathbb{R}^d$ dado por $h_{ij} = h_i \circ \phi_j$ para los A_j que caen en la opción 2. Tenemos que usando de nuevo la regla de la cadena iterada[18] se cumple que $\|h_{ij}\|_k \leq \mu_3 L$ para algún $\mu_3 := \mu_3(k,\ell)$.

Como antes, podemos dividir en aproximadamente $\mu_4 L^{\ell/k}$ cubos y llevar las derivadas de orden k a ser menores que $\frac{1}{10}$. La ventaja es que ahora sabemos que la imagen de h_{ij} de todo el cubo $[0,1]^\ell$ está contenida en $B(0,2)$ con lo cual podemos deducir que todas las derivadas intermedias van a estar también acotadas y solo resta una última división y reparametrización afín para llevar todo a tener tamaño C^k menor que 1. Por lo tanto, la demostración sigue del siguiente:

Lema 9.5. *Existe* $c := c(k,\ell,d)$ *tal que si* $\varphi : [0,1]^\ell \to \mathbb{R}^d$ *de clase* C^k *y verifica que* $\varphi([0,1]^\ell) \subset B(0,C_1)$ *y* $\|\partial^s \varphi(x)\| \leq C_2$ *para todo* $|s| = k$ *y* $x \in [0,1]$ *entonces se cumple que* $\|\varphi\|_k \leq c(C_1 + C_2)$.

Esbozo Aproximando por el polinomio de Taylor de orden $k-1$ (y usando la formula del resto para todas las derivadas) el Lema se reduce a ser probado para polinomios. Ese caso es relativamente simple (ejercicio).

□

10. Clase 10: El lema algebraico

10.1. **Prueba para $\ell = 2$.** En esta sección daremos la prueba en el caso $\ell = 2$ presentada en [Yom$_1$]. Haremos la suposición simplificante de que 0 es valor regular del polinomio P. Por como se utiliza en la prueba del Teorema 9.1 es claro que la restricción es inofensiva.

Teorema 10.1 (Lema Algebraico-Versión 1 para $\ell = 2$). *Dados* $\delta, k \in \mathbb{Z}^+$ *existen* $c_1 := c_1(\delta,k)$, $c_2 := c_2(\delta,k)$ *tal que si* $C > 0$ *y* $A \subset [0,1]^2$ *un conjunto definido por una ecuación* $P \geq 0$ *donde* P *es un polinomio de grado* δ *y* 0 *es valor regular de* P *entonces existe* $\tau \leq c_1(\log C)^{c_2}$ *y subconjuntos* $A_j \subset A$ *con* $1 \leq j \leq \tau$ *tal que* $A = \bigcup_{j=1}^{\tau} A_j$ *y cada uno de los* A_j *verifica una de las siguientes:*

(1) *o bien* A_j *está contenido en un cuadrado de lado* $1/C$ *ó*
(2) *Existe un mapa analitico y semialgebraico* $\phi_j : [0,1]^2 \to A_j$ *que es un difeomorfismo* C^k *tal que* $\|\phi_j\|_k \leq 1$.

Demostración. Asumimos que P no es constante pues en ese caso no hay nada que demostrar.

Como 0 es valor regular de P podemos considerar

[18] Es aquí que vamos a perder el $1/k$ y convertirlo en $2/k$. Prestando más atención y controlando mejor las derivadas, en particular las de orden k se puede evitar esto pero se vuelve (aún) más tedioso.

$$\Gamma = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ P(x,y) = 0\}$$

que es una union de curvas. Notar que cada componente conexa de Γ tiene un polinomio irreducible, con lo cual Γ tiene no más de $\eta_1 := \eta_1(\delta)$ componentes.

Consideramos el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i) \in \Gamma \ : \ |y_i| = 1 \text{ ó } \partial_y P(x_i, y_i) = 0\}$ que es claramente finito (no tiene más de $\eta_2 := \eta_2(\delta)$ puntos).

Podemos suponer que los puntos x_i verifican $x_i \leq x_{i+1}$ para todo i.

Trabajaremos en los rectángulos $[x_i, x_{i+1}] \times [0,1]$. Tenemos que $A \cap [x_i, x_{i+1}] \times [0,1]$ es union finita (no más de $\eta_3 := \eta_3(\delta)$) de conjuntos de la forma:

$$\{(x,y) \ : \ x \in [x_i, x_{i+1}] \ \text{ y } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

con y_i funciones semialgebraicas[19] en x y además son C^∞ en (x_i, x_{i-1}) (incluso analíticas).

Si reparametrizamos $[x_i, x_{i+1}]$ a $[0,1]$ no aumentamos derivadas y el mapa es afin (en particular semialgebraico, analitico, etc) por lo tanto lo hacemos.

Vamos a ver como el Teorema entonces sigue de la siguiente:

Afirmación. *Dado $\delta, k \in \mathbb{Z}^+$ existen $\tilde{c}_1 := \tilde{c}_1(k,\delta)$ y $\tilde{c}_2 := \tilde{c}_2(k,\delta)$ tal que si $y = y(x)$ es una función semialgebraica de grado δ que es continua en $[0,1]$ y analítica en $(0,1)$ y cumple que $0 \leq y(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ entonces para todo $C > 0$ existe $\tilde{\tau} \leq \tilde{c}_1(\log C)^{\tilde{c}_2}$ y una partición de $[0,1]$ en $\tilde{\tau}$ subintervalos de forma tal que:*

(1) *o bien la longitud del intervalo es menor a $1/C$*
(2) *o bien al reparametrizarse a longitud 1 las derivadas de y hasta orden k son menores o iguales a 1.*

La afirmación nos permite asumir que las partes de A que se encuentran en el caso (2) verifican que A es de la forma $\{(x,y) \ : \ x \in [0,1] \ \text{ y } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ con y_1 e y_2 verificando además que sus derivadas hasta orden k son menores o iguales a 1. Ahora, considerando el mapa $\phi : [0,1]^2 \to A$ definido como

$$\phi(x,y) = (x, y_1(x) + y(y_2(x) - y_1(x)))$$

es un mapa algebraico que es un difeomorfismo C^k y cumple que $\|\phi\|_k \leq 2$. Subdividiendo una vez más tenemos lo deseado.

Para concluir basta aplicar la afirmación a los mapas en los intervalos de longitud $1/C$ que quedaron intercambiando los roles de y y de x, de esta forma, los de longitud menor que $1/C$ ya están en las condiciones de (1) en el teorema y los otros pueden ser reparametrizados de forma análoga. Es fácil ver que las estimativas que da la afirmación y las reducciones hechas anteriormente nos dan las estimativas deseadas en la cantidad de reparametrizaciones necesarias.

[19] Pueden no ser polinomios pues entran raices al hacer funcion implícita, pero si tienen las mismas propiedades que los polinomios y no aumenta el "grado". En los usos que haremos quedará claro que las propiedades son satisfechas.

Demostración de la afirmación. Dado que y es de grado δ tenemos que podemos dividir $[0,1]$ en $\eta_4 := \eta_4(\delta)$ subintervalos donde todas las derivadas de orden $\leq k$ de y sean monótonas. Reparametrizando linealmente podemos asumir que esto ocurre en todo $[0,1]$.

Sin perdida de generalidad vamos a asumir que y' (la derivada de y) es creciente. Entonces, dividimos $[0,1]$ en $q = [\log(C)] + 2$ intervalos $I_1, \ldots, I_q$ tal que la longitud de $I_j = (1/2)^j$ para $j = 1, \ldots, q-1$ y la de I_q es $(1/2)^{q-1} \leq 1/C$.

La gracia es que como $y(x) \in [0,1]$ para todo x deducimos que la derivada de y en I_j tiene que ser menor que 2^j con lo cual al reparametrizar a $[0,1]$ hacemos que la derivada primera sea menor o igual a 1.

Ahora, inductivamente dividimos cada subintervalo en aproximadamente $\log C$ intervalos y vamos llevando cada una de las derivadas a ser menor o igual que 1 después de ser reparametrizadas. Notar que este proceso se hace k veces.

Para ser explicitos, notemos que obtuvimos aproximadamente $\eta_4 k$ intervalos de longitud menor que $1/C$ y aproximadamente $\eta_4(\log C)^k$ intervalos que al reparametrizarlos todas las derivadas de orden $\leq k$ son menores o iguales a 1.

$\diamond$

$\square$

Esta idea es empujada en [Yom$_2$] para mostrar el Lema algebraico para ℓ cualquiera. El lector notará que esto requiere aumentar considerablemente la tediosidad de la prueba y que la inducción que permite aumentar la dimensión es no trivial (arriba se ve como pasar de $\ell = 1$ a $\ell = 2$!).

10.2. **Versiones más generales.** En [Gr] propone una versión mejorada del lema algebraico de Yomdin. Una prueba se puede encontrar en [Bur] (que como bien menciona, el esquema de prueba de [Gr] es bastante escueto).

Teorema 10.2 (Lema Algebraico, Versión 2 [Gr, Bur])**.** *Para todo $k, \delta, d \in \mathbb{Z}^+$ existe $\tau := \tau(k, \delta, d)$ de forma tal que para todo $A \subset [0,1]^d$ semialgebraicode dimensión maximal ℓ y grado $\leq \delta$ existe $N \leq \tau$ y $\phi_1, \ldots, \phi_N : [0,1]^\ell \to [0,1]^d$ mapas semialgebraicos que son difeomorfismos C^∞ sobre su imágen de forma tal que:*

(1) $A \subset \bigcup_{i=1}^N \phi_i([0,1]^\ell)$
(2) $\|\phi_i\|_k \leq 1$
(3) $\deg(\phi_i) \leq \tau$.

La prueba involucra algunos resultados de geometría subalgebraica pero son todos relativamente básicos (por ejemplo que la proyección de un conjunto subalgebraico a un subespacio es subalgebraico de grado menor o igual) y luego varias etapas elementales (aunque bastante difíciles). Referimos al lector a [Bur] por más información.

Appendix A. Un homeomorfismo de una variedad que no verifica la conjetura de entropía

Simplemente esbozaremos la construcción de un homeomorfismo que no verifica la conjetura de entropía. Los detalles se pueden encontrar en [Man] o en [Ka].

La idea es como sigue. Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov.

Consideramos $S\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \times [-1,1]/_\sim$ donde cocientamos $\mathbb{T}^2 \times \{-1\}$ a un punto y lo mismo hacemos con $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$. Definimos $Sf : S\mathbb{T}^2 \to S\mathbb{T}^2$ como

$$Sf(x,t) = (f(x), \varphi(t))$$

donde $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$ es un homeomorfismo tal que $\varphi(t) > t$ para todo $t \in (-1,1)$. El mapa Sf es claramente un homeomorfismo.

Se cumple que $\Omega(Sf)$ son dos puntos y que $Sf_{*,2} = f_{*,1}$ con lo cual $\log s(Sf_{*,2}) > 0$. Pero $S\mathbb{T}^2$ no es una variedad (notar que en variedades de dimensión 3, la conjetura de entropía vale para homeomorfismos gracias a la dualidad de Poincare).

Para que el ejemplo viva en una variedad hay que utilizar argumentos delicados de topología. La idea es la siguiente, se considera $i : S\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^k$ un encaje de forma tal que Sf se pueda extender a un entorno. Dicho entorno tiene una variedad como borde, entonces se puede duplicar para obtener una variedad compacta de dimensión k. Luego, se "empuja" a traves de la variedad de forma tal que la dinámica vaya de un $S\mathbb{T}^2$ al otro.

Las dificultades son varias:

- En que dimensión podemos incluir $S\mathbb{T}^2$ de forma tal que Sf se extienda a un entorno.
- Por que podemos pegar esta extensión de forma tal que defina un homeomorfismo de la variedad pegada.
- Como hacemos para empujar el mapa dejando que la única dinámica no trivial sea la que había.
- Por que la acción en el segundo grupo de homología es preservada.

Resulta que lo más complicado es lo segundo e impone la condición de que k sea al menos 8. Se puede hacer gracias a un resultado de Hirsch ([Hi]).

El primer punto en dimensión 8 no parece tan complejo. El tercer punto tampoco parece tan grave. Para el último, notar que el entorno en $\mathbb{R}^8$ se puede suponer simplicial, entonces la variedad con borde tiene las mismas homologías. Al pegar las dos no se muere el segundo grupo de homología tampoco.

Appendix B. Ejercicio 7.1 (ii)

Aqui mostraremos el siguiente resultado:

Proposición B.1. *Se cumple que* $\log s(f_{*,\ell}) \leq v_{k,\ell}(f)$.

Primero establecemos que podemos dotar $H_\ell(M)$ de una norma conveniente.

Lema B.2. *Si para* $\alpha \in H_\ell(M)$ *definimos*[20] $\|\alpha\| = \inf\{\mathrm{Vol}^\ell(c) \ : \ [c] = \alpha\}$ *entonces* $\|\cdot\|$ *es una norma en* $H_\ell(M)$.

Demostración. Tenemos que $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ y $\|\lambda\alpha\| = |\lambda|\|\alpha\|$ trivialmente. Para ver que $\|\cdot\|$ es una norma hay que ver que $\|\alpha\| = 0$ implica que $\alpha = 0$.

Sean $\omega_1, \dots, \omega_m \in Z^\ell(M)$ ℓ-formas tal que $[\omega_1], \dots, [\omega_m]$ es base de $H^\ell_{dR}(M)$.

[20]Donde si $c = \sum a_i\sigma_i \in Z_\ell(M)$ definimos $\mathrm{Vol}^\ell(c) = \sum |a_i| v(\sigma_i)$.

El teorema de de Rham (via Stokes) dice que la integral de un elemento de $H_\ell(M)$ respecto a un elemento de $H^\ell_{dR}(M)$ está bien definida. Además, dice que si un elemento es no nulo tiene que integrar mayor que cero con respecto a alguna forma de la base.

Fijada una ℓ-forma ω y un simplice σ sabemos que existe $C := C(\omega)$ (que en el ejercicio 5.2 notamos $\|\omega\|_\infty$) de forma tal que $|\int_\sigma \omega| \leq Cv(\sigma)$.

Deducimos que si $\|\alpha\| = 0$ entonces para todo ε existe $c_\varepsilon \in \alpha$ tal que $|\int_{c_\varepsilon} \omega_i| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Pero como las integrales no dependen del representante, obtenemos una contradicción.

□

Demostración de la proposición B.1. Sea λ un valor propio de $f_{*,\ell}$ y $\alpha \in H_\ell(M)$ un vector propio. Se cumple

$$|\lambda|^n\|\alpha\| \leq \|f_{*,\ell}\alpha\|$$

Sea $c = \sum a_i\sigma_i \in Z_\ell(M)$ de forma tal que $[c] = \alpha$. Tenemos que

$$\|f_{*,\ell}\alpha\| \leq \mathrm{Vol}^\ell(f^n \circ c) = \sum |a_i|v(f, n, \sigma_i)$$

Juntando ambas obtenemos que

$$\sum |a_i|v(f, n, \sigma_i) \geq |\lambda|^n\|\alpha\| > 0$$

De donde existe un valor de $\eta > 0$ tal que para todo $n \geq 0$ existe algun i tal que

$$v(f, n, \sigma_i) \geq \eta|\lambda|^n$$

que como los i son finitos muestra:

$$v_{k,\ell}(f) \geq \log|\lambda|$$

□

References

[BT] R. Bott, W. Tu, Differential forms in algebraic topology, Springer.

[Bur] D. Burguet, A proof of Yomdin-Gromov's algebraic lemma, Israel J. of Math 168 (2008).

[Buz] J. Buzzi, Intrinsic ergodicity for smooth maps of the interval, Israel Journal of Math (1997).

[FSh] D.Fried, M.Shub, Entropy, linearity and chain recurrence, Pub. Math IHES (1979).

[Gr] M. Gromov, Entropy, Homology and Semialgebraic geometry, Seminaire Burbaki 1985-1986.

[Gr$_2$] M. Gromov, On the entropy of holomorphic maps, L'enseignement Mathematique (2000)

[Hi] M. Hirsch, Smooth regular neighborhoods, Annals of Math (1962).

[Ka] A. Katok; A conjecture about entropy, Amer. Math. Soc. Translations (1986) -

[KH] A. Katok, B. Hasselblat; Introduction to the modern theory of dynamical systems, (1996)

[LVY] G. Liao, M. Viana, J. Yang, The entropy conjecture for diffeomorphisms far away from tangencies, *Journal of the EMS* (2013).

[Man] A. Manning (editor) Dynamical Systems-Warwik 1974, Proceedings, Lecture Notes in Math vol 468 (1975)

[MaP] W. Marzantowicz, F. Przytycki, Entropy conjecture for continuous maps of nilmanifolds, Israel Journal of Mathematics **165** (2008) 349-379.

[MP_1] M. Misiurewicz, F.Przytycki, Topological entropy and degree of differentiable mappings, Bull. Ac. Pol. Sci, Ser. Math (1977) -

[MP_2] M. Misiurewicz, F. Przytycki, Entropy conjecture for tori, Bull. Ac. Pol. Sci, Ser. Math (1977)

[New_1] S. Newhouse, Entropy and volume growth, ETDS (1986)

[New_2] S. Newhouse, Continuity properties of entropy, Annals of Math. (1989)

[RS] D. Ruelle, D. Sullivan, Currents, flows and diffeomorphisms, Topology **14** (1975).

[SX] R. Saghin, J. Xia, The entropy conjecture for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1-D center *Topology Appl.* **157** (2010), no. 1, 29–34.

[SSh] S. Smale, M. Shub, Smale's Horseshoe http://www.scholarpedia.org/article/Smale_horseshoe

[Sh] M. Shub; Dynamical Systems, filtrations and entropy, Bulletin AMS (1974)

[Sh_2] M. Shub, All, most, some dynamical systems, *Proceedings ICM* Madrid (2006).

[ShW] M. Shub, R. Williams, Entropy and stability, Topology **14** (1975)

[Yom_1] Y. Yomdin, Volume growth and entropy, Israel J. of Math (1987)

[Yom_2] Y. Yomdin, C^k-resolutions of semialgebraic mappings, Addendum to Volume Growth and Entropy, Israel Journal of Math (1987)

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

URL: www.cmat.edu.uy/~rpotrie

E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy