Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional
Primer semestre 2013

Práctico 1

1. Sea H un espacio vectorial con un semiproducto interno $\langle\ ,\ \rangle$ (es decir, una forma bilineal que cumple lo mismo que un producto interno salvo que un vector no nulo puede tener norma cero).
   a) Probar que vale en H la desigualdad triangular.
   b) Sea $H_0 = \{x \in H : \langle x, x\rangle = 0\}$. Probar que H_0 es un subespacio vectorial de H y que $\langle\ ,\ \rangle_0$, definido por $\langle [h], [k]\rangle_0 = \langle h, k\rangle$, es un producto interno en H/H_0.
   c) Probar que la completación de H/H_0 es un espacio de Hilbert con un producto interno que extiende a $\langle\ ,\ \rangle_0$.

2. Probar que l^p es un espacio de Hilbert si y sólo si $p = 2$. (Sugerencia: recordar que una norma que proviene de un producto interno satisface la ley del paralelogramo.)

3. Calcular
$$\min\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 : a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

4. Sean X e Y subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\dim X < \infty$ y $\dim X < \dim Y$, probar que $X^\perp \cap Y \neq \{0\}$.

5. Sea $H = l^2\big(\mathbf{N} \cup \{0\}\big)$.
   a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Probar que $\phi_\lambda(x) = \sum_0^\infty x_k \lambda^k$ define una funcional $\phi_\lambda : H \longrightarrow \mathbb{C}$ acotada y hallar $h_\lambda \in H$ tal que $\phi_\lambda(x) = \langle x, h_\lambda\rangle$ para todo $x \in H$.
   b) ¿Cuál es la norma de ϕ_λ?

6. Sea M el conjunto de funciones f en $C([0, 1])$ que verifican
$$\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1.$$
   Probar que M es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $C([0, 1])$ que no contiene elementos de norma mínima.

7. *a*) *Procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt.* Sea $\{h_n : n \in \mathbf{N}\}$ un conjunto LI en un espacio de Hilbert H. Probar que existe un conjunto ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $\langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle = \langle h_1, h_2, \dots, h_n\rangle$ para todo n.
   b) Aplicar el procedimiento anterior al conjunto $\{x^n : n \geq 0\}$ en $L^2[-1, 1]$ para probar que $\{\big(\frac{2n+1}{2}\big)^{1/2} P_n\}$ es una base ortonormal de $L^2[-1, 1]$, donde $\{P_n\}$ es la familia de *polinomios de Legendre*, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2 - 1)^n\big)$.

8. Sean $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un conjunto ortonormal y $\mathbf{Q}$ el *cubo de Hilbert*: $\mathbf{Q} = \{h \in H : h = \sum_{i=1}^\infty c_n e_n,\ \text{donde } |\mathrm{c_n}| \leq 1/\mathrm{n}\}$. Probar que $\mathbf{Q}$ es convexo y compacto.

9. Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $T : H \to H$ una transformación lineal y continua.

a) Probar que $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$ si y solamente si $T = 0$.

b) Dar un ejemplo mostrando que la parte anterior puede fallar para espacios de Hilbert sobre $\mathbf{R}$.

10. Probar que las funciones simples y las funciones continuas de soporte compacto son densas en $L^2(\mathbf{R})$.

11. Sea $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ el operador definido por:

$$(T(f))(t) = tf(t) \qquad \forall f \in L^2([0,1])$$

a) Probar que T es continuo.

b) Probar que T no tiene autovectores, es decir, no existe $f \in L^2([0,1])$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(f) = \lambda f$.

12. Sea $T : H \to H$ una transformación lineal y continua de un espacio de Hilbert. Definimos $T^* : H \to H$ la transformación lineal dada por $T^* : H \to H$ definido por $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ para todo $v, w \in H$.

a) Mostrar que T^* está bien definido, es lineal y continuo.

b) Decimos que T es un *operador normal* si $TT^* = T^*T$. Mostrar que T es normal si y solo si $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in H$.

13. $(*)$ Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum a_n b_n < \infty$ para toda sucesión de números positivos tal que $\sum b_n^2 < \infty$. Probar que $\sum a_n^2 < \infty$.

Se recuerda que:

- El curso se gana entregando ejercicios.
- El examen del curso se realizará sin material exceptuando los ejercicios que el estudiante haya entregado en fecha durante el curso. El examen consistirá de dos ejercicios que serán realizados a partir de ejercicios de los prácticos y un ejercicio nuevo.
- Las entregas de ejercicios serán hechas preferentemente en persona durante el horario del curso teórico. Alternativamente, pueden ser entregadas al profesor de práctico o dejadas en el buzón de Rafael Potrie en el piso 16 (en este último caso habrá que enviar un correo a rpotrie@cmat.edu.uy que será respondido al momento de recibir los ejercicios).
- La fecha límite para entregar los ejercicios de este práctico es: 5 de abril.
- Los ejercicios marcados con $(*)$ no serán evaluados y son presentados como desafío para quién le interese.