FACULTAD DE INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

Montevideo

PUBLICACIONES DIDÁCTICAS DEL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

DIRECTOR PROFESOR : Ing- *RAFAEL LAGUARDIA*

J.L. MASSERA

ACERCA DE LAS NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

MONTEVIDEO -(URUGUAY)
1956

Acera de las nociones Fundamentales de la Geometría Proyectiva

Por : J.L.Massera

Introducción

Este trabajo requiera una explicación previa. En 1954 empecé a dictar para la Facultad de Humanidades y Ciencias un curso de Geometría Proyectiva Sintética destinado a alumnos que recién ingresaban en la Facultad. La idea que motivó ese curso era que la Geometría Proyectiva Sintética se prestaba particularmente bien para mostrar a alumnos principiantes un modelo de disciplina matemática que, por una parte, pudiera ser desarrollada sin mayor dificultad como sistema lógico-deductivo riguroso y, por otro lado, fuera suficientemente rica en representaciones intuitivas como para no parecer árida a estudiantes novicios en el manejo de conceptos muy abstractos. Influyó también la circunstancia favorable de poder basarse en excelentes libros de texto, tales como los clásicos de Enriques [5] y Severi [12], que yo había estudiado hacía muchos años y cuya elegancia y rigurosidad habían dejado en mí un recuerdo muy vivo.

El curso, en realidad, fracasó, por diversas circunstancias ; sólo pudieron dictarse unas pocas clases. Pero esto bastó para que se pusiera de manifiesto mi desacuerdo con la forma de introducir las nociones fundamentales de la Geometría Proyectiva en los textos mencionados. Aclaro de inmediato que el desacuerdo se refiere sólo a las primeras páginas de dichas obras y que este juicio negativo no desmerece en absoluto el elevado concepto que de ellas tengo en general. Posteriormente he examinado otros textos [1],[6], [8],[11] y [13], y en todos ellos he encontrado insuficiencias semejantes.

Las diversas forma usuales de introducir las nociones fundamentales me parecen falsas desde el punto de vista histórico -aunque no afirmo que sea siempre recomendable ceñirse a la evolución histórica de los conceptos, ella suele ser útil para facilitar su comprensión al principiante- y, a mi modo de ver escamotean aspectos esenciales de dichas nociones (por ejemplo, las diferencias *muy profundas* que existe entre el espacio euclideano y el espacio proyectivo). Pero, en realidad, mis objecciones son motivadas principalmente por consideraciones pedagógicas : es posible incluso que hayan sido excesivamente influidas por el objetivo particular que me proponía en el curso que empecé a dictar.

Me parece, en efecto, que si un curso o texto de Geometría Proyectiva se dirige a estudiantes que tienen una cierta preparación básica en matemática y especialmente en Geometría elemental pero que no han tenido experiencias acerca de las estructuras formales de la matemática moderna, debe buscarse que, sin perder nada en la rigurosidad lógica, se facilite la comprensión de la nueva disciplina vinculando sus nociones fundamentales, por medio de adecuadas consideraciones herísticas, a la experiencia matemática anterior del alumno. Una definición tal como "un punto impropio es el abstracto de una familia de rectas paralelas" puede ser satisfactoria para una persona más o menos habituada a manejarse con abstracciones, pero dudo mucho de que signifique gran cosa para un alumno del tipo que estoy considerando.

Encuentro igualmente poco convincentes las consideraciones que se hacen en los diversos textos. He aquí algunos ejemplos :

> "Nella Geometria elementare si dice talora che due rette parallele hanno la stessa direzione : ebbene, noi, invence di parlare di direzione comune, diremmo anche che le due rette hanno comune un *punto improprio*...L'introduzione degli elementi impropri si presta utilmente per ottenere una maggior cocissione del linguaggio, perchè consente di ragruppare in un unico enunciato ...più proposizioni" [12]
>
> "Dall'esame di queste proposizioni (diversas relaciones de incidencia entre puntos, rectas y planos de la Geometría elemental, J.L. M.) si vede che in esse la parola "direzione" sostituisce in molti case la parola "punto" e la parola "direzione" sostituisce in molti case la parola "punto" e la parola "giacitura" sostituisce la parola "retta". Surge perciò lídea di definire come "punto" e "retta" rispettivamente la direzione di una retta e la giacitura d'un piano" [5].
>
> "Symmetry can frequently be obtained by a judicious choice of terminology. This is well illustrated by the concept of "points at infinity" which is fundamental in any treatment of projective geometry" [13]
>
> "1° Deux points déterminent une droite à laquelle ils appartiennent ; 2° Un point et une direction déterminent une droite à laquelle ils appartiennent. Si dans le second énoncé on remplacait le mont "direction" par le mot "point" il coïnciderait avec le premier. Cést la convention que nous allons faire,..."[6].
>
> "Since a pair of non-intersecting, or parallel, lines nay be obtained as the limit of two lines whose intersection point moves farther and farther away, parallels may be considered to intersect in "infinite" or "ideal" points adjoined to the ordinary plane" [1]. (Esta idea es tan poco satisfactoria que el propio texto dice como después que, "not to create more exceptions than it removes", debe admitirse que las dos paralelas se cortan en un punto ideal y no en dos, como parece natural de acuerdo a la idea de punto límite, J.L.M :).

Como se ve, los argumentos son "concisión de lenguaje", "simetría", "convenciones cómodas", etc. No creo que tales argumentos formales resulten convincentes para el principiante y mucho menos que lo conduzcan a comprender por qué tales convenciones de terminología han de ser *fundamentales* para la Geometría Proyectiva precisamente y no para cualquier otra clase de Geometría [1].

Las disciplinas matemáticas modernas y, en particular las geometrías, se presentan como sistemas lógicos-deductivos, es decir, como cuerpos de proposiciones deducidas por medio de reglas lógicas a partir de ciertas proposiciones iniciales llamadas postulados. Esta presentación formal es una condición necesaria par asegurar la rigurosidad de la matemática. Pero no es aceptable deducir de ahí que la matemática es un mero juego lógico con sistemas arbitrarios de postulados. Tomar un sistema arbitrario de postulados y enfilar a partir de ellos un conjunto caprichoso de definiciones y teoremas puede constituir un ejercicio de lógica formal pero no conducirá, en general, más que a decir tonterías. Los postulados y las principales definiciones

1. El viejo tratado de Reye [11] da una justificación heurística de la introducción de los elementos impropios que nos parece mejor que las mencionadas, aunque no totalmente satisfactoria.

de una verdadera teoría matemática provienen o bien del examen de la realidad material o bien son sugeridos en forma natural por las necesidades del propio desarrolla interno de la matemática. Ocultar esto en las páginas iniciales de un texto de matemática, sobre todo si se trata de un texto dirigido a principiantes, no sólo me parece antipedagógico sino profundamente anticientífico.

Las páginas que siguen contienen lo que constituirá una introducción heurística a un texto o curso de Geometría Proyectiva. Por lo mismo, no hay en ellas razonamientos formalmente rigurosos (salvo en el Capítulo IV) e inclusive en algunos casos incurro exprofeso en imprecisiones de lenguaje. Por supuesto, todo el material de este trabajo es perfectamente conocido y no hay en él ninguna pretensión de originalidad científica; si algún valor tine será, en todo caso, de orden pedagógico. Al final del trabajo, en un Apéndice, incluyo algunas consideraciones históricas acerca de la introducción de los elementos impropios, que me parecen no estar desprovisto de interés.

1 CONCEPTO GENERAL DE GEOMETRÍA

1.1

¿Qué es geometría? Se puede decir que la geometría estudia la forma de figuras y cuerpos compuestos por puntos, rectas, planos, etc. Pero ¿qué es la *forma* de una figura? ¿Por qué decimos que las figuras a) y b) tienen la *misma* forma y que esta forma es *distinta* de las figuras c), d) y e) que, a su vez, son distintas entre sí? La pregunta puede parecer trivial y, sin embargo, recién a fines del siglo pasado se dió una respuesta plenamente satisfactoria a la misma [7].

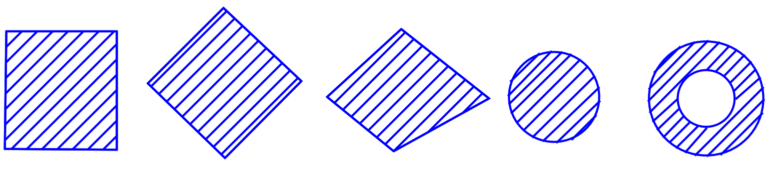

Figura 1

Decimos que dos figuras tienen la misma forma cuando una de ellas se obtiene a partir de la otra por medio de ciertas *transformaciones* que son, por una parte, *movimientos rígidos* y, por otra, *homotecias*, esto es, dilataciones o contracciones uniformes. Una transformación de esta especie, compuesta por movimientos rígidos y homotecias, es lo que se llama una *semejanza*. En definitiva, decir que dos figuras tienen la misma forma, y decir que son semejantes o que se obtienen una de otra por medio de una semejanza, es decir la misma cosa. Dos triángulos equiláteros cualesquiera son siempre semejantes, tienen la misma forma; lo mismo ocurre con dos cuadrados o con dos círculos cualesquiera. Pero un cuadrado, un rectángulo y un rombo tienen distinta forma.

Una *propiedad geométrica* es una propiedad de una figura F que se conserva cuando transformamos F, por medio de una semejanza, en otra figura F'; dicho de otro modo, es una propiedad que poseen en común todas las figuras semejantes entre sí. Suele decirse también que una propiedad geométrica es una propiedad *invariante* con respecto a las semejanzas. Por ejemplo, el hecho de que las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto o el hecho de que las tres diagonales de un exágono circunscripto a una elipse se cortan también en un mismo punto son, evidentemente, propiedades geométricas del triángulo y de la elipse. En cambio, el hecho de que un segmento sea vertical *no* es una propiedad geométrica, porque la propiedad puede no conservarse después de efectuar un movimiento del segmento.

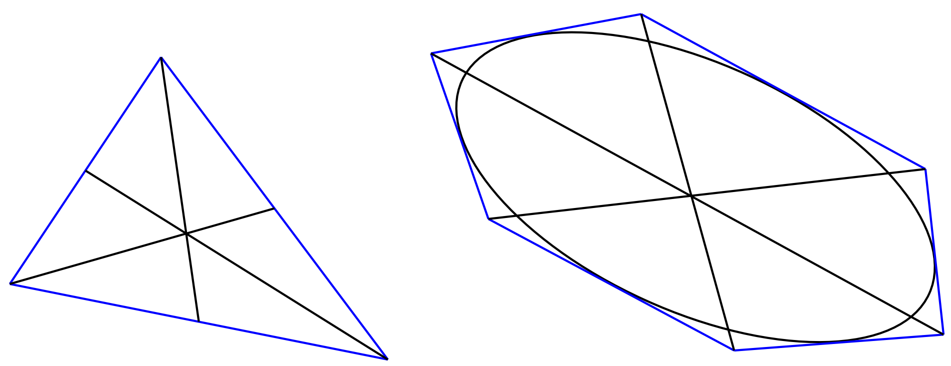

Figura 2

En el concepto de Geometría, que es el estudio de las propiedades geométricas, intervienen pues dos nociones fundamentales : la noción de *espacio*, esto es, el conjunto de todos los puntos, rectas, planos y demás figuras, y la noción de *transformación* de ese espacio, que hace pasar de una figura F a una figura transformada F'. La geometría estudia las propiedades de las figuras del espacio considerado que son invariantes con respecto a las transformaciones consideradas (en nuestro caso las semejanzas).

1.2

Pero examinemos un poco más de cerca las transformaciones que hemos considerado (semejanzas). Supongamos que transformamos la figura F en la figura F' por medio de una cierta semejanza S (compuesta por algunos movimientos rígidos y homotecias), y que luego transformamos F' en otra figura F'' por medio de otra semejanza S' (es decir, de otra serie de movimientos rígidos y homotecias). Es claro que el resultado final F'' es semejante a F puesto que se obtiene de ésta por una sucesión de movimientos rígidos y homotecias (los de S y los de S'). Es decir, el resultado de aplicar sucesivamente dos transformaciones del tipo considerado (semejanzas) es una transformación del tipo considerado (semejanza). Dicho de otro modo, si F' es semejante a F y F'' semejante a F', entonces F'' es semejante a F, lo que se expresa diciendo que la semejanza es una relación *transitiva*. Todavía puede decirse : *dos figuras semejantes a una tercera son semejantes entre sí*.

En segundo lugar, si F' se obtiene de F por medio de una semejanza S, recíprocamente, F se obtiene de F' por medio de una semejanza T : basta aplicar a F' los movimientos rígidos opuestos y las homotecias opuestas (es decir, contracción si antes hubo dilatación y recíprocamente) a las que componían S para obtener de nuevo F. O sea, toda transformación S de la clase considerada 8semejanza) tiene una *transformación inversa* T, que deshace el efecto de S y que es también de la clase considerada (semejanza). También puede decirse que si F' es semejante a F, entonces F es semejante a F', lo que se expresa diciendo que la semejanza es una relación *recíproca.*

Por último, es natural decir que toda figura es semejante a sí misma, es decir, incluir entre las transformaciones consideradas a la *transformación identidad* I (resultado de *no* hacer movimientos rígidos ni homotecias). Suele expresarse eso diciendo que la semejanza es una relación reflexiva.

En resumen, las transformaciones consideradas (semejanzas) tienen las siguientes importantes propiedades :

a) *Dadas dos transformaciones del tipo considerado* S, S', *su aplicación sucesiva equivale a otra transformación* S'' *del tipo considerado* ;

b) *Toda transformación del tipo considerado,* S, *tiene una inversa* T, *también del tipo considerado* ;

c) *La transformación identidad* I *es del tipo considerado.*

Un conjunto cualquiera de transformaciones que posean las propiedades a), b) y c) se llama un *grupo de transformaciones.* Por lo que homos visto, las semejanzas constituyen, entonces, un grupo de transformaciones.

La definición de Geometría dada al final del parágrafo precedente pude ahora precisarse de la siguiente manera : *La Geometría es el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes ante un cierto grupo de transformaciones (semejanzas).*

1.3

Surge naturalmente la cuestión : ¿y no podrían considerarse otros tipos de transformaciones, distintas de las semejanzas ? Efectivamente es así, hay otras transformaciones geométricas, sugeridas por la realidad, y cuyo estudio tiene una gran importancia.

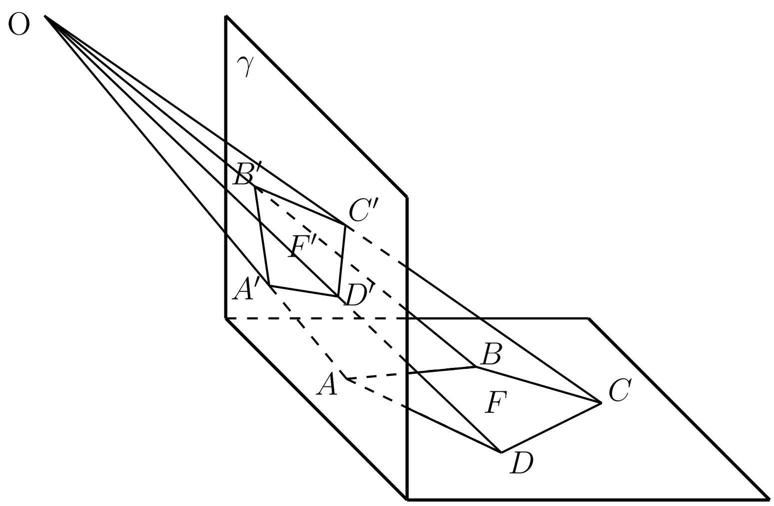

Figura 3

Consideremos el problema de la perspectiva. Para dibujar en perspectiva una figura F, podemos imaginar que desde un punto O (ojo) trazamos los rayos visuales OA, $OB, \ldots$ a los distintos puntos de F y cortamos esos rayos por medio del plano del cuadro γ en los puntos A', $B', \ldots$ que dibujan la imagen F', perspectiva de F. Podemos decir que, gracias a ese procedimiento, hemos transformado F en F', pero esa transformación no es, en general, una semejanza ; la perspectiva *deforma* las figuras (es decir, no conserva la forma invariante por semejanza). Y sin embargo, no puede negarse que la perspectiva representa, en un cierto sentido, la forma geométrica de los objetos, y es precisamente por eso que es útil en el dibujo y la pintura.

Pero, ¿qué quiere decir "en cierto sentido" ? Hay ciertas propiedades geométricas (ciertas "formas") que se conservan, mientras que otras no. Por ejemplo, la perspectiva de un triángulo es siempre un triángulo, la de un cuadrilátero siempre es un cuadrilátero (aunque la de un cuadrado no es en general un cuadrado !) ; pero nunca un polígono tendrá por perspectiva un círculo. Es decir, la figura c) (ver figura 1) puede ser la perspectiva de b) (efectivamente, así se construyó la figura c)), pero jamás la de d). Es decir, la diferencia de la forma entre b) y c) aparece como menos profunda que la diferencia entre c) y d) ; podemos decir que, a pesar de su diferencia, hay algo común entre las formas de b) y c), del mismo modo que antes decíamos que había algo común entre las formas de a) y b) (incluso decíamos que a) y b) tenían *la misma* forma !).

Prosigamos. Si AB es un segmento y C su punto medio, y si $A'B'$ y C' son sus perspectivas, en general C' no será el punto medio de $A'B'$, como es fácil convencerse. Por lo tanto, la propiedad de ser punto medio de un segmento no se conserva en perspectiva ; tampoco se conserva entonces la propiedad de las medianas de un triángulo representada a la izquierda de la figura 2. En cambio, sí se conserva la propiedad del exágono circunscripto a una elipse, representada a la derecha de la misma figura, pues la perspectiva de una elipse es una elipse.

La consideración de un nuevo tipo de transformaciones, las perspectivas, conduce pues a una nueva noción de "forma" y de "propiedad geométrica", diferente de las usuales, definidas en el parágrafo 1.1. Y esto conduce a considerar un nuevo tipo de geometría, que no es otra que la Geometría Proyectiva.

1.4

Hay, sin embargo, una dificultad, y es que las transformaciones perspectivas no forman grupo (lo cual lleva a una desagradable situación de que dos figuras que tienen igual "forma perspectiva" que una tercera podrían no tener igual "forma perspectiva" entre sí). En efecto, sea F una figura cualquiera y F' una perspectiva de F, que se obtiene mirando F desde un ojo O y cortando los rayos visuales con un cuadro γ ; sea F'' una perspectiva de F', que se obtiene mirando F' desde otro ojo O' y cortando los rayos visuales con un nuevo cuadro γ'. Se puede mostrar que, en general, F'' no es una perspectiva de F, es decir, que no existe ninguna posición O'' del ojo que genere F'' como perspectiva de F vista desde O''. O sea, no se verifica la propiedad a) del parágrafo 1.2.

Para obtener algo coherente hace falta entonces definir una clase más amplia de transformaciones, que incluya las transformaciones perspectivas pero que satisfaga además la condición de formar grupo. Para ello procedemos como sigue.

En primer término, observamos que tanto la semejanza como las transformaciones perspectivas son *transformaciones puntuales*, es decir, hacen corresponder a cada punto A de la figura inicial F un punto A' de la figura transformada F' (en la Geometría Elemental, suele decirse que A' es un punto *homólogo* de A). Por ejemplo, en un movimiento rígido de la figura F, cada punto A de ésta (inmóvil relativamente a ésta) se mueve con F y ocupa, al final del movimiento, una posición A', determinada, en la figura F'. En una transformación perspectiva, cada punto A de F se transforma en su perspectiva A' (ver figura 3).

Llamaremos ahora *transformaciones proyectiva o proyectividad* a una transformación puntual cualquiera de una figura F en una figura F' que tenga la siguiente propiedad : si tres puntos cualesquiera A, B, C de F están alineados (yacen sobre una misma recta), los tres puntos correspondientes A', B', C? de F' también están alineados. Dicho brevemente, las proyectividades son aquellas transformaciones puntuales que *transforman rectas en rectas.* [2]

Basta un poco de reflexión para convencerse de que el conjunto de todas las proyectividades forma un grupo, es decir, que se verifican para ese conjunto las propiedades a), b) y c) del parágrafo 1.2.

Es evidente que un movimiento rígido es una proyectividad puesto que la alineación de punto no se destruye en un movimiento *rígido.* Es muy fácil mostrar que también las homotecias son proyectividades. Puesto que una semejanza es el resultado de efectuar sucesivamente movimientos rígidos y homotecias, es evidente que transforma rectas en rectas y por tanto *toda semejanza es una proyectividad.* Pero la recíproca no es cierta ; una transformación perspectiva, que en general no es una semejanza, es ciertamente una proyectividad puesto que la perspectiva de una recta es evidentemente una recta. Es más, el resultado de efectuar dos perspectivas sucesivas (que, como ya hemos indicado, no es en general, una perspectiva), es también una proyectividad.

Por lo tanto las semejanzas constituyen un conjunto parcial dentro del grupo de las proyectividades. El hecho de que ese conjunto parcial sea, a su vez, un grupo, lo expresamos diciendo que las semejanzas constituyen un *subgrupo* del grupo de las proyectividades.

1.5

Podemos ahora definir con precisión el nuevo concepto de "forma". Diremos que dos figuras F y F' tienen la misma *forma proyectiva* si F se puede transformar en F' por medio de una proyectividad. Ahora resulta que las figuras a) , b) y c) de la figura 1 tienen la misma forma proyectiva ; no así c) y d) puesto que los segmentos de la recta que limitan c) no pueden transformarse por medio de una proyectividad en arcos de circunferencia. Es claro que dos figuras que tiene la misma forma (en el sentido del parágrafo 1.1) tienen igual forma proyectiva (tal es el caso de a) y b)) ; pero dos figuras pueden tener la misma forma proyectiva y no tener la misma forma en el sentido del parágrafo 1.1 (tal es el caso de b) y c)).

Una *propiedad geométrica proyectiva*o simplemente una *propiedad proyectiva*) es una propiedad de una figura F que se conserva cuando transformamos F, por medio de una proyectividad, en otra figura F'. Dicho de otro modo : las propiedades proyectivas son las propiedades invariantes con respecto al grupo de las proyectividades. La propiedad de la mediana de un triángulo representada a la izquierda de la figura 2 no es una propiedad proyectiva ; si lo es, en cambio, la del exágono circunscripto a una elipse (derecha de la figura 2). Es evidente que toda propiedad proyectiva (invariante ante el grupo de proyectividades) es una propiedad geométrica en el

2. Esta no es la definición más general de proyectividad ; pero es suficiente para nuestros propósitos actuales.

sentido del parágrafo 1.1 (invariante ante el *subgrupo* de las semejanzas) ; pero la recíproca no es cierta.

Podemos dar ahora la siguiente definición :

La Geometría Proyectiva es el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes con respecto al grupo de las proyectividades.

Tenemos pues dos conceptos de Geometría ; la Geometría ordinaria, definida en el parágrafo 1.2, y la geometría Proyectiva, que acabamos de definir. La primera corresponde al grupo de las semejanzas ; la segunda, al de las proyectividades. Para ser precisos, a la Geometría definida en el parágrafo 1.2 la llamaremos *Geometría Euclideana*. Igualmente, debe llamarse *forma euclideana y propiedad euclideana* a las formas y propiedades geométricas definidas en el parágrafo 1.1, para distinguirlas de las formas y propiedades proyectivas.

La consideración de otros grupos de transformaciones conduce a definir todavía otras Geometrías, por ejemplo, las Geometrías No-Euclideanas, la Geometría Métrica, la Geometría Afín, etc. Podemos pues establecer el siguiente concepto general de Geometría :

Una Geometría es el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes con respecto a un cierto grupo de transformaciones.

1.6

Vale la pena considerar todavía un nuevo tipo de transformaciones puntuales, aún más general, que da origen a una nueva noción de Geometría (comprendida, naturalmente, dentro de la definición general que acabamos de dar).

Un ejemplo de estas nuevas transformaciones es la *inversión o transformación por radios vectores recíprocos.*

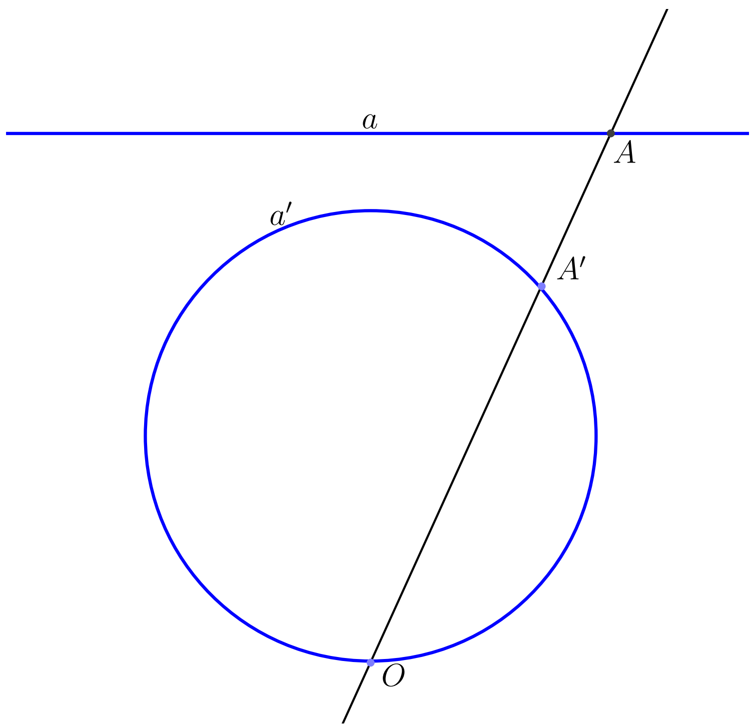

Figura 4

Esta transformación se define así : elegido un punto fijo O, a cada punto A distinto de O le hacemos corresponder el punto A' situado sobre la semirrecta OA de extremo O y tal que el producto de las distancias de O a A y A' sea igual a la unidad. Esta transformación posee propiedades muy interesantes. Por ejemplo : a una recta a corresponde, en general, una circunferencia a' que pasa por O (es decir, si el punto A recorre la recta a, el punto a' recorre la circunferencia a') ; sólo hace excepción el caso en que a pasa por O, porque entonces su transformada coincide con ella misma. Por lo tanto la inversión no es un proyectividad.

Para definir en general el nuevo tipo de transformaciones hace falta definir dos nociones previas. Diremos que una transformación de la figura F en la figura F' es *biunívoca* si dos puntos distintos de F se transforman siempre en dos puntos distintos de F' (todas las transformaciones consideradas hasta ahora son biunívocas). Toda transformación biunívoca S tiene una inversa T (ver parágrafo 1.2) también biunívoca ; en efecto, si S hace corresponder al punto A el punto A', definimos T como aquella transformación que hace corresponder al punto A' el punto A.

Diremos que una transformación es *continua* si para cada punto A de F y un móvil B de F que tiende a A, el correspondiente B' de B tiende al correspondiente A' de A (todas las transformaciones consideradas hasta ahora son continuas).

Diremos que una transformación puntual es un *homeomorfismo* si es biunívoca y si tanto ella como su inversa son continuas. Podemos representarnos intuitivamente un homeomorfismo como una deformación arbitraria de una figura hecha de un material elástico, siempre que en la deformación de la figura no se rompa (lo cual equivaldría a una falta de continuidad) ni se superpongan unos puntos sobre otros (lo que equivaldría a falta de biunivocidad).

Resulta entonces que *todas las semejanzas y todas las proyectividades son homeomorfismos*, pero hay homeomorfismos que no son proyectividades ; tal es el caso de la inversión.

Es evidente que todos los homeomorfismos forman grupo. Las proyectividades forman un subgrupo del grupo de los homeomorfismos ; las semejanzas forman otro subgrupo que es, a su vez, subgrupo del subgrupo de las proyectividades.

La topología es el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes con respecto al grupo de los homeomorfismos.

Estas propiedades son las *propiedades topológicas* ; analogamente puede hablarse de *forma topológica* de una figura. Ahora las figuras a), b) c) y d) de la figura 1 resultan tener la misma forma (topológica), puesto que un cuadrado hecho de material elástico puede ser deformado, sin romperlo, hasta que tome la forma de un círculo. Sin embargo, la forma e) sigue siendo diferente pues, para transformar un círculo en un anillo, no alcanza con deformarlo, sino que hace falta romperlo (agujerearlo) o bien doblarlo y pegarlo, es decir, efectuar una transformación que no es un homeomorfismo. Dos figuras de igual forma euclidea o aún de igual forma proyectiva tienen también igual forma topológica ; pero la recíproca no es cierta. Toda propiedad topológica es también una propiedad proyectiva y una propiedad euclidea ; pero la recíproca no es cierta.

No está demás decir que, en la evolución psicológica del niño, la noción de espacio y forma, es decir, en definitiva, las nociones geométricas, van cambiando en sucesivas etapas. Investigaciones cuidadosas [10] parecen demostrar concluyentemente que el niño comienza por tener nociones de forma topológica, luego de forma proyectiva y recién al cabo de un período relativamente largo, forma euclidea. Un niño de corta edad distingue fácilmente la forma d) de la e) pero no de la b) (figuar 1).

1.7

Las consideraciones que preceden se refieren al *contenido* de las Geometrías, es decir el material y propiedades que estudian. En cuanto a la *forma* de exposición de la Geometrías, ella es, desde los "Elementos" de Euclides (Siglo III A.C.) pero sobre todo en las exposiciones modernas, las de un *sistema hipotético-deductivo*.

Es decir, se enuncia un conjunto de *nociones primitivas* o fundamentales y un *sistema de postulados* que son proposiciones que establecen propiedades de o relaciones entre las nociones primitivas. Las nociones primitivas no se explican o definen en función de nociones más simples ; en realidad, son los postulados los que al establecer las propiedades de las nociones primitivas, definen descriptivamente y en cierto modo implícitamente, a éstas. Por otro lado, no se hace pronunciamiento alguno acerca de la verdad o falsedad de los postulados, es decir, acerca de si ellos representan o no realidades del mundo material. Tan es así que no existe ningún inconveniente en considerar diferentes Geometrías basadas en sendos sistemas de postulados que son contradictorios entre sí ; por ejemplo, la Geometría Euclideana afirma el V postulado de Euclides (el postulado de las paralelas), mientras que las Geometrías No-Euclideanas lo niegan, reemplazándolo por otros postulados contradictorios con aquél.

Lo único que se exige de un sistema de postulados para que pueda servir de base a una Geometría (o a cualquier otra disciplina matemática) es que en *sí mismo* no sea contradictorio. A partir de un sistema de postulados aceptable se deducen luego, por secuencias lógicas, proposiciones (teoremas) que son consecuencias lógicas de los postulados y que expresan nuevas propiedades de las nociones primitivas o de nuevos entes definidos a partir de las nociones primitivas.

El valor de un sistema hipotético-deductivo estriba precisamente en su coherencia interna, que se expresa en el hecho de que, *si* los postulados son verdaderos, todos los teoremas resultan automáticamente verdaderos. Pero la cuestión de saber si los postulados, y por ende todo el sistema, son o no verdaderos es una cuestión extra-matemática. El problema de saber, por ejemplo, si el espacio físico es o no euclideano no es un problema matemático sino un problema de física. La respuesta a esta cuestión puede variar con el progreso del conocimiento experimental del mundo material (Newton y Einstein), pero ello no afecta la estructura misma de la teorías geométricas.

Lo dicho no implica que los postulados, definiciones y teoremas deban elegirse en forma totalmente arbitraria, caprichosa, al azar, ya que si así fuera el sistema hipotético-deductivo carecería probablemente de todo interés. Las teorías matemáticas verderamente importantes son sugeridas, directa o indirectamente (esto es, a través de otras teorías matemáticas) por la realidad material. El objeto de los próximos capítulos consiste, precisamente, en justificar en forma heurística, intuitiva, la elección de los postulados de la Geometría Proyectiva. Pero, una vez establecidos estos postulados, el desarrollo de la teoría debe obligatoriamente deducirse, por una aplicación de las reglas lógicas, del sistema de postulados [3].

3. La última frase se refiere a la *exposición* de la teoría y a la *demostración* de sus teoremas. En cuanto al proceso de *descubrimiento* de éstos, generalmente contiene también elementos de orden intuitivo.

2 LOS POSTULADOS DE INCIDENCIA Y DE EXISTENCIA

2.1

En el parágrafo 1.5 vimos la posibilidad de la existencia de diversas Geometrías, basadas en diferentes grupo de transformaciones. Implícitamente admitíamos que estos diferentes grupos actuaban, sin embargo, sobre el mismo espacio. En realidad, como ahora vamos a ver, la consideración de diferentes tipos de transformaciones conduce de manera natural a modificar la noción de espacio y a considerar diferentes tipos de espacios (incluso *muy* diferentes!) adecuados a esos distintos grupos.

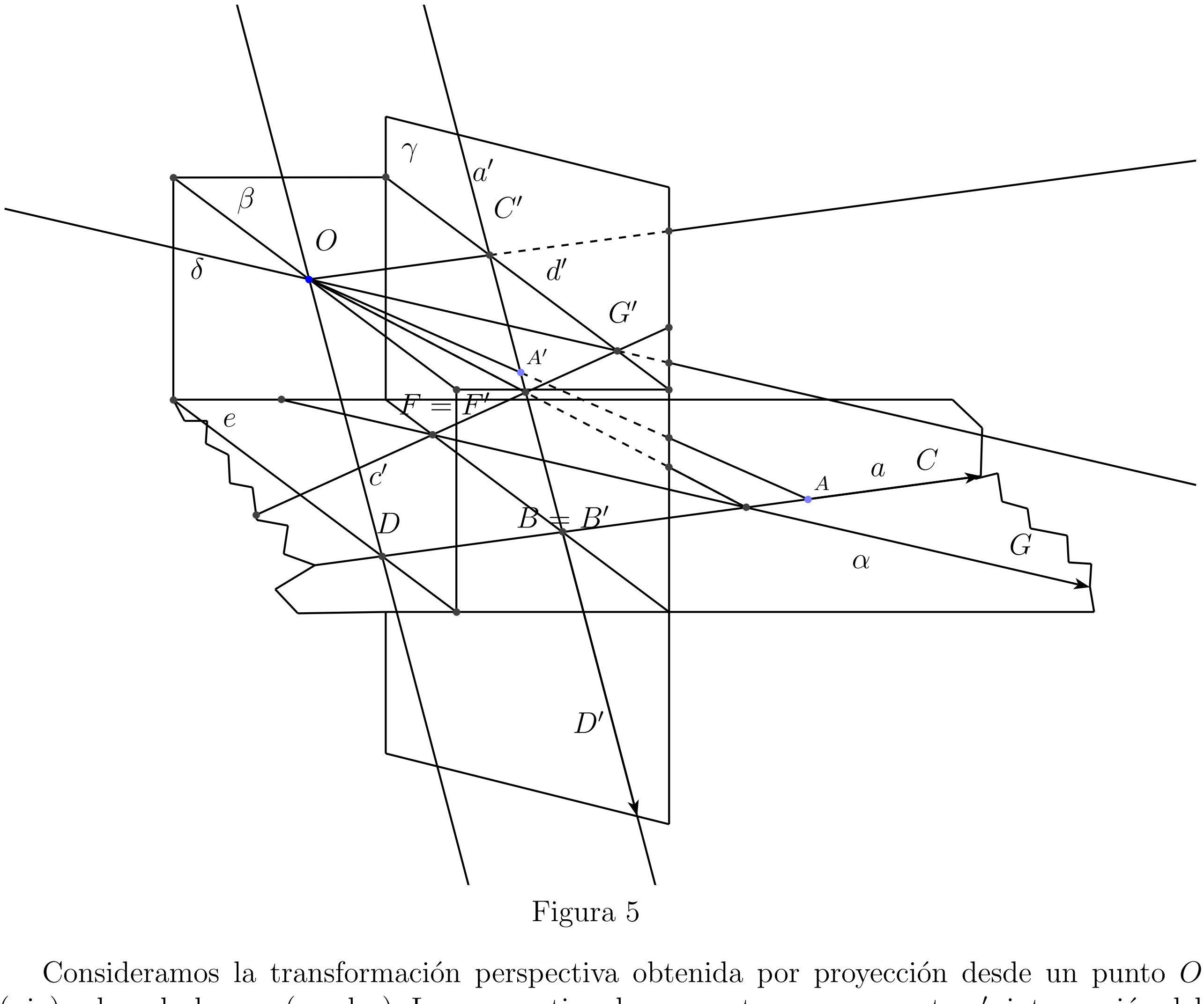

Figura 5

Consideramos la transformación perspectiva obtenida por proyección desde un punto O (ojo) sobre el plano γ (cuadro). La perspectiva de una recta a es una recta a', intersección del plano γ con el plano determinado por la recta a y el punto O. En ese plano existe una recta OC' paralela a a, que corta a la perspectiva a'en un punto C'. C' divide a' en dos semirrectas : la inferior $C'B'$ es la perspectiva de la parte DA (OD es la paralela a a' trazada por O) de la recta a situada *delante* de O ; la superior $C'P'$ es la "perspectiva" de la parte DP de a que está *detrás* de O.

La figura muestra que existen dos desagradables puntos excepcionales : hay un punto D de a que no tiene perspectiva y hay un punto C' de la recta perspectiva a' que no es perspectiva de ningún punto de a. La frase : una transformación perspectiva transforma una recta en una recta, no es pues completamente exacta, debido a esas excepciones.

La dificultad no es de pequeña monta ; por lo pronto, la definición de proyectividad que hemos dado en el parágrafo 1.5 no puede considerarse ya como plenamente safisfactoria. La existencia de puntos excepcionales como los mencionados conduciría, en el mejor de los casos, a grandes complicaciones en los enunciados de los teoremas y en los razonamientos de la Geometría Proyectiva.

Notemos de paso que la dificultad es *típicamente proyectiva.*

Esa dificultad no puede presentarse si consideramos como transformación admisibles de la Geometría sólo las semejanzas. La dificultad aparece únicamente al ampliar las transformaciones admisibles introduciendo la transformaciones perspectivas.

Tal género de dificultades se presenta con frecuencia en la matemática. Por ejemplo, en el campo de los números naturales 1,2,3, . . .es posible definir la suma y el producto de dos números, pero no *siempre* la diferencia (por ejemplo $3 - 5$) no el cociente (por ejemplo $3 : 5$) Para evitar esas excepciones que, al mismo tiempo, complicarían y empobrecerían enormemente la aritmética, se introducen "nuevos" números, negativos y fraccionarios. Históricamente, estos nuevos números aparecen al principio como "ideales", en el sentido de que no están incluidos en el campo de los números familiar en el momento de su introducción. Los nuevos números representan, sin embargo, un progreso en el conocimiento de la realidad, expresan nuevos aspectos de la realidad, que los viejos números no eran capaces de reflejar plenamente. Por eso, con el correr del tiempo, los números "ideales" adquieren plenamente carta de ciudadanía y resultan, al fin de cuentas, tan "naturales" como sus predecesores. Un proceso similar han sufrido los números irracionales e imaginarios y otros conceptos matemáticos, cuyos mismos nombres recuerdan las resistencias primitivamente opuestas a su introducción. Con frecuencia, el tiempo transcurrido entre el momento en que se señalan con claridad las dificultades y la completa asimilación de los "nuevos" conceptos que las resuelven se mide por muchos siglos (para los números irracionales, desde el VI A.C. hasta el XIX D.C.).

En el caso que nos ocupa, resulta natural evitar las excepciones en la transformación perspectiva de la recta a en la recta a' atribuyendo a ambas rectas sendos puntos "impropios" : C, punto impropio de a, cuya perspectiva sería C', y D', punto impropio de a', que sería la perspectiva del punto D. Convendremos pues en que :

Una recta, en la Geometría Proyectiva, está formada por los puntos de una recta ordinaria (de la Geometría Euclideana), con el agregado de un punto "impropio".

Los puntos de una recta ordinaria se llamarán ahora "propios" para distinguirlos del "impropio".

Con esta convención podemos ahora decir que la perspectiva de una recta es una recta y que la transformación perspectiva establece una correspondencia biunívoca *sin excepción* entre ambas rectas.

2.2

Sea ahora α un plano cualquiera (Figura 5). La transformación perspectiva hace corresponder a los puntos de α puntos del cuadro γ y recíprocamente. Los puntos impropios de las diferentes rectas $a, c, \ldots$ trazadas en el plano α tienen sus perspectivas $C', G', \ldots$ situadas en una recta d' del cuadro γ que es la intersección de éste con el plano β paralelo a α trazado por O. Las siguientes observaciones conducen naturalmente a adoptar nuevas convenciones relativas a los elementos impropios :

a) La correspondencia entre los puntos impropios de α y de γ es biunívoca. Para conservar esta valiosa propiedad de la transformación perspectiva en el caso de los puntos impropios, habrá que considerar entonces como idénticos los puntos impropios de dos rectas paralelas (tales como a y b) ya que ellos tiene una única perspectiva C' (intersección del cuadro con la paralela ambas rectas trazada por O). Convendremos entonces en que :

   Dos rectas paralelas cualesquiera tienen común un mismo punto impropio.

b) La transformación perspectiva hace corresponder a las rectas de α las rectas de γ y recíprocamente, con dos únicas excepciones : la recta d' (intersección γ y β), que no es perspectiva de ninguna recta de α, y la recta e intersección de α con el plano δ paralelo a γ trazado por O), que no tiene por perspectiva ninguna resta de γ. Observamos que la primera es el lugar geométrico de la perspectivas de todos los puntos impropios de las rectas de α, y la segunda es el lugar geométrico de los puntos de α que tienen perspectiva impropia.

   Resultando natural entonces, para evitar esas dos excepciones en la biunivocidad existente en la correspondencia perspectiva ente las rectas de α y de γ, introducir dos "rectas impropias" : d, recta impropia de α, cuya perspectiva es d', y e', recta impropia de γ, que es perspectiva de e. Convendremos pues en que : *Un plano, en la Geometría Proyectiva, está formado por los puntos de un plano ordinario (de la Geometría Euclideana) con el agregado de puntos impropios, que son los puntos impropios de toda las rectas trazadas en el plano. El conjunto de los puntos impropios del plano forma una recta, que llamaremos recta impropia del plano.*

   Por oposición, llamaremos "propias" a las rectas ordinarias, formadas por puntos propios y por un sólo punto impropio.

c) Consideremos dos planos paralelos. Si trazamos en uno de ellos sendas recta paralelas, los puntos impropios de éstas coinciden (observación 2.2) ; ese punto impropio común pertenece, por tanto, a ambos planos. Como esto mismo sucede para cualquier par de rectas paralelas trazadas en los planos, resulta que todos los puntos impropios de ambos planos son comunes : *Dos planos paralelos cualesquiera tiene común una misma recta impropia.*

   Hemos sido conducidos a incluir, en el espacio de la Geometría Proyectiva, puntos y rectas impropios, junto a los puntos y rectas propios de la Geometría Euclideana. Sea ω el conjunto de todos los puntos impropios, que es, por lo mismo, el lugar geométrico de todas las rectas impropias. ω tiene propiedades semejantes a las de un plano. En efecto :

d) Toda recta (propia) corta a ω (tiene común con ω) un punto (impropio), el punto impropio de la recta. Esta propiedad es análoga a : una recta y un plano (propios) se cortan en un punto (propio, si la recta no es paralela al plano ; impropio, si es paralela).

e) Todo plano corta a ω (tine común con ω) una recta (impropia), la recta impropia del plano. Esta propiedad es análoga a : dos planos se cortan en una recta (propia, sin no son paralelos ; impropia si los son).

Estas observaciones hacen razonable la siguiente convención :

Todos los puntos impropios del espacio forman un plano, que llamaremos impropio.

Por oposición, llamaremos "propios" a los planos ordinarios, formados por los puntos propios y por la recta impropia. En definitiva :

El espacio de la Geometría Proyectiva (el espacio proyectivo) está formado por puntos, rectas y planos propios (del espacio euclideano), con el agregado de puntos y rectas impropias y de un plano impropio. Los puntos, rectas y planos, propios e impropios, se llaman elementos fundamentales.

Como el caso de las sucesivas generalizaciones del concepto de número, los elementos "ideales" o "impropios" que hemos introducido, y las convenciones correctivas, representan idealizaciones matemáticas de aspectos de la realidad, que se revelan por primera vez en la perspectiva y que permanecían ocultos cuando nos limitábamos a considerar transformaciones de semejanza. Dicho sea de paso, esos aspectos aparecen con nitidez incluso en la observación más ingenua de la realidad : piénsese, por ejemplo, en la perspectiva de una llanura plana en la que hay tendida una vía ferroviaria rectilínea, para reconocer inmediatamente los elementos impropios (el horizonte, esto es, la recta impropia del plano de la llanura ; el punto de "concurrencia" de los rieles en el horizonte, esto es, el punto impropio de los rieles paralelos, situado en la recta impropia del plano).

Por otra parte, el agregado de elementos impropios al espacio euclideano introduce profundas modificaciones en la estructura del espacio. La recta, el plano y el espacio proyectivos tienen propiedades muy diferentes de la recta, el plano y el espacio euclideanos, como veremos en el capítulo III.

2.3

En lo sucesivo, utilizaremos las palabras "pertenecer" o "incidir" con un sentido un poco diferente del lenguaje ordinario. Así diremos que un punto *pertenece o incide en* una recta o plano, cuando *forma parte* de la recta o del plano ; pero también diremos que una recta o plano pertenece a o incide en un punto cuando *pasa* por el punto o, lo que es lo mismo, cuando *contiene* al punto. Análogamente diremos que un plano pertenece a o incide en una recta.

De acuerdo con esto, la relación de incidencia o pertenencia es recíproca :

I. *Si un elemento fundamental pertenece a otro, el segundo pertenece al primero.*

Por ello, tiene sentido utilizar la expresión : *dos elementos se pertenecen.*

Pero la relación de pertenencia no es transitiva. Por ejemplo, si el plano α pertenece al punto A y el punto A pertenece a la recta a, no se deduce que el plano α pertenezca a la recta a. Sin embargo, hay transitibidad en el caso siguiente :

II. *Si la recta a pertenece al punto A y al plano α, entonces el punto A y el plano α se pertenecen.* Consideremos los dos enunciados siguientes :

III. *Dos punto diferentes determinan*[4] *una recta, a la cual pertenecen.*	***IV.*** *Dos planos diferentes determinan*[4]*una recta a la cual pertenecen.*

4. En estos enunciados y en los sucesivos, la palabra *determinan* significa : *existe una y sólo una* (recta) a la cual pertenecen.

Si hacemos la distinción entre elementos propios e impropios, estos enunciados dan origen a los siguientes :

El de la izquierda :

III$_a$ *Dos puntos propios diferentes determinan una recta, a la cual pertenecen.*

Este es un enunciado de la Geometría Euclideana que se pude formular :

III'$_a$ *Por dos puntos diferentes pasa una y una sola recta.*

III$_b$ *Un punto propio y un punto impropio determinan una recta propia, a la cual pertenecen.*

Sea A el punto propio y B el punto impropio. B es punto impropio de alguna recta propia b, Buscar una recta a que pase por A y B es pues lo mismo que buscar una recta que pase por A y tenga común con b el punto impropio, es decir, sea paralela a b (ver convención a) del parágrafo 2.2). Por tanto, el enunciado anterior equivale al siguiente de la Geometría Euclideana :

III'$_b$ *Por un punto dado pasa una y una sola recta paralela a una recta dada.*

III$_c$ *Dos puntos impropios diferentes determinan una recta impropia, a la cual pertenecen.*

Si A y B son puntos impropios, serán puntos impropios de sendas rectas a y b, no paralelas (pues, de lo contrario, A y B no serían diferentes, de acuerdo a la convención a) del parágrafo 2.2). Si por un punto propio cualquiera C trazamos las paralelas a' y b' a a y b, respectivamente, a' y b' determinan un plano α paralela a la vez a a y a b. Todos los planos paralelos a a y a b son paralelos a α y tienen en común (convención c) del parágrafo 2.2) una recta impropia c, que pasa por A y B y está determinada por esos dos puntos. El enunciado anterior equivale, pues, al siguiente de la Geometría Euclideana :

III'$_c$ *Dadas dos rectas no paralelas, existen planos paralelos a ambas y todos estos planos son paralelos entre sí.*

El enunciado de la derecha da origen a los siguientes :

IV$_a$ *Dos planos propios no paralelos determinan una recta propia, a la cual pertenecen.*

Este es el enunciado de la Geometría Euclideana, que se pude formular :

IV'$_a$ *Dos planos no paralelos se cortan en una y una sola recta.*

IV$_b$ *Dos planos propios paralelos diferentes determinan una recta impropia, a la cual pertenecen.*

Esto no es otra cosa que nuestra convención c) del parágrafo 2.2.

IV$_c$ *Un plano propio y un plano impropio determinan una recta impropia, a la cual pertenecen.*

Es una consecuencia inmediata de las convenciones b) y e) del parágrafo 2.2.

2.4

Consideremos los enunciados siguientes :

V. *Un punto y una recta que no se pertencen determinan un plano, al cual pertenecen.*

VI. *Un plano y una recta que no se pertenecen determinan un punto, al cual pertenecen.*

Como el caso de los enunciados ***III*** y ***IV***, estos nuevos enunciadosdan origen a los siguientes casos especiales :

El de la izquierda :

V$_a$ *Un punto propio y una recta propia que no se pertenecen determinan un plano propio, al cual pertenecen.*

En el lenguaje de la Geometría Euclideana :

V'$_a$ *Por un punto y una recta que no pasa por el punto, pasa solo un plano y uno sólo.*

V$_b$ *Un punto propio y una recta impropia determinan un plano propio, al cual pertenecen.*

Dar una recta impropia b es dar un plano β que tiene b como recta impropia. Buscar un plano que pase por el punto propio A y por la recta impropia b es buscar un plano por A paralelo a β. Por tanto, el enunciado anterior equivale al siguiente de la Geometría Euclideana :

V'$_b$ *Dado un punto A y un plano β, existe un plano y uno sólo que pasa por A y es paralelo a β.*

V$_c$ *Un punto impropio y una recta propia que no se pertenecen determinan un plano propio, al cual pertenecen.*

Dar un punto impropio A es dar una recta a que tiene a A por punto impropio. La recta dada b no puede ser paralela a a porque, si lo fuera, A pertenece a b (convención a) del parágrafo 2.2). Buscar un plano que pase por A y b es buscar un plano que pase por b y sea paralela a a. Por tanto, el enunciado anterior equivale al siguiente de la Geometría Euclideana :

V'$_c$ *Dadas dos rectas no paralelas a, b, existe un plano y uno sólo que pasa por b y es paralelo a a.*

V$_d$ *Un punto impropio y una recta impropia que no se pertenecen determinan el plano impropio, al cual pertenecen.*

Que el punto y la recta pertenecen al plano impropio resulta de la convención e) del parágrafo 2.2. Que por ellos no puede pasar otro plano resulta de que éste, si fuera propio, tendría todos sus puntos impropios sobre la misma recta, lo que contradiría la hipótesis.

El enunciado de la derecha da origen a los siguientes :

VI$_a$ *Un plano impropio y una recta propia no paralela al plano determinan un punto propio, al cual pertenecen.*

En el lenguaje de la Geometría Euclideana :

VI'$_a$ *Un plano y una recta no paralelos se cortan en un punto y uno sólo.*

VI$_b$ *Un plano propio y una recta propia paralela al plano y que no le pertenece determinan un punto impropio, al cual pertenecen.*

El punto impropio de la recta pertenece también al plano puesto que hay paralelismo (convención a) y b) del parágrafo 2.2). Por otro lado, ningún punto propio de la recta pertenece al plano, puesto que recta y plano no se pertenecen por hipótesis.

VI$_c$ *Un plano propio y una recta impropia que no se pertenecen determinan un punto impropio, al cual pertenecen.*

Sea α el plano propio y b la recta impropia, que será la recta impropia de un cierto plano β. Puesto que b no pertenece a α, los planos α y β no serán paralelos. Las rectas paralelas a α y β son las paralelas a la intersección de estos planos, y el punto impropio de estas rectas es el común a α y a b. Por lo tanto, el enunciado anterior equivale al siguiente de la Geometría Euclideana :

VI'$_c$ *Dados dos planos no paralelos, existen rectas paralelas a ambos y todas estas rectas son paralelas entre sí.*

VI$_d$ *El plano impropio y una recta propia determinan un punto impropio, al cual pertenecen.*

Es una consecuencia de la convención e) del parágrafo 2.2.

Las proposiciones **I-VI** enuncian las propiedades de la relación de pertenencia o incidencia entre puntos, rectas y planos, y constituyen los *postulados de incidencia* de la Geometría

Proyectiva. Observar que los postulados **III-VI** resumen en cuatro enunciados a nueve proposiciones de la Geometría Euclideana y cinco proposiciones de carácter convencional que expresan en el fondo las definiciones y principales propiedades de los elementos impropios introducidos heurísticamente en los parágrafos 2.1 y 2.2

La condición de lenguaje y la simplicidad formal que así se obtienen constituyen un nuevo argumento a favor de la introducción de los elementos impropios.

A los postulados de incidencia agregamos los siguientes postulados de existencia :

VII *Existen al menos tres puntos no pertenecientes a una misma recta y cuatro puntos no pertenecientes a un mismo plano.*

VIII *Existen al menos tres planos no pertenecientes a una misma recta y cuatro planos no pertenecientes a un mismo punto.*

Los postulados de existencia, conjuntamente con los postulados de orden y de continuidad(Capítulo III) expresan esencialmente el hecho de que el espacio es de *tres dimensiones.* Estos postulados no se cumplen, por ejemplo, en la *Geometría Proyectiva Plana.*

2.5

Daremos ahora algunas definiciones. Estas definiciones se aplican indiferentemente a elementos propios o impropios.

Dada una figura F formada por puntos y rectas, y un punto O no perteneciente a F, la figura F' formada por todas las rectas determinadas (Postulado III) por O y cada uno de los puntos $A, B, \dots$ de F, y por todos los planos determinados (Postulado V) por O y cada una de las rectas $a, b, \dots$ de F, se llama la *proyección* de F desde el punto O.

Dada una figura F, formada por puntos, y una recta a no perteneciente a F, la figura F' formada por todos los planos determinados (Postulado V) por a y cada uno de los puntos $A, B, \dots$ de F, se llama *proyección* de F desde la recta a.

Dada una figura F formada por planos y rectas, y un plano ω no perteneciente a F, la figura F' formada por todas las rectas determinadas (Postulado IV) por ω y cada uno de los planos $\alpha, \beta, \dots$ de F, y por todos los puntos determinados (Postulado VI) por ω y cada una de las rectas $a, b, \dots$ de F, se llama *sección* de F por el plano ω.

Dada una figura F formada por planos, y una recta a no perteneciente a F, la figura F' formada por todos los puntos determinados (Postulado VI) por a y cada uno de los planos $\alpha, \beta, \dots$ de F, se llama *sección* de F por la recta a.

Dos figuras F y F' que se obtengan una de otra por proyección o por sección se dicen *perspectivas.* Observar que esta noción de perspectiva no coincide con la del lenguaje usual, que hemos usado en parágrafos anteriores. La perspectiva usual es el resultado de hacer una proyección seguida de una sección.

El conjunto de todos los puntos que pertenece a una recta a se llama *recta punteada.* La recta a es *sostén* de la puntual.

El conjunto de todos los planos que pertenecen a una recta a se llama *haz de planos.* La recta a es el *sostén* o eje del haz.

El conjunto de todas las rectas que pertenecen a un punto A y a un plano α (A debe, naturalmente pertenecer a α) se llama *haz de rectas* ; A y α son los *sostenes* del haz ; A se llama también centro del haz.

El conjunto de todos los puntos que pertenecen a un plano α se llama *Plano punteado* ; α es el *sostén.*

El conjunto de todos las rectas que pertenecen a un plano α se llama *plano reglado* ; α es el *sostén.*

El conjunto de todos los puntos del espacio se llama *espacio punteado.*

El conjunto de todos los planos que pertenecen a un punto A se llama *estrella de planos* ; A es el *sostén* o centro de la estrella.

El conjunto de todas las recta que pertenecen a un punto A se llama *estrella de rectas* ; A es el sostén o centro de la estrella.

El conjunto de todos los planos del espacio se llama *espacio de planos.*

El conjunto de todas las rectas del espacio se llama *espacio reglado.*

La puntual, el haz de planos, el haz de rectas, el plano punteado, la estrella de planos, el plano reglado, la estrella de rectas, el espacio punteado, el espacio de planos y el espacio reglado, son *formas fundamentales* de la Geometría Proyectiva ; las tres primeras se dicen de *primera especie*, las cuatro siguientes. de *segunda especie*, las dos que siguen, de *tercera espacie* y la última, de *cuarta espacie.*

Particularizando el carácter propio o impropio de los elementos que intervienen, las formas fundamentales dan origen a diferentes formas de la Geometría Euclideana. Así, un haz de planos cuyo sostén es una recta impropia es el conjunto de todos los planos paralelos a un plano dado.

3 Los postulados de orden y de continuidad

3.1

Los postulados de incidencia y de existencia, aunque expresan propiedades importantes de los elementos fundamentales y de la relación de incidencia, dejan de lado otras propiedades del punto, recta y plano intuitivos. Consideremos los siguiente símbolos :

$A, B, C, D,$	que llamaremos "puntos"
AB, AC, AD, BC, BD, CD	que llamaremos "rectas"
ABC, ABD, ACD, BCD	que llamaremos "planos"

Diremos que un "punto" y una "recta" se "pertenecen" si la letra que intervienen en el símbolo del "punto" figura en el símbolo de la "recta" (por ejemplo, B pertenece a BC pero no a AD) ; análogamente para un "punto" y un "plano". Diremos que una "recta" y un "plano" se "pertenecen" si las dos letras que intervienen en el símbolo de la "recta" figura en el símbolo del "plano" (por ejemplo, AD pertenece a ABD pero no a ABC), Se pueden verificar fácilmente que esos "puntos", "rectas", "planos" y "relación de incidencia" satisfacen los postulados **I-VIII** ; constituyen pues el "espacio" de una "Geometría" que contiene sólo 4 puntos, 6 rectas y 4 planos. El hecho de que el espacio intuitivo contiene *infinitos puntos*, rectas y planos no puede, por lo tanto, deducirse de los postulados **I-VIII** ; para que ese hecho, entre otros, figure en la Geometría Proyectiva hace falta pues introducir nuevos postulados, los postulados de orden y de continuidad.

La recta euclideana se pude imaginar recorrida en un *sentido* o en el *sentido puesto*, digamos, de izquierda a derecha (flecha llena) o de derecha a izquierda (flecha punteada ver figura 6).

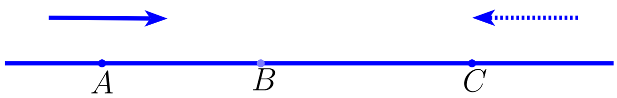

Figura 6

Eligiendo un sentido, los puntos de la recta aparecen en un cierto *orden*, y así diremos que A *precede a* B (en el sentido de la flecha llena). Dado el sentido de recorrido y dos puntos cualesquiera, siempre es posible decir cuál de ellos precedo al otro; además, esta relación de precedencia es *transitiva*; si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C. Estas particularidades las expresamos diciendo que es posible establecer una *ordenación lineal* de los puntos de la recta euclideana o, mejor dicho, dos ordenaciones lineales, *opuestas* entre sí. La ordenación de los puntos de una recta se conserva al efectuar una semejanza.

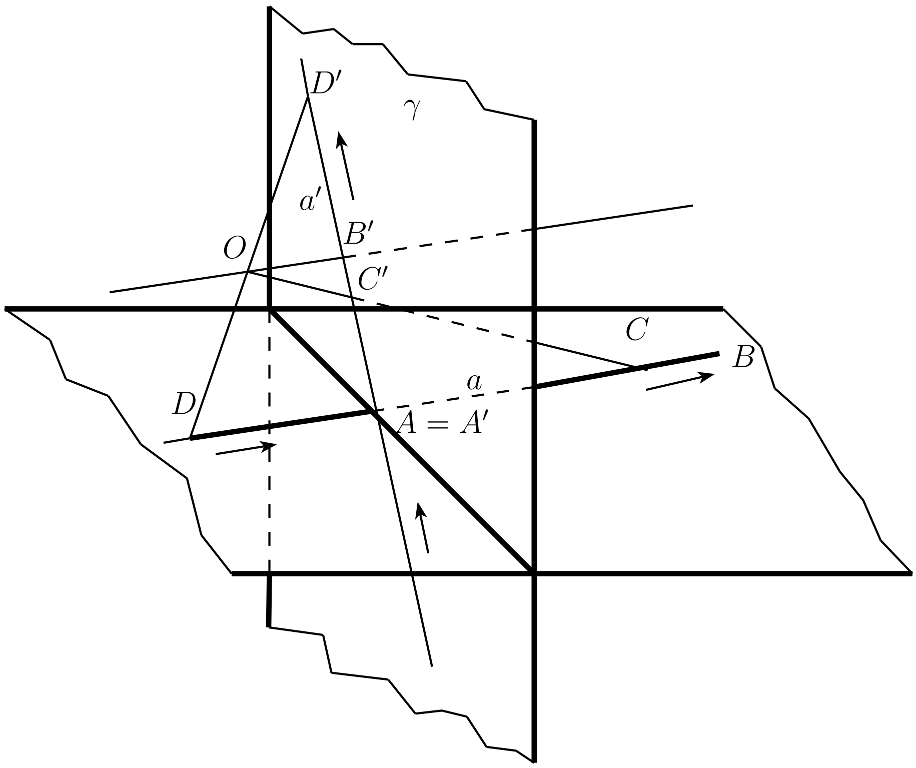

Figura 7

Este tipo de ordenación no conviene, sin embargo, a la Geometría Proyectiva, por lo menos si queremos que la relación de orden se mantenga al efectuar una transformación perspectiva. Consideremos (Figura 7) una recta a y su perspectiva a' desde O sobre el cuadro γ; sea B'

la perspectiva del punto impropio de a. Si imaginamos a recorrida en el sentido de la flecha, A precede a C y, si queremos que esta relación se conserva en la perspectiva, esto es, que A' precede a C', será necesario orientar la perspectiva a' tal como indica la flecha correspondiente. Por eso llega a una contradicción, ya que, en a, D *precede* a C, mientras que, en a', D' *sigue* a C'. Cuando C' se mueve sobre a' en el sentido de la flecha, el punto correspondiente C se mueve en a también en el sentido de la flecha, pero cuando C' atraviesa B', el punto C "atraviesa" el punto impropio de a "saltando" desde la extrema derecha a la extrema izquierda. Todo ocurre como si la recta a, en lugar de tener dos "extremos" como la recta euclideana, se "cerrará" en el punto impropio. En este sentido, la recta proyectiva se asemeja más a un círculo que a una recta euclideana :

La orientación lineal de los puntos de la recta proyectiva aparece pues como no apropiada, ya que no se conserva en la perspectiva. En cambio, parece más adecuada una ordenación "circular" ¿En qué consiste ésta ?

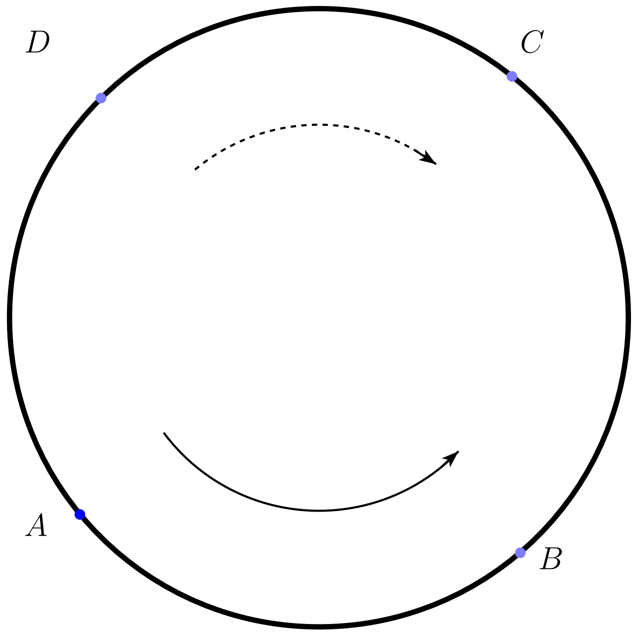

Figura 8

Dado un sentido de recorrido en un círculo (flecha llena, Figura 8), la frase "A precede a B" carece de significación porque, siguiendo el recorrido, resulta que, con igual razón, se puede afirmar que "B precede a A". En cambio, tiene sentido decir que *tres* se van encontrando en un determinado orden, por ejemplo, ABC. Observar que esos mismos tres puntos también se presentan en el orden BCA y en el orden CAB, es decir, en las ternas ordenadas que se obtienen por *d*e las letras ABC. En cambio las otra permutaciones (no circulares) ACB, CBA, BAC, corresponden al sentido de recorrido *opuesto* (flecha punteada).

Volvamos a la ordenación primitiva (flecha llena). Del hecho de que los puntos A, B, C se presenten en el orden ABC, y del hecho de que los puntos A, C, D se presenten en el orden ACD, *se deduce* que B, C, D se presentan en el orden BCD, Esta circunstancia juega el mismo papel que la *propiedad transitiva* de la ordenación lineal.

3.2

Consideremos un conjunto abstracto cualquiera cuyos elementos designemos con los símbolos $U, V, W, \ldots$ De acuerdo a lo explicado anteriormente, diremos que el conjunto posee una *orientación cíclica circular* Ω si, para cada terna U, V, W de elementos del conjunto, es posible afirmar que o *bien*[5] los elemento se presentan en Ω en el orden UVW, o bien se presentan en Ω en el orden UWV, cumpliéndose las siguientes propiedades :

a) Si U, V, W se presentan en el orden UVW también se presentan en el orden VWU y en el orden WVU (obtenidos por permutaciones circulares) ;

b) Si U, V, W se presentan en el orden UVW y si U, W, X se presentan en el orden UWX, entonces V, W, X, se presentan en el orden VWX

Si un conjunto admite una ordenación circular Ω de sus elementos, entonces admite otra ; *ordenación circular opuesta* Ω'. Para definir Ω' diremos que una terna cualquiera U, V, W de elementos se presentan en Ω' en el orden UVW (o bien en el orden UWV) cuando se presentan en Ω en el orden UWV (o, respectivamente, en el orden UVW).

Es fácil ahora convencerse intuitivamente de que la recta puntual proyectiva admite dos ordenaciones circulares naturales opuestas, representadas por el recorrido de los puntos propios en un sentido o en el opuesto y "cerrando" el recorrido en el punto impropio ; también es fácil convencerse de que estas ordenaciones circulares se mantienen al hacer una transformación perspectiva (Figura 7), es decir, que todas las ternas de puntos ordenadas de acuerdo a una cierta ordenación circular de una recta a, se transforma en la perspectiva en ternas de puntos ordenadas de acuerdo a una cierta ordenación circular de la perspectiva a'.

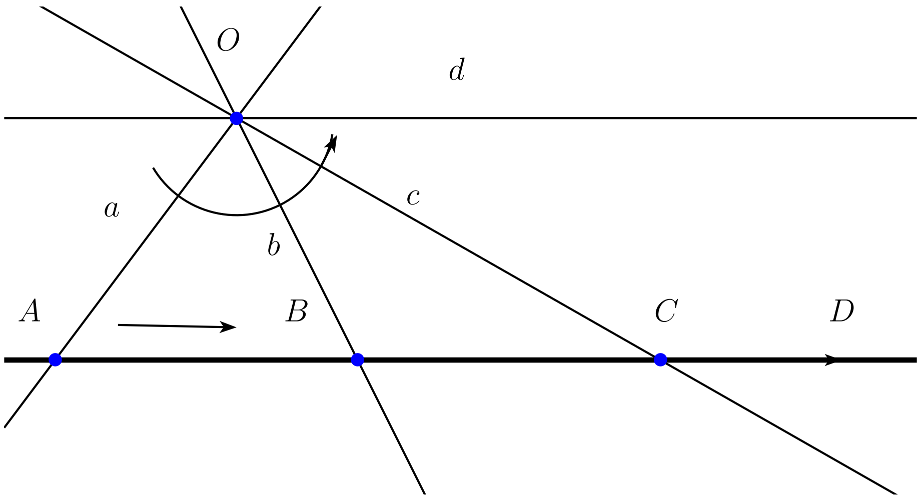

Figura 9

También se observa que el concepto de orientación circular puede extenderse (incluso en forma más intuitivamente sencilla) a las otras formas fundamentales de primera especie, haces de planos y de rectas, en las cuales las ordenaciones circulares naturales corresponden a los dos *sentidos de rotación* de los planos y rectas, respectivamente, alrededor del eje o centro del haz. Dadas dos formas perspectivas (por ejemplo, en la Figura 9 , una puntual $A, B, C, \ldots$ y un

5. Los dos "o bien" significan que las alternativas son excluyentes y complementarias, es decir, que necesariamente se verifica *una y sólo una* de ambas alternativas.

haz de rayos de centro O), la ordenación circular de una forma se transforma en la ordenación circular de la otra por medio de la operación (proyección o sección) que define la perspectividad.

3.3

Damos ahora las siguientes definiciones relativas a la ordenación circular Ω de un conjunto abstracto cualquiera formado por los elementos $U, V, W, \ldots$ (en particular, puntos de una puntual o rectas o planos de un haz en una de sus ordenaciones naturales).

Dados dos elementos U y V, llamaremos *segmento* UV al conjunto de aquellos elementos X que, en la ordenación Ω, se presentan en el orden UXV. Los demás elementos Y se presentarán entonces en el orden VYU y forman, por tanto, el segmento VU, que llamaremos *segmento complementario*[6]. Dada una ordenación cíclica Ω y dos elementos U, V, se determinan así dos segmentos UV y VU. Es evidente que el segmento VU de la ordenación Ω coincide con el UV de la ordenación Ω'.

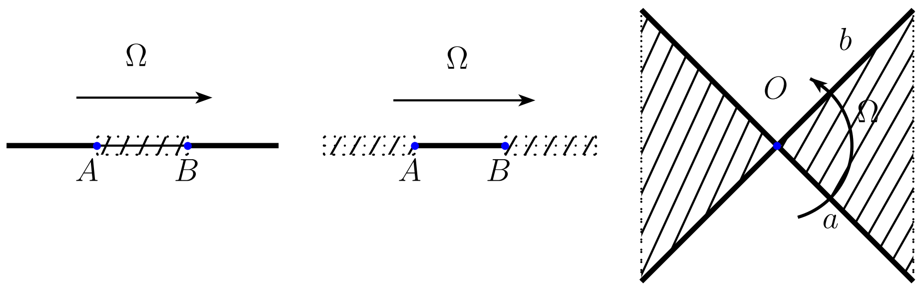

Figura 10

Por ejemplo, en la puntual de la izquierda de la Figura 10, el segmento AB de la ordenación Ω es el rayado; la parte rayada de la puntual del centro de la Figura 10 (incluido el punto impropio!) es el segmento BA. En el haz de rectas de la derecha de la Figura 10, el *ángulo* rayado es el “segmento” ab de la ordenación Ω; el ángulo no rayado es el “segmento” ba. Observar que, en la Geometría Proyectiva, los ángulos, que son conjunto de *rectas* (y no de semirrectas!) están formados por una pareja de ángulos (en el sentido euclideano) opuestos por el vértice. Análogamente, en un haz de planos, los “segmentos” son los *ángulos diedros*, formados por parejas de ángulos diedros (euclideanos) opuestos por las aristas.

Dados cuatro elementos U, V, X, Y de un conjunto ordenado, si X, Y no pertenecen a uno mismo de los dos segmentos determinados por U, V en una ordenación Ω (o en su opuesta Ω', lo que es equivalente), diremos que la pareja U, V *separa a* X, Y. Esto es lo mismo que decir, en una cierta ordenación Ω (o en su opuesta Ω'), las rectas U, V, X y U, V, Y se presentan en el orden UXV y VYU. Por las propiedades a) y b) del parágrafo 3.2 se deduce de inmediato las siguientes ternas ordenadas :

6. U y V mismos pueden considerarse formando, parte o no de los segmentos, que se llaman entonces, respectivamente, *cerrados o abiertos*.

$$UXV,\ XVU,\ VUX,\ VYU,\ YUV,\ UVY,$$
$$XVY,\ VYX,\ YXV,\ YUX,\ UXY,\ XYU,$$

y de aquí resulta que la pareja X, Y separa a la U, V (la relación de separación es *recíproca*) pero que, en cambio, no se separan las parejas X, U y V, Y, ni las parejas X, V y U, Y. Es decir, dados cuatro elementos dos de las parejas formadas con ellos se separan entre sí, pero no se separan las otras combinaciones de parejas.

En la Figura 9 se separan, por ejemplo, las parejas de puntos A, C y B, D y las parejas de rectas a, c y b, d (la relación de separación se trasmite, evidentemente por perspectividad).

La ordenación circular de un conjunto se dice *densa* si, para toda pareja U, V de elementos, el segmento UV contiene elementos del conjunto, distintos de U, V. O dicho de otra forma, entre cada dos elementos del conjunto siempre hay elementos del conjunto. Es evidente intuitivamente que la ordenación de las puntuales y haces de rectas y planos es densa. Pero no todo conjunto admite ordenación densa porque una consecuencia inmediata de la densidad es que el conjunto debe tener infinitos elementos. Por ejemplo, la ordenación circular de los vértices de un polígono no es densa, porque entre dos vértices consecutivos no hay otro vértice.

Todo lo dicho puede ahora expresarse en el siguiente *postulado del orden :*

IX *Las formas proyectivas de primera especie admiten dos ordenaciones circulares naturales, opuestas entre sí. Estas ordenaciones son densas y se conservan por proyección o sección.*

3.4

De los postulados de existencia (**VII**) y **VIII** y del postulado del orden (más precisamente, como ya observamos, del hecho de que la ordenación natural sea *densa*) se deduce que en el espacio proyectivo hay *infinitos* puntos, rectas y planos, excluyéndose así las geometría finitas del tipo descripto al principio del parágrafo 3.1. Sin embargo, estos postulados no alcanzan asegurar la existencia de "suficientes" puntos, rectas y planos como para hacer posible la demostración de ciertas propiedades intuitivas (tales como, por ejemplo, que dos cicunferencias, una de las cuales tiene su centro sobre la otra, se cortan en dos puntos). La situación es completamente análoga a la que se presenta en la aritmética a propósito de los números irracionales : a pesar de que los números racionales son infinitos y están densamente ordenados de mayor a menor, no son "suficientes" para efectuar una operación tal como la extracción de la raíz cuadrada de 2.

Para completar el sistema de postulados introduciremos pues el siguiente *postulado de continuidad*, cuyo enunciado es paralelo a la introducción de los números irracionales por el método de las cortaduras :

X *Sea AB un segmento cerrado cualquiera en una ordenación Ω de una forma de primera especie y sea una clasificación de los elementos del segmento en dos clases $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ con las siguientes propiedades : a) todo elemento del segmento forma parte de una u otra clase y no de ambas a la vez ; b) A forma parte de $\boldsymbol{A}$ y B de $\boldsymbol{B}$ y ambas clases contienen otros elementos ; c) si X (distinto de A) forma parte de $\boldsymbol{A}$ e Y (distinto de B) forma parte de $\boldsymbol{B}$, en la ordenación Ω los elementos se presentan en el orden $AXYB$. Entonces existe uno y un sólo elemento C (que puede formar parte de $\boldsymbol{A}$ o de $\boldsymbol{B}$) tal que si X (distinto de A y de C) forma parte de $\boldsymbol{A}$ e Y (distinto de C y B) forma parte de $\boldsymbol{B}$, en la ordenación Ω los elementos se presentan en el orden $AXCYB$.*

Dicho de otro modo, o bien **A** tiene un "último" elemento (en el sentido de la ordenación) o bien **B** tiene "primer" elemento ; ese primer o último elemento es el elemento C.

3.5

Para completar el examen intuitivo del espacio proyectivo, vale la pena mencionar algunas diferencias topológicas profundas que existen entre este espacio y el espacio euclideano.

Una de estas diferencias ya se ha puesto de manifiesto en el hecho de que la recta euclideana admite una ordenación lineal mientras que la recta proyectiva admite ordenación circular. Desde este punto de vista, una recta euclideana es análoga a un arco (abierto) de curva y una recta proyectiva es análoga a una cura cerrada. La supresión de un punto en una recta euclideana la *desconecta*, es decir, no se puede recorrer continuamente la recta sin atravesar el punto suprimido. En cambio, *la supresión de un punto no desconecta la recta proyectiva*, porque se la pude recorrer sin atravesar el punto suprimido, pasando por el punto impropio. Para desconectar una recta proyectiva hace falta suprimir, por lo menos, dos puntos.

Consideremos ahora el plano. Si recortamos el plano euclideano a lo largo de una curva cerrada, el plano queda desconectado, es decir, dividido en dos porciones de tal modo que no se puede pasar de una de las porciones a la otra sin atravesar la curva recortada. Lo mismo ocurre con el plano proyectivo si la curva c recortada es enteramente propia (Figura 11 a la izquierda).

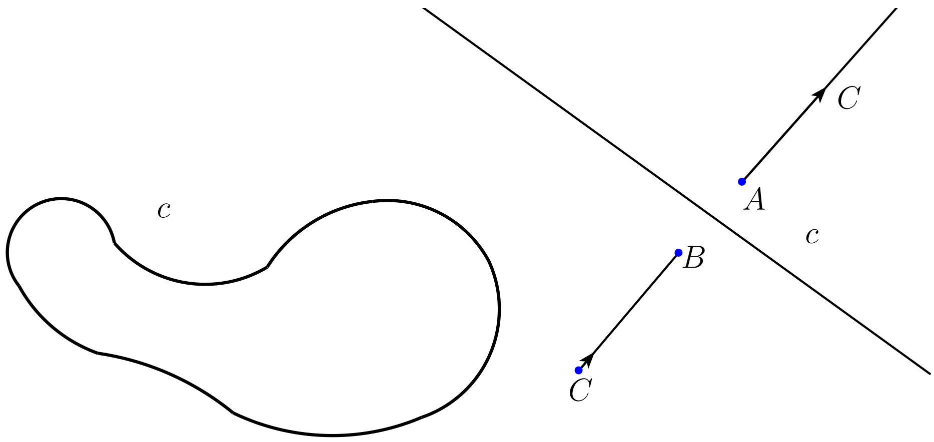

Figura 11

En cambio, si se recorta el plano proyectivo a lo largo de una recta proyectiva c (que es también una curva cerrada, de acuerdo a lo que hemos visto) no queda desconectado, porque se puede unir continuamente dos puntos cualesquiera A, B pasando por un punto impropio C (Figura 12 a la derecha). Es decir que *no todas las curvas cerradas desconectan el plano proyectivo.*

Consideremos la región del plano proyectivo comprendida, por ejemplo, entre dos ramas CHD y CID de una hipérbola (Figura 11 a la izquierda), incluso dos puntos impropios del segmento comprendido entre las asíntotas AC y AD. Para examinar la naturaleza topológica de esa región vamos a proceder como sigue. Primero recortamos la región a lo largo del segmento

CBD de puntos impropios y luego efectuamos una contracción que transforme la banda infinita comprendida entre las ramas de hipérbola en una banda finita (Figura 12 al centro).

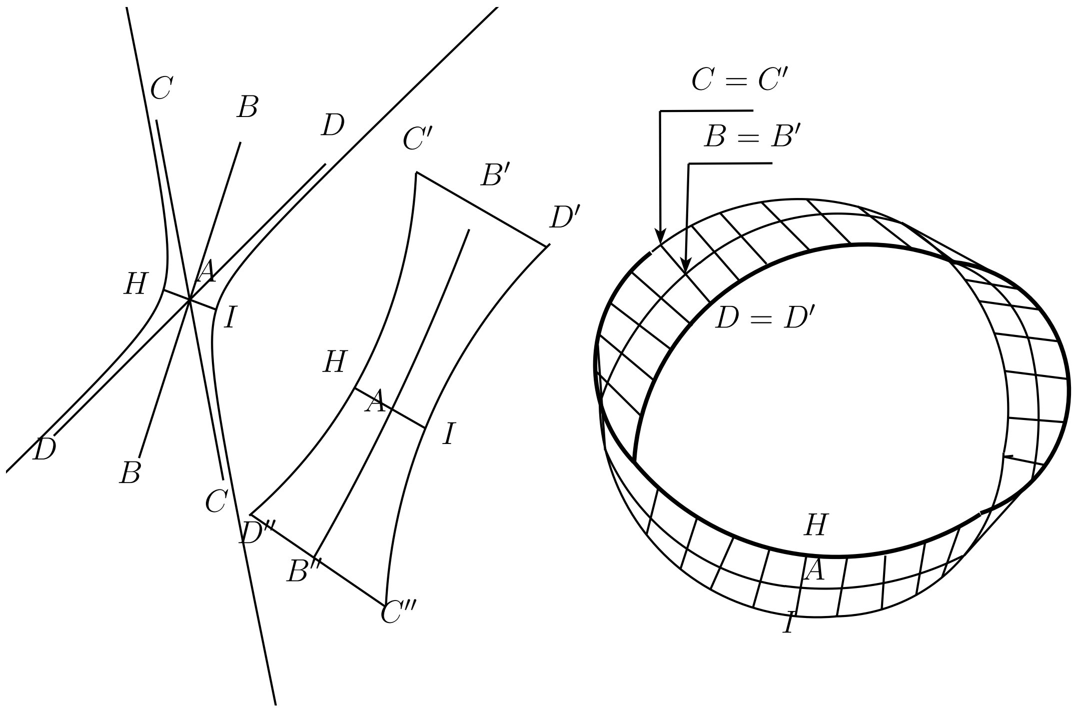

Figura 12

Esta transformación ha sido un homeomorfismo con la excepción de los puntos impropios porque, al recortar a lo largo del segmento impropio y al contraer, hemos introducido una discontinuidad y, donde antes había un sólo punto impropio B, por ejemplo, ahora aparecen dos puntos B' y B'', es decir, no se respeta la biunivocidad. Para restablecer la biunivocidad y la continuidad de la transformación hace falta ahora "pegar" los segmentos $C'B'D'$ y $C''B''D''$ de modo que C' coincida con C'', B' con B'' y D' con D''. Se obtiene así la figura de la derecha, que está en correspondencia biunívoca y continua con la de la izquierda y es, por tanto, topológicamente equivalente a ella.

Pero, para hacer la última operación, hace falta "retorcer" media vuelta la banda del centro, antes de "pegar" sus extremos. La figura de la derecha no es pues un simple anillo (sin retorcimiento). Se llama una *banda de Möbius* y tiene propiedades muy curiosas. Por ejemplo, si la recortamos a lo largo de su linea media BAB, no queda dividida en dos (lo mismo que ocurría con el plano proyectivo) sino que resulta otra vez una sola banda.

La propiedad que nos interesa señalar ahora es la siguiente. Imaginemos la banda de Möbius efectivamente construida con una faja de papel. Es fácil entonces convencerse de que la banda de Möbius es una superficie de *una solo cara*, es decir que, partiendo de un punto A en una de las caras del papel que forma la banda y recorriendo esta cara con continuidad a lo largo de la banda, se vuelve al punto A pero del otro lado del papel. Otra manera de expresar este hecho es, por ejemplo, que en la banda de Möbius no se puede colorear con dos colores diferentes las dos caras del papel con que está construida, al contrario de lo que ocurre con las superficies más usuales, en particular con el plano euclideano.

Como la propiedad de una superficie de tener una o dos caras es evidentemente una propiedad topológica, y como la parte del plano proyectivo considerada a la izquierda de la Figura

12 es homeomorfa a una banda de Möbius, podemos entonces afirmar que el *plano proyectivo es una superficie de una cara*, lo que establece una segunda diferencia con el plano eucideano.

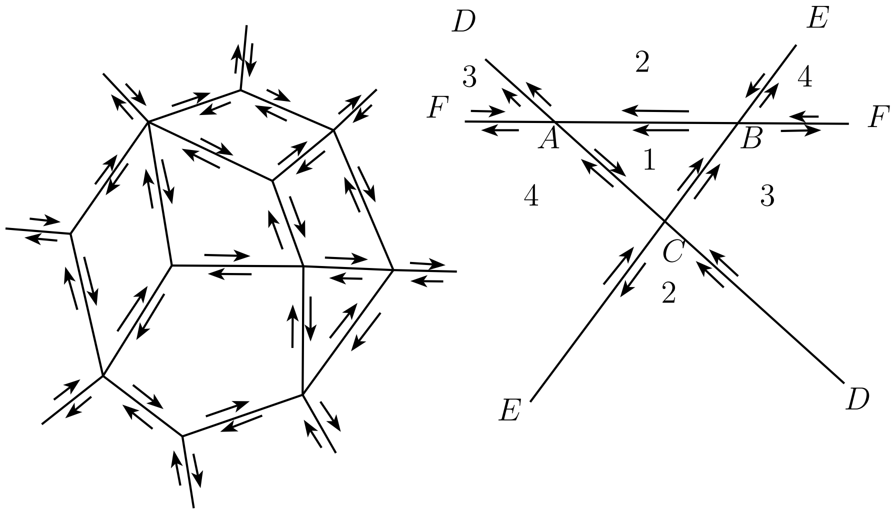

Figura 13

Una tercera propiedad topológica del plano proyectivo, que lo distingue del plano euclideano y que está íntimamente relacionada con lo anterior en su no orientabilidad. Con esto queremos decir lo siguiente. Si dividimos el plano euclideano en un número finito o infinito de figuras poligonales, siempre es posible dar un sentido de recorrido al contorno *interior* de cada uno de estos polígonos de tal modo que en el lado común a dos polígonos adyacentes *cualquiera* los sentidos así designados así designados sean siempre opuestos (Figura 13 a la izquierda). En cambio, en el plano proyectivo (Figura 13 a la derecha), la división por tres rectas FAB, DAC, ECB en cuatro "triángulos" numerados 1, 2, 3, 4, no permite asignar sentidos de recorrido sin que en alguno o algunos lados (en el caso de la figura, los lados AB, ADC y CB) los dos sentidos de recorrido sean concordantes. Esto se expresa diciendo que *el plano proyectivo no es orientable.*

4 Construcción axiomática de la Geometría Proyectiva

4.1

En los capítulos precedentes, partiendo de las nociones intuitivas del espacio, precisando el significado que damos a algunas palabras del lenguaje corriente (pertenece, orden, etc.) e introduciendo algunas nociones nuevas (elementos impropios, etc.), hemos recogido algunas de esas nociones intuitivas básicas en los dies enunciados ***I-X***. Al principio, esos postulados reflejaban (con las nuevas convenciones de lenguaje de la Geometría Proyectiva) propiedades de los puntos, rectas y planos euclideanos, aunque luego resultó que las convenciones adoptadas, que en cierta medida fueron impuestas por la consideración de un grupo de transformaciones diferente, llevan a que estos entes tengan propiedades muy distintas de los primitivos entes euclideanos.

Toda la Geometría Proyectiva está basada en esos diez postulados, es decir, de ahora en adelante es posible dejar de lado todo nuevo llamado a la intuición y, aplicando exclusivamente las reglas de la pura lógica, deducir de los diez postulados todos los teoremas de la Geometría Proyectiva (Cf. nota al pie de página 11).

Por conveniencia reproducimos aquí los enunciados de los 10 postulados

I. *Si un elemento fundamental pertenece a otro, el segundo pertenece al primero.*

II. *Si la recta* a *pertenece al punto* A *y al plano* α*, entonces el punto* A *y el plano* α *se pertenecen.*

III. *Dos puntos diferentes determinan una recta, a la cual pertenecen.*

V. *Un punto y una recta que no se pertenecen determinan un plano, al cual pertenecen.*

VII. *Existen al menos tres puntos no pertenecientes a una misma recta y al menos cuatro puntos no pertenecientes a un mismo plano.*

IV. *Dos planos diferentes determinan una recta, a la cual pertenecen.*

VI. *Un plano y una recta que no se pertenecen determinan un punto, al cual pertenecen.*

VIII. *Existen al menos tres planos no pertenecientes a una misma recta y al menos cuatro planos no pertenecientes a un mismo punto.*

IX. *Las formas proyectivas de primera especie admiten dos ordenaciones circulares naturales, opuestas entre sí. Estas ordenaciones son densas y se conservan por proyección o sección.*

X. *Sea* AB *un segmento cerrado cualquiera en una ordenación* Ω *de una forma de primera especie y sea una clasificación de los elementos del segmento en dos clases* $\boldsymbol{A}$*,* $\boldsymbol{B}$ *con las siguientes propiedades :* ***a)*** *todo elemento del segmento forma parte de una u otra clase y no de ambas a la vez ;* ***b)*** A *forma parte de* $\boldsymbol{A}$ *y* B *de* $\boldsymbol{B}$ *y ambas clases contienen otros elementos ;* ***c)*** *Si* X *(distinto de* A*) forma parte de* $\boldsymbol{A}$ *e* Y *(distinto* X B*) forma parte de* $\boldsymbol{B}$*, en la ordenación* Ω *los elementos se presentan en el orden* $AXYB$*. Entonces existe un y un sólo elemento* C *(que puede formar parte de* $\boldsymbol{A}$ *o de* $\boldsymbol{B}$*) tal que si* X *(distinto de* A *y de* C*) forma parte de* $\boldsymbol{A}$ *e* Y *(distinto de* C *y de* B*) forma parte de* $\boldsymbol{B}$*, en la ordenación* Ω *los elementos se presentan en el orden* $AXCYB$*.*

4.2

Veamos algunos ejemplos de cómo pueden deducirse teoremas a partir de los postulados :

Teorema 4.1. *Si dos puntos* A*,* B *pertenecen a una recta* a *y a un plano* α*, entonces la recta* a *pertenece al plano* α*.*

Demostración. Por el postulado VII, existe un punto C que no pertenece a a ; por el postulado V, existe un plano β determinado por a y C. Si α y β coincidieran, se deduce que a pertenece a α, como queríamos demostrar.

Teorema 4.2. *Si dos planos distintos* α*,* β *pertenecen a una recta* a *y a un punto* A*, entonces la recta* a *pertenece al punto* A*.*

Demostración. Por el postulado VIII, existe un plano γ que no pertenece a a ; por el postulado VI, existe un punto B determinado por a y γ. Si A y B coincidieran, se deduce que a pertenece a A, como queríamos demostrar.

Si α y β fuesen diferentes, por el postulado IV determinan una recta b a la cual pertenecen. Digo que a y b coinciden, con lo cual el teorema queda demostrado también en este caso. La demostración de que a y b coinciden resulta del postulado III, si demuestro que tanto A como B pertenecen a b. En efecto, si A no perteneciera a b, A y b (postulado V) determinan un plano al cual pertenecen ; como A pertenece a α que a su vez pertenece a β, y como b también pertenece a α y a β, se deduciría que $\alpha = \beta$, contra lo admitido. Por lo tanto A pertenece a b y análogamente resulta que B pertenece a b, con lo cual la demostración está terminada.

Teorema 4.3. *Tres puntos que no pertenecen a una misma recta determinan un plano, al cual pertenecen.*

Demostración. Sean A, B, C los tres puntos y sea a la recta que determinan los puntos A y B (postulado III ; A y B son diferentes porque, de otro modo A, B, C pertenecerían a la recta determinada por C y por $A = B$, contra la hipótesis).

Como por hipótesis, C no pertenece a a, C y a determinan un plano α al cual pertenecen (postulado V). Este plano pertenece a los tres puntos A, B, C : al último por sus construcción y a los dos primeros por el postulado II, ya que A y B pertenecen a a que a su vez pertenece a α.

Por lo tanto, existe un plano, el α, que satisface el enunciado del teorema. Digo que hay uno sólo. Supongamos, en efecto, que hubiera otro plano β, distinto de α, que perteneciera a A, B, C. Por el postulado IV, α y β determinan una recta b a la cual pertenecen. Digo que A pertenece a b ; si no fuera así, A y b determinan un plano al cual pertenecen (postulado V) y, como tanto A como b pertenecen a α y a β, se deduciría que $\alpha = \beta$, contra lo admitido. Con el mismo razonamiento se demostraría que B y C pertenecen a b y los tres puntos pertenecerían a una misma recta, contra la hipótesis ; este absurdo completa la demostración del teorema.

Si A y B fuesen diferentes, por el postulado III determinan una recta b a la cual pertenecen. Digo que a y b coinciden, con lo cual el teorema queda demostrado también en este caso. La demostración de que a y b coinciden resulta del postulado IV, si demuestro que tanto α como β pertenecen a b. En efecto, si α no perteneciera a b, α y b (postulado II) determinan un punto al cual pertenecen ; como α pertenece a A por hipótesis y como α pertenece a a que a su vez pertenece a B, se deduciría que $A = B$, contra lo admitido. Por lo tanto α pertenece a b y análogamente resulta que β pertenece a b, con lo cual la demostración está terminada.

Teorema 4.4. *Tres planos que no pertenecen a una misma recta determinan un punto, al cual pertenecen.*

Demostración. Sean α, β, γ los tres planos y sea a la recta que determinan los planos α y β (postulado IV ; α y β son diferentes porque, de otro modo, α, β, γ pertenecerían a la recta determinada por γ y por $\alpha = \beta$, contra la hipótesis).

Como, por hipótesis γ no pertenece a a, γ y a determinan un punto A al cual pertenecen (postulado VI). este punto pertenece a los tres planos α, β, γ : al último por su construcción y a los dos primeros por el postulado II, ya que α y β pertenecen a a que a su vez pertenece a A.

Por lo tanto, existe un punto, el A, que satisface el enunciado del teorema. Digo que hay uno sólo. Supongamos, en efecto, que hubiera otro punto, B, distinto de A, que perteneciera a α, β, γ. Por el postulado III, A y B determinan una recta b a la cual pertenecen. Digo que α pertenece a b ; si no fuese así, α y b determinan un punto al cual pertenecen (postulado VI) y, como tanto α como b pertenecen a A y a B, se deduciría que $A = B$, contra lo admitido. Con el mismo razonamiento se demostraría que β y γ pertenecen a b y los tres planos pertenecerían a una misma recta, contra la hipótesis ; este absurdo completa la demostración del teorema.

Teorema 4.5. *Dos rectas diferentes perteneciente a un mismo plano determinan un punto, al cual pertenecen.*

Demostración. Sean a, b las rectas y γ el plano al cual pertenecen. Sea C un punto no perteneciente al plano γ (postulado VII) y α, β los planos determinados por C, a y por C, b respectivamente (postulado V). α es distinto de γ (pues, de otro modo, C pertenecería a γ, contra lo admitido) y determina con γ una recta (postulado IV) que no puede ser otra más que a ; análogamente, β y γ determinan la recta b. De aquí resulta que α, β, γ no pertenecen a una misma recta, pues esto llevaría a $a = b$, contra la hipótesis. Por el teorema 4.4, α, β, γ determinan un punto D al cual pertenecen. Por el teorema 4.2, D pertenece a a y a b. En fin, D es único, porque de otro modo sería $a = b$ (postulado III).

Teorema 4.6. *Dos rectas diferentes pertenecientes a un mismo punto determinan un plano, al cual pertenecen.*

Demostración. Sean a, b las rectas y C el punto al cual pertenecen. Sea γ un plano no perteneciente al punto C (postulado VIII) y A y B los puntos determinados por γ, a y por γ, b respectivamente (postulado VI). A es distinto de C (pues, de otro modo, γ pertenecería a C, contra lo admitido) y determina con C una recta (postulado III) que no puede ser otra más que a ; análogamente B y C determinan la recta b, De aquí resulta que A, B, C no pertenecen a una misma recta, pues esto llevaría a $a = b$, contra la hipótesis. Por el teorema 4.3, A, B, C determinan un plano δ al cual pertenecen. Por el teorema 4.1, δ pertenece a a y a b. En fin, δ es único, porque de otro modo sería $a = b$ (postulado IV).

4.3

Los teoremas 4.1 a 4.6 son modelos de cómo puede obtenerse, a partir de los postulados, nuevos enunciados deducidos de ellos por la aplicación de la reglas lógicas. A propósito de esto conviene hacer algunas observaciones. La primera se refiere al *lenguaje* de la Geometría Proyectiva.

En los postulados intervienen palabras del lenguaje corriente (nexos lógicos : *si, y, o, entonces, algún, todo, determina, existe, diferente, mismo, clase, por lo tanto, etc.* ; numerales : *un, dos, tres, etc.*) y palabras con un sentido especial (*pertenece, elemento fundamental, haz de planos, haz de rectas, plano punteado, estrella de planos, plano reglado, estrella de rectas, espacio punteado, espacio de planos, espacio plano, espacio reglado, sostén, forma fundamental, especie* (de una forma), *ordenación circular, ordenación opuesta, ordenación densa, segmento, separar, etc.*) Las palabras del primer grupo se entienden en el sentido corriente o, si se quiere, en el de la lógica formal. El significado de las palabras del segundo grupo está indicado por los postulados mismos o por definiciones explícitas (tales como las de proyección, puntual, etc.) Los postulados aparecen así como *definiciones implícitas* de los términos fundamentales de la Geometría Proyectiva. Además de las palabras mencionadas pueden introducirse, en el curso del desarrollo de la teoría, nuevas palabras *definidas a partir de aquéllas*, que integran con aquéllos el lenguaje de la Geometría Proyectiva (*proyectividad, correlación, involución, polaridad, cónica, cuádrica, etc.*)

Ahora bien, en los postulados no aparecen palabras tales como *propio, impropio, paralela,* etc. y, en realidad, estas palabras no pueden definirse en el lenguaje de la Geometría Proyectiva. Como consecuencia, estas palabras, *no pueden aparecer* en ningún teorema de Geometría Proyectiva ; los puntos, rectas y planos de esta Geometría son todos equivalentes entre sí, no es posible distinguir entre ellos los propios de los impropios.

Las palabras mencionadas sirven para *vincular* el lenguaje de la Geometría Proyectiva con el de la Geometría Euclideana. Esto puede hacerse de la siguiente manera : individualizamos en el espacio proyectivo un cierto plano fijo ω, que llamamos impropio, y llamaremos impropio a todo punto o recta de ese plano. Diremos que dos rectas son paralelas si pertenecen a un mismo punto impropio ; análogamente par planos paralelos. Entonces, cada eneunciado de la Geometría Proyectiva puede interpretarse de diversas maneras en el lenguaje euclideano, distinguiendo los casos en que los diferentes elementos que intervienen sean propios o impropios y eliminado finalmente la palabra "impropio" (que tampoco es una palabra del lenguaje euclideano) utilizando en su lugar el término euclideano "paralela". Es lo que hemos hecho con los postulados III-VI y lo mismo puede hacerse con cada enunciado, en particular, con los teoremas 4.1 a 4.6.

4.4

La segunda observación es la siguiente : Podemos ubicar las palabras especiales de la Geometría Proyectiva en el siguiente cuadro

	pertenece	
	elemento fundamentas	
punto		plano
	recta	
proyección		sección
	perspectiva	
puntual		haz de planos
	haz de rectas	
plano punteado		estrella de planos
plano reglado		estrella de rectas
espacio punteado		espacio de planos
	espacio reglado	
	sostén	
	forma fundamental	
	especie	
	ordenación circular	
	ordenación opuesta	
	ordenación densa	
	segmento	
	separa	

Algunas palabras aparecen en el centro del cuadro y otras, en parejas a la izquierda y a la derecha, sobre una misma línea. Llamaremos *duales* a estas últimas (por ejemplo, punto y plano, proyección y sección) ; las primeras, (pertenece, recta, etc.) pueden llamarse autoduales.

Si se observa el conjunto de los postulados (parágrafo 4.1) y las definiciones dadas en el parágrafo 2.5, se nota que algunos postulados y definiciones (por ejemplo, postulados I y X, definición de haz de rectas) aparecen escritos en una sola columna, mientras que otros aparecen en parejas, en sendas columnas (por ejemplo, postulado III y IV, definiciones de proyección y sección). llamaremos *postulados y definiciones duales* a estos últimos y autoduales a los primeros. Es posible entonces verificar lo siguiente : *dado un postulado o definición cualquiera, si se cambia cada palabra por la palabra dual se obtiene el postulado o definición dual* (se sobreentiende que las palabras autoduales no se cambian). Si el postulado o definición elegido era autodual, el cambio de palabras por sus duales deja el enunciado incambiado. El resultado de esto es que el cambio de las palabras por sus duales deja incambiado el *sistema* de postulados y definiciones de la Geometría Proyectiva.

Sean ahora T un teorema cualquiera de la Geometría Proyectiva; su demostración D consiste en una cadena deductiva obtenida aplicando las reglas de la lógica a ciertos postulados $P_1, P_2, \ldots$ de la Geometría Proyectiva. Consideremos *la misma cadena deductiva* aplicada a los enunciados duales $P'_1, P'_2, \ldots$ (puede suceder que alguno de ellos sean autoduales, por ejemplo, que $P_2 = P'_2$, pero no afecta la conclusión que saquemos). Puesto que, en virtud de la observación que acabamos de hacer, $P'_1, P'_2, \ldots$ *son también postulados de la Geometría Proyectiva*, la conclusión de la nueva cadena deductiva será un teorema T' de la Geometría Proyectiva. La demostración D' del teorema T' se obtendrá simplemente reemplazando en D cada palabra por la palabra dual. El enunciado de T' se obtendrá también, evidentemente, por el mismo procedimiento. Verificar estas circunstancias en los enunciados y demostraciones de los teoremas 4.1 y 4.2, 4.3 y 4.4, 4.5 y4.6.

En general, diremos que dos enunciados cualesquiera E y E' (frases formada con las palabras de la Geometría Proyectiva) son duales si cada uno se obtiene del otro reemplazando cada palabra por la palabra dual; en particular, puede suceder que E y E' coincidan y, en ese caso, se dirá que el enunciado es autodual.

De lo dicho resulta el *Principio de Dualidad* :

Si T es un teorema de la Geometría Proyectiva, el enunciado dual T' es también un teorema de la Geometría Proyectiva (teorema dual).

Este principio permite "ahorrar" aproximadamente (no exactamente, por la posibilidad de la existencia de teoremas autoduales) la mitad de las demostraciones de la Geometría Proyectiva. Tal circunstancia no se presenta en la Geometría Euclideana.

A Apéndice—-Algunas consideraciones históricas

Ya decía en la Introducción que la manera usual de introducir la nociones fundamentales de la Geometría Proyectiva no sólo me parece antipedagógica y que oculta algunas diferencias esenciales entre los puntos de vista euclideano y proyectivo, sino que ésta en desacuerdo con la evolución histórica. Esto último es lo que me propongo exponer en este Apéndice, en lo que se refiere a los elementos impropios, mostrando que ellos tienen su origen histórico en los problemas de la perspectiva.

La noción de elementos impropios fue indudablemente concebida por primera vez por el arquitecto de Lyon Girard Desargues (1593-1661). Según Loria [9] : "*...i lavori teorici di Desargues appaiono come prodotti secondarî delle fatiche da lui spese per dare solidi fondamenti alle pratiche in uso presso pittori e architetti...*". El propio DESARGUES lo dice en su "*'Reconnaissance"* colocada como introducción a la "*Perspective*" (1648) de su discípulo Bosse :

> " I'ay sous-sigué...auoüe franchment que ie n'eus jamais de goust, léstude ou re-

cherche, n'y de la physique, n'y de la géometrie, sinon en tant quélles peuuent seruir a lésprit, d'vn moyen d'arriuer á quelque sorte de connaissance, des causes prochaines des effets de choses qui se puissent reduire en acte effectif, au bien et commodité de la vie qui soit en vsage pour l'entretien et conseruation de la santé ; soit en leur application pour la practique de quelque art, et m'estant aperceu qu'vne bonne partie d' entre les practiques des arts, est fondée en la géometrie ainsi quén vne baze assyrée ; entre autre celle de la coupe des pierres en l'architecture, estant pour cela nommée. *Practique du trait géometrie ;* celle des cadrans au soleil, comme il appert de la chose et du lieu, dont elle a son origine ; celle de la perspectiue, en l'art de la pourtraicture, ainsi qu'il se voit de la maniere dont elle est déduite, et du mot *perspectiue.* Desquels arts aynt considéré l'excellence et la gentillesse, ie fus touché du désir déntendre, s'il m'estoit possible, et les fondements, et les règles de leurs pratiques, telles qu'on les trouuoit et voyoit lors en vsage ; ou ie m'aperceus que ceux qui s'y adonnent, auoient à se charger la mémoire d'un grand nombre de leçons diuerses pour chacune d'elles ; et qui par leur nature et condition, produisoient vn embarras incroyable en leur entendement, et loin de leur faire auoir de la diligence a l'exécution de l'ouurage, leur y faisoit perdre du temps, surtout en celle de la pourtraiture, si belle et si estimable entre les inuentions de l'esprit humain, ou la plus part des peintres et autres ouuriers trauailloient comme a l'aduenture et en tastonnant : sans guide ou conduite assurée, et par consequent, auec vne incertitude et fatigue inimaginable. Le désir et l'affection de les soulager si ie pouuois aucunement de cette piene , si laborieuse et souuent ingrate, me fit chercher et publier des régles abregées de chacun de ces arts, desquelles il apparoistra comme i'espere de la verité, quélles sont purement de ma pensée, nouuelles, demonstratiues, plus faciles à comprendre, et effectuer, et plus expéditiues, qu'aucune de elles d'auparauant ; quoi qu'en ayent voulu jargonner les Enuieux, Plagiaries, et gens qui n'estant capables que de prendre les conceptions des autres, et non de rien aprofondir, ou produire d'eux mesmes ; et qui voulant estre estimez capables de tout, ne peuuent souffrir de voir vne inuention nouuelle d'aucun autre".[[3] ; Tome1,p. 487-489]

Baillet, en su "*Vie de Descartes*" (1691), confirma esta actitud de Desargues :

"...il (Desarques, J.L.M.) employoit particulierement ses soins à soulager les travaux des artisans par la subtilité de ses inventions. En quoy il s'attira d'autant plus l'estime et l'amitié de M. Descertes, que de son coté il songeoit déjà au moyen de perfectionner la méchanique pour abréger et adoucir les travaux des hommes". [[3] ; Tome II, p.117]

El auge de las artes plásticas en el período del renacimiento y la preocupación realista que animaba a los artistas de aquella época fueron el incentivo poderoso para el estudio de la perspectiva. Los propios artistas enunciaban en forma más o menos ordenada y consecuente las reglas prácticas de la perspectiva ; puede mencionarse en este sentido los nombres de Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1404-1472), Piero Della Francesca (1406-1492) que escribió el tratado "*De perspectiva Pingendi*", Leonardo (1452-1519) y Albrecht Dürer (1471-1528). Guidobaldo Dal Monte (1545-1607), matemático y mecánico, entre otras obras, escribió "*Perpectivae libri sex*"(1600), en el cual muestra que las rectas paralelas tienen sus perspectivas concurrentes en un punto y que, para todas las rectas paralelas en un plano, todos estos “puncta concursus” yacen sobre una misma recta [[9] ; p. 361-362].

Pero toca a Desargues dar los pasos audaces par la unificar todas estas nociones dispersas. En su “*Méthode Universelle de metire en perspective les objets donnés réellement ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hours du champ de l'ouvrage”* (1636) examina los cuatro casos que pueden presentarse para la perspectiva de un sistema de rectas paralelas o concurrentes :

> “Quan le sujet est des lignes, elles sont, ou bien paralelles, ou bien inclinées entr'elles.
>
> Quand des lignes sujet sont paralelles entr'elles, la ligne de l'oeil menée paralelle à icelle, est ou bien paralelle ou bien non paralelle au tableu, mais toujours chacune de ces lignes sujet, est en vn mesme plan auec cette ligne de l'oeil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu.
>
> Quand de lignes sujet sont paralelles entr'elles, et que la ligne de l'oeil menée paralelle à icelles est paralelle au tableau, les aparences de ces ligne sujet sont des lignes parlelles entr'elles, aux lignes sujet, et à la ligne de l'oeil, à cuase que chacune de ces lignes sujet est en vn mesme plan auec cette ligne de l'oeil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupez d'vn mesme plan le tableau.
>
> Quand des lignes suiet sont paralelles entr'elles et que la ligne de l'oeil menée à icelles, n'est pas paralelles au tableau ; les aparences de ces lignes suiet sont des lignes quitendent toutes au poinct auquel cette ligne de l'oeil rencontre le tableau, d' autant que chacune de ces lignes suiet est en vn mesme plan auec cette ligne de l'oeil en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupez d'vn mesme plan le tableau.
>
> Quand les lignes suiet inclinées entr'elles tendent toutes à vn poinct, la ligne de l'oeil menée à ce poinct est, ou bien paralelle, ou bien non paralelle au tableau, mais toujours chacune de ces lignes sujet est en vn mesme plan auec cette ligne de l'oeil, en laqeulle tous ces plans, s'entrecoupont ainse qu'en leur commun essieu.
>
> Quand des lignes sujet inclinées entr'elles tendent toutes à vn poinct auquel ayant mené la ligne de l'oeil elle est paralelle au tableau, les aprerences de ces lignes sujet sont des lignes paralelles, entr'elles, et à la ligne de l'oeil à cuase que chacune de ces lignes sujet est en vn mesme plan auec cette ligne de l'oeil, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu, et que tous ces plans sont coupez d'vn autre mesme plan le tableau.
>
> Quand des lignes suiet inclinées entr'elles tendent toutes à vn poinct auquel ayant mené la ligne de l'oeil elle n'est pas paralelle au tableau, les aparences de ces lignes sujet sont des lignes qui tendent toutes au poinct auquel cette ligne de l'oeil recontre le tableau, d'autant que chacune de ces lignes suiet est en vn mesme plan auec cette ligne de lóiel, en laquelle tous ces plans s'entrecoupent ainsi qu'en leur commun essieu et que tous ces plans sont coupez d'un autre mesme plan le tableau”. [[3] ; Tome I, p. 81-83].

La consideración del comportamiento análogo de los sistemas de rectas paralelas y concurrentes en la perspectiva es claramente lo que lleva a Desargues al siguiente paso en el camino de la abstracción. En su principal trabajo, “*Brouillon Proiect d'une atteinte aux éuénements des recontrés d'un cone auec un plan*”, publicado tres años más tarde, dice :

"Chacun pensera ce qui lui sembrera, ou de ce que est icy déduit, ou de la manière de le deduire, et eurra que la raison essaye a connoître des quantités infinies d'une part, ensemble de si petites que leurs extrémetés opposées sont unies entrelles et que l'entendement s'y perd, non seulement à cause de leur inimaginable grandeur ou petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des propriétèz, dont il est incapable de comprendre comment c'est qu'elles sont.

Ici toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infini de part et d'autre.

Un semblable alongement à l'infini de part es d'autre en une droite est icy représenté par une rengée de points alignez d'une part et d'autre ensuite de cette droite.

Ordonnance des lignes droites (en el lenguaje actual, haz de rectas, J.L.M.). Pour donner a entendre de plusieurs lignes droites, qu'elles sont toutes entr'elles ou bien paralelles, ou bien inclinées à mesme point, il est icy dit, que toutes ces droites sont d'une mesme ordonnance entr'elles ; par ou l'on conceura de ces plusieurs droites, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, elles tendent toutes à un mesme point". [[3] ; Tome I, p. 103-104]

Y más adelante, en la misma obra, resume en un sólo enunciado los cuatro casos de la "*Méthode Universelle*" :

"Du contenu de ce brouillon il résulte :

Touchant la perspective.

Des droites sujet d'une quelconque mesme ordonnance,les apparences au tableau plat sont droites d'une mesme ordonnance entrelles, et celle de l'ordonnance des sujets qui passent a l'oeil laquelle est l'aissie de l'ordonnance entr les plans de l'oeil et de chacume de ces droites sujet" [ibiid., p. 229].

Las ideas audaces de Desargues le valieron no pocos ataques de parte de quienes eran incapaces de comprenderlas, contra los cuales se queja en la "*Reconnaissance*" que he transcripto más arriba. De hecho, sus concepciones recién fueron recogidas y desarrolladas por Poncelet (1788-1867), casi dos siglos más tarde. De sus contemporáneos, sólo espíritus superiores como Descartes fueron capaces de estimarlo en su justo valor. En carta al propio desargues, dice :

"Pour vostre façon de considerer les Lignes Paralelles, comme si elles s'assembloient a vn but a distance infinie afin de les comprendre sous le mesme genre que celles qui tendent a vn point, elle est fort bonne..."[[4] ; Tome II, p. 555, carta del 19 de junio de 1639].

Y, en cartas al P :Mersenne :

" I' ay receu aussi l'Essay touchant les coniques du fils de M. Pascal, & auant que d'en auoir lû la moitié, i'ay iugé qu'il auoit apris de Monsieur des-Argues ; ce qui m'a esté con firmé, incontinent aprés, par la confession quíl en fit luymesme". [[4] ; p. 47, carta del 1° de Abril de 1640].

"Ie seray bien aise que Monsieur des-Argues soit aussi vn de mes Iuges, s'il luy plaist d'en prendre, la peine, & ie me fie plus en luy seul qu'en trois Theologiens". [ibid., p. 268, carta del 24 de Diciembre de 1640].

Para terminar esta breves notas, mencionaremos la opinión del gran geómetra M. Chasles [[2] ; p. 74-75] :

> "Sa méthode reposait, comme celle de Pascal, sur les principes de la perspective et sur quelques théoremes de la théorie des transversales. Cet écrit (el *Brouillon Proiect"*, J.L.M.) se distinguait par quelques propositions nouvelles et surtout par l'esprit de la méthode, qui étoit fondée sur cette remarque judicieuse et féconde, que les sections coniques, étant formées par les différentes façons dont on coupe un cône qui a pour base un cercle, devaient participer aux propriétés de cette figure".

Es decir que, históricamente, la Geometría Proyectiva nació en función de su grupo característico de transformaciones, en concordancia con la concepción kleineana, enunciada con precisión casi tres siglos después. Puesto que, en este caso, el orden histórico me parece que concuerda con la esencia de la noción de Geometría y con los requerimientos pedagógicos, creo indudablemente que es el que debiera tomarse como base para la introducción a la Geometría Proyectiva, que es lo que he pretendido hacer en los capítulos anteriores.

Referencias

[1] Buseman, H. and Kelly, P.J. *Proyective Geometry and Projective Metrics*, Ney York, 1953.

[2] Charles, M. *Apperçu historique sur lórigine et le développment des méthodes en Géométrie*, Bruxelles, 1837.

[3] Desargues, *Oeuvres de*, réunies et analysés par. M. Poudra, Paris 1876.

[4] Descartes, *Oeuvres de* ; *Correspondance*, Paris 1876.

[5] Enriques, F. *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Bologna, 1926.

[6] Godeaux, L. et Rozet, O. *Leçons de Géométrie Projective*, Liège, 1952.

[7] Klein, F. *Das Erlanger Program* (1872), *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin, 1921.

[8] Kollros, L. *Cours de Géométri Proyective*, Neuchâtel, 1946.

[9] Loria, G. *Storia delle Matemetiche*, Milano, 1950.

[10] Piaget, J et Inhelder, B. *La presentation de léspace chez lénfant*, Paris, 1948.

[11] Reye, Th. *Géométrie de Position*, Paris, 1881-1882.

[12] Severi, F. *Geometria Proiettiva*, Padova, 1921.

[13] Veblen, O. and Young, J. W. *Proyective Geometry*, Boston, 1916