# Geometría Hiperbólica Plana

Pablo Lessa

17 de agosto de 2012

# Índice general

# Capítulo 1

# Métrica hiperbólica en $\mathbb{H}^2$

El semiplano $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ hereda una métrica Riemanniana plana de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ pero esta no tiene muchas isometrías. Las únicas que preservan orientación son traslaciones del tipo:

$$z \mapsto z + t \text{ donde } t \in \mathbb{R}$$

Las transformaciones conformes (i.e. que preservan ángulos) de $\mathbb{H}^2$ se pueden clasificar como consecuencia del Lema de Schwarz (de análisis complejo) y las que preservan orientación resultan ser de la forma:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$.

Las transformaciones conformes actúan transitivamente en $\mathbb{H}^2$ pero, a diferencia de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{S}^2$, los estabilizadores son compactos. Esto implica que hay por lo menos una métrica Riemanniana que es invariante por todo el grupo.

Puede verificarse que las únicas métricas en $\mathbb{H}^2$ invariantes por todas las transformaciones conformes son múltiplos constantes de:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

Llamamos a esta métrica la métrica hiperbólica en $\mathbb{H}^2$ y será la única métrica a considerar en $\mathbb{H}^2$ de aquí en más. Las transformaciones conformes descritas arriba actúan transitivamente en el tangente unitario $T^1\mathbb{H}^2$ y por lo tanto forman todo el grupo de isometrías que preservan orientación.

# Capítulo 2

# Geodésicas y equidistantes

La curva $t \mapsto e^t i$ está parametrizada por longitud de arco en $\mathbb{H}^2$ y un argumento sencillo de proyección muestra que es globalmente minimizante. Por lo tanto es una geodésica.

Las demás geodésicas se obtienen aplicando las isometrías y resultan ser parametrizaciones de semirectas y círculos Euclídeos perpendiculares al eje real. En particular cada par de puntos en $\mathbb{H}^2$ determina una única geodésica hiperbólica (a menos de reparametrizaciones).

Las semirecta dada por la ecuación $\mathrm{Re}(z) = \lambda Im(z)$ (donde $\lambda \neq 0$) es invariante por las isometrias de la forma $z \mapsto tz$ para todo $t > 0$. Se deduce que los puntos de esta semirecta están a distancia hiperbólica constante de la geodésica $t \mapsto e^t i$. Usando las isometrías se deduce que cualquier círculo o semirecta Euclidea que corte el eje real está a distancia constante de una geodésica y que dicha distancia es una función del ángulo de incidencia con dicho eje. Las curvas de este tipo que no son geodésicas se llaman equidistantes y no tienen análogo en el plano Euclídeo (en donde una curva a distancia fija de una recta es también recta).

# Capítulo 3

# Métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$

La transformación entre $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{D}$ dada por

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

es biyectiva y conforme.

Con esta transformación la métrica hiperbólica de $\mathbb{H}^2$ se lleva a la métrica en $\mathbb{D}$ dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{2}{1-x^2-y^2}\right)^2 (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

que definimos como la métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$.

## 3.1. Círculos

Como esta métrica en $\mathbb{D}$ es invariante por rotaciones centradas en 0 los círculos Euclideos centrados en 0 son también círculos hiperbólicos. Se deduce (aplicando transformaciones de Möebius) que los círculos hiperbólicos en $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$ son también círculos Euclídeos (no necesariamente con el mismo centro).

## 3.2. Horocíclos

El grupo de isometrías hiperbólicas de $\mathbb{D}$ (o lo que es lo mismo el grupo de transformaciones conformes) es transitivo en los círculos Euclideos tangentes al borde. Estas curvas son los llamados horocíclos del plano hiperbólico. En el semiplano $\mathbb{H}$ los horocíclos se ven como círculos Euclídeos tangentes al eje real o rectas Euclídeas con $\mathrm{Im}(z)$ constante.

Si $z(t)$ es una geodésica en $\mathbb{D}$ y consideramos para cada $t$ el círculo hiperbólico de centro $z(t)$ y radio $d(z(0), z(t))$ (distancia hiperbólica) la curva límite es un horocíclo. Esto marca otra diferencia con la geometría Euclídea donde el límite de círculos de radio divergente es una recta.

# Capítulo 4

# Perímetro y área del círculo

Las geodésicas hiperbólicas por el origen en $\mathbb{D}$ son segmentos de recta Euclídeos. Para $x > 0$ se calcula directamente:

$$d(0,x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\,\mathrm{atanh}(x)$$

Esto sugiere las coordenadas polares

$$(r,\theta) \mapsto tanh(r/2)e^{i\theta}$$

definidas para $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Esto da un cubrimiento de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ para el cual las familias de rectas con $r$ constante y $\theta$ constante van a familias ortogonales de círculos y rectas. Por esto el pull-back de la métrica hiperbólica es diagonal (i.e. no tiene término en $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$) y resulta ser:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + \sinh(r)^2\mathrm{d}\theta^2$$

Se deducen las siguientes dos consecuencias:

$$[\text{perímetro del círculo hiperbólico de radio } r] = 2\pi\sinh(r)$$

$$[\text{área del disco hiperbólico de radio } r] = 2\pi(\cosh(r) - 1)$$

Cuando $r \to 0$ el perímetro es equivalente a $2\pi r$ y el área a $\pi r^2$ que son los análogos Euclídeos. Pero cuando $r \to +\infty$ tanto el perímetro como el área son equivalentes a $\pi e^r$ y por lo tanto equivalentes entre sí.

# Capítulo 5

# Teorema de Gauss-Bonnet

## 5.1. Transporte Paralelo

Dos vectores sobre puntos diferentes de una geodésica se dice que son paralelos si tienen la misma norma y forman el mismo ángulo medido en sentido anti-horario con la velocidad de la geodésica. En $\mathbb{R}^2$ esta definición coincide con la noción usual de paralelismo.

En $\mathbb{S}^2$ uniendo el polo norte y sur con diferentes geodésicas vemos que el concepto de paralelismo depende de la geodésica elegida. Por esta razon se habla de 'transporte paralelo' de un vector sobre una curva (y no simplemente de vectores paralelos como en en plano Euclídeo).

En $\mathbb{H}^2$ hay una única geodésica que une cada par de puntos. Pero puede verificarse que al transportar un vector consecutivamente a través de dos lados de un tríangulo no se obtiene el mismo resultado que transportarlo directamente por el tercer lado.

Intuitivamente el transporte paralelo de un vector sobre una curva no geodésica es el resultado de aproximar la curva por una concatenación de pequeñas geodésicas y transportar el vector sobre estas.

Para formalizar esta idea, dado un vector tangente $(z, \dot{z})$ para cada $v$ tangente en $z$ definimos $H(z, \dot{z})(v) = v'(0)$ donde $v(t)$ es el tranporte paralelo de $v$ hasta el tiempo $t$ de la geodésica de condición inicial $(z, \dot{z})$. Una curva cualquiera $t \mapsto (z(t), v(t))$ de vectores tangentes se dice que es paralela si $v'(t) = H(z(t), z'(t))(v(t))$ para todo $t$.

Otra justificación de porque el resultado de transportar paralelamente un vector sobre una curva entre dos puntos depende del camino que elijamos en $\mathbb{S}^2$ es la siguiente: si no dependiera del camino podríamos construir un campo continuo de vectores tangentes que no se anularía nunca.

Esta observación implica que un vector puede cambiar al transportarlo sobre un camino cerrado.

De hecho la diferencia angular total al transportar un vector en la esfera $\mathbb{S}^2$ sobre un paralelo a latitud $\phi$ radianes (norte desde el ecuador) es $2\pi(1 - \sin(\phi))$

lo cual coincide con el cambio diario del plano de oscilación de un péndulo de Foucault en esta latitud.

## 5.2. Teorema de Gauss-Bonnet

Demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 1** (Gauss-Bonnet)**.** *El ángulo que gira un vector al ser transportado paralelamente sobre una curva cerrada simple en $\mathbb{H}^2$ es igual al área encerrada por la curva.*

La prueba se reduce a lo siguiente:

1. Definiemos $\omega(x,y)(\dot{x},\dot{y})$ la 'velocidad de giro' de un vector que se transporta paralelamente sobre una curva que pasa por el punto $(x,y) \in \mathbb{H}^2$ a velocidad $(\dot{x},\dot{y})$.

2. Calculamos $\omega$ explícitamente, resulta depender linealmente de $(\dot{x},\dot{y})$ para cada $(x,y)$ fijo, i.e. es una 1-forma differencial en $\mathbb{H}^2$, de hecho se obtiene $\omega = -\frac{1}{y}\mathrm{d}x$.

3. Por el teorema de Stokes la integral de $\omega$ en una curva cerrada (que da el ángulo que gira un vector paralelo sobre esta curva) es igual a la integral de la derivada exterior $\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ en el interior de la curva (el signo de menos indica que si el área se encierra en sentido anti-horario el vector gira en sentido horario).

Llevamos a cabo este plan en las siguientes secciones.

## 5.3. Velocidad angular de una curva en el plano

Supongamos que una curva pasa por un punto $(x,y) \neq (0,0)$ del plano con velocidad $(\dot{x},\dot{y})$.

El área con signo del paralelogramo formado por los vectores $(x,y)$ e $(\dot{x},\dot{y})$ es

$$[\text{Área con signo}] = \det \begin{pmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

que tendrá signo positivo si la velocidad tangencial es antihoraria vista desde el origen.

A su vez tenemos (dividiendo el paralelogramo en dos triángulos y calculando su área):

$$[\text{Área con signo}] = [\text{velocidad tangencial}](x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

donde el signo de la velocidad tangencial es positivo la velocidad es es antihoraria.

Para obtener la velocidad angular (con signo) dividimos la velocidad tangencial entre la distancia al origen lo cual da:

$$[\text{velocidad angular}] = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}$$

## 5.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definimos el la energía cinética de un vector tangente a $\mathbb{H}^2$ como:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2y^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Una curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ es geodésica si y sólo si satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto al Lagrangiano $L$, lo cual equivale a:

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{2x'y'}{y} \\ y''(t) = \frac{y'^2 - x'^2}{y} \end{cases}$$

## 5.5. Cálculo de la forma $\omega$

Por definición $\omega(x, y)(\dot{x}, \dot{y})$ es la velocidad angular de la curva $t \mapsto (x'(t), y'(t))$ donde $t \mapsto (x(t), y(t))$ es la geodésica con condición inicial $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

De la sección 5.3 tenemos que la velocidad angular de la curva $t \mapsto (x', y')$ es:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}$$

Sustituyendo en lo anterior las ecuaciones de la sección 5.4 obtenemos:

$$\omega(x, y)(\dot{x}, \dot{y}) = -\frac{\dot{x}}{y}$$

Esto concluye la prueba del Teorema de Gauss-Bonnet.

## 5.6. Triángulos

La suma de los ángulos internos de un triángulo plano es siempre $\pi$. En contraste el teorema de Gauss-Bonnet implica que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son los ángulos internos de un tríangulo en $\mathbb{H}^2$ con área $A$ se cumple:

$$A = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$$

En $\mathbb{S}^2$ se cumple la relación análoga:

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

e.g. un triángulo con tres ángulos internos de 90° tiene área $\pi/2$.

# Capítulo 6

# Trigonometría

## 6.1. Digresión 1: Paradoja de los gemelos

El espacio-tiempo de Minkowski de dimensión 3 es $\mathbb{R}^3$ junto con la función bilineal:

$$B((x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2$$

Un punto $(x, y, t)$ se interpreta usualmente como las coordenadas de un evento que sucedió en un lugar $(x, y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ y en un tiempo $t$ relativo a un cierto observador (que fija coordenadas en el plano y en el tiempo).

Usamos la notación $B^2(v) = B(v, v)$. Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ se dice que es 'tipo tiempo', 'tipo luz', o 'tipo espacio' según se tenga:

| | |
|---|---|
| (Tipo tiempo) | $B^2(v) < 0$ |
| (Tipo luz) | $B^2(v) = 0$ |
| (Tipo espacio) | $B^2(v) > 0$ |

Las curvas en $\mathbb{R}^3$ con velocidad de tipo tiempo en todo instante se llaman curvas tipo tiempo. Físicamente representan las trayectorias posibles de un observador en el espacio-tiempo. Por ejemplo, cualquier reparametrización de la curva $\lambda \mapsto (0, 0, \lambda)$ representa la trayectoria de un observador en reposo en el origen.

El 'tiempo propio' (o tiempo medido por el observador) de una curva tipo tiempo $\lambda \mapsto (x(\lambda), y(\lambda), t(\lambda))$ con $\lambda \in [a, b]$ se define como:

$$\int_a^b \sqrt{-B^2(x'(\lambda), y'(\lambda), t'(\lambda))}\mathrm{d}\lambda$$

La 'paradoja de los gemelos' es el hecho que el tiempo propio depende del camino tomado entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo consideramos las siguientes dos curvas tipo tiempo que unen $(0, 0, 0)$ con $(0, 0, 2\pi)$:

$$\lambda \mapsto (0, 0, \lambda)$$

$$\lambda \mapsto (\frac{1}{2}(\cos(\lambda) - 1), \frac{1}{2}\sin(\lambda), \lambda)$$

El tiempo propio de la primer curva es $2\pi$ mientras que para la otra curva se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4}(-\sin(\lambda))^2 - \frac{1}{4}\cos(\lambda)^2 \mathrm{d}\lambda} = \sqrt{3}\pi$$

Esto tiene la siguiente interpretación física: Si dos relojes se sincronizan y luego uno se mantiene en reposo mientras el otro recorre una trayectoria acelerada entonces, cuando se reunan nuevamente, para el reloj en reposo habrá pasado más tiempo que para el otro.

## 6.2. Digresión 2: Suma de velocidades

Las curvas de la forma $\lambda \mapsto (v_x\lambda, v_y\lambda, v_t\lambda) = \lambda v$ con $B^2(v) \leq 0$ representan movimientos rectilíneos uniformes. La velocidad de un movimiento de este tipo medida en el sistema de coordenadas en reposo en el origen es $\sqrt{(v_x/v_t)^2 + (v_y/v_t)^2}$. En particular si $v$ es tipo luz dicha velocidad vale 1.

El cambio de coordenadas entre un sistema de coordenadas en reposo en el origen y uno en movimiento rectilíneo uniforme debe por definición preservar la forma bilineal $B$. Esto trae como consecuencia que la velocidad de la luz es 1 medida en cualquiera de estos sistemas de coordenadas.

Cada movimiento rectilíneo uniforme es representado por una única curva de la forma $\lambda \mapsto \lambda v$ con $v \in \mathbb{M}$ donde:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : B^2(x, y, t) = -1, t > 0\}$$

Para cualquier $v \in \mathbb{M}$ podemos elegir $\alpha, \theta$ tales que:

$$v = (\sinh(\alpha)\cos(\theta), \sinh(\alpha)\sin(\theta), \cosh(\alpha)$$

y se tiene que medida desde el reposo en el origen la velocidad del movimiento $\lambda \mapsto \lambda v$ es $\tanh(\alpha)$.

Del caso particular $w = (0, 0, 1)$ que obtuvimos recién y la invariancia de $B$ respecto a los cambios de coordenadas obtenemos

$$[\text{velocidad de } \lambda \mapsto \lambda v \text{ vista de } \lambda \mapsto \lambda w] = \tanh\left(\operatorname{acosh}\left(-B(v, w)\right)\right)$$

para cualquier $v, w \in \mathbb{M}$.

Para $v = (\sinh(\alpha + \beta), 0, \cosh(\alpha + \beta))$ y $w = (\sinh(\alpha), \cosh(\alpha))$ se calcula usando propiedades de las funciones hiperbólicas:

$$[\text{velocidad de } v \text{ desde el origen}] = \tanh(\alpha + \beta)$$

$$[\text{velocidad de } w \text{ desde el origen}] = \tanh(\alpha)$$

$$[\text{velocidad de } v \text{ desde } w] = \tanh(\beta)$$

Este resultado se interpreta físicamente como sigue: Si tres observadores están en movimiento rectilíneo uniforme en un recta, el primero mide que el segundo va a una velocidad $a = \tanh(\alpha)$ y el segundo mide que el tercero va a una velocidad $b = \tanh(\beta)$ entonces el primero mide que el tercero va a velocidad:

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha)\tanh(\beta)} = \frac{a + b}{1 + ab}$$

Veremos en lo que sigue que las cantidades $\alpha$ y $\beta$ son distancias hiperbólicas medidas en $\mathbb{M}$.

## 6.3. Grupo de Lorentz y longitud propia

Las transformaciones lineales que preservan la función bilineal $B$ forman el grupo de Lorentz $O(2, 1)$. Físicamente representan los cambios de coordenadas entre sistemas de referencia en movimiento rectilíneo uniforme uno respecto al otro.

Cada isometría lineal de $\mathbb{R}^2$ se extiende de dos maneras a un elemento del grupo de Lorentz (preservando o revirtiendo la orientación del eje $t$). El grupo $O(2, 1)$ contiene también elementos que no fijan el eje $t$ por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(a) & \sinh(a) \\ 0 & \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

Para un observador en reposo en el origen dos puntos $(x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2) \in \mathbb{R}^3$ occurren 'en simultáneo' si y sólo $t_1 = t_2$. Las transformaciones de Lorentz no preservan la simultaneadad.

Para un observador en reposo la distancia entre dos puntos simultáneos $(x_1, y_1, t), (x_2, y_2, t)$ es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ entre $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$. Dado que las transformaciones de Lorentz no preservan la simultaneadad un observador en movimiento rectilíneo uniforme no verá los eventos $(x_1, y_1, t), (x_2, y_2, t)$ como simultáneos y no podrá medir la distancia entre ellos. Sin embargo podemos preguntarnos si este nuevo observador verá la misma distancia entre los pares de puntos que sí sean simultáneos para él de las trayectorias $\lambda \mapsto (x_1, y_1, \lambda)$ y $\lambda \mapsto (x_2, y_2, \lambda)$. La respuesta resulta ser negativa.

Si una curva $\lambda \mapsto (x(\lambda), y(\lambda), t(\lambda))$ tiene velocidad tipo espacio en todo instante definimos su longitud propia para $\lambda \in [a, b]$ como:

$$\int_a^b \sqrt{B^2(x'(\lambda), y'(\lambda), t'(\lambda))} \mathrm{d}\lambda$$

La longitud propia es conservada por los elementos del grupo de Lorentz.

## 6.4. Métrica hiperbólica en $\mathbb{M}$

Recordamos que la hoja de hiperboloide $\mathbb{M}$ fué definida por:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : B^2(x, y, t) = -1, t > 0\}$$

Todas las curvas que se mantienen en $\mathbb{M}$ son tipo espacio. Esto implica que $B$ restrica a los espacios tangentes a $\mathbb{M}$ es una métrica Riemanniana que llamaremos la métrica hiperbólica en $\mathbb{M}$. Esta nomenclatura está justificada cuando observamos que la siguiente transformación es una isometría entre $\mathbb{M}$ y $\mathbb{D}$:

$$(x, y, t) \mapsto \frac{x}{t+1} + i\frac{y}{t+1}$$

La longitud propia de $\lambda \mapsto (\sinh(\lambda), 0, \cosh(\lambda))$ en $[0, a]$ se calcula directamente como sigue:

$$\int_0^a \sqrt{\cosh(\lambda)^2 - \sinh(\lambda)^2} \mathrm{d}\lambda = a$$

Como todas las rotaciones y simetrías axiales de $\mathbb{R}^2$ se extienden a isometrías de $\mathbb{M}$ (fijando la coordenada $t$) obtenemos que esta curva debe ser una geodésica y obtenemos ($d$ denota la distancia en $\mathbb{M}$):

$$d((0, 0, 1), (\sinh(a), 0, \cosh(a))) = a$$

De donde usando el grupo de Lorentz se obtiene para todo $v, w \in \mathbb{M}$:

$$\cosh(d(v, w)) = -B(v, w)$$

Como aplicación inmediata obtenemos cómo calcular el tercer lado de un triángulo dados dos y el ángulo entre ellos:

**Teorema 2** (Ley del Coseno)**.** *Si $a, b$ y $c$ son las longitudes de los lados de un triángulo geodésico en $\mathbb{M}$ y $\theta$ es el ángulo entre el lado de largo $a$ y el de largo $b$ entonces se cumple:*

$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\cos(\theta)$$

*Demostración.* Utilizar la fórmula para distancias aplicada a los siguientes puntos:

$$(0, 0, 1)$$

$$(\sinh(a), 0, \cosh(a))$$

$$(\sinh(b)\cos(\theta), \sinh(b)\sin(\theta), \cosh(b))$$

□

## 6.5. Dualidad

Análogamente al teorema 2 pero intercambiando el rol de longitudes y ángulos, vemos ahora cómo calcular un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos y el lado entre ellos:

**Teorema 3** (Segunda Ley del Coseno)**.** *Si $\alpha, \beta, \gamma$ son los ángulos internos de un triángulo geodésico en $\mathbb{M}$ y $c$ es la longitud del lado opuesto a $\gamma$ entonces se cumple:*

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c)$$

La afirmación análoga en el plano Euclídeo es $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ (i.e. los ángulos internos de cualquier triángulo Euclídeo suman $180^o$). Esto es equivalente a:

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

que es el límite de lo obtenido en el teorema 3 cuando $c \to 0$.

La dependencia del ángulo $\gamma$ con respecto al lado $c$ en el teorema 3 tiene la siguiente consecuencia:

**Corolario 1.** *Los ángulos internos de un triángulo geodésico en $\mathbb{M}$ determinan la longitud de los tres lados.*

Para demostrar la segunda ley del coseno consideramos el espacio de 'de Sitter' $\mathbb{DS}$ que es el hiperboloide de una hoja definido por:

$$\mathbb{DS} = \{v \in \mathbb{R}^3 : B^2(v) = 1\}$$

Asociamos al punto $w = (0, 0, 1)$ la geodésica orientada $w^\perp$ en $\mathbb{M}$, considerada a menos de reparametrizaciones crecientes, dada por $\lambda \mapsto (0, \sinh(\lambda), \cosh(\lambda))$. Como conjunto (i.e. sin orientación) $w^\perp$ queda determinada por la propiedad $B(v, w) = 0$ para todo $v \in w^\perp$.

Hay una única manera de extender el mapa $w \mapsto w^\perp$ a todo $w \in \mathbb{DS}$ con la propiedad $f(w)^\perp = f(w^\perp)$ para toda transformación de Lorentz $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que fija $\mathbb{M}$ y preserva orientación.

Para $w = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ obtenemos que $w^\perp$ está parametrizada por:

$$\lambda \mapsto (-\sinh(\lambda)\sin(\alpha), \sinh(\lambda)\cos(\alpha), \cosh(\lambda))$$

Calculando en este caso particular y utilizando la invariancia de $B$ por transformaciones de Lorentz obtenemos que si $w_1, w_2 \in \mathbb{DS}$ son tales que $w_1^\perp$ y $w_2^\perp$ se intersectan formando un ángulo $\theta$ entonces:

$$\cos(\theta) = B(w_1, w_2)$$

*Demostración del teorema 3.* Consideramos los siguientes tres puntos de $\mathbb{DS}$:

$$w_1 = (1, 0, 0)$$

$$w_2 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$$

$$w_{3'} = (-\cos(\beta), \sin(\beta), 0)$$

Las geodésicas orientadas correspondientes se intersectan en $(0, 0, 1)$. Además $w_2^\perp$ y $w_{3'}^\perp$ forman ángulos de $\alpha$ y $\pi - \beta$ con $w_1^\perp$ respectivamente.

La transformacion de Lorentz $f$ dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(c) & \sinh(c) \\ 0 & \sinh(c) & \cosh(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

es una traslación en $\mathbb{M}$ de distancia $c$ sobre la geodésica $w_1^\perp$.

Por lo tanto definiendo:

$$w_3 = f(w_{3'}) = (-\cos(\beta), \cosh(c)\sin(\beta), \sinh(c)\sin(\beta))$$

Se obtiene que las geodésicas $w_1^\perp, w_2^\perp$ y $w_3^\perp$ forman un triángulo con ángulos internos $\alpha$ y $\beta$ sobre un lado de longitud $c$. Y se tiene para el tercer ángulo interno $\gamma$:

$$\cos(\gamma) = B(w_2, w_3) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c)$$

□

## 6.6. Distancia de un punto a una geodésica

El punto:

$$p = (\sinh(a), 0, \cosh(a))$$

en $\mathbb{M}$ está a distancia $a$ de la geodésica

$$\lambda \mapsto (0, \sinh(\lambda), \cosh(\lambda))$$

Observamos que esta geodésica es $w^\perp$ para $w = (1, 0, 0)$ de lo cual (usando la invariancia de $B$ por transformaciones de Lorentz) obtenemos:

$$\sinh(d(p, w^\perp)) = B(p, w)$$

para todo $p \in \mathbb{M}$ y $w \in \mathbb{DS}$.

Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4** (Ley del Seno)**.** *Si $a, b$ y $c$ son los lados de un tríangulo y $\alpha, \beta$ y $\gamma$ son los ángulos internos ($\alpha$ opuesto a $a$, etc.) entonces:*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

*Demostración.* Alcanza con demostrar que $\sin(\alpha)\sinh(b)$ es la distancia del lado con ángulos $\alpha$ y $\beta$ al vértice opuesto.

Para esto consideramos $p = (0, \sinh(b), \cosh(b))$ y $w = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ y aplicamos la fórmula para la distancia entre $p$ y $w^\perp$. □

# Capítulo 7

# Tangente unitario y PSL$(2,\mathbb{R})$

Fijamos la siguiente acción por isometrías de las matrices invertibles $2 \times 2$ con coeficientes reales y determinante positivo en $\mathbb{H}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Las únicas matrices que actúan trivialmente son los múltiplos de la identidad por lo cual la ecuación anterior define una acción fiel de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}$. Como toda isometría de $\mathbb{H}$ que preserva orientación aparece como la acción de alguna matriz se deduce que el grupo de tales isometrías es isomorfo a $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Consideramos el tangente unitario de $\mathbb{H}$:

$$T^1H = \{(z,v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C} : |v| = \mathrm{Im}(z)\}$$

La acción anterior se extiende (usando la derivada de cada isometría) al tangente unitario como sigue:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z,v) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} v\right)$$

Esta acción también pasa al cociente $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ y en este caso tiene estabilizadores triviales.

Esto permite identificar $T^1\mathbb{H}$ con $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ a través del mapa:

$$g \mapsto g \cdot (i,i)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{ai+b}{ci+d}, \frac{ad-bc}{(ci+d)^2} i\right)$$

Con esta identificación la multiplicación a izquierda en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ corresponde a la acción de derivadas de las isometrías de $\mathbb{H}$ en $T^1\mathbb{H}$. Sin embargo la multiplicación a derecha por un elemento $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ no se corresponde en general con la acción de una isometría de $\mathbb{H}$ en $T^1\mathbb{H}$.

Para ver esto fijamos $r_\theta \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dado por:

$$r_\theta = \pm \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Se calcula:

$$gr_\theta \cdot (i,i) = g \cdot \left( i, \frac{1}{(\sin(\theta)i + \cos(\theta))^2} i \right) = g \cdot (i, e^{-2\theta i} i)$$

Esto implica que la multplicación a derecha por $r_\theta$ en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ corresponde con la transformación en $T^1\mathbb{H}$ que rota cada vector tangente unitario un ángulo $2\theta$ en dirección horaria manteniendo el mismo punto base.

El mismo tipo de razonamiento muestra que la multplicación a derecha por $g_t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ definido por:

$$g_t = \pm \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

corresponde con aplicar el tiempo $t$ del flujo geodésico en $T^1\mathbb{H}$ (i.e. cada vector $(z,v)$ se transporta paralelamente un tiempo $t$ sobre la geodésica de condición inicial $(z,v)$).

## 7.1. Descomposición polar y distancia

La observación de que se puede llegar de cualquier vector en $T^1\mathbb{H}$ a cualquier otro en tres 'movidas' del tipo 'girar, avanzar, girar' se traduce a la siguiente versión débil del teorema de descomposición polar para matrices:

**Corolario 2** (Descomposición polar en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$)**.** *Todo elemento $g$ de PSL$(2,\mathbb{R})$ puede escribirse como $r_{\theta_1} g_t r_{\theta_2}$ para ciertos $t, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.*

La norma de Frobenius de una matriz $2 \times 2$ real se define como:

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_F = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

La norma de Frobenius es invariante bajo multiplicación a derecha y a izquierda por matrices ortogonales.

La norma de un elemento en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ se define como la de cualquiera de sus dos representantes en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Se deduce de la descomposición polar que

$$2\cosh(d(i, gi)/2) = \|g\|_F$$

para todo $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

## 7.2. Propiedad de Anosov del flujo geodésico

El flujo horocíclico estable en $T^1\mathbb{H}$ se define de manera que su tiempo $t$ se corresponde con la multiplicación a derecha por el elemento siguiente en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$:

$$h_t^+ = \pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos cualquier métrica Riemanniana en $T^1\mathbb{H}$ que sea invariante por la acción de las derivadas de isometrías de $\mathbb{H}$. Esto equivale a considerar una métrica invariante por multiplicación a izquierda en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Se calcula directamente:

$$g_t(i,i) = (e^t i, e^t i)$$

$$h_s^+ g_t(i,i) = (s + e^t i, e^t i) = g_t h_{e^{-t}s}^+(i,i)$$

La distancia hiperbólica entre los puntos base de ambos vectores es $e^{-t}s$ que decrece exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Demostraremos algo más fuerte: que la distancia entre los vectores mismos también decrece exponencialmente.

La invariancia de la métrica por multiplicación a izquierda en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ y la ecuación $h_s^+ h_t^+ = h_{s+t}^+$ implican que la norma de $\partial_t h_t^+$ no depende de $t$. Denotando por $C$ dicha norma se tiene $d(1, h_t^+) \leq Ct$ para todo $t$. Por último (usando una vez más la invariancia) tenemos:

$$d(g_t, g_t h_{e^{-t}s}^+) = d(1, h_{e^{-t}s}^+) \leq Ce^{-t}s$$

En conclusión para cualquier métrica Riemanniana en $T^1\mathbb{H}$ invariante por la acción de las derivadas de isometrías de $\mathbb{H}$ se tiene que dos vectores pertenecientes a la misma órbita del flujo horocíclico estable se acercarán exponencialmente (en función de $t$) al aplicar el tiempo $t$ del flujo geodésico.

El flujo horocíclico inestable en $T^1\mathbb{H}$ se define de manera que su tiempo $t$ se corresponde con la multiplicación a derecha en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ por:

$$h_t^- = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Un razonamiento análogo al anterior muestra que el tiempo $-t$ del flujo geodésico contrae exponencialmente las órbitas del flujo horocíclico inestable cuando $t \to +\infty$.

# Capítulo 8

# Grupos Fuchsianos

## 8.1. Ejemplos

Un grupo Fuchsiano es un grupo discreto de isometrías que preservan orientación en $\mathbb{D}$.

Los ejemplos básicos son los siguientes:

1. Dada una superficie hiperbólica completa su cubrimiento universal es isométrico a $\mathbb{D}$, por lo tanto el grupo de transformaciones de cubrimiento (que es isomorfo al grupo fundamental de la superficie) da lugar a un grupo Fuchsiano.

2. Los subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ actúan como isometrías en $\mathbb{H}$ y por lo tanto dan lugar a grupos Fuchsianos.

3. Los grupos de matrices $3\times 3$ con coeficientes enteros que preservan cualquier forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ de signo $(1,1,-1)$ actúan como isometrías de una componente de los vectores en donde la forma cuadrática vale $-1$. Esta componente es isométrica a $\mathbb{M}$ por lo cual estos grupos dan lugar a grupos Fuchsianos. Estos ejemplos incluyen pero no se limitan a las transformaciones de Lorentz con coeficientes enteros.

4. Grupos generados 'a mano' a partir de 'Polígonos de Poincaré'. Estos incluyen los grupos de simetrías que preservan orientación de las famosas tesselaciones de M.C. Escher 'Circle Limit I, II, III y IV'.

A los ejemplos anteriores se les suman los grupos cíclicos generados por una sola transformación de Möebius de $\mathbb{D}$ (en el caso de que el generador fije un punto interior a $\mathbb{D}$ deberá tener orden finito) y el grupo de isometrías de $\mathbb{H}$ generado por $z \mapsto -1/z$ y $z \mapsto \lambda z$ (donde $\lambda > 0$). Estos últimos ejemplos se consideran triviales y son llamados 'Grupos Fuchsianos Elementales'.

Hay un 'no ejemplo' que es importante descartar para lo que sigue. Consiste en considerar el grupo generado por dos elementos hiperbólicos que son traslaciones en geodésicas asymptóticas. En este caso partiendo de un punto de la primer geodésica y aplicando una de las traslaciones muchas veces se llega a estar muy cerca de la segunda geodésica. Luego, trasladando en dirección contraria a lo largo de la segunda geodésica se vuelve arbitrariamente cerca del punto de partida. La conclusión es el siguiente lema.

**Lema 1.** *Si $g_1, g_2$ son isometrías hiperbólicas en $\mathbb{D}$ que comparten exáctamente un punto fijo entonces no generan un grupo Fuchsiano.*

## 8.2. Alternativa de Tits

Toda transformación de Möebius que fija $\mathbb{D}$ se extiende continuamente al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup S^1$. Una transformación de Möebius de $\mathbb{D}$ no trivial se dice que es elíptica, parabólica, o hiperbólica según si fija: un punto de $\mathbb{D}$, un punto de $S^1$, o 2 puntos de $S^1$.

El conjunto límite de un grupo Fuchsiano $G$ se define como:

$$\Lambda_G = \overline{Gz} \cap S^1$$

donde la clausura se toma en $\mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{D}$. La definición no depende de la elección de $z$ y da un conjunto cerrado en $S^1$ invariante por todo elemento de $g$.

La alternativa de Tits dice que un grupo de matrices finitamente generado o bien es virtualmente resoluble o contiene un grupo libre en dos generadores. Demostraremos la siguiente versión para grupos Fuchsianos.

**Teorema 5** (Alternativa de Tits para grupos Fuchsianos)**.** *Si $G$ es un grupo Fuchsiano entonces $|\Lambda_G|$ puede ser $0, 1, 2$ o $\infty$ y en cada caso se puede concluir lo que indica la siguiente tabla:*

| $\|\Lambda_G\|$ | $G$ |
|---|---|
| 0 | *Generado por un elemento elíptico de orden finito.* |
| 1 | *Generado por un elemento parabólico que fija $\Lambda_G$.* |
| 2 | *Caso 1: Generado por un hiperbólico que fija los puntos de $\Lambda_G$.*<br>*Caso 2: Generado por un hiperbólico que fija los puntos de $\Lambda_G$ y un elemento elíptico que los intercambia.* |
| $\infty$ | *Contiene dos elementos hiperbólicos cuyos conjuntos de puntos fijos son disjuntos.* |

En los casos $|\Lambda_G| < \infty$ se obtiene que $G$ es o bien cíclico o bien tiene un subgrupo cíclico de índice 2. Esto corresponde al caso virtualmente resoluble del teorema de Tits.

El siguiente lema implica que si $|\Lambda_G| = \infty$ entonces $G$ contiene un grupo libre en dos generadores.

**Lema 2** (Lema Ping-Pong)**.** *Si $g_1, g_2$ son transformaciónes hiperbólicas con conjuntos de puntos fijos disjuntos entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $g_1^m$ y $g_2^n$ generan un grupo libre.*

*Demostración.* Cada $g_i$ tiene un repulsor y un atractor en $S^1$. Se toman las potencias $m, n \in \mathbb{N}$ de modo que existan intervalos cerrados disjuntos $R_1, A_1, R_2, A_2 \subset S^1$ tales que:

$$g_1^m(S^1 \setminus R_1) \subset A_1$$

$$g_2^n(S^1 \setminus R_2) \subset A_2$$

$$g_1^{-m}(S^1 \setminus A_1) \subset R_1$$

$$g_2^{-n}(S^1 \setminus A_2) \subset R_2$$

Tomando un punto $z \in S^1$ que no esté en ningún $A_i$ ni $R_i$ observamos (por inducción) que si $a_1 \cdots a_n$ es una palabra reducida en los elementos $\{g_1^m, g_1^{-m}, g_2^n, g_2^{-n}\}$ entonces $a_1 \cdots a_n(z)$ pertenece a $A_1, A_2, R_1$ o $R_2$ dependiendo únicamente del valor de $a_1$. En particular todas las palabras reducidas actúan no trivialmente. $\square$

## 8.3. Casos $|\Lambda_G| = 1$ o 2

El caso $|\Lambda_G| = 2$ en el teorema 5 es fácil. Todo elemento de $G$ debe fijar $\Lambda_G$ por lo cual fija la geodésica en $\mathbb{D}$ que une estos dos puntos. El resultado se deduce de clasificar los grupos de isometrías (que no necesariamente preservan orientación) de $\mathbb{R}$ (que juega el rol de la geodésica).

En caso $|\Lambda_G| = 1$ todo elemento de $G$ debe fijar el único punto de $\Lambda_G$. Esto descarta que $G$ tenga elementos elípticos (que no fijan puntos en $S^1$) y también hiperbólicos (porque ambos puntos fijos deberían estar en $\Lambda_G$). Por lo tanto todos los elementos de $G$ son parabólicos y fijan cualquier horocíclo que intersecta $S^1$ en $\Lambda_G$. La conclusión se obtiene igual que en el caso anterior.

## 8.4. Baricentro

Cada transformación de Möebius queda determinada por su valor en tres puntos. Por lo tanto si $G$ deja invariante un conjunto finito de más de tres elementos entonces $G$ es finito.

Esto implica en particular que si $3 \leq |\Lambda_G| < +\infty$ entonces $G$ es finito (ya que $\Lambda_G$ es invariante). Pero también implica que $G$ es finito en el caso $|\Lambda_G| = 0$ (porque toda órbita de un punto de $\mathbb{D}$ debe ser finita).

Por lo tanto lo que resta para resolver el caso $|\Lambda_G| < +\infty$ del teorema 5 es mostrar que todo grupo finito de isometrías del plano hiperbólico fija un punto.

Para esto usaremos el modelo del hiperboloide $\mathbb{M}$.

Definimos el baricentro de un conjunto finito $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{M}$ como el único punto de $\mathbb{M}$ que es múltiplo de $v_1 + \cdots + v_n$. Notemos que este vector existe porque $v_1 + \cdots + v_n$ es tipo tiempo.

Del hecho de que cada isometría de $\mathbb{M}$ es la restricción de una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ se obtiene el siguiente resultado que implica que esta definición puede llevarse a cualquier otro modelo (e.g. $\mathbb{D}$ o $\mathbb{H}$) por isometrías:

**Lema 3.** *Si $v$ es el baricentro de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{M}$ y $f : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ es una isometría entonces $f(v)$ es el baricentro de $f(v_1), \ldots, f(v_n)$.*

Como el baricentro es invariante bajo permutaciones se concluye:

**Lema 4.** *Todo grupo Fuchsiano finito fija el baricentro de cualquier órbita.*

Volviendo al teorema 5, en los casos $|\Lambda_G| = 0$ y $3 \leq |\Lambda_G| < +\infty$ se obtiene que $G$ es finito y por lo tanto todo elemento de $G$ fija el baricentro de cualquier órbita. Se concluye que $G$ está generado por una transformación elíptica de orden finito y que de hecho $|\Lambda_G| = 0$.

## 8.5. Minimalidad

Supongamos a partir de ahora que $|\Lambda_G| = \infty$.

Un posible contraejemplo al siguiente lema fué descartado en el 'no ejemplo' de la sección 8.1.

**Lema 5.** *Si $G$ es un grupo Fuchsiano no elemental entonces $\Lambda_G$ es minimal y es el único minimal de la acción de $G$ en $S^1$.*

*Demostración.* Mostraremos primero que cualquier subconjunto cerrado invariante en $S^1$ que contiene dos puntos debe contener a $\Lambda_G$.

Para esto fijemos $z, w$ son dos puntos diferentes en $S^1$ y tomemos $z_0 \in \mathbb{D}$ sobre la geodésica que une $z$ y $w$. Para cualquier punto $v \in \Lambda_G$ existe una sucesión $g_n$ en $G$ tal que $g_n z_0 \to v$. Esto sólo puede suceder si $v$ es un punto límite de $g_n z$ o de $g_n w$.

Con lo anterior obtuvimos que o bien $\Lambda_G$ es el único minimal de la acción de $G$ en $S^1$ o existe un punto $p \in \Lambda_G$ que es fijado por todos los elementos de $G$. Este último caso se descarta viendo que o bien todo elemento es parabólico (lo cual contradice que $|\Lambda_G| = \infty$) o existen dos hiperbólicos que comparten un solo punto fijo lo cual implica que $G$ no es Fuchsiano. □

Como corolario de lo anterior $\Lambda_G$ debe ser un conjunto de Cantor o todo $S^1$.

Volviendo al teorema 5 si existen elementos hiperbólicos en $G$ entonces el conjunto de puntos fijos de elementos hiperbólicos de $G$ debe ser denso en $\Lambda_G$ (por la minimalidad). Por lo tanto habría infinitos elementos hiperbólicos y no todos pueden compartir un punto fijo (minimalidad otra vez). De modo que se concluye que existen dos elementos hiperbólicos cuyos conjuntos de puntos fijos son disjuntos.

Por lo tanto resta sólamente mostrar que $G$ contiene un elemento hiperbólico.

**Lema 6.** *Si $G$ es un grupo Fuchsiano no elemental entonces contiene un elemento hiperbólico.*

*Demostración.* Si $G$ contiene un elemento parabólico entonces el conjunto de puntos fijos de elementos parabólicos debe ser denso en $\Lambda_G$ (por la minimalidad). Componiendo dos elementos parabólicos con diferentes puntos fijos (posiblemente cambiando uno de los dos por su inversa) se obtiene un elemento hiperbólico.

Si $G$ contiene un elemento elíptico $g$ con punto fijo $z \in \mathbb{D}$. Entonces para cada $h \in G$ el elemento $hgh^{-1}$ también es elíptico, tiene el mismo orden que $g$, y su punto fijo es $hz$. Podemos elegir $h$ de modo que $hz$ esté arbitrariamente cerca del borde. En este caso una potencia de $hgh^{-1}$ envía un intervalo pequeño a uno mucho más grande y componiendo con una potencia de $g$ se obtiene un elemento hiperbólico. $\square$

# Capítulo 9

# Medida visual y Núcleo de Poisson

Los vectores tangentes unitarios en cada punto $p \in \mathbb{D}$ tienen una medida de probabilidad natural que es la única invariante bajo rotaciones. Llamaremos a esta medida la probabilidad la medida uniforme en $T^1_p\mathbb{D}$.

Para cada $p \in \mathbb{D}$ definimos la medida visual $\theta_p$ en $S^1$ como el push-forward de la medida uniforme en $T^1_p\mathbb{D}$ a través de la función que asocia a cada vector tangente unitario el punto de $S^1$ al cual converge la geodésica con esta dirección inicial.

La invariancia por rotaciones implica que $\theta_0$ es la probabilidad uniforme en $S^1$. Además para cada transformación de Möebius $g : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ se tiene $\theta_{g(p)} = g_*\theta_p$ (donde $g_*$ denota push-forward).

Cómo las transformaciones de Möebius actúan differenciablemente en $S^1$ obtenemos que $\theta_p$ es absolutamente continua respecto a $\theta_q$ para cualquier par de puntos $p, q \in \mathbb{D}$.

Definimos el núcleo de Poisson $P : \mathbb{D} \times S^1 \to (0, +\infty)$ a través de la ecuación:

$$P(w, \xi) = \frac{\mathrm{d}\theta_w}{\mathrm{d}\theta_0}(\xi) = |g'(\xi)|$$

donde $g$ es cualquier transformación de Möebius del disco con $g(w) = 0$.

Usando $g(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ se calcula directamente

$$g'(z) = \frac{1 - |w|^2}{(1 - \overline{w}z)^2}$$

por lo cual

$$P(w, \xi) = \frac{1 - |w|^2}{|\xi - w|^2}$$

## 9.1. Laplaciano

Consideremos la función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}$ definida por:

$$\phi(x, y) = (\sinh(r)\frac{x}{r}, \sinh(r)\frac{y}{r}, \cosh(r))$$

donde $r(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Fijando $p = (0, 0, 1)$ la función $\phi$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\phi(0) = p$
2. La curva $t \mapsto \phi(tv)$ es una geodésica parametrizada a velocidad $\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Una función que cumple las propiedades anteriores se llama una coordenada normal de Riemann para el punto $p$. Se deduce que cualquier par de coordenadas normales para el mismo punto $p$ difieren en precomponer con una transformación lineal ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es de clase $C^2$ el Laplaciano de $f$ en un punto $z \in \mathbb{D}$ se define como:

$$\Delta_{\mathbb{D}} f(z) = (\Delta_{\mathbb{R}^2} f \circ \phi)(0)$$

donde $\phi$ es cualquier coordenada normal para $z$ y $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ es el laplaciano usual en el plano Euclídeo.

De la definición anterior y la invariancia del Laplaciano Euclídeo por rotaciones se obtiene que:

$$\Delta_{\mathbb{D}} f(z) = (f \circ \alpha)''(0) + (f \circ \beta)''(0)$$

para cualquier par de geodésicas parametrizadas por longitud de arco $\alpha$ y $\beta$ que se intersectan ortogonalmente en $\alpha(0) = \beta(0) = z$.

Calculando con $\alpha(t) = \sinh(t)/(\cosh(t) + 1)$ y $\beta(t) = i\alpha(t)$ se obtiene:

$$\Delta_{\mathbb{D}} f(0) = \frac{1}{4}\Delta_{\mathbb{R}^2} f(0)$$

Para cualquier transformación conforme $g$ en un abierto del plano y cualquier función $f$ de clase $C^2$ con valores a $\mathbb{R}$ se verifica:

$$(\Delta_{\mathbb{R}^2} f \circ g)(z) = |g'(z)|^2(\Delta_{\mathbb{R}^2} f)(z)$$

Esto permite calcular a partir de la expresión para $\Delta_{\mathbb{D}} f(0)$ lo siguiente:

$$\Delta_{\mathbb{D}} f(z) = \left(\frac{1 - |z|^2}{2}\right)^2 \Delta_{\mathbb{R}^2} f(z)$$

La isometría $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$ nos permite calcular:

$$\Delta_{\mathbb{H}} f(i) = \Delta_{\mathbb{R}^2} f(i)$$

para toda $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$. Y componiendo con las funciones conformes $z \mapsto az + b$ obtenemos:

$$\Delta_{\mathbb{H}} f(z) = \operatorname{Im}(z)^2 \Delta_{\mathbb{R}^2} f(z)$$

Se verifica para $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ que:

$$P(g(x + iy), 1) = y$$

para todo $x + iy \in \mathbb{H}$, de lo cual se deduce que el núcleo de Poisson $P(\cdot, \xi)$ es armónico respecto a $\Delta_{\mathbb{D}}$ en $\mathbb{D}$ para cada $\xi \in S^1$.

## 9.2. Convergencia al borde de caminatas aleatorias en $\mathbb{D}$

Las funciones armónicas para $\Delta_{\mathbb{D}}$ también lo son en el sentido usual (i.e. para $\Delta_{\mathbb{R}^2}$). Esto implica que cualquier función armónica en $\mathbb{D}$ cumple la propiedad del valor medio:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} re^{it} \mathrm{d}t$$

para todo $r > 0$.

Además, de la definición $(\Delta_{\mathbb{D}} f \circ g)(0) = (\Delta_{\mathbb{D}} f)(g(0))$ para toda isometría $g$. De esto se deduce que $f(z)$ coincide con el promedio de los valores de $f$ en cualquier círculo hiperbólico de radio $r$ con centro en $z$.

Supongamos ahora que $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ es una cadena de Markov con valores en $\mathbb{D}$ con las siguientes propiedades:

1. $z_0 = 0$
2. Para todo $n \geq 1$ el punto $z_{n+1}$ tiene distribución uniforme en el círculo hiperbólico de radio 1 con centro $z_n$.

Entonces de la propiedad del valor medio se deduce que para cualquier función armónica $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ la sucesión $f(z_0), f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots$ es una matingala. Si $f$ es acotada del teorema de convergencia de martingalas casi seguramente existe el límite:

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n)$$

Este resultado implica, considerando los casos particulares $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ y $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, que casi seguramente $z_n$ converge a un punto (aleatorio) del borde de $\mathbb{D}$. Es decir casi seguramente existe el límite:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \xi \in S^1$$

# Capítulo 10

# Medidas de Patterson-Sullivan

Consideremos $G$ un grupo Fuchsiano no elemental y la siguiente serie para cada $s > 0$ y $z \in \mathbb{D}$:

$$p_s(z) = \sum_{g \in G} e^{-sd(z,g0)}$$

Existe un exponente crítico $s_c > 0$ tal que $p_s(z)$ converge para todo $z$ si $s > s_c$ y $p_s(z)$ diverge para todo $z$ si $s < s_c$. Se cumple:

$$s_c = \limsup_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \log\left(|\{g \in G : d(g0, z) < R\}|\right)$$

El objetivo es definir para cada $z \in \mathbb{D}$ una medida en $\Lambda_G$ tomando límite cuando $s \to s_c^+$ de las medidas:

$$\frac{1}{p_s(0)} \sum_{g \in G} e^{-sd(z,g0)} \delta_{g0}$$

Para que el soporte de la medida límite esté contenido en $S^1$ debería tenerse $p_{s_c}(0) = +\infty$. Sin embargo existen grupos para los cuales $p_{s_c}(0)$ converge y otros para los cuales diverge (ambos casos se distinguen geométricamente según si el flujo geodésico en el cociente es recurrente o no). Para evitar este problema usamos el siguiente artificio.

Consideramos $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ creciente tal que la serie

$$q_s(z) = \sum_{g \in G} e^{-sd(z,g0) + f(d(z,g0))}$$

tiene el mismo exponente crítico que $p_s(z)$ pero diverge en $s_c$. Además supondremos que:

$$\lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0$$

Para cada $s > s_c$ y cada $z \in \mathbb{D}$ consideramos la medida en $\overline{D}$ dada por:

$$\mu_{s,z} = \frac{1}{q_s(0)} \sum_{g \in G} e^{-sd(z,g0)+f(d(z,g0))} \delta_{g0}$$

Una medida de Patterson-Sullivan es cualquier límite débil $\mu_z$ de una sucesión $\mu_{s_k,z}$ cuando $s_k \to s_c^+$. Por construcción cualquiera de estas medida tiene supporte incluido en $\Lambda_G$.

## 10.1. Funciones de Busemann

Asocaimos a cada $\xi \in \mathbb{D}$ el la función $b_\xi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$b_\xi(z, w) = d(z, \xi) - d(\xi, w)$$

Para cada $z \in \mathbb{D}$ las curvas de nivel de $b_\xi(z, \cdot)$ son círculos hiperbólicos concentricos con centro $\xi$. El valor absoluto de la función en cada círculo está determinado por la distancia a $z$ y el signo por el hecho de que $z$ pertenzca al interior del círculo o no. Esto muestra que cuando $\xi_n$ tiende a un punto $\xi$ en el borde del disco las funciones $b_{\xi_n}$ convergen uniformemente en compactos a una función $b_\xi$. Usualmente $w \mapsto -b_\xi(z, w)$ es llamada la función de Busemann asociada a $\xi \in S^1$, sus curvas de nivel son horocíclos.

Calculando en $\mathbb{H}$ para $\xi_n = e^n i$ obtenemos $b_\infty(z, w) = \log(\mathrm{Im}(z)) - \log(\mathrm{Im}(w))$. Esto implica en el disco:

$$b_\xi(z, w) = \log\left(\frac{P(z, \xi)}{P(w, \xi)}\right)$$

Mostraremos como se comparan las medidas de Patterson-Sullivan para diferentes puntos del disco.

**Teorema 6.** *Si $s_k \to s_c^+$ y para ciertos $z, w \in \mathbb{D}$ existen los límites débiles siguientes:*

$$\mu_z = \lim_{k \to +\infty} \mu_{s_k,z}$$

$$\mu_w = \lim_{k \to +\infty} \mu_{s_k,w}$$

*entonces las medidas $\mu_z$ y $\mu_w$ son mutuamente absolutamente continuas y se tiene:*

$$\frac{\mathrm{d}\mu_z}{\mathrm{d}\mu_w}(\xi) = e^{-s_c b_\xi(z,w)}$$

*Demostración.* Sea $I$ cualquier intervalo abierto en $S^1$ cuyos extremos tienen medida nula para $\mu_z$ y $\mu_w$ y $A$ un abierto relativo en $\mathbb{D}$ delimitado por $I$ y una curva en $\mathbb{D}$ que une los extremos de $I$. Como el borde de $A$ mide 0 para ambas medidas límite se tiene:

$$\mu_z(I) = \lim_{k \to +\infty} \mu_{s_k,z}(A)$$

$$\mu_w(I) = \lim_{k\to+\infty} \mu_{s_k,w}(A)$$

Dado $\epsilon > 0$ elegimos $A$ en las condiciones anteriores de modo que $|f(d(z,x)) - f(d(w,x))| < \epsilon$ para todo $x \in A$. En estas condiciones se tiene:

$$e^{sm_A-\epsilon} \leq \frac{e^{-sd(w,x)+f(d(w,x))}}{e^{-sd(z,x)+f(d(z,x))}} \leq e^{sM_A+\epsilon}$$

para todo $x \in A$, donde $m$ y $M$ son el supremo e ínfimo de $b_x(z,w)$ con $x \in A$.

Esto implica pasando al límite que si definimos:

$$M_I = \sup\{b_\xi(z,w) : \xi \in I\}$$

$$m_I = \inf\{b_\xi(z,w) : \xi \in I\}$$

se cumple

$$e^{sm_I}\mu_z(I) \leq \mu_w(I) \leq e^{sM_I}\mu_z(I)$$

de lo cual se deduce el enunciado. □