
CÁLCULO 3
Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias – Universidad de la República

1 de julio de 2022

Comentarios

Estas notas fueron realizadas para el curso *Cálculo 3* dictado por Diego Armentano en el primer semestre de 2022.

Índice general

1. Sucesión y serie de funciones	7
1.1. Convergencia puntual	8
1.2. Convergencia Uniforme	10
1.2.1. Convergencia uniforme y continuidad	13
1.2.2. Convergencia uniforme e integración	14
1.2.3. Convergencia uniforme y diferenciabilidad	15
1.3. Cauchy uniforme	18
1.4. Serie de funciones	20
1.5. Series de Potencia	25
2. Teorema de función inversa	31
2.1. Espacios métricos	31
2.2. Teorema de punto fijo	34
2.3. Teorema de función inversa	37
2.3.1. Preliminares	37
2.3.2. Teorema de función inversa	39
2.4. Teorema de Función Implícita	45

3. Variedades Diferenciables	53
3.1. Motivación	53
3.2. Definición y ejemplos	54
3.2.1. Preimagen de valor regular	56
3.2.2. Ejemplos	57
3.3. Variedades via parametrizaciones	58
3.4. Espacio tangente	65
3.4.1. Ejemplos	66
3.4.2. Espacio tangente via velocidades de curvas	67
3.4.3. Consistencia de definiciones	70
3.5. Variedades con borde	72
3.5.1. Espacio tangente a variedad con borde	75
4. Álgebra Exterior	81
4.1. Motivación	81
4.2. Formas Multilineales	84
4.2.1. Espacio Dual	85
4.2.2. Formas bilineales	86
4.2.3. Formas multilineales	87
4.3. Formas multilineales alternadas	88
4.4. Mapa adjunto	89
4.5. Producto exterior	92
4.5.1. Producto de 1-formas	93
4.5.2. Producto exterior de formas	96
5. Formas diferenciales	99
5.1. Producto exterior	101

5.2. Pull-back	102
5.3. Derivada exterior	106
5.4. Formas y campos en \mathbb{R}^3	110
5.4.1. Formas cerradas y exactas en \mathbb{R}^3	113
6. Integrales de línea	115
6.1. Definición	115
6.2. Integración de formas exactas	118
7. Formas en Variedades	123
7.1. Formas diferenciales en Variedades	125
7.2. Orientación en variedades	127
7.2.1. Orientación en espacios vectoriales	128
7.2.2. Orientación en variedades	130
7.3. Forma de volumen	132
7.3.1. Formas y orientación	135
7.3.2. Ejemplos de forma de volumen	137
8. Integración en Variedades	141
8.1. Integración en \mathbb{R}^m	141
8.2. Integración en variedades	142
8.3. Integración de funciones en variedades	145
8.3.1. Volúmenes de variedades	145
8.3.2. Longitud de curvas	145
8.3.3. Áreas de superficies	146
8.3.4. Ejemplo de integrales de funciones	149
8.4. Integración de campos en curvas y superficies	149

8.4.1. Flujo de un campo en \mathbb{R}^3	149
8.4.2. Circulación de un campo	151
9. Teorema de Stokes	155
9.1. Introducción	155
9.2. Orientación del borde de una variedad	156
9.3. Demostración Teorema de Stokes	159
9.4. Corolarios rápidos y ejemplos	161
9.5. Teoremas Clásicos	163
9.5.1. Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)	163
9.5.2. Teorema de Green	164
9.5.3. Teorema de Stokes clásico	165
9.5.4. Teorema de Gauss	167
9.6. Interpretación geométrica de rotor y divergencia	168
9.6.1. Rotor de un campo	168
9.6.2. Divergencia de un campo	169
9.7. Aplicaciones: Ecuaciones de Maxwell	169
9.7.1. Ley de Gauss para un campo eléctrico	170
9.7.2. Ley de Gauss para campos magnéticos	170
9.7.3. Ley de Faraday	171
9.7.4. Ley de Ampere	172
10. Apéndice	173
10.1. Descomposición en valores singulares	173
10.2. Particiones de la unidad:	175

Sucesión y serie de funciones

Vamos a trabajar con funciones definidas en un conjunto arbitrario X , a valores en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Sin embargo, para algunos resultados particulares necesitaremos más estructura en X , como para poder integrar o derivar funciones, en tales casos tomaremos $X \subset \mathbb{R}$.

Una *sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es simplemente una colección de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, indexadas por $n \in \mathbb{N}$.

Veamos a continuación algunos ejemplos sencillos que servirán para más adelante. Se sugiere realizar bosquejos en cada caso.

Ejemplo 1.1. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Ejemplo 1.2.

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Ejemplo 1.3.

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2(x - 1/n) & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

(No se asusten! es una función continua, lineal a trozos, y por lo tanto para bosquejarla sólo basta calcular su valor en los extremos de los intervalos.)

1.1. Convergencia puntual

Definición 1.4 (Convergencia puntual). Consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Supongamos que la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $x \in X$, es convergente. Entonces existe una función

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definida por} \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

En este caso decimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función f , o que f es límite puntual de f_n , y escribiremos $f_n \rightarrow_n f$, o $\lim_n f = f$.

Observación 1.5. En términos “ $\varepsilon - \delta$ ”, $f_n \rightarrow f$ si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, se tiene que existe $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Una vez definido el límite puntual una pregunta interesante surge.

¿Cuándo podemos asegurarnos que propiedades de la sucesión de funciones son heredadas a su límite?

Por ejemplo, si las funciones f_n son continuas, ¿su límite f lo es? Análogo para la diferenciabilidad: si las f_n son derivables, ¿ f lo es? y en tal caso se tiene $f'_n(x) \rightarrow_n f'(x)$? Análogo para integrabilidad.

A continuación intentaremos analizar posibles respuestas a estas preguntas. Para fijar ideas consideremos X un subconjunto de los reales (la recta misma o un intervalo alcanzan para el análisis).

Continuidad

Recordar que si una función f es continua en $x_0 \in X$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Por lo tanto, en el caso que f sea límite puntual de $\{f_n\}$, i.e. $f = \lim_n f$, lo que nos gustaría saber es si es verdad que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\lim_n f_n(x)}_{f(x)} \stackrel{(?)}{=} \lim_n \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)}_{f_n(x_0)}.$$

En este sentido nuestra interrogante se transforma en la siguiente pregunta

¿podemos intercambiar límites?

Para encontrar una respuesta basta recordar los ejemplos dados más arriba.

En el Ejemplo 1.1 es fácil ver que

$$f(x) = \lim_n x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Pero entonces, tomando $x_0 = 1$ tenemos

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) = 1.$$

Con esto concluimos que límite puntual de funciones continuas, no tiene necesariamente que ser una función continua.

Diferenciabilidad

Para este caso basta mirar el Ejemplo 1.2. Observar que $\lim_n \sin(nx)/n = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto la función límite puntual f es la idénticamente nula, i.e. $f \equiv 0$. ¿Se podrá asegurar que $f'_n(x) \rightarrow f'(x) = 0$?

Derivando obtenemos $f'_n(x) = \cos(nx)$, y en particular $f'_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, y por lo tanto no existe su límite $f'_n(\pi)$. Es decir, no está definido el límite puntual de la sucesión de las derivadas.

Integración

Recordando nuestra consulta inicial, en el caso de integración nos gustaría saber si el límite de funciones integrables es integrable. Y si ese es el caso nos gustaría saber si es verdad que $\int f_n \rightarrow \int f$, i.e., si es correcto el intercambio de límites:

$$\lim_n \int f_n(x) dx \stackrel{(?)}{=} \int \lim_n f_n(x) dx.$$

Mirando el Ejemplo 1.3, es fácil ver que independiente de x , el límite es cero y por lo tanto $f = \lim_n f \equiv 0$.

Además es claro que $\int_0^1 f_n(x) dx = 1/2$, y por lo tanto

$$\frac{1}{2} = \lim_n \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx = 0.$$

Los párrafos anteriores muestran que hay que tener cuidado con intercambiar “límites” en las operaciones anteriores (de continuidad, diferenciación e integración) cuando tenemos convergencia puntual de una sucesión de funciones.

En la siguiente sección veremos una noción de límite más fuerte (más restrictiva) que nos permitirá trabajar con comodidad el intercambio de límites.

1.2. Convergencia Uniforme

Definición 1.6 (Convergencia uniforme). Deimos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X. \quad (1.2)$$

En tal caso escribimos $f_n \rightrightarrows f$.

Comentario 1.7. Una forma visual de entender la convergencia uniforme es via el gráfico $\text{Graf}(f_n)$ de las funciones de la sucesión.

Sea f el límite uniforme de $\{f_n\}$. Definimos el ε -entorno tubular del gráfico de f :

$$\Gamma_\varepsilon(f) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{C} : |y - f(x)| < \varepsilon\}.$$

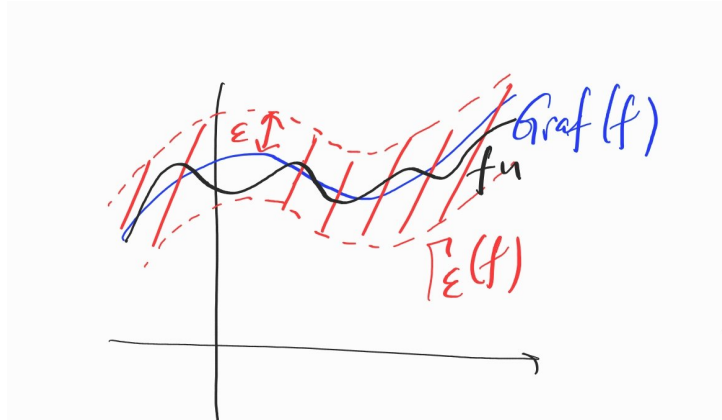


Figura 1.1: Convergencia uniforme.

Entonces, la condición descrita en (1.2), es análogo a decir que $\text{Graf}(f_n) \subset \Gamma_\varepsilon(f)$, para todo $n \geq n_0$.

Observación 1.8. Una forma equivalente de escribir la fórmula (1.2) es la siguiente:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

(¿Por qué el menor igual?)

Observación 1.9. Dado que la condición (1.2) involucra a todos los $x \in X$, es claro que si $f_n \rightrightarrows f$, entonces $f_n \rightarrow f$ puntualmente. Sin embargo el recíproco está lejos de ser cierto. Lo que hace la diferencia (gran diferencia por cierto) entre la convergencia uniforme y puntual es que el caso de convergencia puntual el n_0 depende del ε y del $x \in X$ (ver Observación 1.5), y por lo tanto no podemos asegurarnos que en todos los puntos x se aproximan a su límite de manera simultánea.

Ejemplo 1.10. En el Ejemplo 1.1 y Ejemplo 1.3 no hay un n_0 universal.

◇ **1.11.** En el Ejemplo 1.1, dado un $x \in [0, 1)$, y $\varepsilon > 0$, hallar $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ tal que $x^n < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Observar que si $x \rightarrow 1$, entonces $n_0 \rightarrow +\infty$.

◇ **1.12.** Si cambiamos el dominio $[0, 1]$ en el Ejemplo 1.1 por el subconjunto $[0, 1)$. ¿ $f_n|_{[0,1)}$ converge uniformemente a 0? Puede describir algún subintervalo $[0, a]$, con $a < 1$ donde haya convergencia uniforme?

Nota: En la siguiente proposición establecemos un criterio para saber cuándo hay convergencia uniforme. Quizás exista un poco de redundancia en la prueba pero dado que recién comenzamos está bueno establecer el lenguaje que trabajaremos en el curso, además de ser una entrada en calor al mismo.

Proposición 1.13 (Criterio de convergencia). Sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Definamos

$$d_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|. \quad (1.3)$$

Entonces $f_n \rightrightarrows f$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

Demostración. (\Leftarrow) Ejercicio

(\Rightarrow) Queremos probar que $d_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado un $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, y $x \in X$. Entonces, tomando supremo en $x \in X$ se tiene

$$d_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

esto es exactamente la definición de convergencia a 0 de la sucesión $\{d_n\}$.

(Para estudiantes puristas: si quieren tener el menor estricto en la definición de convergencia de la sucesión d_n , basta tomar al comienzo $\varepsilon/2$, y para el correspondiente n_0 , resulta $|d_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.)

Con esto hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $0 \leq d_n = |d_n| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, lo que significa $\lim_n d_n = 0$. \square

Comentario 1.14. Sea $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ el espacio de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ acotadas, i.e., $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que existe $k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k_f$, para todo $x \in X$. En este sentido la función $d_\infty : \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

es una *distancia*, o *métrica*, para este espacio, donde resulta que $\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), d$ es un espacio métrico. (Ver Sección 2.1). (De aquí en adelante utilizaremos la notación $d(\cdot, \cdot)$ o $d_\infty(\cdot, \cdot)$ indistintamente.) De hecho $\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), d$ es un espacio vectorial y definiendo

$$\|f\|_\infty := d(f, 0) = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

tenemos que $\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), d$ es un espacio vectorial normado.

De la observación anterior resulta que

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{si y solo si} \quad d(f_n, f) \rightarrow 0,$$

es decir, que la convergencia uniforme coincide con la convergencia en la métrica “uniforme”.

Ejemplo 1.15. Retomando el Ejemplo 1.1, vimos que la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función f dada en (1.1). Observar que $d_n = d(f_n, f) = 1$, y por lo tanto no hay convergencia uniforme.

Ejemplo 1.16. En el Ejemplo 1.1, se tiene que la distancia uniforme de $f_n(x) = \sin(x)/n$ a la función 0 es $1/n$. Por lo tanto f_n converge uniformemente a la función 0.

Ejemplo 1.17. En el Ejemplo 1.3 es fácil ver que $d_n = n$ y por lo tanto f_n no converge uniformemente a su límite puntual.

Ejemplo 1.18. Sea $a \in (0, 1)$. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, a]$. Entonces f_n converge puntualmente a la función 0 en el intervalo $[0, a]$. Pero además $d_n = a^n \rightarrow 0$, y por lo tanto la convergencia es uniforme.

1.2.1. Convergencia uniforme y continuidad

Es fácil convencerse con un dibujo (utilizando entornos tubulares) que si tenemos una discontinuidad de una función f en x_0 (pero con límites laterales definidos), difícilmente la podamos aproximar uniformemente por funciones continuas.

El siguiente resultado formalizaremos esa idea mostrando que la convergencia uniforme de funciones continuas es continua.

Teorema 1.19. Sea $X \subset \mathbb{C}$, $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $z_0 \in X$. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$. Entonces f es continua en z_0 .

Demostración. Queremos probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z - z_0| < \delta.$$

La idea detrás de la prueba es que si n es suficientemente grande los valores de $f_n(z)$ y $f(z)$ son arbitrariamente cercanos para todo z en el dominio, luego triangulando de la siguiente manera

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|, \quad (1.4)$$

tendríamos que los términos de los extremos son arbitrariamente pequeños sin importar el punto donde están evaluados, y el del medio es pequeño si z es próximo a z_0 utilizando la continuidad de las f_n .

Más precisamente, existe n_0 tal que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/3$ para todo $n \geq n_0$. Por otro lado, para n_0 fijo, tenemos de la continuidad de f_{n_0} en z_0 , que existe $\delta > 0$ tal que $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/3$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Por lo tanto de la desigualdad (1.4), para $n = n_0$, concluimos que si $|z - z_0| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(z) - f_n(z_0)| \\ &< 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.20. *En las hipótesis del Teorema 1.19 resulta*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

Demostración. De la continuidad de f_n en z_0 , y del límite puntal se tiene que el miembro izquierdo coincide con $f(z_0)$. Por otro lado, el miembro derecho utilizando el límite puntal y luego de la continuidad de f en z_0 , se tiene que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ es igual a $f(z_0)$ probando la igualdad requerida. □

1.2.2. Convergencia uniforme e integración

Teorema 1.21. *Sea $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo acotado, y sean $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Supongamos que existe f tal que $f_n \rightrightarrows f$. Sea $x_0 \in I$, y definimos*

$$F_n(x) := \int_{x_0}^x f_n(t) dt, \quad F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Entonces resulta $F_n \rightrightarrows F$ en I .

La prueba de este teorema se puede ver fácilmente reflejada utilizando el Comentario 1.7 la diferencia $\|F - F_n\|_\infty$ está acotada por el área del entorno tubular, el cual tiende a cero cuando n crece. Veamos una prueba analítica.

Demostración. Observar que del Teorema 1.19 se tiene que f es continua, y por lo tanto F está bien definida.

Como $f_n \rightrightarrows f$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Entonces

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f_n(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t) - f_n(t)| dt < \varepsilon |x - x_0|. \end{aligned}$$

Como el intervalo I es acotado, tenemos que $|x - x_0| \leq \ell_I$, donde ℓ_I es la longitud del intervalo. Luego concluimos que

$$\|F - F_n\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \ell_I.$$

Luego “ajustando” ε obtenemos el resultado, i.e., si tomamos al comienzo n_0 tal que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/\ell_I$, entonces obtendremos que $\|F - F_n\|_\infty < \varepsilon$. \square

\diamond 1.22. Nuestro comentario previo a la prueba sugería una cota (quizás grosera) de que la diferencia $\|F - F_n\|_\infty$ estaba acotada por el área del ε -entorno tubular de f , que es $2\varepsilon \cdot \ell_I$. Sin embargo la prueba analítica fue más precisa. ¿Podrías perfeccionar nuestra estimativa gráfica para que diera la cota analítica?

Corolario 1.23. *En las hipótesis del Teorema 1.21 se tiene*

$$\lim_n \int_{x_0}^x f_n(t) dt = \int_{x_0}^x \lim_n f_n(t) dt, \quad x \in I.$$

1.2.3. Convergencia uniforme y diferenciabilidad

Quizás el resultado más esperado en esta sección es que si tenemos una sucesión de funciones $\{f_n\}$ diferenciables, tal que $f_n \rightrightarrows f$, para una cierta f , entonces la

misma debería ser diferenciable y además $f'_n \rightrightarrows f'$. Sin embargo, esto no es así. El Ejemplo 1.2 da un contraejemplo, dado que hay convergencia uniforme a la función idénticamente nula, pero la derivada no tienen límite puntual.

De hecho, tampoco es verdad que el límite uniforme de funciones diferenciables, es diferenciable. Basta tomar alguna función f continua, con alguna discontinuidad en la derivada, y luego construir en cada $\frac{1}{n}$ -entorno tubular de f una función f_n diferenciable que la aproxime.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.24. Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$. Esta función se puede obtener como integral de la g (la función “signo”) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Es decir $f(x) = \int_0^x g(t) dt$.

La idea ahora es tomar aproximaciones continuas de la función signo, por ejemplo

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & x > 1/n \\ nx & -1/n \leq x \leq 1/n \\ -1 & x < -1/n. \end{cases}$$

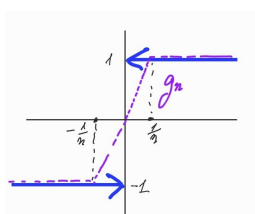


Figura 1.2: Aproximación de la función signo.

Si definimos la función $f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$, obtendremos que: $f_n \rightrightarrows f$, pero f no es derivable en $x = 0$.

◇ 1.25. Terminar los detalles de este ejemplo.

El ejemplo anterior puede ser refinado para encontrar sucesiones de funciones diferenciables con límite funciones no diferenciables en ningún punto.

El siguiente resultado es quizás un poco técnico, pero será de utilidad en el capítulo siguiente.

Proposición 1.26. *Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 (i.e. con derivada continua). Si la sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente a una función $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, y existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f_n(x_0)$ converge, entonces existe $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f_n \rightrightarrows f, \quad y \quad f'_n = g.$$

Demostración. La condición para $f_n(x_0)$ es para controlar, (dado que por ejemplo la sucesión $f_n(x) = n$ es claro que no tiene límite puntual).

¿Cuál es el candidato a f ? Lo razonable sería tomar un candidato tal que $f' = g$, y por lo tanto podría ser f sería una primitiva de g . Con esto en mente sea

$$f(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt + \alpha, \quad x \in (a, b),$$

siendo $\alpha = "f(x_0)" = \lim_n f_n(x_0)$, y de esta manera $f(x_0) = \lim_n f_n(x_0)$.

Observar que $f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0)$.

Denotando $F_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$ y $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$, con $x \in (a, b)$, tenemos

$$f_n(x) = F_n(x) + f_n(x_0), \quad f(x) = G(x) + \alpha,$$

y sabemos que por el Teorema 1.21 $F_n \rightrightarrows G$.

Luego tenemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |F_n(x) - G(x)| + |\alpha - f_n(x_0)|, \quad \forall x \in (a, b),$$

Dado $\varepsilon/2$ existe n_0 tal que $|\alpha - f_n(x_0)| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$.

Dado $\varepsilon/2$ existe n_1 tal que $\|F_n - G\|_\infty < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_1$.

Entonces de lo anterior resulta $\|f - f_n\| < \varepsilon$, para todo $n \geq \max(n_0, n_1)$.

□

1.3. Cauchy uniforme

La siguiente definición será de mucha ayuda para saber cuándo una sucesión de funciones converge uniformemente a alguien, sin tener un candidato a límite.

Definición 1.27 (Cauchy uniforme). Decimos que la sucesión $\{f_n\}$, con $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, satisface la condición de *Cauchy uniforme* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Comentario 1.28. Si consideramos el espacio de funciones $(\mathcal{F}(X, \mathbb{C}), d_\infty)$, con la distancia definida en Comentario 1.14, lo que estamos diciendo es que la sucesión $\{f_n\}$ es Cauchy uniforme si es una sucesión de Cauchy para la distancia d_∞ .

El siguiente resultado dice que el espacio de funciones de X en \mathbb{C} acotadas, usualmente denotado por $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, es un espacio completo cuando lo dotamos de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 1.29. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, converge uniformemente si y sólo si $\{f_n\}$ satisface la condición Cauchy uniforme.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ tal que $f_n \rightrightarrows f$. Entonces, por la desigualdad triangular se tiene

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \quad (1.5)$$

Tomando $\varepsilon/2$, existe n_0 tal que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$, para todo $n \geq n_0$. Luego se tiene de (1.5) que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

(\Leftarrow) Tenemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy para la distancia d .

¿Cuál es el candidato a límite? (Tomensen un momento para pensarlo antes de seguir)

Por ser Cauchy uniforme sabemos que en particular, fijado un $x \in X$ arbitrario, se tiene que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} (con la distancia del valor absoluto $|\cdot|$). De la completitud de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ resulta que existe $\lim_n f_n(x)$.

Definamos entonces $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(x) := \lim_n f_n(x), \quad x \in X,$$

(la tipografía de la f es adrede, es para remarcar que al límite lo tenemos que definir nosotros.)

Por definición es claro que f es el límite puntual de las f_n , pero queremos que el límite sea uniforme.

Sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2, \quad \forall n, m \geq N. \quad (1.6)$$

De la definición de Cauchy uniforme, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2, \quad \forall n, m \geq N.$$

Y por lo tanto, dado cualquier $x \in X$, tenemos

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall n, m \geq N,$$

Ahora viene la magia. Luego tomando límite en la expresión anterior, para $m \rightarrow +\infty$, resulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Como la expresión anterior, es independiente de x , resulta $f_n \Rightarrow f$.

□

1.4. Serie de funciones

Consideremos la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definición 1.30. Definimos la *suma N -ésima parcial* $S_N : X \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_N(x), \quad x \in X.$$

La *serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se define como el límite

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N,$$

(cuando este límite existe).

Luego podemos decir, abusando lenguaje, que la *serie converge puntualmente (uniformemente)* a una función f cuando $s_N \rightarrow f$ ($s_N \rightrightarrows f$).

Comentario 1.31. A lo largo de esta sección usaremos distintas notaciones para series, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, o simplemente $\sum f_n$.

Ejemplo 1.32. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots. \quad (1.7)$$

Sabemos de los cursos de cálculo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

pero ¿en qué sentido es la convergencia?

Ejemplo 1.33. Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots. \quad (1.8)$$

Observar que la serie (1.8) es la suma de las derivadas de los sumandos de la serie (1.7). Esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)', \quad |x| < 1.$$

¿Podemos asegurar que entonces la siguiente igualdad es válida?

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \stackrel{(?)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x^n) \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Ejemplo 1.34. Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. ¿Podemos asegurar que esta serie converge puntualmente o uniformemente a alguna función?

Observación 1.35. Las series de funciones son un caso particular de sucesión de funciones, dado que su definición se realiza via las sumas parciales N -ésimas.

Observación 1.36. Observar que $\sum f_n$ converge uniformemente a una función f , entonces el *resto* r_N , definido por

$$f = s_N + r_N, \quad \text{o sea} \quad r_N := f - (f_1 + \dots + f_N)$$

converge uniformemente a la función 0. Esto resulta simplemente de que

$$\|r_N\|_{\infty} = \|f - s_N\|_{\infty}.$$

Recíprocamente, si el $d_n := \|r_N\|_{\infty} \Rightarrow 0$, para cierta f , entonces la serie converge uniformemente (c.f. Proposición 1.13).

◇ **1.37.** Probar que $\sum_n x^n$ converge uniformemente a la función $\frac{1}{1-x}$, en el intervalo $|x| \leq a$, con $a \in [0, 1)$. (Sug: dar una expresión del resto.)

A continuación veremos como los resultados vistos en las secciones anteriores se trasladan de manera directa a series. Veamos esto.

Teorema 1.38. Sea $X \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in X$, f_n continua en x_0 . Si la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente a f , entonces f es continua en z_0 .

Demostración. La suma $s_N = f_1 + \dots + f_N$ es continua en z_0 . Como $s_N \Rightarrow f$, entonces f es continua en z_0 . □

Teorema 1.39. Sea $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo acotado, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Supongamos que $\sum f_n$ converge uniformemente a f . Sea $x_0 \in I$, $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt$, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Entonces $\sum F_n$ converge uniformemente a F .

◇ 1.40. Probar el resultado anterior.

Corolario 1.41. En las hipótesis del Teorema 1.39 se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_n(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt, \quad x \in I.$$

Veamos una aplicación de esto.

Ejemplo 1.42. Sabemos del Ejercicio 1.37 que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniformemente en el intervalo $I = (-a, a)$, con $0 < a < 1$. Como las funciones x^n son continuas en $x_0 = 0$, entonces del Teorema 1.39 tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

converge uniformemente en I a la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt, \quad x \in I.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x), \quad |x| < a < 1. \quad (1.9)$$

Dado que podemos tomar $a < 1$ de manera arbitraria, resulta que la igualdad (1.9) vale para todo $|x| < 1$.

Teorema 1.43. Sea $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_n \in C^1$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente a una función $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos además que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $\sum f_n(x_0)$ converge. Entonces existe $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum f_n$ converge uniformemente a f y además $f' = g$, i.e.

$$\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'.$$

Comentario 1.44. La forma que utilizaremos este teorema es la siguiente. Supongamos que sabemos que la serie $\sum f_n$ es convergente a una f conocida. Si logramos probar que $\sum f'_n$ es una serie uniformemente convergente (sin conocer *a priori* su límite g), entonces podemos concluir que su límite g es exactamente f' . Esto es $\sum f'_n = (\sum_n f_n)'$.

◇ **1.45.** Dar una prueba de este teorema.

A continuación daremos un criterio debido a Weierstrass, que da una condición suficiente para la convergencia de series de funciones.

Teorema 1.46 (Criterio de la mayorante de Weierstrass). *Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo $x \in X$. Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente.*

Demostración. Hay que probar que $s_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$ converge uniformemente. Utilizando el criterio de Cauchy uniforme, basta probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que

$$\|s_N - s_M\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall N, M \geq N_0.$$

Observar que si $N \geq M$ se tiene

$$|s_N(x) - s_M(x)| \leq \sum_{n=M+1}^N |f_n(x)| \leq \sum_{n=M+1}^N a_n, \quad x \in X. \quad (1.10)$$

Como $\sum a_n$ es una serie de (términos positivos) convergente, entonces existe \tilde{n}_0 tal que $\sum_{k=\tilde{n}_0}^{+\infty} a_k < \varepsilon$.

Luego para todo $N, M \geq \tilde{n}_0$ resulta de (1.10),

$$\|s_N - s_M\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall N, M \geq \tilde{n}_0,$$

y por lo tanto la serie $\sum f_n$ converge uniformemente. □

Ejemplo 1.47. Sea $r < 1$, y definimos $f_n : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_n(x) = x^n$. Se tiene que $|f_n(x)| = |x|^n \leq r^n$. Luego, como $\sum r^n$ es una serie convergente, resulta que la serie $\sum_n x^n$ converge uniformemente en $(-r, r)$.

En particular hemos vuelto a probar que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniformemente a la función $1/(1-x)$ en cualquier intervalo cerrado de la forma $[-r, r] \subset (-1, 1)$.

Además, por el Teorema 1.39, resulta que si $|x| \leq r < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n dt \stackrel{teo}{=} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^n dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x), \quad \forall x \in [-r, r]. \end{aligned}$$

Como la cadena de igualdades es cierta para todo $r < 1$, podemos concluir que puntualmente vale la siguiente igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Análogamente, utilizando el Teorema 1.43 tenemos lo siguiente. La serie de las derivadas está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

luego si $|x| \leq r$ podemos acotar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |nx^{n-1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}.$$

Es un ejercicio sencillo de series probar que la serie anterior es convergente.¹

Luego, por el criterio M de Weierstrass, tenemos que la serie de las derivadas converge uniformemente en el intervalo $[-r, r]$. Luego utilizando el Teorema 1.43 (ver Comentario 1.44) concluimos que puntualmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,$$

y además la convergencia es uniforme en $[-r, r] \subset (-1, 1)$, para cualquier $0 < r < 1$.

Ejemplo 1.48. Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Dado que $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2$, y que la serie $\sum_n 1/n^2$ es convergente, concluimos que la serie de funciones del ejemplo converge uniformemente en \mathbb{R} .

¹Esto resulta de que existe s , con $r < s < 1$, y una constante $C > 0$, tal que $nr^{n-1} < Cs^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Luego la serie en cuestión puede ser mayorada por una serie de términos positivos convergente.

1.5. Series de Potencia

Una serie de potencias es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

Realizando un cambio de variable (una traslación del plano complejo) $x = z - z_0$, podemos asumir $z_0 = 0$.

Entonces basta estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

La pregunta que queremos responder es saber para qué puntos $x \in \mathbb{C}$, la serie converge $\sum a_n z^n$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.49. Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

con $z \in \mathbb{C}$, converge en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Esto resulta de utilizar el criterio M de Weiestrass.

Ejemplo 1.50. La serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

converge en todo \mathbb{R} a la función e^x .

Ejemplo 1.51. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ converge para todo $x \in (-1, 1)$ a la función $1/(1-x)^2$.

Ejemplo 1.52. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$, solo converge para $x = 0$. ¿Por qué?

Ejemplo 1.53. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (1.12)$$

converge a $\log(1+x)$ para $|x| < 1$. Esto resulta de que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ converge uniformemente en $[-a, a]$ con $0 < a < 1$, a la función $1/(1+x)$.

En particular tenemos una prueba de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log(2).$$

Sin embargo la serie (1.12) no converge para $x = -1$, por lo que resulta que la serie es convergente puntualmente en el intervalo $(-1, 1]$.

Si se observa, en todos los ejemplos anteriores resulta que las series convergen en un intervalo, (o disco en \mathbb{C}) centrado en 0, incluyendo o no parte de su borde, o converge sólo en 0.

Esto es parte del primer resultado de series de potencia.

Teorema 1.54 (Existencia de radio de convergencia). *Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces, dado $z \in \mathbb{C}$ se tiene que:*

1. si $z \in \mathbb{C}$ satisface $|z| < \frac{1}{L}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.
2. si $z \in \mathbb{C}$ satisface $|z| > \frac{1}{L}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge.

Lo que dice este teorema, aplicado a la serie original (1.11) en el caso que $0 < L < \infty$, es que la serie es convergente en el interior del disco de radio $\frac{1}{L}$, y no convergente en el exterior al mismo. En el borde del disco pueden convivir ambas posibilidades. Ver FIGURA*

Es por esta razón que se define el radio de convergencia de la siguiente manera.

El *radio de convergencia* de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, está dado por

$$R := \frac{1}{L}, \quad \text{donde} \quad L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

donde se define por $R = 0$ (o $R = \infty$) en el caso que $L = \infty$ (o $L = 0$).

Prueba del Teorema 1.54. 1. Como $|z| < \frac{1}{L}$, existe $\eta > 0$ tal que

$$|z| < \frac{1}{L + \eta} < \frac{1}{L}.$$

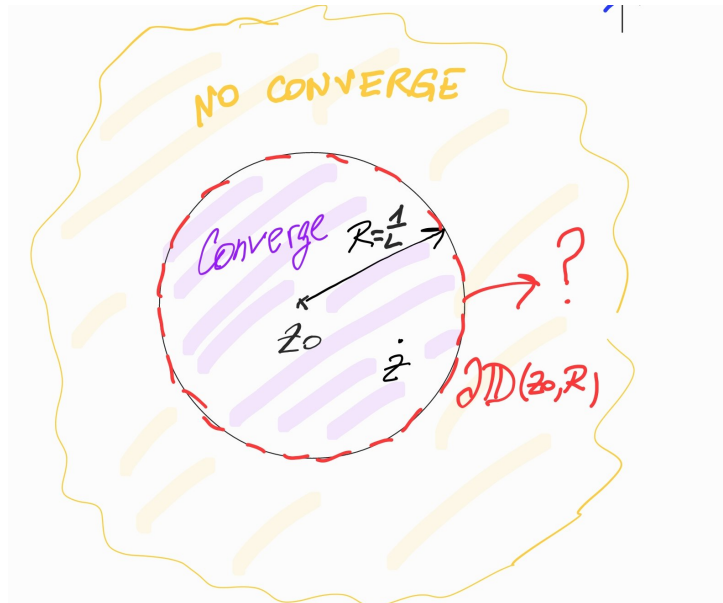


Figura 1.3: Radio de convergencia.

Luego, como $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, resulta que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \eta$ para todo $n \geq n_0$. Luego, se tiene

$$|a_n| < (L + \eta)^n, \quad \forall n \geq n_0,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &< (L + \eta)^n |z|^n \\ &= \underbrace{[(L + \eta) \cdot |z|]}_{\alpha}^n \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Luego, como $0 < \alpha < 1$, se tiene que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha^n$ la cual es convergente.

2. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \frac{1}{L}$. Existe $\xi > 0$ tal que

$$|z| > \frac{1}{L - \xi} > \frac{1}{L}.$$

Luego por definición de límite superior se tiene que existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > L - \xi$. Luego

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > \underbrace{[(L - \xi) \cdot |z|]}_{>1}^{n_k} \rightarrow +\infty,$$

y por tanto la serie $\sum a_n z^n$ no converge por el criterio de condición necesaria. \square

\diamond **1.55.** Probar que si $L = 0$ en el enunciado del Teorema 1.54, entonces el radio de convergencia es infinito. En el otro sentido, si $L = +\infty$ entonces la serie solo converge para $z = 0$.

Comentario 1.56. Una prueba alternativa del punto (1) es utilizar el criterio de la raíz para series.

Proposición 1.57. Las series $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n a_n n z^{n-1}$, $\sum_n a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, tienen todas el mismo radio de convergencia.

El resultado sale fácilmente utilizando el siguiente lema que enunciamos sin demostración.

Lema. Sean $a_n, b_n \geq 0$, tal que $\lim_n a_n = a$ y $\limsup b_n = \beta$. Entonces $\limsup a_n b_n = a\beta$.

Demostración. Sea $L = \limsup_n \sqrt[n]{a_n}$. Observar que el radio de convergencia de la serie $\sum_n a_n n z^{n-1}$, es la misma que la de la serie $\sum_n a_n n z^n$. Luego tomando raíz enésima del coeficiente se tiene

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n n} = L \lim_n \sqrt[n]{n} = L.$$

La otra serie se trabaja de manera análoga y queda de ejercicio. \square

Una vez que tenemos definido el radio de convergencia podemos probar que la serie converge uniformemente en cualquier compacto contenido en el disco de convergencia. Eso resulta del siguiente resultado.

Teorema 1.58. Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_n a_n z^n$. Supongamos que $R > 0$ o $R = \infty$, y sea $0 < r < R$. Entonces $\sum_n |a_n z^n|$ converge uniformemente en el disco $|z| \leq r$.

Demostración. Observar que si $|z| \leq r$, entonces

$$\sum_n |a_n z^n| \leq \sum_n |a_n| r^n.$$

Por el Teorema 1.54, se tiene que la serie $\sum_n |a_n| r^n$ converge ya que $r < R = 1/L$. Luego podemos concluir del criterio M de Weierstrass que la serie $\sum_n |a_n z^n|$ converge uniformemente. \square

Observación 1.59. Como comentamos al principio de esta sección, todos los resultados vistos se trasladan de manera inmediata a series con $z_0 \neq 0$.

Resumiendo tendemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tiene radio de convergencia $R = (\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.

Por lo tanto la hay convergencia puntual si $|z - z_0| < R$, y en particular se tiene convergencia uniforme en cualquier conjunto compacto contenido en ese disco.

Teorema 1.60. Consideremos la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, con $|x - x_0| < R$, siendo R el radio de convergencia. Entonces f es de clase C^∞ (i.e., tiene derivada de todos los órdenes) y se tiene

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$. Sabemos que esta serie de funciones converge uniformemente en $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, para cualquier $r < R$. Además los términos de la serie son continuos (en función de x), y en $x = x_0$ la serie original toma el valor $f(x_0) = a_0$.

Luego utilizando el Teorema 1.43 se tiene que f' es una función continua y está dada por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r),$$

y $f'(x_0) = a_1$.

Es claro que podemos repetir el mismo argumento que antes, y probar que $f''(x_0) = \frac{d}{dx}f'(x)|_{x=x_0} = 2 \cdot 1 \cdot a_2$.

Con lo anterior hemos concluido que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, tiene derivada de todos los órdenes $x \leq r < R$, y se cumple $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$. Dado que el $r < R$ es arbitrario, concluimos que la clase de diferenciabilidad se extiende a todo el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$. \square

A continuación discutiremos si es válido el recíproco, esto es, si toda función C^∞ podrá escribirse localmente como serie de potencias.

Sea f una función C^∞ en un entorno de x_0 . Si f se puede escribir como serie de potencias en el entorno de x_0 , el candidato a serie es

$$f(x) \stackrel{(?)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

en un entorno de x_0 .

De esta manera definiendo la función g , en un entorno de x_0 , como

$$g(x) := f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

resulta que g , y sus sucesivas derivadas, toman el valor 0, i.e.

$$0 = g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = \dots \quad (1.13)$$

Por lo tanto para probar lo que queremos, alcanza con probar que si g es una función definida en un entorno de x_0 que satisface (1.13), entonces g es idénticamente nula. Sin embargo, como lo muestra la siguiente función, hay funciones no nulas, C^∞ en todo \mathbb{R} , que satisfacen dicha propiedad.

Ejemplo 1.61. La función

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

satisface, $g \in C^\infty$, $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$, pero es claro que $g \neq 0$.

\diamond **1.62.** Probar que la función g , dada en el Ejemplo 1.61, satisface que es C^∞ y todas sus derivadas son cero.

Teorema de función inversa

Comenzaremos esta capítulo realizando unos preliminares sobre espacios métricos.

2.1. Espacios métricos

Definición 2.1. Una *métrica* o *distancia* en un conjunto E es una función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ si $x = y$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in E.$ ^a
- (iv) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E.$

En tal caso diremos que (E, d) es un *espacio métrico*.

^aA esta propiedad se le llama *desigualdad triangular*.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 2.2. 1. (*Valor absoluto en \mathbb{R}*)

El conjunto de números reales \mathbb{R} con $d(x, y) = |x - y|$ es un espacio métrico. En particular $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, siendo \mathbb{Q} el conjunto de números racionales, es un espacio métrico dado que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, y podemos considerar la restricción de la métrica d a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

2. (*Métricas en \mathbb{R}^n*)

En \mathbb{R}^n podemos definir las siguientes métricas

- $d(x, y) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{1/2}$;
- $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $d_\infty(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$.

3. (*Distancia uniforme*)

Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas.¹ En $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ definimos la métrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \quad (2.1)$$

(Ver Comentario 1.14.)

4. (*Espacios normados*)

Sea V un espacio vectorial real o complejo. Una *norma* en V es una función real $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

- (i) $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$ en V ;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo λ escalar, y $x \in V$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo x, y en V .

Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado entonces $d(x, y) := \|x - y\|$ es una métrica en V .

Observar que las métricas definidas en \mathbb{R}^n en el Ejemplo 2.2–2 son métricas que provienen de las normas respectivas

- $\|x\| := (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$;

¹Decimos que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in X$.

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|x\|_\infty := \max_{i:1,\dots,n} |x_i|$.

5. (Métricas en $\mathcal{M}_{n \times n}$)

Consideremos el conjunto $\mathcal{M}_{n \times n} = \mathbb{R}^{n \times n}$, de matrices $n \times n$ con coeficientes reales. Dado $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1,\dots,n}$, definimos la *norma de Frobenius*

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{1/2},$$

Luego definiendo $d_F(A, B) := \|A - B\|_F$, obtenemos que $(\mathcal{M}_{n \times n}, d_F)$ es un espacio métrico.

También se puede definir la *norma de operador* de una matriz como

$$\|A\|_{op} := \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

siendo $\|x\|$ la norma Euclideana en \mathbb{R}^n . En particular se tiene

$$\|Ax\| \leq \|A\|_{op} \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

6. (Espacio de funciones acotadas)

El conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, de funciones $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas, es un espacio vectorial definiendo de manera natural las operaciones punto a punto. De esta forma podemos ver fácilmente que la métrica definida en (2.1), (ver Comentario 1.14) proviene de la norma $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Definición 2.3. Sea (E, d) un espacio métricos. Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in E$, si $\lim_n d(x_n, x) = 0$.

En el Ejemplo 6 se tiene que $d(f_n, f) \rightarrow 0$ si f_n converge uniformemente a f .

- Definición 2.4.** ■ Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ es una *sucesión Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall m, n \geq n_0$ se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
- Un espacio métrico (E, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 2.5. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo. Sin embargo $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no lo es. Esto resulta de que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , y por lo tanto existen sucesión de racionales que convergen a números no racionales.

◇ **2.6.** Probar que \mathbb{R}^n con cualquiera de las normas dadas es completo.

2.2. Teorema de punto fijo

Dado una función $\varphi : E \rightarrow E$, decimos que $p \in E$ es un *punto fijo* si $\varphi(p) = p$.

Un problema importante en matemática es saber cuándo una función tiene puntos fijos.

Definición 2.7. Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $\varphi : E \rightarrow E$ una función. Decimos que φ es una *contracción* si existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

La consante λ se le llama *constante de contracción*.

Ejemplo 2.8. Una función $\varphi : E \rightarrow E$ constante es una contracción con constante igual a 0.

Ejemplo 2.9. Sea $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y consideremos la función $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \pi$, con $x \in \mathbb{R}$. Dado que $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|$, entonces φ es una contracción.

Ejemplo 2.10. Toda función derivable $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|\varphi'(x)| \leq \lambda < 1$, es una contracción. Esto sigue del teorema de valor medio.

Ejemplo 2.11. Consideremos \mathbb{R}^n con la norma euclidea. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $\|T\|_{op} < 1$. Entonces T es una contrac-

ción.

Esto resulta de que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\|_{op} \|x - y\|, \quad x, y, \in \mathbb{R}^n.$$

El siguiente teorema dice que toda contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

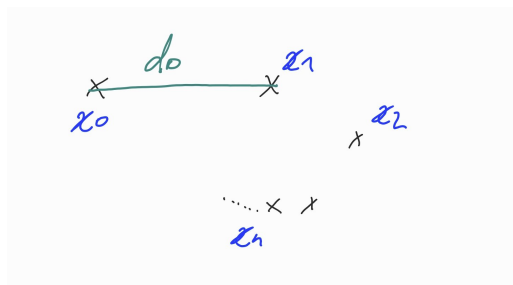
Teorema 2.12 (Teorema de Punto Fijo). *Sea (E, d) un espacio métrico completo, y sea $\varphi : E \rightarrow E$ una contracción. Entonces existe un único $x^* \in E$ tal que $\varphi(x^*) = x^*$.*

Demostración. Sea λ la constante de contracción de φ . Sea $x_0 \in E$. Definimos $x_n := \varphi^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, donde denotamos por $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_n$.

Definimos por d_0 la distancia de la primera iteración, esto es $d_0 := d(x_0, x_1) = d(x_0, \varphi(x_0))$.

Luego resulta

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq \lambda d_0. \\ d(x_2, x_3) &\leq \lambda d(x_1, x_2) \leq \lambda^2 d_0. \\ &\vdots \\ d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^n d_0. \end{aligned}$$



Por lo tanto los puntos de la sucesión $\{x_n\}$ están cada vez más próximos. En particular se tiene lo siguiente.

Afirmación 1: $\{x_n\}$ es de Cauchy

Observar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n+i} d_0 = \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \right) d_0 \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d_0. \end{aligned}$$

Luego, como $\lambda \in [0, 1)$ resulta que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\lim_n d(x_n, x_{n+k}) = 0$. Es un ejercicio verificar que esto implica que la sucesión es de Cauchy.

Afirmación 2: $\varphi(x^*) = x^*$, siendo $x^* = \lim_n x_n$.

Como φ es una contracción, entonces φ es una función continua. Por lo tanto,

$$\varphi(x^*) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*.$$

Afirmación 3: El punto fijo es único.

Sea $y^* \in E$ tal que $\varphi(y^*) = y^*$. Entonces por definición de contracción se tiene

$$d(x^*, y^*) = d(\varphi(x^*), \varphi(y^*)) \leq \lambda d(x^*, y^*).$$

Como $\lambda \in [0, 1)$, resulta que la única posibilidad es que $x^* = y^*$.

□

2.3. Teorema de función inversa

Comenzaremos esta sección estableciendo algunos resultados básicos sobre el espacio de matrices $n \times n$.

2.3.1. Preliminares

Definamos por $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$ invertibles. Su complemento en $\mathbb{R}^{n \times n}$, es el conjunto $\Sigma_{n \times n}$ de matrices no invertibles, i.e.

$$\Sigma_{n \times n} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 0\}.$$

Como la función $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, resulta que el conjunto $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n \times n}$. A continuación daremos una versión cuantitativa de este resultado.

Salvo que se mencione lo contrario, la norma $\|\cdot\|$ en el espacio $\mathbb{R}^{n \times n}$ es la norma de operador $\|\cdot\|_{op}$.

La matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$ la denotaremos por Id_n .

◇ **2.13.** Sea $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, entonces

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Proposición 2.14. i) Sea $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|\text{Id}_n - C\| < 1$. Entonces, C es invertible.

ii) Sea $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, entonces $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

iii) La función $\varphi : \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ dada por $\varphi(A) = A^{-1}$, es continua.

Demostración. i)

Veamos dos pruebas distintas de este hecho.

Si existe $v \neq 0$ tal que $Cv = 0$, entonces $\|(C - \text{Id}_n)v\| = \|v\|$, y por lo tanto $\|C - \text{Id}_n\| \geq 1$.

De manera directa podemos probar que para todo $v \neq 0$ se tiene

$$\|Cv\| = \|v + (C - \text{Id}_n)v\| \geq \|v\| - \underbrace{\|(C - \text{Id}_n)v\|}_{< \|v\|},$$

y como $\|(C - \text{Id}_n)v\| < \|v\|$, se tiene que $\|Cv\| > 0$ para todo v no nulo.

ii)

Observar que B es invertible si y sólo si $A^{-1}B$ es invertible. Por lo tanto, el resultado sigue de la parte i) y de la siguiente desigualdad

$$\|\text{Id}_n - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1.$$

iii)

Dado $A \in \mathbb{G}l(n, \mathbb{R})$, sea B tal que $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, (por lo que B es invertible). Entonces resulta que

$$\begin{aligned} \|\varphi(B) - \varphi(A)\| &= \|B^{-1} - A^{-1}\| & (2.2) \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|AB^{-1} - \text{Id}_n\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \end{aligned}$$

Resta acotar $\|B^{-1}\|$ en función de $\|A - B\|$.

Observar que del Ejercicio 2.13 que $\|Bx\| \geq \frac{1}{\|B^{-1}\|} \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y de hecho en el mínimo es una igualdad. Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \|Bx\| &= \|Ax + (B - A)x\| \geq \|Ax\| - \|(A - B)x\| \\ &\geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|A - B\|, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\frac{1}{\|B^{-1}\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|A - B\|,$$

es decir

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|A - B\|} = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}. \quad (2.3)$$

Luego de (2.2) y (2.3) obtenemos

$$\|\varphi(B) - \varphi(A)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \cdot \|A - B\|,$$

de donde resulta que $\|A - B\| \rightarrow 0$ entonces $\|\varphi(A) - \varphi(B)\| \rightarrow 0$. \square

2.3.2. Teorema de función inversa

Dada una función f definida en un abierto de \mathbb{R}^n , denotamos por $Df(a)$ o $f'(a)$ la derivada de la función.

Teorema 2.15 (Teorema de Función Inversa). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible. Entonces, existe $V \subset U$ abierto, con $a \in V$, de forma que*

$$f|_V: V \rightarrow f(V), \quad \text{es biyectiva}$$

con $f(V)$ abierto. Si $g: f(V) \rightarrow V$ es su inversa (i.e. $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in V$), entonces es una función de clase C^1 que satisface

$$Dg(f(a')) = Df(a')^{-1},$$

para todo $a' \in V$.

Demostración. La prueba se realizará en varios pasos.

Paso 1: Podemos asumir $Df(a) = \text{Id}_n$.

Basta considerar el cambio de variable lineal $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$L(y) = Df(a)^{-1}y, \quad y \in U.$$

Luego el mapa $h := L \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface

$$Dh(a) = DL(f(a)) \circ Df(a)^{-1} = Df(a) \circ Df(a)^{-1} = \text{Id}_n.$$

◇ **2.16.** Es un ejercicio ver que, probar el teorema para una tal h , implica el teorema para f .

De ahora en adelante trabajamos con f satisfaciendo asumimos $Df(a) = \text{Id}_n$.

Paso 2: Sea $V \subset U$, una bola abierta de a tal que $\|Df(x) - \text{Id}_n\| < 1/2$, para todo $x \in V$. Entonces $f|_V: V \rightarrow f(V)$ es biyectiva.

Observar que el tal abierto V de a existe por ser f de clase C^1 , y de que $Df(a) = \text{Id}_n$.

Para probar este paso basta probar que f es una función inyectiva en V .

Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ definimos la función

$$\varphi_y : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{dada por } \varphi_y(x) = x + (y - f(x)), \quad (x \in V)$$

Observar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, la función φ_y tiene un punto fijo en x_y si y sólo si $y = f(x_y)$. En otras palabras, buscar soluciones del sistema $y = f(x)$ con y fijo, es equivalente a buscar puntos fijos de φ_y .

Para probar que $f|_V$ es inyectiva basta probar que φ_y es una contracción (dado que en ese caso de haber un punto fijo, sería único).

Tomando la derivada obtenemos que $\|D\varphi_y(x)\| = \|\text{Id}_n - Df(x)\| < \frac{1}{2}$, para todo $x \in V$. Por lo tanto, utilizando el Teorema de Valor Medio en la bola V resulta que φ_y es $1/2$ -Lipschitz, y por tanto una contracción.

Paso 3: $f(V)$ es abierto.

Sea $y_0 \in f(V)$. Sea $x_0 \in V$ tal que $f(x_0) = y_0$. Por ser V abierto (de hecho es una bola) podemos considerar una bola $B_r := B(x_0, r) \subset V$ tal que $\overline{B_r} \subset V$.² Veremos que $B(y_0, r/2) \subset f(V)$.

Para eso basta probar que si $\|y - y_0\| < r/2$, entonces $\varphi_y(\overline{B_r}) \subset \overline{B_r}$, dado que en tal caso φ_y sería una contracción en un espacio métrico completo, y por Teorema de Punto Fijo 2.12 existiría un único $x \in \overline{B_r}$, solución de $f(x) = y$.

Veamos esto. Tomando $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|y - y_0\| < r/2$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x) - x_0\| &\leq \underbrace{\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\|}_{\frac{1}{2}\text{-Lip}} + \|\varphi_y(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < r, \end{aligned}$$

probando el resultado.³

Paso 4: Sea $g := (f|_V)^{-1} : f(V) \rightarrow V$ la inversa local de f en un entorno V de a . Entonces g es derivable.

²Denotamos por \overline{A} a la clausura del conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

³Una forma de convencerse de esta desigualdad es que $\varphi_{y_0}(\overline{B_r}) \subset \overline{B_{r/2}}$, y como $\|\varphi_y - \varphi_{y_0}\| = \|y - y_0\| < r/2$, resulta que φ_y transforma $\overline{B_r}$ en $\overline{B_r}$.

Lo que hay que probar es lo siguiente: si $y \in f(V)$, entonces existe una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{\|k\| \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y) - T \cdot k}{\|k\|} = 0. \quad (2.4)$$

Dado que $x \in V$, se tiene $Df(x)$ es invertible por Proposición 2.14.

De la identidad local $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in V$, resulta que de ser diferenciable g en $f(x)$, se tiene $Dg(f(x)) \cdot Df(x) = \text{Id}_n$, por lo que el candidato a transformación lineal T es $(Df(x))^{-1}$.

Dado que $f(V)$ es abierto, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{R}^n$ con $\|k\| < \delta$, entonces $y+k \in f(V)$. Luego, existe único $h := h(k) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x+h \in V$ que satisface $f(x+h) = y+k$ (o análogamente, $x+h = g(y+k)$).

Observar que

$$\begin{aligned} \varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= [x+h + \overbrace{(y-f(x+h))}^{-k}] - [x+y - \overbrace{f(x)}^0] \\ &= [x+h-k] - [x] = h-k, \end{aligned}$$

de donde se deduce $\|h-k\| \leq \|h\|/2$. En particular, de la desigualdad triangular se tiene $\|h\| \leq 2\|k\|$, lo cual implica que si $k \rightarrow 0$ entonces $h \rightarrow 0$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \frac{g(y+k) - g(y) - Tk}{\|k\|} &= \frac{h - (Df(x))^{-1}k}{\|k\|} \\ &= - \frac{(Df(x))^{-1}[k - Df(x)h]}{\|k\|} \\ &= - \frac{(Df(x))^{-1}[f(x+h) - f(x) - Df(x)h]}{\|k\|} \\ &= - \frac{(Df(x))^{-1}[f(x+h) - f(x) - Df(x)h]}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}, \end{aligned}$$

de donde resulta que el límite (2.4) es igual a

$$- \lim_{\|k\| \rightarrow 0} \frac{(Df(x))^{-1}[f(x+h) - f(x) - Df(x)h]}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|} = 0,$$

probando que g es derivable en $y \in f(V)$.

Paso 5: La función inversa $g = (f|_V)^{-1}$ es de clase C^1 .

Observar que g es continua por ser una función derivable.

Dado $y \in f(V)$, sea $x \in V$ la única solución en V del sistema $y = f(x)$. Entonces

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1} = (Df(g(y)))^{-1}, \quad y \in V. \quad (2.5)$$

Luego, utilizando Proposición 2.14, se tiene que $y \rightarrow Dg(y)$, ($y \in V$) es una función continua por ser composición de funciones continuas. Luego la función $g = (f|_V)^{-1}$ es de clase C^1 . \square

Corolario 2.17. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $Df(x)$ es invertible para todo $x \in U$, entonces $f(W)$ es un conjunto abierto para todo abierto W de U , i.e. f es una función abierta.

Comentario 2.18. Se puede probar que la diferenciabilidad de la inversa de una función es la misma que la de la función. Esto surge de utilizar el hecho que la función $\varphi : \mathbb{G}l(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}l(n, \mathbb{R})$ dada por en $\varphi(A) = A^{-1}$, además de ser continua por Proposición 2.14, es una función C^∞ . Esto resulta de que, utilizando la *regla de Cramer*, $\varphi(A)$ es una función racional en los coeficientes de A . Luego de la expresión (2.5) se tiene que la diferenciabilidad de Dg hereda la diferenciabilidad de g , y por tanto trabajando inductivamente obtenemos que es diferenciable y continua de cualquier orden.

Ejemplo 2.19. Supongamos que queremos saber si dados $z, w > 0$ podemos encontrar $x, y > 0$ solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} z = x + y \\ w = x \cdot y \end{cases}$$

También ver si en tal caso las soluciones son únicas. A continuación haremos un análisis “desordenado” de este sistema.

Dicho en término de funciones, lo que queremos analizar es la función $f(x, y) = (x + y, xy) = (z, w)$, con $x, y > 0$. ¿cuál es su imagen (i.e. los (z, w) que sí tendrán correspondiente)?, ¿es f es inyectiva?, o más precisamente ¿para cuáles (x_0, y_0) , $x_0, y_0 > 0$ puedo invertir localmente la función?

Comencemos analizando la imagen de f :

Observando el gráfico no es posible encontrar soluciones de $z = 1/2$ y $w = 1$. Por lo tanto la imagen de f es un subconjunto estricto del cuadrante positivo. De hecho sabremos que hay solución siempre que la recta $z = cte$ y la hipérbola $w = cte$ se intersecten. Y además es fácil convencerse que, salvo el caso que son tangentes, siempre hay dos puntos de corte en el cuadrante positivo, i.e. dos soluciones distintas, uno donde $x > y$ y otro donde $x < y$. Y de hecho los puntos de tangencia ocurren sobre diagonal $x = y$.

Intentemos describir la imagen analíticamente. Dados $x, y > 0$, se tiene

$$z^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2w,$$

y además de la desigualdad $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, resulta que

$$z^2 \geq 4w, \quad \text{con } z, w > 0$$

y la igualdad solo ocurre si $x = y$.

En otras palabras la función f mapea la semirrecta $(x, x) : x > 0$ en la (semi)parábola $z^2 = 4w, z, w > 0$, y cualquier otro punto del plano en la región

$$z^2 - 4w > 0, \quad w > 0, z > 0.$$

Observar que $f(x, y) = f(y, x)$, de hecho lo que está ocurriendo es que el mapa f “pliega”, el cuadrante $x, y > 0$ a través de la diagonal, y luego “tuerce” la diagonal para que quede la parte positiva de la parábola.

Ahora analicemos este problema con lo que sabemos del Teorema de Función Inversa (TFI).

Sea (x_0, y_0) con $x_0 > 0, y_0 > 0$. Para saber si podemos mapear biyectivamente entornos de (x_0, y_0) en $(z_0, w_0) = f(x_0, y_0)$ tenemos que calcular su derivada. Se tiene

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Luego concluimos que $Df(x_0, y_0)$ es singular si (x_0, y_0) están en la diagonal. Fuera de esta, el TFI asegura que podemos encontrar una inversa

local de f por lo que existiría una única solución de (z, w) en dicho entorno. Observar que simetrizando $(x, y) \mapsto (y, x)$ tendremos otra inversa local.

Ahora, qué sucede en la diagonal. El teorema de función inversa no nos dice nada si podría existir, o no, una inversa local. Pero de lo analizando anteriormente lo que sucede es que localmente, i.e. en cualquier entorno de (x_0, x_0) , podemos encontrar puntos arbitrariamente cerca tales que van a un mismo punto en la imagen, y por lo tanto no será inyectiva en ningún entorno.

2.4. Teorema de Función Implícita

[3 clases]

Dada una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, con $n \geq k$, el *conjunto de nivel* de f asociado al valor $r \in \mathbb{R}^k$, es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $f(x) = r$, i.e.

$$\mathcal{M}_r := f^{-1}(r) = \{x \in U : f(x) = r\}, \quad r \in \mathbb{R}^k$$

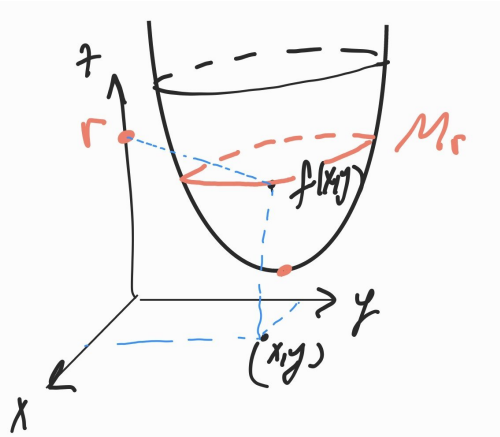


Figura 2.1: Conjunto de nivel de f

A priori no podemos decir mucho sobre este conjunto, pero el Teorema de Función Implícita 2.23 nos dará información relevante. En particular apuntará a contestar las siguientes preguntas

- (analítica) Si conocemos una solución del sistema, ¿existen soluciones cercanas?
- (geométrica) En caso afirmativo, ¿cómo son esas soluciones cercanas?

Como veremos más adelante, asumiendo que la función f es C^1 resulta que “muchos” r 's (de hecho para la mayoría de los valores)⁴ los conjuntos de nivel \mathcal{M}_r tienen “buenas” propiedades geométricas.

⁴En secciones posteriores volveremos a este tema.

Cuando trabajamos con funciones de C^1 de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, los conjuntos de nivel son “típicamente” curvas. y por esa razón a veces se abusa de lenguaje llamando \mathcal{M}_r como *curva de nivel*.

La idea de esta sección, y algunas futuras, es tratar de entender y describir estos conjuntos de nivel localmente, y explicar qué se entiende por las “comillas” puestas hasta ahora.

Pero primero veamos algunos ejemplos motivadores.

Ejemplo 2.20. Consideremos la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

El conjunto de nivel \mathcal{M}_0 , es el círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, i.e. la circunferencia unidad.

La pregunta que queremos estudiar en esta sección, para este ejemplo particular, es la siguiente.

¿Cuándo podemos representar el conjunto de nivel $f^{-1}(0)$ como el gráfico de una función de x en y ?

En otras palabras, dado $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$, queremos saber si existe una función φ , definida localmente cerca un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

En este ejemplo sencillo, podemos resolver la ecuación

$$x^2 + \varphi(x)^2 = 1,$$

para x en un entorno de x_0 . Además es fácil ver que que hay dos posibles soluciones

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

(Ver Figura 2.20.)

Y salvo el caso de $x_0 = \pm 1$, siempre podemos describir localmente la curva de nivel como el gráfico de alguna de las dos funciones anteriores.

Observar que los únicos punto problemáticos son $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$. En ese lugar el gradiente de la función f , i.e. $\nabla f(x, y) = (\partial_x f, \partial_y f)$, tiene dirección horizontal, o lo que es equivalente, $\partial_y f = 0$.

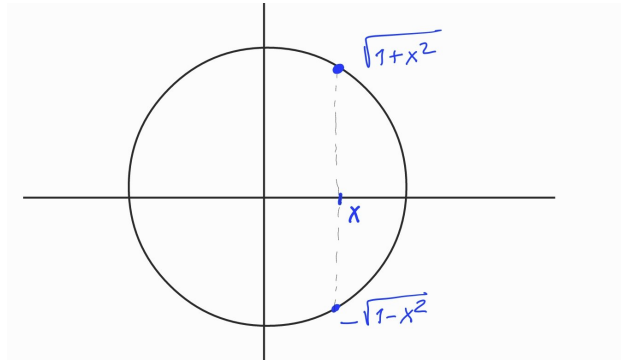


Figura 2.2:

Con este ejemplo en mente podríamos asegurar que siempre que $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, en un punto (x_0, y_0) en la curva de nivel, entonces localmente podremos describir y como función de x . Es decir, que existe φ definida en un entorno de x_0 tal que $f(x, \varphi(x)) = 1$. A dicha función se le llama *función implícita*, y el Teorema de función implícita prueba y extiende a más dimensiones este argumento.

En el caso anterior, de hecho, teníamos una expresión *explícita* de $\varphi(x)$, pero esto no es la regla.

Vale mencionar que en el caso de los dos puntos problemáticos, uno podría describir la curva de nivel despejando x en función de y . Esto es, existe una función ψ definida en un entorno de $y = 0$ tal que $f(\psi(y), y) = 0$.

Uno podría considerar una función $f(x, y)$ sencilla como $y^2 - x^2 + x^3$, sin embargo responder a las cuestiones anteriores puede ser no trivial. De hecho, el punto $(0, 0)$ es un punto bastante más problemático que el caso anterior, dado que no existe una función implícita para ninguna de las dos variables. (Ver Comentario [2.24](#))

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 2.21 (Raíces de polinomios). Sea \mathcal{P}_d el espacio vectorial de todos los polinomios, con coeficientes reales, de grado menores o iguales a d . Observar que \mathcal{P}_d puede ser identificado naturalmente con \mathbb{R}^{d+1} via el mapa

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mapsto p_a \in \mathcal{P}_d,$$

$$\text{con } p_a(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d, z \in \mathbb{R}.$$

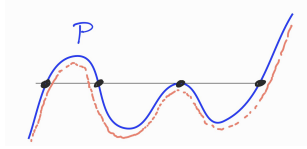


Figura 2.3: Raíces de un polinomio.

Bajo esta identificación consideremos el mapa *evaluación*

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}((a_0, \dots, a_d), z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i.$$

La pregunta ahora sería,

¿cuándo podemos escribir la solución $z : \sum_{i=0}^d a_i z^i = 0$, en función de los coeficientes a_0, \dots, a_d ? ¿Esa función es continua? ¿es diferenciable? ¿cuándo podemos asegurar su existencia?

Este es un problema general muy difícil (averiguar por Galois). Por ejemplo, saber si existe, o no, soluciones de $\sum_{i=0}^d a_i z^i = 0$ un problema nada trivial (c.f. problema 10 de Hilbert). Sin embargo, veremos en el Teorema de Función Implícita nos da información muy relevante en el caso de conocer al menos una solución y lo que ocurre en un entorno de ella.

Heurísticamente, si $z_0 \in \mathbb{R}$ es solución de $p(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i = 0$, es realizando un bosquejo, podríamos convencernos que salvo el caso de que z_0 sea una raíz singular (i.e., $p'(z_0) = 0$), entonces en un entorno muy pequeño de los coeficientes se tendría que hay una única solución raíz local.

Observar que eso ocurre cuando $\frac{\partial \mathcal{E}(a, z)}{\partial z} = p'(z) \neq 0$.

Ejemplo 2.22 (Caso lineal). Sea $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^k)$, i.e. una transformación lineal de \mathbb{R}^{m+k} en \mathbb{R}^k . Tomando la base canónica, podemos escribir f en forma matricial como

$$A = [A_1 | A_2], \quad \text{con } A_1 \in \mathbb{R}^{m \times k}, A_2 \in \mathbb{R}^{k \times k}.$$

De esta manera podemos considerar el sistemas de ecuaciones lineal

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1 x + A_2 y = b, \quad x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k,$$

para cierto $b \in \mathbb{R}^k$.

Para este caso podríamos preguntarnos cuándo hay soluciones (i.e. que el conjunto de nivel $\mathcal{M}_b = f^{-1}(b) \neq \emptyset$), y si lo hay saber si podemos despejar $y \in \mathbb{R}^k$ en función de $x \in \mathbb{R}^m$.

La respuesta es bastante sencilla. Si suponemos que A_2 es invertible entonces podemos asegurarnos que hay soluciones (basta tomar $x = 0$ e $y = (A_2)^{-1}b$), y además tenemos

$$(A_2)^{-1}A_1x + y = (A_2)^{-1}b.$$

Por lo tanto tenemos que si definimos el mapa lineal afín

$$\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{como} \quad \varphi(x) = (A_2)^{-1}(b - A_1x), \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

entonces

$$\varphi(0) = (A_2)^{-1}b, \quad \text{y} \quad f(x, \varphi(x)) = A_1x + A_2\varphi(x) = b, \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

En particular se tiene

$$D\varphi(0) = -(A_2)^{-1}A_1.$$

Antes de enunciar el teorema expliquemos un poco la notación.

Si $f: E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable, y escribimos $f(x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^m$, e $y \in \mathbb{R}^k$, entonces denotamos por las derivadas $\partial_x f(a, b)$ a la derivada del mapa $f(\cdot, b): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ evaluada en a . Análogamente, denotamos por $\partial_y f(a, b)$ a la derivada del mapa $f(a, \cdot): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ evaluada en b .

Teorema 2.23 (Teorema de Función Implícita). *Sea $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ un abierto, $(a, b) \in E$. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función de clase C^1 , tal que $f(a, b) = 0$. Supongamos que $\partial_y f(a, b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ es invertible, entonces*

- *existen radios $r_0, r_1 > 0$ tales que para todo $x \in B_m(a, r) \subset \mathbb{R}^m$, existe un único $y \in B_k(b, r_1) \subset \mathbb{R}^k$, tal que $f(x, y) = 0$.*
- *La función $\varphi : B_m(a, r_0) \rightarrow B_k(b, r_1)$ determinada en la parte anterior se le llama función implícita, y satisface $f(x, \varphi(x)) = 0$, para $x \in B_m(a, r_0)$, y*

$$D\varphi(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x)), \quad (x \in B_m(a, r_0)).$$

Comentario 2.24. Es importante destacar que cuando estamos en las condiciones de función implícita, las curvas de nivel no pueden tener comportamientos locales como las del conjunto solución de $x \cdot y = 0$ en el entorno de $(0, 0)$.

Demostración. Sea $F : E \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ definida por

$$F(x, y) = (x, f(x, y)), \quad (x, y) \in E. \quad (2.6)$$

Observar que $F(a, b) = (a, f(a, b)) = (a, 0)$. Además F es de clase C^1 . Veamos que $DF(a, b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^{m+k})$ es invertible.

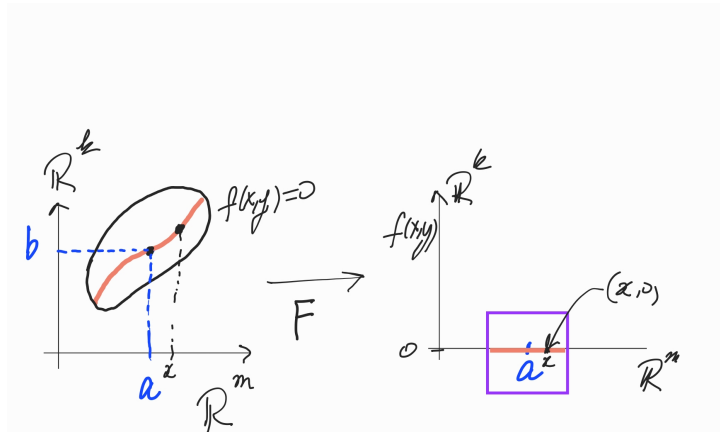
Un cálculo sencillo muestra que

$$DF(a, b) = \begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0 \\ \partial_x f(a, b) & \partial_y f(a, b) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que $DF(a, b)$ es invertible (en particular se tiene $\det DF(a, b) = \det \partial_y f(a, b) \neq 0$).

Luego podemos aplicar el Teorema de Función Inversa para la función F y concluir que existe un entorno abierto de (a, b) , a saber $U \times V \subset E$, con $U \subset \mathbb{R}^m$ ($a \in U$) y $V \subset \mathbb{R}^k$ ($b \in V$), y un entorno abierto $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ que contiene a $(a, f(a, b)) = (a, 0)$ tales que

$$F|_{U \times V} : U \times V \rightarrow W,$$



con $F|_{U \times V}$ invertible, con inversa de clase C^1 .

Por la forma especial de F , se tiene que si fijamos $x^* \in U$, todo punto $(x^*, y) \in U \times V$ se mapea en un punto de la forma $(x^*, z) \in W$ (y esta correspondencia es biunívoca). En otras palabras, el mapa $F|_{U \times V}$ fija la primer coordenada. Y como $F|_{U \times V}$ es biyectiva se tiene que dado $x^* \in U$, existe un único $y^* \in V$ tal que $F|_{U \times V}(x^*, y^*) = (x^*, 0) \in W$. Más precisamente, dado $x \in U$, existe $\varphi(x) \in V$ tal que

$$(F|_{U \times V})^{-1}(x, 0) = (x, \varphi(x)), \quad x \in U.$$

Es fácil ver que esta función φ es de clase C^1 dado que $\varphi(x) = \Pi_2(F|_{U \times V})^{-1}(x, 0)$, siendo Π_2 la proyección canónica de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ en \mathbb{R}^k .

Además $f(x, \varphi(x)) = \Pi_2 \circ F(x, \varphi(x)) = \Pi_2(x, 0) = 0$. En particular como $(a, b) \in U \times V$ y $f(a, b) = 0$ se tiene que $\varphi(a) = b$.

La derivada de la función implícita resulta de derivar respecto a $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ la identidad $f(x, \varphi(x)) = 0$, en $x = a$, de donde resulta utilizando la regla de la cadena

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \varphi(x)) = \partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x),$$

y dado que $\partial_y f(x, \varphi(x))$ es invertible en W (porque F lo es), resulta

$$D\varphi(x) = -(\partial_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \partial_x f(x, \varphi(x)), \quad (x \in U).$$

□

Comentario 2.25. Observar que de la prueba del Teorema de Función Implícita podemos sacar más conclusiones, para valores de $f(x, y) = z$ para $z \in \mathbb{R}^k$ en un entorno de 0.

La función $F|_{U \times V} : U \times V \rightarrow W$, dada en (2.6) satisface que para todo $(x, z) \in W$,

$$(F|_{U \times V})^{-1}(x, z) = (x, y_z),$$

donde $y_z \in V$ es el único que satisface $f(x, y_z) = z$. En particular, resulta

$$f \circ (F|_{U \times V})^{-1}(x, z) = z,$$

para x definida en un entorno abierto de $a \in \mathbb{R}^m$. Es decir, hemos encontrado un cambio de coordenadas en el entorno de (a, b) tal que la función f se comporta como la proyección en las últimas coordenadas. Este argumento ayuda a probar el siguiente resultado, conocido en la literatura como *forma local de las submersiones*.

Teorema 2.26 (Forma local de las submersiones). *Sea $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($n \geq k$) una función C^1 definida en un abierto E . Si $f(p) = 0$ y el diferencial $Df(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tiene rango máximo, entonces existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ y un mapa biyectivo $g : W \rightarrow g(W) \subset \mathbb{R}^n$, con $p \in g(W)$, de clase C^1 con inversa C^1 tal que*

$$f \circ g(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-k+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in W.$$

Demostración. Reescribimos f como una función de $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ en \mathbb{R}^k , donde escribimos $(a, b) := p$ en estas coordenadas. Si la derivada de f respecto a las últimas k variables es invertible, el resultado sigue del Comentario 2.25.

Si no resulta invertible dicho diferencial, sabemos que existen k coordenadas, a saber x_{j_1}, \dots, x_{j_k} tales que la matriz de derivadas parciales $((\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_\ell}}(p)))_{i,\ell=1,\dots,k}$ es invertible. Luego considerando la permutación de coordenadas $\pi_k(x_1, \dots, x_n) := (\dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$, (donde permuta las variables de manera tal que las relevantes sean las últimas) se tiene que la función $f \circ \pi_k$ está en las hipótesis del Teorema de Función Implícita 2.23, y por tanto resulta el resultado. (Se deja a cargo del estudiante convencerse de este último argumento.) \square

Variedades Diferenciables

3.1. Motivación

En \mathbb{R}^n , si consideramos el conjunto solución de una ecuación lineal

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

resulta ser un subespacio lineal de dimensión $n - 1$, (o codimensión 1).

Más en general, el conjunto solución de un sistema de $n - k$ ecuaciones lineales, típicamente, es un subespacio vectorial de dimensión k . El típicamente, puede ser formalizado de varias maneras. Por ejemplo solicitando que la transformación lineal inducida, como mapa de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n-k} , es de rango máximo. En tal caso, el núcleo de la transformación lineal es el subespacio en cuestión. Y cada ecuación lineal agregada resulta en considerar la intersección del subespacio dado hasta el momento, con un subespacio de codimensión 1.

Las *variedades diferenciables* en \mathbb{R}^n surgen como soluciones de sistemas de ecuaciones generales “típicas”,

$$\begin{cases} h_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ h_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

donde $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^1 . Para tener que las intersecciones de los

conjuntos de nivel $h_i^{-1}(0)$ sean razonables, es necesario definir qué se entiende por “típico” en este caso.

3.2. Definición y ejemplos

Formalmente una *variedad diferenciable en \mathbb{R}^n* de dimensión d es un subconjunto del mismo que localmente es una “deformación suave” de un entorno de un subespacio de dimensión d en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, una curva en el espacio es una variedad diferenciable de dimensión 1.

A continuación formalizaremos esta idea intuitiva, donde necesitamos precisar qué entendemos por “deformación suave”.

Definición 3.1. Sean U y V abiertos de \mathbb{R}^n . Un función $f: U \rightarrow V$ de clase C^∞ con inversa C^∞ se llama *difeomorfismo*.

Con esta definición podemos definir formalmente las variedades.

Definición 3.2. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se llama *variedad diferenciable de dimensión d* si para todo $p \in M$ se tiene lo siguiente:

- Existe un abierto U de p , un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$, y un difeomorfismo $h: U \rightarrow W$ tal que

$$\begin{aligned} h(U \cap M) &= W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}) \\ &= \{y \in W : y_{d+1} = \dots = y_n = 0\}. \end{aligned}$$

Observar que con esta definición estamos describiendo localmente la variedad M como el conjunto solución

$$h_{d+1}(x) = \dots = h_n(x) = 0, \quad \forall x \in U \cap M.$$

siendo $h = (h_1, \dots, h_n)$.

En otras palabras, $U \cap M$ es “a menos de un difeomorfismo” el subespacio $\mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

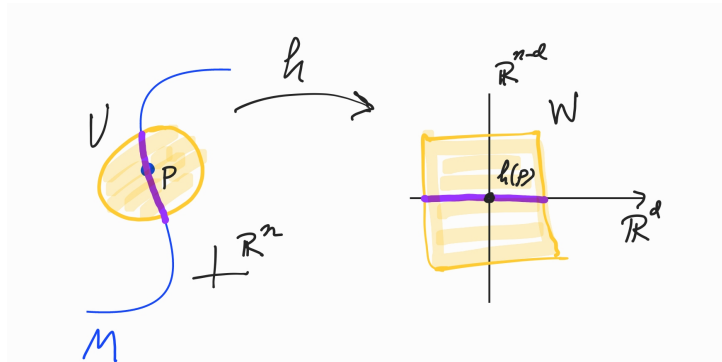


Figura 3.1: Variedad diferenciable en \mathbb{R}^n .

Tomando los casos extremos de esta definición, a saber, cuando $k = 0$ y $k = n$, tenemos que $M = \{p\}$ es una variedad 0-dimensional, y $M = U$ un abierto de \mathbb{R}^n es una variedad n -dimensional.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3. El espacio \mathbb{R}^n es trivialmente una variedad diferenciable de dimensión n .

Ejemplo 3.4. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial de dimensión d . Entonces V es una variedad diferenciable de dimensión d en \mathbb{R}^n . Esto resulta de que se puede construir un difeomorfismo (global y lineal) e \mathbb{R}^n en sí mismo que satisfaga la condición. (Basta tomar una transformación lineal ortogonal.)

◇ **3.5.** Asumiendo que V es generado por los vectores $\{v_1, \dots, v_d\} \subset \mathbb{R}^n$, dar una expresión explícita del difeomorfismo h .

Ejemplo 3.6. El grupo lineal $GL_n(\mathbb{R})$ de matrices $n \times n$, con coeficientes reales, invertibles, es una variedad diferenciable, por ser un abierto de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ejemplo 3.7. Consideremos el conjunto $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, y queremos probar que es una variedad en el entorno de un punto $(0, 1) \in S^1$.

Motivados por lo estudiado en la Sección 2.4, consideramos el mapa $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $h(x, y) = (x, x^2 + y^2)$. Observar que $h(0, 1) = (0, 0)$. Es fácil ver que $\det Dh(x, y) = 2y$, y por lo tanto $Dh(x, y)$ es invertible fuera

del eje $y = 0$. En particular, del teorema de función inversa 2.15 sabemos que existen abiertos U de $(0, 1)$ y V de $(0, 0)$, tal que $h|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo.

Además se tiene que si $(x, y) \in U$, satisface $x^2 + y^2 = 1$, entonces $h(x, y) = (x, 0)$. En otras palabras,

$$h(U \cap S^1) \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap V.$$

Por otro lado, si $(x, 0) \in V$, se tiene que su única preimagen por h en U satisface $x^2 + y^2 = 1$, i.e. la inclusión anterior es una igualdad, y con esto probando que S^1 es una variedad en un entorno del punto $(0, 1)$.

—Dibujo

3.2.1. Preimagen de valor regular

Como nos imaginamos, podríamos tratar localmente cualquier punto en S^1 con un argumento muy similar, y probar que es una variedad. Pero ese camino pedestre puede ser remplazado con un teorema muy importante que daremos a continuación. Pero antes, definamos a lo que referimos por valor regular.

Definición 3.8 (Valor regular). Sea $f : U \rightarrow V$ una función diferenciable entre abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, y $V \subset \mathbb{R}^k$. Decimos que $q \in \text{Im}(f) \subset V$ es un *valor regular* de f si $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva siempre que $x \in f^{-1}(q)$.

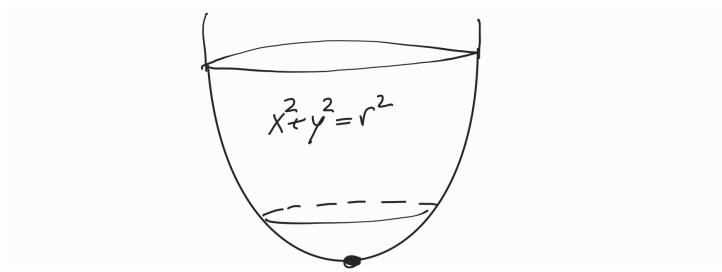
Una forma de fabricar muchos ejemplos de variedades resulta del siguiente resultado, que en esencia, es el teorema de función implícita.

Teorema 3.9 (Teorema de la preimagen de un valor regular). Sea $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, con E abierto, un mapa C^∞ . Si $q \in \mathbb{R}^k$ un valor regular de f , entonces $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n - k$.

Demostración. Del Teorema 2.26 se tiene que existe un difeomorfismo (de abiertos de \mathbb{R}^n) $g : W \rightarrow U$, con $p \in U$, tal que $f(g(x_1, \dots, x_n)) = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$. Luego, para $x \in W$ se tiene que $g(x) \in f^{-1}(0)$ si y sólo si $x_{n-k+1} = \dots = x_n = 0$. (En este caso la h buscada es g^{-1} .) \square

3.2.2. Ejemplos

Ejemplo 3.10. Observar que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto de nivel 1 de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $\nabla f(x, y) = 2(x, y)$, resulta que todo $r^2 > 0$ es valor regular de f . Por lo tanto por el Teorema 3.9 resulta que S^1 es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^2 , de dimensión 1. De hecho cualquier círculo (no degenerado: $r^2 > 0$), $\{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 1.



Veamos algunos ejemplos

- Ejemplos 3.11.**
1. La esfera $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^{n+1} de dimensión n .
 2. El gráfico de una función a valores reales de clase C^∞ , definida en un abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, dado por $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, es una variedad diferenciable. ¿De qué dimensión?
 3. Sea $\mathcal{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = \text{Id}_n\}$ el grupo de matrices ortogonales de tamaño n .
 4. El grupo especial lineal $SL_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ es una variedad diferenciable.
 5. Variedad de Stiefel: $\mathcal{S}_{2,n} = \{(x, y) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : \langle x, y \rangle = 0\}$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual de \mathbb{R}^n . (Sug.: considerar $\mathcal{S}_{2,n} \subset \mathbb{R}^{2n}$.)
 6. Variedad de Stiefel general: $\mathcal{S}_{k,n} = \{A \in \mathbb{R}^{k \times n} : A^T A = \text{Id}_k\}$.

◇ 3.12. Probar que los ejemplos anteriores son variedades diferenciables.

Hemos visto distintos ejemplos de lo que son variedades, pero ¿qué conjuntos no son variedades? Para encontrar ejemplo de estos conjuntos, basta asegurarnos de que no puede existir un difeomorfismo h que cumpla la condición dada en la definición.

Por ejemplo, el conjunto solución \mathcal{C} en \mathbb{R}^2 dado por $x \cdot y = 0$, se puede probar trivialmente que es una variedad de dimensión 1 en cualquier par de puntos que no sean el $(0,0)$. Basta tomar como h la identidad local (o en su defecto la rotación de $\pi/2$ para obtener la forma requerida por h). Sin embargo \mathcal{C} , en un entorno del origen, tiene un problema “topológico”. Por ejemplo si existiera tal difeomorfismo, al “sacar” el punto $(0,0)$ de \mathcal{C} , tendríamos 4 componentes conexas localmente en un entorno de ese punto, sin embargo, ese conjunto se enviaría a un conjunto con dos componentes conexas. Dado que el difeomorfismo es también un homeomorfismo, esto sería un absurdo.

Dibujo

3.3. Variedades via parametrizaciones

Una manera alternativa de definir las variedades es via *parametrizaciones*. Realicemos un ejemplo.

Ejemplo 3.13. Una manera natural y sencilla de describir S^1 es via las imágenes de mapas tipo $t \in (-1, 1) \rightarrow \varphi(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \in \mathbb{R}^2$.

En muchos casos las variedades pueden describirse de esa manera y necesitamos determinar qué propiedades deben cumplir estos mapas para realmente obtener una variedad.

En el ejemplo de S^1 , veamos que podemos manipular la función $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ para obtener un difeomorfismo como el solicitado en la definición de variedad diferenciable. Trabajemos en el entorno del punto $(0, 1) \in S^1$.

Nuestro objetivo es a partir de φ construir una función h que sea un difeomorfismo de un entorno de un punto en S^1 (con $y > 0$).

Una manera de hacerlo es “extender” nuestra función φ a ser un difeomorfismo entre abiertos del plano. Con esto en mente, y nuestra

experiencia sobre los teoremas dados en el capítulo anterior, consideramos el mapa

$$\Phi : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t, s) = \varphi(t) + (0, s) = (t, \sqrt{1-t^2} + s).$$

Observar que $\Phi(t, 0) = \varphi(t) \in S^1$, y en particular $\Phi(0, 0) = (0, 1)$. Además

$$D\Phi(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que el diferencial de Φ es invertible en todo su dominio. Mirando simplemente el punto $(0, 0)$ en el dominio obtenemos que Φ es difeomorfismo local definido en un entorno de $(0, 0)$, a saber $V \subset (-1, 1) \times \mathbb{R}$, en un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $\Phi(0, 0) = (0, 1)$. Veamos que $h := (\Phi|_V)^{-1} : U \rightarrow V$ es nuestro mapa buscado.

Como $\Phi(t, 0) = \varphi(t) \in S^1$, resulta que para los $(t, 0) \in V$ se tiene $\Phi(t, 0) \in S^1 \cap U$. Por lo que

$$\Phi((\mathbb{R} \times \{0\}) \cap V) \subseteq S^1 \cap U.$$

Pero como todo punto de $S^1 \cap \{y > 0\}$ se escribe como $\varphi(t)$, para algún $t \in (-1, 1)$, resulta que la anterior inclusión es una igualdad. Hemos probado que

$$h(U \cap S^1) = (\Phi|_V)^{-1}(U \cap S^1) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap V,$$

y por lo tanto obteniendo a partir de la parametrización que S^1 es una variedad.

Una pregunta importante es definir qué propiedades le debemos pedir a la parametrización para obtener una variedad diferenciable.

Hagamos el razonamiento para curvas, dado que de acá llegaremos a las buenas propiedades a solicitarle a una parametrización.

Además de que sea C^∞ , se debería pedir inyectividad para que no existan auto intersecciones, lo cual sabemos que no es variedad.

¿Podría la parametrización tener derivada cero? En principio, sí, pero veamos que podríamos crear “puntas” en los conjuntos resultantes. La idea es que la velocidad de la curva la puedo disminuir hasta hacer 0 para luego empezar en

otra dirección. Por ejemplo, una forma de “parametrizar” el gráfico de la función valor absoluto es considerar la función $t \rightarrow (t^3, |t^3|)$ (que es una función C^2 , pero podríamos hacer lo mismo con una función que sea C^∞). Este ejemplo sugiere que deberíamos pedir derivada no nula en todo su dominio.

En conclusión, debemos pedir que la función sea inyectiva, y con derivada inyectiva. “¿Alcanzará con esto?”

La respuesta es no. La razón está en que la función podría ser inyectiva pero igual la curva podría acumular sobre ella misma en algún punto. Un ejemplo sencillo de mostrar esto es la figura del 8 que puede ser parametrizada por

$$\gamma: (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

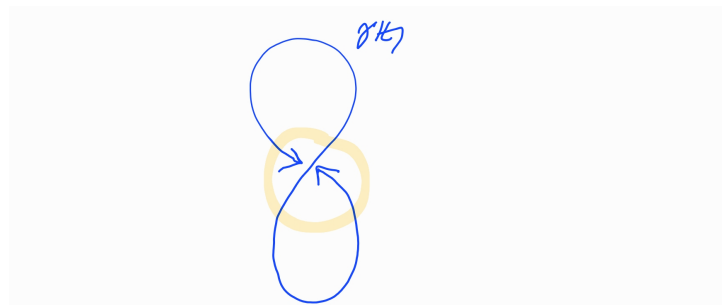


Figura 3.2: Imagen de γ en \mathbb{R}^2 (el “8”).

Es fácil ver que en $t = \pi/2$ la función atraviesa el origen de \mathbb{R}^2 , pero la curva se aproxima al origen t se acerca a los extremos del intervalo.

La imagen de la curva, es el “8”, y por lo tanto en un entorno del origen no puede ser una variedad diferenciable (por tener una autointersección).¹

Comentario 3.14. Lo que está pasando en este ejemplo es un tema *topológico*. Una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$ puede heredar la topología de \mathbb{R}^n de manera natural, simplemente declarando abiertos de M como aquellos conjuntos que resultan de intersectar abiertos de \mathbb{R}^n con la variedad M (i.e. la *topología relativa*). Por otro

¹ Observar que el mapa $\Phi(t, s) = (\sin 2t, \cos t + s)$, similar la definido en el ejemplo anterior, es un difeomorfismo local entre un entorno de $(t, s) = (\pi/2, 0)$ y un entorno del origen en \mathbb{R}^2 , pero la preimagen local por Φ de un entorno del origen en \mathbb{R}^2 cortado con la $\text{Im}(\gamma)$ es la unión de $(t, s) \in (-\delta, \delta) \times \{0\}$ con una curva que atraviesa la horizontal.

lado, dada una una una parametrización (que en nuestro caso es inyectiva y por tanto biyectiva en su imagen), uno puede inducir una topología en la variedad simplemente declarando que los abiertos son imágenes de abiertos por la parametrización. El problema que surge en nuestro ejemplo es que estas dos topologías no son las mismas. Los abiertos inducidos por la parametrización, en el entorno del origen en \mathbb{R}^2 , claramente no ven las otras dos ramas que están acumulando, pero estas si aparecen claramente en la topología relativa.

El ejemplo anterior y las discusiones posteriores motivan el siguiente resultado, que es una caracterización de variedades via parametrizaciones.

Teorema 3.15. *Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable d -dimensional si y sólo si para todo $x \in M$ se satisface lo siguiente:*

- *Existe un abierto U conteniendo x , un abierto $V \subset \mathbb{R}^d$, y una mapa C^∞ inyectivo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*
 1. $\varphi(V) = M \cap U$;
 2. $D\varphi(y)$ tiene rango máximo para todo $y \in V$;
 3. $\varphi^{-1} : \varphi(V) \rightarrow V$ es continua (con topología relativa).

Observar que en el Ejemplo 3.13, podemos tomar $V = (-1, 1)$ y $U = \{(x, y) : y > 0\}$. Además la función φ^{-1} es la proyección canónica Π_1 en la primer coordenda restringida a la imagen de φ , la cual es claramente continua.

La propiedad 3 es justamente la propiedad que nos permite evitar las acumulaciones sobre la imagen misma. (Ver Comentario 3.14.)

Demostración del Teorema 3.15. (\Rightarrow) Si M es una variedad d -dimensional en \mathbb{R}^n , sea h la función dada en la Definición 3.2.

Basta probar que la función $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(y) := h^{-1}(y, 0_{n-d})$, siendo V el subconjunto de \mathbb{R}^d dado por $V := \{y \in \mathbb{R}^d : (y, 0_{n-d}) \in W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\})\}$. Observar que $V = \Pi_1(W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}))$, donde $\Pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es la proyección canónica, y que φ es la composición de h^{-1} con la inclusión canónica $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, dada por $\tau(z) = (z, 0_{n-d})$.

Dado que h mapea biyectivamente $U \cap M$ con $W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\})$, se tiene

$$\varphi(V) = U \cap M.$$

La inyectividad, y la continuidad de la inversa resultan trivialmente de que h es un difeomorfismo.

Solo resta probar que $D\varphi(y) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de rango máximo para todo $y \in V$.

Sea $\Pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$. Si definimos el mapa $\psi := \Pi_2 \circ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, tenemos que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{V \subset \mathbb{R}^d}$. Luego, por la regla de la cadena obtenemos $D\psi(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$. Es un ejercicio verificar que, mirando matricialmente esta identidad, resulta que las columnas de $D\varphi(y)$ tienen que ser linealmente independientes.

(\Leftarrow) Esta es la parte más técnica de la prueba, dado que solo tenemos la función φ y queremos extender ese mapa a un difeomorfismo de abiertos entre \mathbb{R}^n y $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, con las condiciones requeridas por la definición de variedad.

Sea $x = \varphi(y) \in M$.

La idea para hacer esto está motivado por el Ejemplo 3.13.

La derivada $D\varphi(y)$, con $y \in V$, la podemos escribir matricialmente como

$$D\varphi(y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \varphi_1(y) & \cdots & \partial_{y_d} \varphi_1(y) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_{y_1} \varphi_d(y) & \cdots & \partial_{y_d} \varphi_d(y) \\ \partial_{y_1} \varphi_{d+1}(y) & \cdots & \partial_{y_d} \varphi_{d+1}(y) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_{y_1} \varphi_n(y) & \cdots & \partial_{y_d} \varphi_n(y) \end{pmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que las primeras d filas forman una matriz invertible. En este sentido podemos escribir

$$D\varphi(y) = \begin{pmatrix} A_{d \times d} \\ B_{(n-d) \times d} \end{pmatrix}, \quad \text{con } A_{d \times d} \text{ invertible.}$$

Luego podemos definir el mapa

$$\Phi : V \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(y, s) = \varphi(y) + "(0, s)",$$

donde estamos identificando $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$, i.e. para $(y, s) \in V \times \mathbb{R}^{n-d}$,

$$\Phi(y, s_1, \dots, s_{n-d}) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_d(y), \varphi_{d+1}(y) + s_1, \dots, \varphi_n(y) + s_{n-d})$$

Luego para todo $(y, s) \in V \times \mathbb{R}^{n-d}$,

$$D\Phi(y, s) = \begin{pmatrix} A_{d \times d} & 0 \\ B_{(n-d) \times d} & \text{Id}_{\mathbb{R}^{n-d}} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $D\Phi$ es invertible en todo su dominio. En particular, para $s = 0$, del teorema de función inversa tenemos que existen abiertos $W_1 \subset V \times \mathbb{R}^{n-d}$, con $(y, 0) \in W_1$, y $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ con $x \in U_1$, donde $\Phi|_{W_1} : W_1 \rightarrow U_1$ es un difeomorfismo.

Por ser $\varphi^{-1} : \varphi(V) \rightarrow V$ una función continua con la topología relativa en $\varphi(V)$, se tiene que $\{\varphi(y) : (y, 0) \in W_1\} = U_2 \cap \varphi(V)$, para algún abierto $U_2 \subset U_1$ de \mathbb{R}^n . Recordar que $\varphi(V) = U \cap M$. Luego podemos asumir que $U_2 \subseteq U$.

Luego definiendo $W_2 := \Phi^{-1}(U_2)$ obtenemos que $U_2 \cap M = \{\varphi(y) : (y, 0) \in W_1\} = \{\Phi(y, 0) : (y, 0) \in W_1\}$, y por lo tanto

$$(\Phi|_{W_2})^{-1}(U_2 \cap M) = (\Phi|_{W_2})^{-1}(\{\Phi(y, 0) : (y, 0) \in W_1\}) = W_2 \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}).$$

□

Definición 3.16. A una función φ que cumple las hipótesis del Teorema 3.15 le diremos *sistemas de coordenadas* o *parametrización*.

Nuestro objetivo es utilizar el teorema 3.15 para dar una definición alternativa de variedad. Con ese fin introduciremos la noción de qué es que una función sea C^∞ (que llamaremos “suave”) en un conjunto arbitrario, para extender nuestra noción de difeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 3.17. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función. Diremos que la función es *suave* si se puede extender localmente a un mapa de clase C^∞ en un entorno abierto de \mathbb{R}^n . Es decir, si para todo $x \in X$, existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$, con $x \in W$, y una función $F : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^∞ tal que $F|_{W \cap X} = f|_{W \cap X}$.

Definición 3.18. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$. Diremos que f es un *difeomorfismo* si f es biyectiva y f y f^{-1} son funciones suaves. En tal caso de existir un difeomorfismo, diremos que X e Y son *difeomorfos*, y escribimos $X \cong Y$

Con esta nueva noción de difeomorfismos podemos preguntarnos que espacios son difeomorfos.

Ejemplo 3.19. Es fácil ver que \mathbb{R} es difeomorfo con el gráfico de una función C^∞ . Sea $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ su gráfico, entonces definiendo la función $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_f$, dada por $\varphi(t) = (t, f(t))$ podemos probar que φ es un difeomorfismo. Esto resulta de que $\varphi^{-1}: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}$ es suave por ser la restricción de la proyección canónica $(x, y) \rightarrow x$, i.e. $\varphi^{-1} = \Pi_1|_{\Gamma_f}$.

Con estas definiciones, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3.20. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión d . Entonces es localmente difeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^d : $\forall x \in M$, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de x , $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto, y $\varphi: U \rightarrow U \cap M$ difeomorfismo.

Demostración. Sea h el difeomorfismo dado en la Definición 3.2, y definamos $V \subset \mathbb{R}^d$ dado por $V := \{y : (y, 0) \in W\}$. Entonces $h \circ \Pi_1|_{U \cap M}: U \cap M \rightarrow V$ es suave, y su inversa está dada por $h^{-1} \circ \tau: V \rightarrow U \cap M$, donde $\tau: V \rightarrow V \times \{0_{n-d}\}$ es la inclusión es C^∞ . \square

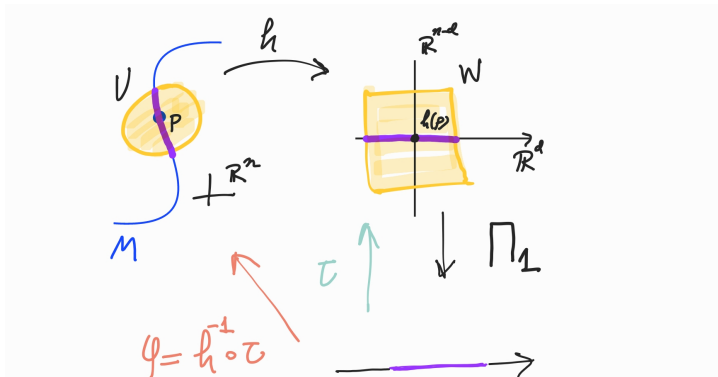


Figura 3.3: Equivalencia de definiciones de variedad diferenciable.

Comentario 3.21. La Proposición 3.20 se utiliza también como definición de variedad diferenciable (ver Guillemin-Pollack [GP]). Para ver que esta definición es equivalente a la que dimos, basta observar que el difeomorfismo local, partiendo desde el abierto en \mathbb{R}^d , es una parametrización: esto es, verifica las propiedades dadas en el Teorema 3.15. Se deja al lector verificar estas propiedades.

◇ **3.22.** Probar lo expuesto en el comentario anterior. Esto es, que si $M \subset \mathbb{R}^n$ satisface que para todo punto $x \in M$ existe un abierto U de \mathbb{R}^n , con $x \in U$, tal que $U \cap M$ es difeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^d , entonces M es una variedad de dimensión d .

3.4. Espacio tangente

Definición 3.23. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión d . Sea $p \in M$, y sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M$, con $\varphi(x) = p$, una parametrización. Definimos el *espacio tangente* a M en p como

$$T_p M := \text{Im } D\varphi(x) = D\varphi(x)(\mathbb{R}^d).$$

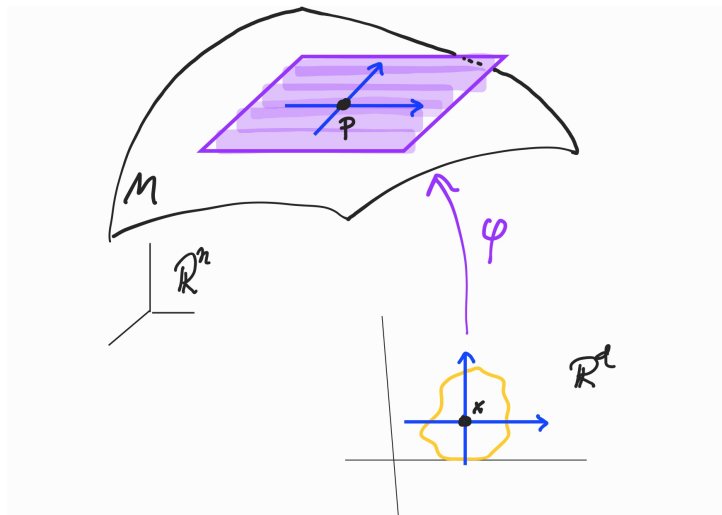


Figura 3.4: Espacio tangente a una variedad.

Por ser φ una parametrización, su diferencial $D\varphi(x)$ es inyectivo. Por lo tanto podemos concluir que $T_p M$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n de igual dimensión que M .

En general, identificamos el espacio tangente (que es un subespacio d -dimensional de \mathbb{R}^n) con el subespacio afín $p + \text{Im } D\varphi(x)$.

Veamos algunos ejemplos.

3.4.1. Ejemplos

Ejemplo 3.24. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces sabemos que es una variedad diferenciable de dimensión n , y tomando el mapa identidad como parametrización podemos concluir que el espacio tangente en un punto $p \in U$ es exactamente \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.25 (Tangente a S^2). Sea S^2 la esfera en \mathbb{R}^3 . Una parametrización de la esfera (al menos de cualquier punto p en el hemisferio $S^2 \cap \{z > 0\}$), está dado por

$$\varphi : \mathbb{D} \rightarrow S^2, \quad \varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 + v^2}),$$

donde $\mathbb{D} = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$.

El diferencial de φ en $(u, v) \in \mathbb{D}$ está dado por

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2+v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2+v^2}} \end{pmatrix},$$

por lo que el espacio tangente en $p = \varphi(u, v)$ está dado por

$$T_p S^2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2+v^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2+v^2}} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

donde utilizamos la notación $\langle C \rangle$ al subespacio generado por el conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$.

Observar que el punto p como vector es ortogonal a $T_p S^2$.

Ejemplo 3.26 (Tangente a una superficie). Sea M una variedad diferenciable en \mathbb{R}^n , de dimensión 2, i.e. M es una *superficie*. Si φ es una parametrización entonces una base del espacio tangente de M en $p = \varphi(x)$, está dado por los vectores en \mathbb{R}^n dados por $D\varphi(x)e_1, D\varphi(x)e_2$, siendo e_1, e_2 los vectores de la base canónica en \mathbb{R}^2 .

Observar que, escribiendo $x = (u, v)$,

$$D\varphi(x)e_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x), \quad D\varphi(x)e_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x).$$

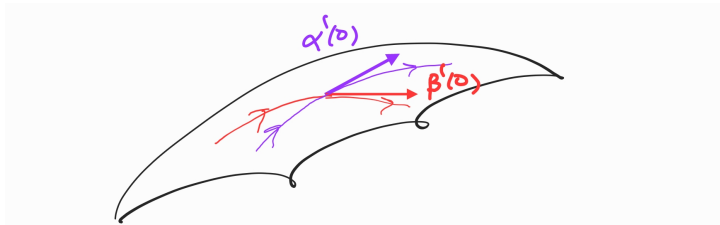
Definiendo las curvas, definidas en un entorno del origen

$$\alpha(t) = \varphi(u+t, v), \quad \beta(t) = \varphi(u, v+t),$$

se tiene que

$$\alpha'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x), \quad \beta'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x),$$

y por lo tanto $T_p M = \{\alpha'(0), \beta'(0)\}$. Observar que α y β son la imagen, por la parametrización, de curvas paralelas a los ejes canónicos en \mathbb{R}^2 .



◇ 3.27. Generalizar lo anterior a un variedad diferenciable de cualquier dimensión.

3.4.2. Espacio tangente via velocidades de curvas

El ejemplo anterior motiva a describir el espacio tangente via velocidades de curvas definidas en la variedad.

La siguiente proposición es de suma utilidad para describir el espacio tangente a una variedad. Recordemos que una *curva* en una variedad M es una función $\alpha : I \rightarrow M$ de clase C^∞ , definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Proposición 3.28. *El espacio tangente a una variedad M en p está dado por el conjunto de velocidades de curvas por p . Esto es,*

$$T_p M = \{\dot{\alpha}(0) : \alpha \text{ curva en } M, \text{ con } \alpha(0) = p\}.$$

Dibujo

Demostración. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M$, con $\varphi(x) = p$, una parametrización, y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva con $\alpha(0) = p$. Achicando el intervalo I podemos asumir que $\alpha(I) \subset \varphi(U)$. Luego podemos definir la curva en $U \subset \mathbb{R}^d$ dada por $\tilde{\alpha} := \varphi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow U$. Observar que $\alpha = \varphi \circ \tilde{\alpha}$

Luego $\alpha'(0) = D\alpha(0)1 = D\varphi(x)\tilde{\alpha}'(0)$, y por lo tanto $\alpha'(0) \in T_pM$ por estar en la imagen del diferencial de φ .

Por otro lado, si $w \in T_pM$, existe $v \in \mathbb{R}^d$ tal que $w = D\varphi(x)v$. Luego, tomando la curva $\beta(t) = x + tv \in U$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, obtenemos que $w = D\varphi(x)v = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Es decir $v = \alpha'(0)$ siendo $\alpha := \varphi \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, con $\alpha(0) = \varphi(\beta(0)) = p$. \square

El siguiente resultado nos da una forma muy sencilla de calcular espacios tangentes de variedades que resultan de ser la preimagen de un valor regular.

Proposición 3.29. *Sea $M := f^{-1}(q)$ una variedad dada por la preimagen de un valor regular del mapa f . Entonces $T_xM = \ker Df(x)$, para todo $x \in M$.*

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ curva con $\alpha(0) = p$. Luego $f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisface $f \circ \alpha(t) = q$ para todo $t \in I$. Luego derivando respecto a t , y evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = Df(p)(\alpha'(0)).$$

Es decir $\alpha'(0) \in \ker Df(p)$, y por lo tanto $T_pM \subset \ker Df(p)$.

Pero como la dimensión de $M = f^{-1}(q)$ es igual a la codimensión, i.e. $n - k$, se tiene que ambos espacios tienen la misma dimensión, y por lo tanto son iguales. \square

Ejemplo 3.30 (Tangente a la esfera). Sea $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la esfera. Sabemos que S^{n-1} es el conjunto de nivel asociado al valor 1 de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2$. Luego $T_pS^{n-1} = \ker Df(p) = \nabla f(p)^\perp = p^\perp$.

Ejemplo 3.31 (Tangente a $\mathcal{O}(n)$). El grupo ortogonal $\mathcal{O}(n)$, definido en el Ejemplo 3.11–3, es la preimagen de Id_n , que es un valor regular, por del mapa

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(n), \quad f(A) = A^T A.$$

(Recordar $\text{Sym}(n)$ es el subespacio lineal de $\mathbb{R}^{n \times n}$ de las matrices simétricas, al cual lo identificamos de manera natural con $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.)

Que es valor regular queda como ejercicio (y sino mirar el ejemplo dado a continuación).

La derivada del mapa f satisface $Df(A)\dot{A} = \dot{A}^T A + A^T \dot{A}$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

En particular, si $A = \text{Id}_n$, entonces

$$Df(\text{Id}_n)\dot{A} = \dot{A}^T + \dot{A},$$

de donde resulta $\ker Df(\text{Id}_n)$ es el conjunto de matrices *antisimétricas*, i.e.

$$T_{\text{Id}_n} \mathcal{O}(n) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : B^T = -B\}.$$

Para calcular el tangente en cualquier $A \in \mathcal{O}(n)$, podemos utilizar la siguiente propiedad. Si $\varphi(t)$ es una curva en $\mathcal{O}(n)$, tal que $\varphi(0) = \text{Id}_n$, entonces $\psi(t) := A\varphi(t)$ es una curva en $\mathcal{O}(n)$ tal que $\psi(0) = \text{Id}_n$. Luego, derivando obtenemos una identificación entre el tangente de $T_{\text{Id}_n} \mathcal{O}(n)$ y $T_A \mathcal{O}(n)$, a saber

$$T_A \mathcal{O}(n) = A \cdot T_{\text{Id}_n} \mathcal{O}(n) = \{AB : B \text{ antisimétrica}\}.$$

(Como método de verificación es fácil ver que $Df(A)(AB) = 0$ siempre que B sea antisimétrica.)

Comentario 3.32. Observar que el tangente en $A \in \mathcal{O}(n)$ queda determinado conociendo el tangente en la identidad Id_n (de hecho esa fue la prueba que hicimos). Esto resulta de que una propiedad importante de $\mathcal{O}(n)$, que es que además de ser una variedad es un *grupo*. El que quiera profundizar más en esta relación de álgebra y geometría se sugiere chusmear sobre *grupos de Lie*.

Ejemplo 3.33 (Tangente a $St(k, n)$). Similar al ejemplo anterior, la variedad de Stiefel $St(k, n)$, (dada en el Ejemplo 3.11–6) la podemos obtener como preimagen de un valor regular de la función $F : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \text{Sym}(k)$ dada por $F(X) = X^T X$, donde $\text{Sym}(k)$ es el subespacio lineal de $\mathbb{R}^{k \times k}$ de las matrices simétricas.

Afirmación: Id_k es valor regular de F .

La derivada de F en $X \in F^{-1}(0) = St(k, n)$, en la dirección $\zeta \in \mathbb{R}^{n \times k}$ está dada por

$$DF(X)\zeta = \zeta^T X + X^T \zeta \in \mathbb{R}^{\frac{k(k+1)}{2}}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Veamos que $DF(X)$ es sobre. Si $\eta \in \text{Im}DF(X)^\perp \subset \mathbb{R}^{\frac{k(k+1)}{2}}$, entonces

$$\langle \eta, \zeta^T X + X^T \zeta \rangle_F = 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Es decir,

$$0 = \text{tr}(\eta \zeta^T X) + \text{tr}(\eta X^T \zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n \times k}. \quad (3.1)$$

Utilizando la propiedad $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ (siempre que el producto tenga sentido), resulta

$$\text{tr}(\eta X^T \zeta) = \text{tr}(X^T \zeta \eta) = \text{tr}((\zeta^T X)^T \eta) = \text{tr}(\eta \zeta^T X).$$

Esto implica que $\eta X^T = 0$. Multiplicando a derecha por X se obtiene $\eta = \eta X^T X = 0$. Luego 0 es valor regular.

De la afirmación se concluye que $St(k, n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $kn - k(k+1)/2$, y el tangente $T_X St(k, n)$ está dado por $\text{Ker}DF(X) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n \times k} : \zeta^T X + X^T \zeta = 0\}$.

Observar que $St(k, n)$ resulta ser una variedad compacta dado que es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^{n \times k}$.

Escribamos a modo de proposición lo que acabamos de probar, que además abarca los dos ejemplos dado que $St(n, n) = \mathcal{O}(n)$.

Proposición 3.34. *La variedad de Stiefel $St(k, n)$ es una variedad diferenciable compacta, de dimensión $kn - k(k+1)/2$. Además, el espacio tangente a $X \in St(k, n)$ está dado por*

$$T_X St(k, n) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n \times k} : \zeta^T X + X^T \zeta = 0\}.$$

3.4.3. Consistencia de definiciones

En esta sección veremos que la definición no depende de las parametrizaciones.

En particular veremos que la dimensión de una variedad está bien definida. Esto es, podría ocurrir que exista otra parametrización (u otro mapa h como en la Definición 3.2) ψ pero que su dominio sea un abierto de $\mathbb{R}^{d'}$. Pero componiendo una parametrización con la inversa de la nueva parametrización (a menos de reducir los abiertos) obtendremos un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^d y $\mathbb{R}^{d'}$ respectivamente. Luego componiendo con su inversa obtendríamos mapas son la identidad

en los abiertos respectivos. Veamos esto, asumiendo para facilitar la notación que las parametrizaciones están definidas en todo \mathbb{R}^d y $\mathbb{R}^{d'}$ respectivamente. Luego tendríamos mapas $\eta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ y $\xi : \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}^d$ que son C^∞ y satisfacen $\eta \circ \xi = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$ y $\xi \circ \eta = \text{Id}_{\mathbb{R}^{d'}}$. Luego derivando obtenemos que $D\eta(\xi(x)) \circ D\xi(x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$. Luego $D\xi(x)$ es un mapa inyectivo y por lo tanto $d' \leq d$. Tomando la derivada en el otro sentido podemos obtener la otra desigualdad y concluir $d = d'$.

Dado que una variedad pueda estar definida por diferentes parametrizaciones, es necesario probar que la definición de espacio tangente no depende de la parametrización elegida. Veamos esto.

Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M$, y $\psi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M$ parametrizaciones, con $\varphi(x) = p = \psi(y) \in M$. Queremos probar que $D\varphi(x)(\mathbb{R}^d) = D\psi(y)(\mathbb{R}^d)$.

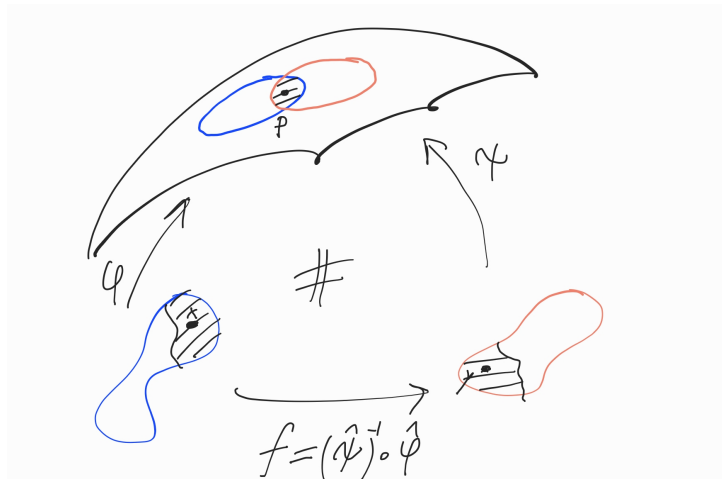


Figura 3.5: Expresión local de parametrizaciones (o cartas locales).

Primero acomodemos los abiertos para tener un “diagrama conmutativo”. Esto es. Sea $\varphi(U) = \mathcal{U} \cap M$ y $\psi(V) = \mathcal{V} \cap M$, para \mathcal{U} y \mathcal{V} abiertos de \mathbb{R}^n conteniendo p .

Sea $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Luego podemos redefinir nuestros mapas de la siguiente manera: $\hat{U} = \varphi^{-1}(\mathcal{W} \cap M)$, $\hat{V} = \psi^{-1}(\mathcal{W} \cap M)$, y las restricciones $\hat{\varphi} = \varphi|_{\hat{U}}$, $\hat{\psi} = \psi|_{\hat{V}}$.

Luego definimos

$$f_{\hat{\psi}, \hat{\varphi}} := \hat{\psi}^{-1} \circ \hat{\varphi} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}.$$

Este mapa $f_{\hat{\psi}, \hat{\varphi}}$, entre abiertos de \mathbb{R}^d , con $f_{\hat{\psi}, \hat{\varphi}}(x) = y$, es un difeomorfismo por ser

composición de difeomorfismos (con inversa $f_{\hat{\phi}, \hat{\psi}}$). Luego su derivada $Df_{\hat{\psi}, \hat{\phi}}(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un isomorfismo lineal. En particular se tiene $Df_{\hat{\psi}, \hat{\phi}}(x)(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$.

Luego el resultado sigue de la identidad $\hat{\phi} = \hat{\psi} \circ f_{\hat{\phi}, \hat{\psi}}$, dado que $D\hat{\phi}(x)(\mathbb{R}^d) = D\hat{\psi}(y)(Df_{\hat{\phi}, \hat{\psi}}(x)(\mathbb{R}^d))$.

3.5. Variedades con borde

La idea de esta sección es extender nuestra noción de variedad, a que tengan borde. Ejemplos de estas variedades serían el intervalo cerrado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, o la más generalmente la bola $\overline{\mathbb{B}^n}$ que resulta de todos los vectores en \mathbb{R}^n con norma menos o igual a 1.

En estos casos, los “bordes” respectivos serían $\{0, 1\}$, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, que son variedades (de verdad) de dimensión 0, 1, y $n-1$ respectivamente.

Nuestra ejemplo canónico de variedades, (de hecho fue nuestra motivación) fueron deformaciones “suaves” de los subespacios. Para definir variedades con borde, tomaremos de ejemplo a $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, dado por

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}.$$

En este caso su borde está definido por $\partial\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

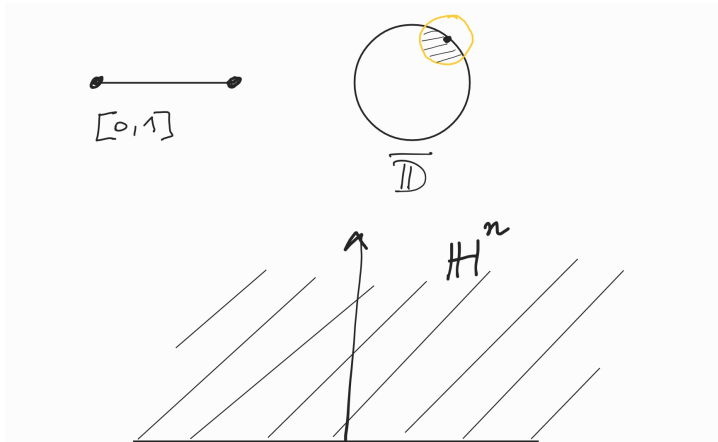


Figura 3.6: Variedades con borde: $[0, 1]$, $\overline{\mathbb{D}}$, y \mathbb{H}^n .

Definición 3.35 (Variedad con borde). Decimos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad con borde* de dimensión d si para todo $p \in M$, existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , tal que $U \cap M$ es difeomorfo a un abierto de \mathbb{H}^d .

En otras palabras, una variedad con borde de dimensión d en \mathbb{R}^n es un conjunto que es localmente difeomorfo a un abierto de \mathbb{H}^d . Si los abiertos locales en \mathbb{H}^d no tocan su borde (i.e. $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n = 0$) entonces estamos en la definición clásica de variedad diferenciable. Sin embargo estamos permitiendo a los abiertos locales intersectar el borde, y esto define el borde de la variedad.²

Al igual que antes, a un difeomorfismo local $\varphi : V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow M$, lo llamaremos *parametrización*, y su inversa *carta local*.

Se puede usar como definición análoga a la que vimos en la Definición 3.2 de variedad, permitiendo que el abierto intersecte a $\mathbb{H}^d \times \{0_{n-d}\}$.

Definición 3.36 (Definición de borde). Si M es una variedad diferenciable con borde, se define el *borde* de M , y lo denotamos por ∂M , al subconjunto de M dado por la unión de las imágenes de $\hat{\varphi} := \varphi|_{V \cap \partial \mathbb{H}^d}$ siendo $\varphi : V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow M$ una parametrización.

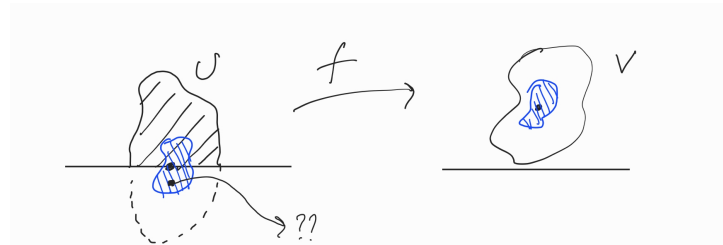
Veamos que la anterior definición es consistente, en el sentido que si un $p \in \partial M$, y $\psi : V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow M$ es una parametrización con, con $\psi(x) = p$, para cierto $x \in V$, entonces $x \in \partial \mathbb{H}^d \cap V$. Esto sigue de la siguiente proposición.

Proposición 3.37. Sean U y V abiertos de \mathbb{H}^d , y $f : U \rightarrow V$ un difeomorfismo. Entonces $f(U \cap \partial \mathbb{H}^d) \subset \partial \mathbb{H}^d$.

Demostración. Sea $x \in U \cap \partial \mathbb{H}^d$, y sea $y = f(x) \in V$. Supongamos por absurdo que $y \notin \partial \mathbb{H}^d$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que V es interior a \mathbb{H}^d , i.e. es un abierto de \mathbb{R}^d

²La definición de variedad con borde es más general que la definición de variedad diferenciable, y por tanto toda variedad es una variedad con borde. Pero si estamos en una variedad en que los abiertos locales en \mathbb{H}^d no tocan el borde, la llamaremos simplemente variedad. De hecho lo que estamos diciendo es que el borde (ver Definición 3.36 de la variedad es vacío.



La idea es sencilla, escribirla no tanto. Pero si miramos f^{-1} que está definida en un abierto $V \subset \mathbb{R}^d$ del punto y , que es C^∞ , tiene una inversa C^∞ definida en un cierto abierto ambiente de x (esta inversa es la extensión local de f por ser suave, que denotaremos \tilde{f} , definida en un entorno abierto de \mathbb{R}^d , de x). Luego, la derivada de f^{-1} en y es inyectiva (dado que $D\tilde{f}(x) \circ D(f^{-1})(y) = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$), y por lo tanto invertible. Luego, por teorema de función inversa tenemos una identificación biyectiva de un entorno abierto de $y \in \mathbb{R}^d$ con un entorno abierto $x \in \partial\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^d$. Pero eso sería una absurdo dado que la imagen por f^{-1} de esos puntos tienen todos coordenadas $x_n \geq 0$, y no hay lugar para que tengan correspondientes con $x_n < 0$.

Bueno, ahora intentemos escribir en detalle el argumento anterior.

Como f es suave en x , existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^d$, $x \in W$ y una función $\tilde{f}: W \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^∞ tal que $\tilde{f}|_{W \cap U} = f|_{W \cap U}$.

Como f^{-1} es continua, existe $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ abierto (con $V_0 \subset V$), con $y \in V_0$, tal que $f^{-1}(V_0) \subset W$ (de hecho sabemos además que $f^{-1}(V_0) \subset W \cap U$).

Además $\tilde{f} \circ (f^{-1})|_{V_0} = \text{Id}_{V_0}$ y por lo tanto derivando obtenemos

$$D\tilde{f}(x) \circ D(f^{-1})(y) = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}.$$

Luego $D\tilde{f}(x)$ es un isomorfismo, y utilizando el teorema de función inversa, resulta que existen entornos abiertos $W_1 \subset W \subset \mathbb{R}^d$ ($x \in W_1$) y $V_1 \subset V_0 \subset \mathbb{R}^d$ (con $y \in V_1$) tal que $\tilde{f}|_{W_1}: W_1 \rightarrow V_1$ es un difeomorfismo (y en particular biyectiva).

Como $(\tilde{f})^{-1}|_{V_1}$ coincide con $f^{-1}|_{V_1}$, resulta que $(\tilde{f})^{-1}|_{V_1}(y') = f^{-1}(y') \in U \subset \mathbb{H}^d$, para todo $y' \in V_1$. Pero esto es un absurdo porque $W_1 \subset (\tilde{f})^{-1}(V_1)$ y $W_1 \not\subset \mathbb{H}^d$.³ \square

Corolario 3.38. Sean U y V abiertos de \mathbb{H}^d , y $f: U \rightarrow V$ un difeomorfismo. Sea $x \in U \cap \partial\mathbb{H}^d$, entonces

$$Df(x)\partial\mathbb{H}^d = \partial\mathbb{H}^d.$$

³De hecho $W_1 = (\tilde{f}|_{W_1})^{-1}(V_1)$.

Este resultado, además de probar que ∂M está bien definido, prueba los siguientes resultados que los condensamos en una proposición.

Proposición 3.39. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad con borde. Entonces*

- $\text{Int}(M) := M \setminus \partial M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad sin borde con $\dim \text{Int}(M) = \dim M$.
- $\partial M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad (sin borde) $\dim \partial M = \dim M - 1$.

Demostración. Sea d la dimensión de M , y sea $\varphi : V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización local de M . La primera afirmación resulta de que $\text{Int}(\mathbb{H}^d) = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto de \mathbb{R}^d , y por lo tanto la restricción $\varphi|_{V \cap \text{Int}(\mathbb{H}^d)}$ es una parametrización local de $\text{Int}(M)$ donde $V \cap \text{Int}(\mathbb{H}^d)$ es un abierto de \mathbb{R}^d .

Similar para el borde ∂M observando que $\partial \mathbb{H}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d$ es difeomorfo a \mathbb{R}^{d-1} . □

3.5.1. Espacio tangente a variedad con borde

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable con borde de dimensión d . Dado que el interior de M sigue siendo una variedad diferenciable (sin borde) de igual dimensión a M podemos definir el espacio tangente al igual que antes: i.e. es la imagen de \mathbb{R}^d por el diferencial de una parametrización.

Si $p \in \partial M$ extenderemos la misma definición, esto es, $T_p M = \text{Im} D\varphi(x)$, siendo φ parametrización tal que $\varphi(x) = p$.

El problema acá es que nuestra parametrización $\varphi : V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow M$ es una función suave, y por lo tanto deberíamos especificar qué entendemos por la derivada $D\varphi(x)$, siendo $x \in \partial \mathbb{H}^d$ (si está en el interior de \mathbb{H}^d es una función C^∞ y ningún problema).

Una manera similar al caso en dimensión 1 de derivadas laterales es definir la derivada $D\varphi(x)v$ con $v \in \mathbb{R}^d$ un vector con $v_d \geq 0$ de la siguiente manera

$$D\varphi(x)v := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+tv) - \varphi(x)}{t}.$$

El límite anterior existe está bien definido ya que si φ es suave y Φ es una extensión local entonces el límite anterior coincide con el límite del cociente incremental

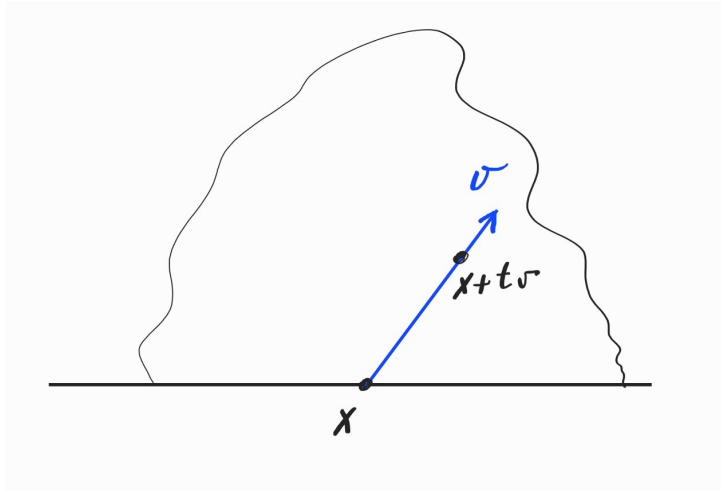


Figura 3.7: Definición de derivada en el borde.

$\frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t}$ (ya que φ y Φ coinciden en x y $x+tv$ por estar ambos en $V \in \mathbb{H}^d$, para t suficientemente pequeño) sin importar cuál es la Φ extensión.

Sin embargo, ¿cómo definimos $D\varphi(x)w$ en el resto de vectores de $w \in \mathbb{R}^d$, con $w_n < 0$? Bueno una respuesta rápida es, ya sabemos definirlo para $v \in \mathbb{R}^d$ con $v_d \geq 0$, luego lo extendemos linealmente: $D\varphi(x)w = -D\varphi(x)(-w)$.

Lo anterior es correcto, y de hecho es la forma de calcularlo, pero en el fondo lo que está ocurriendo es que podemos definir $D\varphi(x)$ como $D\Phi(x)$ siendo Φ cualquier extensión, ya que no depende de cuál es la extensión de φ elegida.

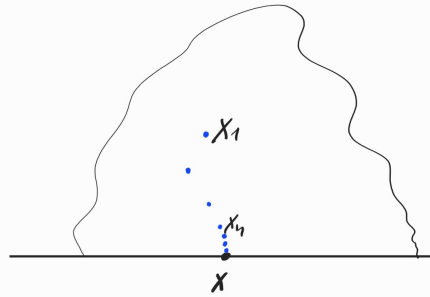
Veamos esto. Consideremos una sucesión $x_n \in V \cap \text{Int}(\mathbb{H}^d)$, tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow +\infty$, donde recordar $x \in V \cap \partial\mathbb{H}^d$.

Como x_n son interiores a \mathbb{H}^d , resulta que $D\varphi(x_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ está bien definida por ser una función C^∞ . Resta ver que existe $\lim_n D\varphi(x_n)$ en el espacio de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$. Eso resulta de que si Φ es una extensión a φ , en particular conciden en $V \cap \mathbb{H}^d$ y por lo tanto $D\Phi(x_n) = D\varphi(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero por ser Φ de clase C^∞ en particular $D\Phi(x) = \lim_n D\Phi(x_n)$, y por lo tanto existe y está bien definido

$$\lim_n D\varphi(x_n) = \lim_n D\Phi(x_n) = D\Phi(x),$$

siendo Φ cualquier extensión C^∞ de φ .



◇ **3.40.** Probar que si $p \in \partial M$, entonces $T_p(\partial M)$ es un subespacio de $T_p M$ de codimensión 1.

Definición 3.41. Sea M variedad con borde de dimensión d . Sea $p \in \partial M$ y $w \in T_p M$. Sea φ parametrización local con $\varphi(x) = p$, y sea $v \in \mathbb{R}^d$ tal que $w = D\varphi(x)v$. Decimos que:

- w es *estrictamente entrante* si $\langle v, e_d \rangle > 0$;
- w es un *vector saliente* si $\langle v, e_d \rangle < 0$;
- w es un *vector tangente* si $\langle v, e_d \rangle = 0$

(Ver Figura 3.8.)

Adivinen qué hay que probar... sí claro, eso, que la definición de vector entrante (saliente o tangente) no depende de la parametrización elegida.

Observar que del Corolario 3.38, la definición de vector tangente está bien definida, (y además resulta que $w \in T_p \partial M$).

A continuación explicaremos por qué está bien definido.

Considerar $\psi: W \subset \mathbb{H}^d \rightarrow M$, (W abierto relativo, y $\psi(y) = p$) otra parametrización de un entorno de $p \in \partial M$, y considerar el difeomorfismo local

$$h := (\psi)^{-1} \circ \varphi: V \subset \mathbb{H}^d \rightarrow W \subset \mathbb{H}^d$$

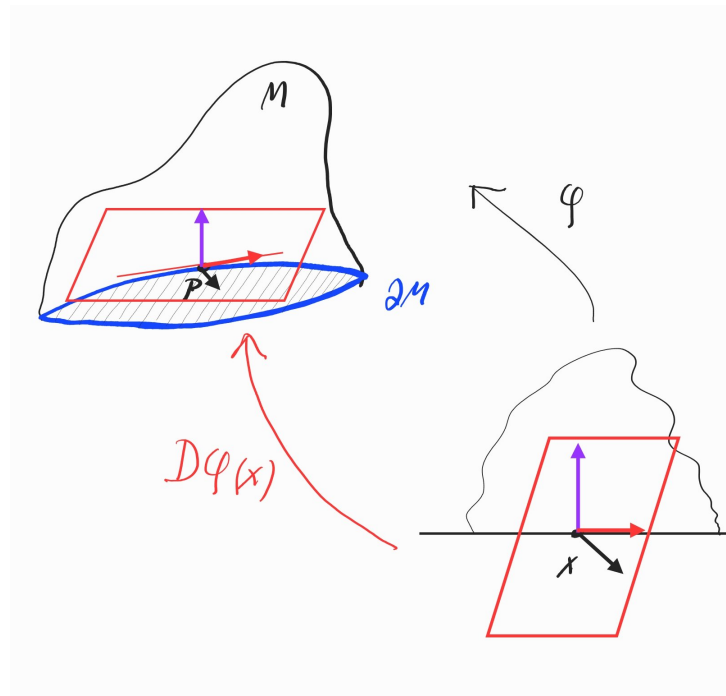


Figura 3.8: Vectores entrantes, salientes, tangentes.

entre abiertos relativos de \mathbb{H}^d .

Sea $v_\varphi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\langle v_d, e_d \rangle > 0$. Queremos probar que $\langle Dh(x)v_\varphi, e_d \rangle > 0$. (Observar que $v_\psi := Dh(x)v_\varphi$ satisface $D\psi(y)v_\psi = D\varphi(x)v_\varphi$, y por lo tanto son dos representaciones del mismo vector en distintas parametrizaciones.)

Consideremos la función $\alpha(t) = \langle h(x + tv_\varphi), e_d \rangle = h_d(x + tv_\varphi)$, donde estamos escribiendo $h = (h_1, \dots, h_d)$ en coordenadas.

Luego $\alpha(0) = h_d(x) = 0$ por la Proposición 3.37. Pero además por la misma proposición sabemos que $\alpha(t) \geq 0$ para todo $t > 0$. Luego derivando obtenemos que $\alpha'(0) \geq 0$.

Pero si $0 = \alpha'(0) = \langle Dh(x)v_\varphi, e_d \rangle$, esto implica que $Dh(x)v_\varphi \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} = \partial\mathbb{H}^d$, pero esto implica por el Corolario 3.38a que $v_\varphi \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, lo cual no puede pasar. Luego concluimos que $\alpha'(0) > 0$, lo cual implica $\langle Dh(x)v_\varphi, e_d \rangle > 0$.

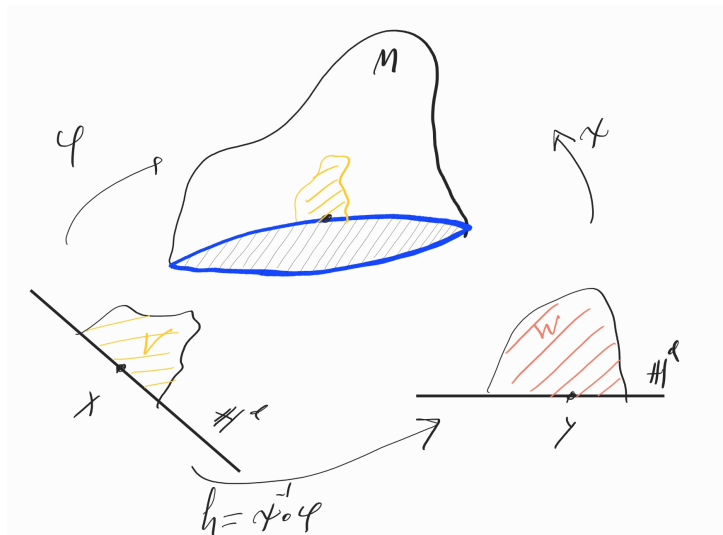
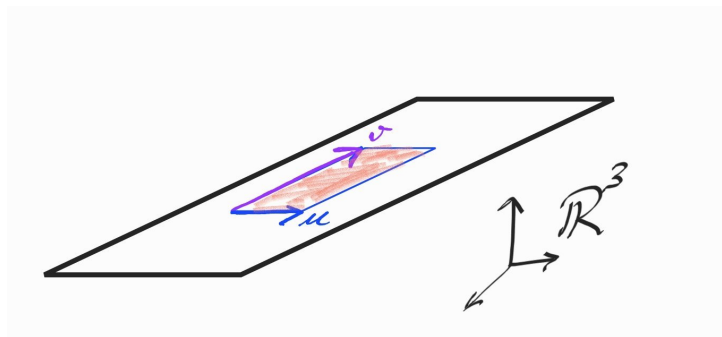


Figura 3.9: Cambio de parametrizaciones en coordenadas locales.

Álgebra Exterior

4.1. Motivación

Nuestro principal objetivo es entender cómo calcular longitudes, áreas, volúmenes, y volúmenes en dimensiones superiores, de objetos que están en subespacios de \mathbb{R}^n . Sabemos del álgebra lineal que el determinante definido en \mathbb{R}^k está íntimamente vinculado al volumen k -dimensional. Sin embargo, si por ejemplo queremos calcular el área de un paralelogramo generado por dos vectores que viven en \mathbb{R}^3 , el determinante no está bien definido (solo como matrices cuadradas).

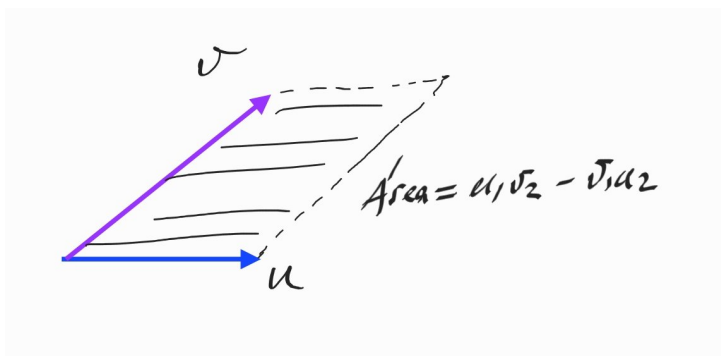


Con el objetivo anterior en mente, comencemos realizando algunas observaciones.

Sabemos de los cursos de álgebra lineal que el determinante

$$\det(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

puede ser interpretado como el área (signada) del paralelogramo generado por $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, en \mathbb{R}^2 .

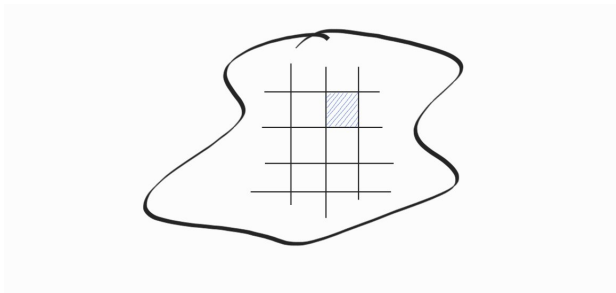


El determinante como función del par de vectores

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \det(u, v) \in \mathbb{R}$$

cumple ciertas propiedades algebraicas que están directamente relacionadas con propiedades geométricas.

Notemos por el momento $u \wedge v$ al área (signada) generada por u, v . Por ejemplo $e_1 \wedge e_2$ tomaría el valor 1 y $e_2 \wedge e_1$ le damos el valor opuesto, i.e. -1 . Y nuestra noción de área es la que utilizamos en cálculo de aproximación por suma de cuadraditos.



Sabemos que si al paralelogramo generado por u y v , lo dilatamos un lado por un factor λ entonces el área se modifica por ese factor, i.e. $(\lambda u) \wedge v = \lambda u \wedge v$.

Por otro lado sabemos $(u+w) \wedge v = u \wedge v + w \wedge v$ (y si no lo sabemos convencerse con un dibujo que el área se suma).

Al ser área signada, tenemos que $v \wedge u = -u \wedge v$. Esta propiedad hace que $w \wedge w = 0$

Es claro que estas propiedades se pueden condensar en decir que $u \wedge v$ es lineal en u y en v , y además cambia de signo cuando se alterna.

En el otro sentido, utilizando las propiedades anteriores como definición de $u \wedge v$, sin importar por el momento qué tipo de objeto resulta, podemos observar lo siguiente:

$$u \wedge v = (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \quad (4.1)$$

$$= u_1 v_1 e_1 \wedge e_1 + u_1 v_2 e_1 \wedge e_2 + u_2 v_1 e_2 \wedge e_1 + u_2 v_2 e_2 \wedge e_2 \quad (4.2)$$

$$= (u_1 v_2 - v_1 u_2) e_1 \wedge e_2 = \det(u, v) e_1 \wedge e_2. \quad (4.3)$$

Es decir, que solo utilizando las propiedades algebraicas (linealidad en cada variable y que sea alternada), recuperamos la noción de área signada. Formalmente $u \wedge v$ es siempre un múltiplo del objeto $e_1 \wedge e_2$, y el escalar asociado es justamente el determinante.

¿Y qué sucede si u y v están en \mathbb{R}^3 ?

Escribamos $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ y $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$. Luego tenemos realizando algunas operaciones sencillas que

$$u \wedge v = (u_1 v_2 - v_1 u_2) e_1 \wedge e_2 + (u_3 v_1 - v_3 u_1) e_3 \wedge e_1 + (u_2 v_3 - v_2 u_3) e_2 \wedge e_3. \quad (4.4)$$

¿Suenan conocidos estos coeficientes? Si recuerdan el producto vectorial entre dos vectores era exactamente

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_1 v_2 - v_1 u_2, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_2 v_3 - v_2 u_3), \quad (4.5)$$

y daba un vector en \mathbb{R}^3 ortogonal a u y v , (con el sentido dado por la regla de la mano derecha), y tal que su norma $\|u \times v\|$ daba el área del paralelogramo formado por u y v en el espacio.

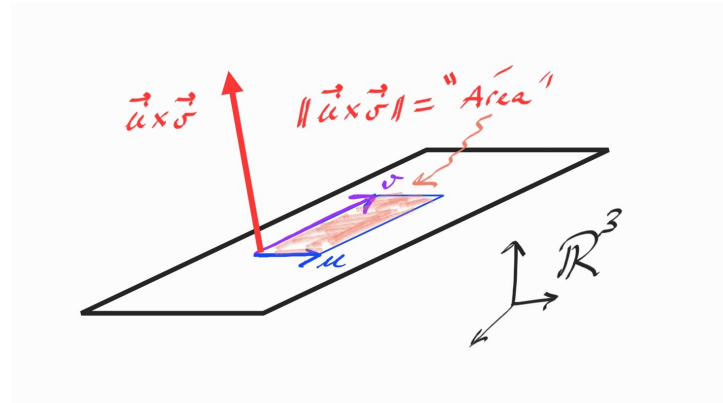


Figura 4.1: Producto vectorial entre u y v .

Comparando (4.4) y (4.5) observamos que nuevamente el producto $u \wedge v$ recupera la noción de área del paralelogramo, i.e. hemos recuperado nuevamente una noción geométrica a través de propiedades puramente algebraicas.

El *álgebra exterior* tiene por cometido formalizar y generalizar lo anterior en espacios vectoriales de dimensión finita. Y esto nos servirá de base para dar el salto y poder “medir” sobre variedades.

4.2. Formas Multilineales

Comencemos haciendo un “repaso” de álgebra lineal.

Definición 4.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n . Una *k-forma multilinal* es una función $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ que es lineal en cada variable.

Al espacio de k -formas multilineales lo denotaremos por $\mathcal{T}^k(V^*)$.

Observación 4.2. El espacio $\mathcal{T}^k(V^*)$ puede ser dotado de las operaciones básicas

$$\begin{aligned} (S+T)(v_1, \dots, v_k) &:= S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k); \\ (\alpha \cdot T)(v_1, \dots, v_k) &:= \alpha \cdot T(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y $v_i \in V$.

Con estas operaciones dotamos al espacio de k -formas multilineales $\mathcal{T}^k(V^*)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Ejemplo 4.3 (Determinante). El ejemplo más importante de formas multilineales es el *determinante*.

Antes de continuar veamos algunos ejemplos. El caso más sencillo es cuando $k = 1$, y este espacio es comunmente llamado *espacio dual*. Es tan importante y transversal a las áreas que le daremos un trato especial.

4.2.1. Espacio Dual

Definición 4.4. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n . Definimos el *espacio dual* V^* como el conjunto

$$V^* = \{ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } \phi \text{ es lineal} \}.$$

A los elementos de V^* se le llaman *funcionales*.

Observación 4.5. El espacio dual V^* puede ser dotado de las operaciones básicas

$$\begin{aligned} (\phi + \psi)(v) &:= \phi(v) + \psi(v); \\ (\alpha \cdot \phi)(v) &:= \alpha \cdot \phi(v), \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y $v \in V$.

Con estas operaciones, V^* es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Definición 4.6 (Base dual). Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Definimos la *base dual* $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subset V^*$ dada por

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

donde v_i^* se extienden a todo V por linealidad: esto es

$$v_i^*(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Veamos que \mathcal{B}^* es realmente una base de V^* .

Proposición 4.7. \mathcal{B}^* es una base de V^* como espacio vectorial. En particular $\dim V^* = \dim V$.

Demostración. Veamos que son linealmente independientes.

Supongamos que podemos escribir el funcional lineal idénticamente nulo 0^* como

$$a_1 v_1^* + \cdots + a_n v_n^* = 0^*.$$

Luego evaluando en v_i obtenemos que $a_i = 0$, y por lo tanto los v_i^* son linealmente independientes.

Sea $\phi \in V^*$. Veamos que ϕ se puede escribir como

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \cdots + \phi(v_n)v_n^*,$$

y por lo tanto los v_i^* 's generan el espacio dual.

Definamos $\psi := \phi(v_1)v_1^* + \cdots + \phi(v_n)v_n^*$. Entonces $\psi \in V^*$ y satisface

$$\begin{aligned} \psi(v_k) &= (\phi(v_1)v_1^* + \cdots + \phi(v_n)v_n^*)(v_k) \\ &= \phi(v_k)v_k^*(v_k) = \phi(v_k) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Luego ψ y ϕ coinciden en la base \mathcal{B} , y por lo tanto coinciden. □

Observación 4.8. Cuando $V = \mathbb{R}^m$, y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica, entonces denotamos por $dx_i := e_i^*$ a los elementos de la base dual.

Observar que

$$dx_i(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

En particular, si $\phi \in V^*$ entonces

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi(e_i) dx_i.$$

4.2.2. Formas bilineales

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita. Un elemento de $\mathcal{T}^2(V^*)$ se llama es forma bilineal

Ejemplo 4.9 (Producto interno). Un ejemplo conocido de forma bilineal es el producto interno. Tomemos bases en V , o simplemente tomemos $V = \mathbb{R}^m$.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m,$$

donde $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i, y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{T}^2((\mathbb{R}^m)^*)$.

Observación 4.10. Observar que si $T \in \mathcal{T}^2((\mathbb{R}^m)^*)$ entonces definiendo la matriz $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dada por $a_{ij} := T(e_i, e_j)$ tenemos que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m x_i y_j T(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Luego en notación matricial obtenemos, considerando los vectores columna $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ e $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, tenemos

$$T(x, y) = x^T A y.$$

◇ **4.11.** Probar que $\mathcal{T}^2((\mathbb{R}^m)^*)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m \times m}$, y por lo tanto si V es un espacio vectorial real de dimensión m , entonces $\mathcal{T}^2(V^*)$ es isomorfo al espacio de matrices reales $m \times m$.

4.2.3. Formas multilineales

Motivado por la descripción de las formas bilineales, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.12. Una k -forma multilineal $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$ queda determinada por los valores que toma en k -upla de elementos de una base de V .

Demostración. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V .

Sean w_1, \dots, w_k en V , donde

$$w_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{im}v_m = \sum_{j=1}^m a_{ij}v_j, \quad (i = 1, \dots, k).$$

Luego

$$\begin{aligned} T(w_1, \dots, w_k) &= T\left(\sum_{j=1}^m a_{1j}v_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{kj}v_j\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m a_{1j_1} \dots a_{kj_k} T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}). \end{aligned}$$

Luego conociendo $T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$, la k -forma multilineal T queda determinada. \square

◇ **4.13.** ¿Cuál es la dimensión de $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$, siendo V un espacio vectorial de dimensión m ?

A continuación veremos un caso especial de formas multilineales, que por ser tan importante lo ponemos en una sección aparte.

4.3. Formas multilineales alternadas

Definición 4.14. Una k -forma multilineal se dice *alternada* si cambia de signo al intercambiar variables. Al conjunto de formas alternadas lo denotamos por $\Lambda^k(V^*)$.

Observación 4.15. Es claro que $\Lambda^k(V^*)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}^k(V^*)$.

Ejemplo 4.16. De la Observación 4.10 resulta que $\Lambda^2((\mathbb{R}^m)^*)$ se identifica con las matrices antisimétricas: $a_{ji} = -a_{ij}$, y en particular los elementos de la diagonal son ceros.

Ejemplo 4.17. La función determinante de matrices $\mathbb{R}^{m \times m}$, vista como función de las columnas, es un elemento de $\Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$.

Dado que el único número real que es igual a su opuesto es el cero, concluimos que si $T \in \Lambda^k(V^*)$ se evalúa en una k -upla con vectores repetidos, toma el valor 0. Con esta observación y el Lema 4.12 podemos concluir lo siguiente.

Proposición 4.18. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V . Entonces si $T \in \Lambda^k(V^*)$ se tiene que

- Si $k \leq m$, entonces T queda determinada por sus valores que quedan determinadas en k -uplas ordenadas de \mathcal{B} : $T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ para $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.
- Si $k > m$ entonces $T \equiv 0$.

□

Como corolario inmediato tenemos $\Lambda^k((\mathbb{R}^m)^*) = 0$ si $k > m$, y el siguiente resultado.

Corolario 4.19. Si $k \leq m$ la dimensión de $\Lambda^k((\mathbb{R}^m)^*) = \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$.

Observación 4.20. En particular, $T \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$ queda determinado por su valor en la m -upla canónica (e_1, \dots, e_m) , y por lo tanto es un múltiplo del determinante:

$$T = T(e_1, \dots, e_m) \det.$$

4.4. Mapa adjunto

Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^*$ un funcional lineal. Una forma de inducir un elemento del dual de un espacio vectorial V cualquiera, es considerar un mapa lineal $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, para luego precomponer φ con el mapa A . Es decir, podemos definir $\psi(v) := \varphi(Av)$, para todo $v \in V$. Es fácil ver que este mapa inducido es lineal y por tanto $\psi \in V^*$.

Este mapa se llama adjunto y se escribe A^* . Más en general si $A : V \rightarrow W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales, el mapa adjunto $A^* : W^* \rightarrow V^*$ está dado por $A^*\varphi(\cdot) = \varphi(A\cdot)$, para todo $\varphi \in W^*$.

Ejemplo 4.21. Sea $A : V \rightarrow W$ lineal, y sean $\{v_1, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ bases de V y W respectivas. Sea $((a_{ij}))$ la matriz asociada a estas bases, i.e.

$$Av_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ij} w_i, \quad (i = 1, \dots, \ell, j = 1, \dots, k).$$

Luego es fácil ver que

$$A^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} v_j^*, \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (4.6)$$

Esto resulta de que $A^*(w_i^*)(v_j) = w_i^*(Av_j) = a_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, k$.

Observación 4.22. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto interno en V . Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal. Luego una forma natural de identificar V con V^* es via el mapa

$$v \in V \mapsto v^* := \langle v, \cdot \rangle \in V^*.$$

Es muy fácil ver que es un mapa lineal inyectivo y por tanto un isomorfismo (por ser V de dimensión finita).

Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal, y sea $\varphi \in V^*$, dada por $\varphi(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$, para cierto $v \in V$. El mapa inducido, mencionado en el párrafo anterior, es el siguiente:

$$\psi(w) = \varphi(Aw) = \langle v, Aw \rangle = \langle A^T v, w \rangle, \quad \forall w \in V,$$

es decir, que el funcional lineal $\langle v, \cdot \rangle \mapsto \langle A^T v, \cdot \rangle$.

En terminos matriciales, escribiendo vectores en la base ortonormal dada, se tiene que A^T es la matriz traspuesta vista en los cursos de álgebra lineal (que en el caso complejo es la traspuesta conjugada, comunmente llamada matriz adjunta).

Esta operación es de suma importancia en el álgebra exterior, y es fácilmente generalizado para k -formas alternadas como veremos a continuación.

Definición 4.23. Sea $A : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales reales de dimensión finita. El mapa *adjunto* A^* de A , se define como el mapa $A^* : \Lambda^k(W^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$,

$$(A^*T)(v_1, \dots, v_k) = T(Av_1, \dots, Av_k), \quad T \in \Lambda^k(W^*), v_1, \dots, v_k \in V.$$

Proposición 4.24. Probar que si A y B son transformaciones lineales, donde tiene sentido la composición $A \circ B$, entonces los mapas adjuntos verifican $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$. □ □

Proposición 4.25. Si $A : V \rightarrow W$ es una transformación lineal invertible entre espacios vectoriales reales de dimensión finita, entonces A^* es invertible y se tiene $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. \square

◇ 4.26. Probar estas dos proposiciones.

Proposición 4.27. Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Sea $\det \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$. Entonces $(A^* \det)(\cdot) = |A| \det(\cdot)$, donde $|A|$ es el determinante de la matriz A .

Demostración. Sabemos que $(A^* \det) \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$, y por ser un espacio de dimensión 1, tiene que ser un múltiplo de \det . (Cf. Observación 4.20.) Evaluando en la base canónica de \mathbb{R}^m resulta $(A^* \det)(e_1, \dots, e_m) = \det(Ae_1, \dots, Ae_m) = |A|$, y por lo tanto el múltiplo es $|A|$. \square

Corolario 4.28. Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Sea $T \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$. Entonces $A^*T = |A|T$.

Demostración. La prueba sigue del hecho $\dim \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*) = 1$, y por lo tanto $T = \alpha \cdot \det$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. \square

Observación 4.29. Recordar que si $A : V \rightarrow V$ es una transformación lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces el *determinante* de A , que también escribimos $\det(A)$, está bien definido. Esto es, basta elegir una base cualquiera de V , y expresar la transformación en esa base, para luego hallar el determinante de la matriz asociada. Como el determinante de una matriz es invariante por conjugaciones de matrices invertibles, resulta que lo anterior es independiente de la base elegida.

Con esta observación podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.30. Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal en un espacio vectorial V de dimensión m . Sea $T \in \Lambda^m(V^*)$. Entonces $A^*T = \det(A) \cdot T$.

Demostración. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V , y sea $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\Pi(v_i) = e_i$, ($i = 1, \dots, m$). Luego $\Pi^* \det$ es un generador de $\Lambda^m(V^*)$, y por lo tanto basta probar el resultado para $\Pi^* \det$.

Luego resulta

$$\begin{aligned} A^*(\Pi^* \det)(v_1, \dots, v_m) &= (\Pi \circ A)^* \det(v_1, \dots, v_m) \\ &= \det(\Pi(Av_1), \dots, \Pi(Av_m)) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

La última igualdad resulta de lo siguiente: escribiendo $Av_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$, que $\Pi(Av_j)$ es la combinación lineal $\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, y por lo tanto $\det(\Pi(Av_1), \dots, \Pi(Av_m)) = \det A$.

Observar que $\Pi^* \det(v_1, \dots, v_m) = 1$, y como $\dim \Lambda^m(V^*) = 1$, resulta

$$A^*(\Pi^* \det) = \det(A)(\Pi^* \det).$$

□

Una prueba más económica de la proposición anterior, (que en el fondo es la misma) es trasladar las formas en $\Lambda^m(V^*)$ a formas en $\Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*)$, via el isomorfismo Π^* , para luego utilizar la Proposición 4.24.

Consideremos el mapa lineal $\Pi \circ A \circ \Pi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. De la Proposición 4.27 se tiene $(\Pi \circ A \circ \Pi^{-1})^* \det = |\Pi \circ A \circ \Pi^{-1}| \cdot \det$. De la Proposición 4.24 se tiene $(\Pi^{-1})^*(A^*(\Pi^* \det)) = (\Pi \circ A \circ \Pi^{-1})^* \det$. Por lo tanto, si actuamos por Π^* en ambos lados resulta

$$A^*(\Pi^* \det) = |\Pi \circ A \circ \Pi^{-1}| \cdot \Pi^* \det.$$

Al igual que antes, hay que verificar que $|\Pi \circ A \circ \Pi^{-1}|$ no es otra cosa que $\det(A)$.

4.5. Producto exterior

¿Cómo podemos construir k -forma alternadas a partir de formas de “tamaño” menor, como 1-formas?

Veamos un posible enfoque. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Una vorma de construir una 2-forma multilineal es la siguiente

$$\varphi \otimes \psi(v, w) := \varphi(v)\psi(w), \quad v, w \in V.$$

Este producto se llama *producto tensorial* entre φ y ψ . Es fácil ver que $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{T}^2(V^*)$. Pero en principio nada nos asegura que intercambiando v con w el resultado es el opuesto. Pero una manera de construir una 2-forma alterada es considerar el operador *Alternador*,

$$\varphi \wedge \psi := \text{Alt}(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi.$$

Cuando tenemos productos de k 1-formas podríamos hacer algo similar. Para evitar la combinatoria evidente tomamos un camino un poco distinto.

La idea es usar el mapa adjunto para transportar la k -forma determinante $\det^{(k)} \in \Lambda^k((\mathbb{R}^k)^*)$ a cualquier espacio vectorial V de la siguiente manera.

4.5.1. Producto de 1-formas

Definición 4.31. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Lambda^1(V^*)$. Definimos el mapa lineal

$$\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{dado por} \quad \Phi(v) := \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_k(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad (v \in V).$$

Luego se define el *producto exterior* $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(V^*)$ como

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k := \Phi^* \det,$$

donde $\det \in \Lambda^k((\mathbb{R}^k)^*)$.

Expandiendo lo anterior tenemos

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_k)) = \left| \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) \\ \vdots \\ \varphi_k(v_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \varphi_1(v_k) \\ \vdots \\ \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \right|$$

Ejemplo 4.32. Consideremos en \mathbb{R}^2 la base dual $\{dx, dy\}$. Luego se tiene

$$dx \wedge dy(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^* \det(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

es decir $dx \wedge dy$ es la función determinante.

Ejemplo 4.33. Consideremos en \mathbb{R}^3 las 2-formas $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$. Sabemos que para poder determinar las dos formas es suficiente calcular en elementos ordenados de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Procediendo de manera análoga al ejemplo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy(e_1, e_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ dx \wedge dy(e_2, e_3) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ dx \wedge dy(e_3, e_1) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos que $dy \wedge dz(e_2, e_3) = 1$ y toma el valor 0 en (e_1, e_2) y (e_3, e_1) .

Sabemos que la dimensión de $\Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*)$ es 3, y por lo tanto podemos concluir que

$$\{dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx\}$$

es una base de $\Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*)$.

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Definiendo u^* al funcional lineal que resulta de tomar el producto interno $u^*(x) = \langle x, u \rangle = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$. Observar que

$$u^* \wedge v^*(e_i, e_j) = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$$

Luego escribiendo en la base recién descrita obtenemos

$$u^* \wedge v^* = (u_1 v_2 - v_1 u_2) dx \wedge dy + (u_3 v_1 - v_3 u_1) dz \wedge dx + (u_2 v_3 - v_2 u_3) dy \wedge dz.$$

(Comparar con (4.4) en la motivación del álgebra exterior.)

Ejemplo 4.34. En \mathbb{R}^m podemos concluir

$$\det = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*).$$

Con esta notación podemos concluir de la Proposición 4.27 el siguiente resultado.

Proposición 4.35. Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal. Entonces

$$A^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m) = |A| dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

□

◇ 4.36. Probar lo anterior directamente con la definición de adjunto.

Proposición 4.37. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$, y $A : V \rightarrow W$ una mapa lineal. Entonces

$$A^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = (A^*\varphi_1) \wedge \cdots \wedge (A^*\varphi_k).$$

◇ 4.38. Probar este resultado.

Dado que sabemos que el determinante de una matriz es cero si dos columnas (o dos filas) son iguales, podemos concluir que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = 0$ siempre que $\varphi_i = \varphi_j$ para alguno de los índices.

Proposición 4.39. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , y sea $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual. Entonces

$$\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es base de $\Lambda^k(V^*)$.

Demostración. Observar que si evaluamos $v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*$ (que es un elemento de $\Lambda^k(V^*)$), en una colección ordenada $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$, obtenemos que solo toma el valor

$$v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k}.$$

Luego si $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^* = 0$, evaluando en elementos ordenados de la base obtenemos que $\alpha_{i_1, \dots, i_k} = 0$. Luego, como la dimensión del espacio coincide con el cardinal del conjunto linealmente independiente, podemos concluir el resultado.

□

Corolario 4.40. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , y sea $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual. Entonces $\{v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*\}$ es base de $\Lambda^n(V^*)$, y satisface $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = 1$.

4.5.2. Producto exterior de formas

Queremos extender lo anterior a considerar el producto exterior entre formas cualesquiera dadas en un espacio vectorial V . Esto es, si $T \in \Lambda^k(V^*)$ y $S \in \Lambda^\ell(V^*)$, queremos definir $T \wedge S \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$.

Lo hacemos de manera “inductiva”. Si $k = 0$, (o $\ell = 0$) asumimos que $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$, entonces resulta

$$\alpha \wedge T := \alpha \cdot T, \quad \alpha \in \mathbb{R}, T \in \Lambda^\ell(V^*).$$

Si k y ℓ son ambos positivos entonces lo hacemos via una base.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , entonces de la Proposición 4.39 sabemos que

$$\{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} \quad \text{y} \quad \{v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_\ell}^* : 1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n\}$$

son bases de $\Lambda^k(V^*)$ y $\Lambda^\ell(V^*)$ respectivamente.

Luego definimos

$$(v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*) \wedge (v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_\ell}^*) := v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \wedge v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_\ell}^*$$

para luego extenderlo de manea asociativa y distributiva.

Veamos algunos ejemplos para trabajar la definición, para luego hacer algunos comentarios y tranquilizar esa sensación inquietante que genera esta definición.

Ejemplo 4.41. Sea $S \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ y $T \in \Lambda^\ell((\mathbb{R}^n)^*)$. Entonces podemos escribir

$$S = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad T = \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} \beta_{j_1, \dots, j_\ell} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell},$$

Entonces resulta

$$S \wedge T = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \beta_{j_1, \dots, j_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

Ejemplo 4.42. En \mathbb{R}^3 , veamos el caso $\Lambda^2 \times \Lambda^1$.

$$\begin{aligned} (adx \wedge dy + bdy \wedge dz + cdz \wedge dx) \wedge dx &= bdy \wedge dz \wedge dx \\ &= bdx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

donde estamos usando que si los funcionales lineales se repiten en el producto exterior entonces son nulos.

Comentario 4.43. Esta definición que realizamos primero debería coincidir con la vista en la Sección 4.5.1. Esto resulta de lo siguiente. Si $\varphi = \sum_i a_i v_i^*$, y $\psi = \sum_j b_j v_j^*$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi(v_k, v_l) &= \det \left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{v_k}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{v_l} \right) = \det \begin{pmatrix} a_k & a_l \\ b_k & b_l \end{pmatrix} \\ &= a_k b_l - a_l b_k = \sum_{ij} a_i b_j v_i^* \wedge v_j^*(v_k, v_l) = \left(\sum_i a_i v_i^* \right) \wedge \left(\sum_j b_j v_j^* \right)(v_k, v_l) \end{aligned}$$

Observación 4.44. Sean $S \in \Lambda^k(V^*)$, y $T \in \Lambda^\ell(V^*)$. Si $k + \ell > n$, y $\dim V = n$ entonces automáticamente $S \wedge T = 0$.

Observación 4.45. Sea $A : V \rightarrow V$ lineal. Entonces

$$A^*(S \wedge T) = A^*S \wedge A^*T.$$

La prueba queda como ejercicio.

Formas diferenciales

Las formas diferenciales surgen de extender las formas alternadas en \mathbb{R}^m a tener coeficientes no constantes, definidos en un abierto de \mathbb{R}^n . Dado que estamos en un curso de cálculo es razonable pedirles que los coeficientes sean funciones C^∞ . Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 5.1. Una k -forma diferencial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ es una función de clase C^∞

$$\omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^m)^*).$$

Se denota por $\Omega^k(U)$ al espacio de las k -forma diferenciales en U .

El conjunto $\Lambda^k((\mathbb{R}^m)^*)$ es un espacio vectorial (de dimensión finita) y por lo tanto tiene sentido hablar de que ω es una función C^∞ . Basta probar que ser de clase C^∞ no depende de la base elegida.

Ejemplo 5.2 ($k = 0$). Recordar que identificamos $\Lambda^0((\mathbb{R}^m)^*)$ con \mathbb{R} , y por lo tanto una 0-forma diferencial en $U \subset \mathbb{R}^m$ es una función C^∞ de U en \mathbb{R} . En particular $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ es el espacio de funciones a valores reales C^∞ en U .

Ejemplo 5.3 ($k = 1$). Una forma $\omega \in \Omega^1(U)$, está dada por

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) dx_i, \quad p \in U$$

con $a_i : U \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$.

Ejemplo 5.4 ($k = 2$). Una 2-forma ω , en U está dada por

$$\omega(p) = \sum_{i < j}^m a_{ij}(p) dx_i \wedge dx_j, \quad p \in U$$

con $a_{ij} \in C^\infty(U)$.

Ejemplo 5.5. Una forma $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ está dada por

$$\omega(x, y, z) = a(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz = a(x, y, z) \det, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Observación 5.6. El espacio de k -formas alternadas $\Lambda^k((\mathbb{R}^m)^*)$ está trivialmente incluido e $\Omega^k(U)$ al tomar coeficientes constantes. Esto motiva el siguiente abuso de notación. La forma alternada $dx \in \Lambda^1((\mathbb{R}^m)^*)$, induce una forma diferencial con mismo nombre en $\Omega^1(U)$ definida por

$$\underbrace{dx}_{\in \Omega^1(U)}(p) = \underbrace{dx}_{\in \Lambda^1((\mathbb{R}^m)^*)}, \quad p \in U \subset \mathbb{R}^m.$$

Observación 5.7. El espacio $\Omega^k(U)$ de k -formas diferenciales en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial de manera sencilla. Basta definir la suma y producto por número, punto a punto.

Recordar que un *campo de vectores* definidos en $U \subset \mathbb{R}^3$, es un mapa $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ .

Proposición 5.8. Sea $\omega \in \Omega^2(U)$ dada por

$$\omega(p) = a(p) dy \wedge dz + b(p) dz \wedge dx + c(p) dx \wedge dy, \quad p \in U$$

y sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo dado por

$$X(p) = a(p)e_1 + b(p)e_2 + c(p)e_3, \quad p \in U$$

Es un ejercicio ver que

$$\omega(p)(v, w) = \langle X(p), v \times w \rangle,$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno den \mathbb{R}^3 .

En particular, si consideramos el campo constante $\omega(p) = dx \wedge dy$, entonces

$$\omega(p)(v, w) = \langle e_3, v \wedge w \rangle.$$

5.1. Producto exterior

Definición 5.9. Sean $\omega \in \Omega^k(U)$, y $\eta \in \Omega^\ell(U)$. Definimos el producto $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ como

$$(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p), \quad p \in U.$$

Esto es, si

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ \eta &= \sum_{j_1, \dots, j_\ell} b_{j_1 \dots j_\ell} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \end{aligned}$$

entonces,

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell} a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1 \dots j_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

Como verán la notación se torna un poco pesada, y por esta razón en varias oportunidades escribiremos

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

y de esta manera más económica tenemos que si

$$\omega = \sum a_I dx_I, \quad \eta = \sum b_J dx_J,$$

con $a_I, b_J : U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^∞ , se tiene

$$\omega \wedge \eta = \sum a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

En particular si los coeficientes a_I y b_J son constantes tenemos que el producto exterior coincide con el que ya teníamos para formas alternadas en \mathbb{R}^m .

Ejemplo 5.10. Sean

$$\omega(x, y, z) = xdx + ydy + zdz, \quad \eta(x, y, z) = \frac{x^2 y}{1+z^2} dx \wedge dy$$

una 1 y 2 formas diferenciales en \mathbb{R}^3 respectivamente. Luego

$$\omega \wedge \eta(x, y, z) = \frac{x^2 y z}{1+z^2} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Proposición 5.11. Sean $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^\ell(U)$, $\zeta \in \Omega^s(U)$.

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$
2. $\omega \wedge (\eta + \zeta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \zeta$, $(\ell = s)$;
3. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$. □

◇ 5.12. Probar esta proposición.

5.2. Pull-back

Una de las características más importantes de las formas diferenciales es su comportamiento a través de cambios de coordenadas. Esto, como veremos, está relacionado a las buenas propiedades que tiene el operador adjunto en el caso de formas alternadas.

Definición 5.13. Sea $f : U \rightarrow V$ un mapa C^∞ entre abiertos $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f induce el mapa *pull-back* $f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$, definido de la siguiente manera. Para toda $\omega \in \Omega^k(V)$, se define $f^* \omega \in \Omega^k(U)$ como

$$(f^* \omega)(p) := Df(p)^* (\omega(f(p))), \quad p \in U,$$

i.e., si $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$

$$(f^* \omega)(p)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(p))(Df(p)v_1, \dots, Df(p)v_k).$$

Ejemplo 5.14. Supongamos que tenemos una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es C^∞ , y tenemos la forma $adx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$. Entonces, de la definición resulta:

$$\begin{aligned} f^*(adx \wedge dy \wedge dz)(p) &= Df(p)^* (a(f(p)) dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= a(f(p)) Df(p)^* (dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= a(f(p)) \det Df(p) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Antes de ver las propiedades, veamos un ejemplo de cómo el pull-back opera sobre 1-formas.

Para tal fin vale la pena recordar el Ejemplo 4.21, donde se describe cómo opera el mapa adjunto entre elementos del dual.

Intentaremos escribir en detalle las notaciones para que no existan confusiones.

Ejemplo 5.15. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ C^∞ . Escribamos con x las variables en U , e $y \in V$. Con estas notaciones podemos escribir por $\mathcal{B}_1^* = \{dx_1, \dots, dx_m\}$ la base canónica del dual de \mathbb{R}^m (dominio), y por $\mathcal{B}_2^* = \{dy_1, \dots, dy_n\}$ la base de canónica del dual de \mathbb{R}^n (codominio).

Con estas definiciones el pull-back f^* trae una combinación de elementos en \mathcal{B}_2^* en una combinación lineal de \mathcal{B}_1^* . Entonces se tiene el siguiente resultado.

Consideremos la 1-forma $dy_i \in \Omega^1(V)$. Entonces

$$(f^* dy_i)(p)(e_j) = \underbrace{dy_i(f(p))}_{dy_i \in V^*} \underbrace{(Df(p)e_j)}_{\in \mathbb{R}^n} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p),$$

donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, y $p \in U$.

Concluimos entonces

$$f^* dy_i(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) dx_j, \quad p \in U,$$

(c.f. 4.6)).

Observar que lo que estamos diciendo es que

$$Df(p)^* dy_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) dx_j. \quad (5.1)$$

Observación 5.16. El pull-back $f^* dy_i$ no es otra cosa que el dual del gradiente de f_i , o lo que se llama a veces *derivada total* de f_i

$$Df(p)^* dy_i = df_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (5.2)$$

Con esta notación podemos escribir más fácil cómo opera el pull-back sobre $\Omega^k(V)$:

Si $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} \in \Omega^k(V)$, entonces

$$\begin{aligned} (f^* \omega)(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(f(x)) Df(p)^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(f(x)) (df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}) \end{aligned}$$

donde denotamos por df_i a la 1-forma dada en (5.2).

A continuación veremos algunas propiedades que satisface el pull-back.

Proposición 5.17. 1. f^* es lineal;

2. $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^* \omega) \wedge (f^* \eta)$;

3. $(\text{Id}_{\mathbb{R}^m})^* = \text{Id}_{\Omega^k(\mathbb{R}^m)}$;

4. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;

5. Si $f: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo, entonces f^* lo es y se satisface $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

6. $g \in \Omega^0(V)$, $f^*(g \cdot \omega) = g \circ f \cdot (f^* \omega)$. □

◇ **5.18.** Probar esta proposición.

Veamos un ejemplo concreto

Ejemplo 5.19. Consideremos el abierto

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)\} = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi).$$

Sea $f = (f_1, f_2): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} f_1(\rho, \theta) &= \rho \cos \theta = x \\ f_2(\rho, \theta) &= \rho \sin \theta = y \end{aligned} \tag{5.3}$$

Observar que la imagen de f es el plano \mathbb{R}^2 menos una semirrecta que parte del origen, i.e. $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Sea $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ dada por

$$\omega(x,y) = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{a_1(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{a_2(x,y)} dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}. \quad (5.4)$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} (f^* \omega)(\rho, \theta) &= a_1(f(\rho, \theta)) Df(\rho, \theta)^* dx + a_2(f(\rho, \theta)) Df(\rho, \theta)^* dy \\ &= \frac{-\rho \sin \theta}{\rho^2} Df(\rho, \theta)^* dx + \frac{\rho \cos \theta}{\rho^2} Df(\rho, \theta)^* dy \end{aligned}$$

Ahora, de (5.1) sabemos que

$$\begin{aligned} Df(\rho, \theta)^* dx &= df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\rho + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) d\theta = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \\ Df(\rho, \theta)^* dy &= df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\rho + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) d\theta = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Luego juntando todo obtenemos $(f^* \omega)(\rho, \theta) = d\theta$, para todo $(\rho, \theta) \in U$, por lo que concluimos (con el abuso de notación mencionado antes)

$$f^* \omega = d\theta. \quad (5.5)$$

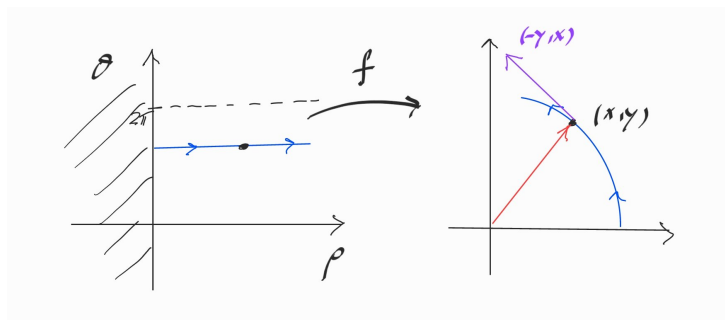


Figura 5.1: Coordenadas polares

Observación 5.20. La forma diferencial 5.4 se denomina *forma de ángulo*. Observar que

$$\omega(x,y)(-y,x) = 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}.$$

5.3. Derivada exterior

La idea es generalizar el concepto de derivada a formas diferenciales.

Si $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, i.e. $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ , definimos por $dg \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ definida

$$dg(p)v := \frac{\partial g}{\partial v}(p) = \langle \nabla g(p), v \rangle \text{ "derivada direccional"}.$$

Observar que esto implica que

$$dg(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) dx_i.$$

En este sentido la derivada exterior de una 0-forma se puede ver como el diferencial de la función asociada. Es decir,

$$dg(p) := Dg(p) \in (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*),$$

donde

$$dg(p)v := Dg(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) v_i,$$

siendo

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n.$$

Definición 5.21. Sea $\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} a_I dx_I \in \Omega^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, definimos la derivada exterior $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ como

$$d\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} da_I \wedge dx_I.$$

Formalmente, la derivada exterior es un mapa $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$.

Ejemplo 5.22. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Luego

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Ejemplo 5.23. Sea $\omega = a dx + b dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge dx + db \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \wedge dy + \\ &= \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.24. Sea $\omega = a dx + b dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge dx + db \wedge dy + dc \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz \right) \wedge dz \end{aligned}$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (5.6)$$

Ejemplo 5.25. Sea $\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Luego

$$d\omega = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (5.7)$$

Observación 5.26. Vimos que $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dg \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $\pi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$.

¿Quién es $d\pi_1$?

$$d\pi_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \pi_1}{\partial x_n} dx_n = dx_1$$

Denotando $x_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1(y_1, \dots, y_n) = y_1$, tenemos sin ambigüedad que dx_1 no es otra cosa que dx_1 !!

O sea, la derivada exterior de $x_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es exactamente lo que hemos denominado $dx_1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 5.27. 1. El operador derivada extiende d es lineal en $\Omega^k(U)$, i.e. $d(\alpha\omega + \beta\eta) = \alpha d\omega + \beta d\eta$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $\omega, \eta \in \Omega^k(U)$;

2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, con $\omega \in \Omega^k(U)$ y $\eta \in \Omega^\ell(U)$;

3. $d \circ d = d^2 = 0$;

4. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, para $\omega \in \Omega^k(U)$, $f: U \rightarrow V$ de clase C^∞ .

Demostración. 1. Queda de ejercicio.

2. Sean de forma genérica $\omega = \sum_I a_I dx_I$, y $\eta = \sum_J b_J dx_J$. Luego $\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$. Luego

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Como las funciones a_I, b_J son funciones C^∞ en $U \subset \mathbb{R}^n$, i.e., están en $\Omega^0(U)$, resulta de la regla del producto que

$$d(a_I b_J) = da_I b_J + a_I db_J,$$

Luego

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (da_I b_J + a_I db_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

donde el signo viene de alternar $db_J \wedge dx_I = dx_I \wedge db_J$ que son exactamente k cambios (recordar $\omega \in \Omega^k(U)$).

3. Probemos el resultado para 0-formas.

Sea $f \in \Omega^0(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Luego

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i < j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)}_{=0} dx_i \wedge dx_j = 0, \end{aligned}$$

concluyendo que $d^2 f = 0$.

Si $\omega \in \Omega^k(U)$, por linealidad basta mirar el caso particular $\omega = a_I dx_I$ para cierto multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Luego tenemos

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d^2 a_I \wedge dx_I - (-1)^1 da_I \wedge d^2 x_I.$$

Pero como a_I es una cero forma, el primer término es 0. Por otro lado $d^2 x_I = d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$. Escribiendo $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = dx_{i_1} \wedge (dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$, podemos observar que su derivada exterior es 0 de manera inductiva.

4. Recordar de (5.2) que

$$f^* dx_1 = df_1 = d(x_1 \circ f) = d(f^* x_1).$$

Sea $g \in \Omega^0(V)$. Entonces

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f\right) f^* dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos de la regla de la cadena, que si consideramos la composición $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $g \circ f \in \Omega^0(U)$) y derivamos (y escribimos en coordenadas)

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(p)v &= Dg(f(p)) \cdot Df(p)v \\ &= \langle \nabla g(f(p)), Df(p)v \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(p)) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right). \end{aligned}$$

Luego concluimos que

$$f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^*g).$$

Ahora si $\omega = \sum_I a_I dx_I \in \Omega^k(V)$ resulta

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= \sum_I f^*(da_I \wedge dx_I) \\ &= \sum_I d(f^*a_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= d\left(\sum_I (f^*a_I) f^*(dx_I)\right) \\ &= d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

5.4. Formas y campos en \mathbb{R}^3

Sea $\mathcal{X}(U)$ el conjunto de campos de vectores en $U \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $F \in \mathcal{X}(U)$, entonces F es una función

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

donde F_i son funciones C^∞ .

Observar que podemos identificar $\mathcal{X}(U)$ con $\Omega^1(U)$ y $\Omega^2(U)$ de la siguiente manera

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \mapsto \omega_F^1 := F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz; \quad (5.8)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \mapsto \omega_F^2 := F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy. \quad (5.9)$$

Por otro lado, el espacio de funciones $C^\infty(U)$ puede ser identificado por

$$f \in C^\infty(U) \mapsto \omega_f^3 = f dx \wedge dy \wedge dz. \quad (5.10)$$

Definición 5.28 (Rotacional y divergencia de un campo). Sea $F \in \mathcal{X}(U)$ un campo vectorial definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$.

- El *rotacional* F es un nuevo campo definido por

$$\text{rot}(F) := \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

- La *divergencia* de F es una función en $C^\infty(U)$ dada por

$$\text{div}(F) := \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

1

¹En siguientes secciones daremos una noción geométrica asociada a la definición de rotacional y divergencia de un campo. Para tales nociones necesitamos el concepto de integración que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

En pocas palabras, el rotacional mide cuánto “circula” el campo alrededor de un punto. La longitud y dirección del campo rotacional están asociados a la magnitud y eje de máxima circulación.

Por otro lado la divergencia de un campo está asociada a cuánto “emana” el campo en un volumen infinitesimal.

Observación 5.29. Sea $f \in C^\infty(U)$. Recordar que el gradiente de f es el campo vectorial definido por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \in \mathcal{X}(U).$$

Luego de las expresiones (5.6) y (5.7) obtenemos las siguientes identidades.

1. $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \omega^1(\nabla f)$, para $f \in C^\infty(U)$.
2. $d\omega_F^1 = \omega_{\text{rot}(F)}^2$, si $F \in \mathcal{X}(U)$.
3. $d\omega_F^2 = \omega_{\text{div}(F)}^3$, si $F \in \mathcal{X}(U)$.

Lema 5.30. 1. Si $F \in \mathcal{X}(U)$ entonces $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$.

2. Si $f \in C^\infty(U)$ entonces $\text{rot}(\nabla f) = 0$.

Demostración. La demostración sigue del siguiente diagrama, para $U = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \simeq \omega^1(\cdot) & & \downarrow \simeq \omega^2(\cdot) & & \downarrow \simeq \omega^3(\cdot) \\ C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Luego utilizando la Proposición 5.27–3, tenemos lo siguiente.

Si $F \in \mathcal{X}(U)$ entonces

$$\text{div}(\text{rot}(F)) \simeq d(d\omega^1(F)) = 0.$$

Análogamente, si $f \in C^\infty(U)$ entonces

$$\text{rot}(\nabla f) \simeq d(df) = 0.$$

□

5.4.1. Formas cerradas y exactas en \mathbb{R}^3

Definición 5.31. Sea $\omega \in \Omega^k(U)$, con U abierto de \mathbb{R}^n .

- Decimos que ω es *cerrada* si $d\omega = 0$.
- Decimos que ω es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\omega = d\eta$.

Observación 5.32. Como $d \circ d = 0$, entonces resulta que toda forma exacta es cerrada. El recíproco no es cierto (y detrás está una teoría potente que vincula la geometría y la topología denominada *cohomología de De Rham*.)

Ejemplo 5.33. Sea $V = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definida por en Ejemplo 5.4,

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

Entonces

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy = 0,$$

y por lo tanto ω es cerrada.

Comentario 5.34. ¿Es ω exacta? La respuesta es no, y la veremos en la siguiente sección. Pero ¿cómo se vincula esto con lo visto en la fórmula de ángulo utilizando el cambio a polares, donde vimos $f^*\omega = d\theta$?

Veamos un poco este punto. En realidad lo que probamos es que si tomamos $\tilde{V} := \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$, y entonces el mapa $f : U \rightarrow \tilde{V}$ (el cambio a polares dado en (5.3)) es un difeomorfismo con inversa

$$f^{-1} : \tilde{V} \rightarrow U, f^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)).$$

Luego tenemos del Ejemplo 5.19 que

$$f^*(\omega|_{\tilde{V}}) = d\theta,$$

y por lo tanto utilizando la Proposición 5.27 tenemos

$$\omega|_{\tilde{V}} = (f^{-1})^* d\theta = d((f^{-1})^* \theta) = d(\theta \circ f^{-1}) = d(\arctan(y/x)).$$

Luego podemos concluir que $\omega|_{\tilde{V}}$ es una forma exacta en $\tilde{V} = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$.

Sin embargo, veremos en la siguiente sección que ω no es exacta en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En el fondo, lo que está sucediendo es que \tilde{V} y $V =: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ son abiertos no homeomorfos, dado que \tilde{V} no tiene “agujeros” como si lo tiene V (el origen).

Como comentario final se puede usar este argumento para probar que de hecho ω es cerrada en cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si el punto (x, y) no está en el semieje problemático $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$, luego sabemos que localmente vale que $\omega = df$ para cierta función (el arctan en este caso), y por lo tanto la derivada exterior es nula. Si el punto es de la forma $(x, 0)$. Entonces basta tomar un cambio polares adecuado que contenga a dicha “rama” y listo el pollo. (Es decir definimos U en otra banda de ángulos, por ejemplo $\theta \in (-\pi, \pi)$.)

Integrales de línea

6.1. Definición

Las formas se diseñaron para integrarlas.

Comencemos con 1-formas en curvas diferenciables a trozos.

Sea $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \in \Omega^1(U)$, siendo U un abierto de \mathbb{R}^n .

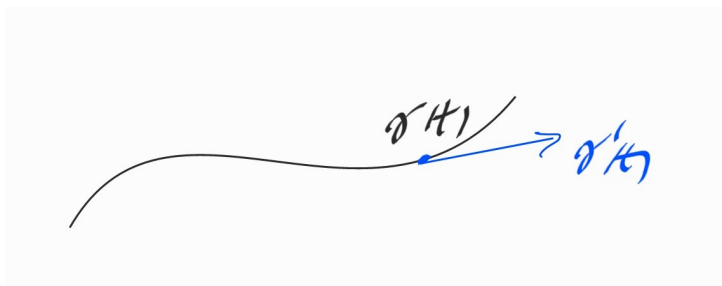
Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una función suave¹ dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \quad t \in [a, b].$$

Observación 6.1. El pull-back de $\omega \in \Omega^1(U)$ pertenece a $\Omega^1([a, b])$ y está dado por

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega(t) &= \sum_{i=1}^n a_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma^*(dx_i)(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \circ \gamma(t) \cdot d\gamma_i(t) = \sum_{i=1}^n a_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma'_i(t) \end{aligned}$$

¹Recordar que suave significa en este caso que existen las derivadas laterales.



(Acá extendemos a las 1-formas a tomar valores en el extremo del intervalo.)

Se define la integral de línea de ω sobre γ como

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega := \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma'_i(t) dt, \quad (6.1)$$

donde abusando notación volvemos a la viejo y querido dt de la integral de Riemann.

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ es suave a trozos, i.e., γ es continua y existen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$, tal que $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ es suave, definimos

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{j=1}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$$

Para que la definición tenga sentido hay que probar que no depende de las reparametrizaciones.

Una curva $\beta: [c, d] \rightarrow U$ es una *reparametrización* de $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ si existe una función $\sigma: [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva diferenciable tal que $\gamma \circ \sigma = \beta$, y $\sigma'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$ (i.e. σ es un difeomorfismo.) (El signo de σ' es para que preserve la orientación del intervalo.)

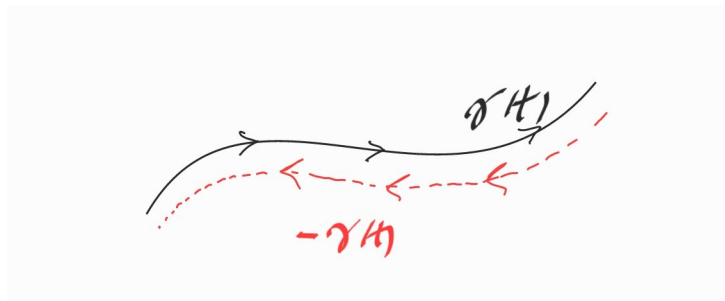
Veamos que $\int_{\gamma} \omega = \int_{\beta} \omega$.

Asumimos que γ es suave. Luego tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \omega &= \sum_{i=1}^n \int_c^d a_i \circ \beta(s) \cdot \beta'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_c^d \underbrace{a_i \circ \gamma(\sigma(s)) \cdot \gamma'(\sigma(s))}_{\rho_i(\sigma(s))} \cdot \sigma'(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d \rho_i(\sigma(s)) \sigma'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_a^b \rho_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma'_i(t) dt = \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Observar que si σ revierte orientación entonces hay un cambio de signo en la integral. En este sentido si pensamos a γ como la $\text{IM}(\gamma)$, con su orientación, y definimos $-\gamma$ (o γ^{-1} con la orientación opuesta, resulta

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$



Veamos un ejemplo.

Ejemplo 6.2. Consideramos la fórmula de ángulo $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ dada por

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

y sea $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Luego

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(-\sin t)}_{a_1 \circ \gamma(t)} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\gamma'_1(t)} + \underbrace{(-\sin t)}_{a_2 \circ \gamma(t)} \cdot \underbrace{(\cos t)}_{\gamma'_2(t)} \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

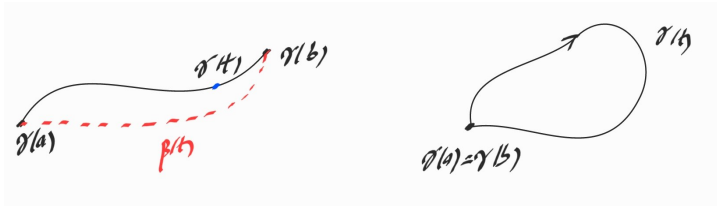
6.2. Integración de formas exactas

Sea $\omega \in \Omega^1(U)$, y supongamos que es exacta. Entonces existe cierta función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\omega = df$.

Luego si $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ es suave, resulta

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_\gamma df = \int_a^b \gamma^*(df) \\ &= \int_a^b d(\gamma^* f) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Por lo tanto si γ es una curva cerrada, y ω es exacta, concluimos que $\int_\gamma \omega = 0$.



Por lo tanto, podemos concluir que la fórmula de ángulo dada en el ejemplo anterior no es exacta. (Cf. Comentario 5.34.)

Observación 6.3. Sea $F \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, y consideremos su 1-forma asociada $\omega_F^1 = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave. Entonces

$$\int_\gamma \omega_F^1 = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

que no es otra cosa que integrar la componente tangente del campo F a la curva γ .

A esta integral la denotaremos por $\int_\gamma F$. (Ver Sección 8.4.2.)

Con estas notaciones podemos reescribir la anterior observación. Si ω es exacta, i.e. $\omega = df$ para alguna f , entonces tenemos que $\omega = \omega_{\nabla f}^1$, y por lo tanto

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_{\nabla f}^1 = \int_a^b \underbrace{\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}_{(f \circ \gamma)'(t)} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

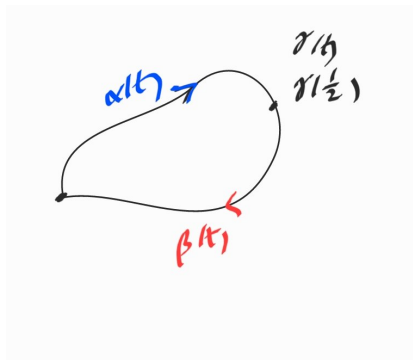
Condensemos en una proposición estas observaciones.

Proposición 6.4. Sea $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \in \Omega^1(U)$, con U abierto conexo de \mathbb{R}^n . Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- a) ω es exacta
- b) $\int_{\gamma} \omega$ sólo depende de los puntos extremos de γ , i.e. cualquier otra $\tilde{\gamma}$ que conecte mismos extremos se tiene $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$
- c) $\int_{\gamma} \omega = 0$ para todo γ cerrada.

Demostración. a) \Rightarrow b): Ya lo vimos.

b) \Rightarrow c): Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ cerrada. Podemos escribir γ como la concatenación de dos curvas $\alpha: [0, 1/2] \rightarrow U$ y $\beta: [1/2, 1] \rightarrow U$ donde α y β coinciden con γ en sus respectivos intervalos de definición.



Luego tenemos

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega. \quad (6.2)$$

Por α y $-\beta$ son curvas que conectan los mismos puntos (a saber, $\gamma(0)$ y $\gamma(1/2)$), resulta por hipótesis que

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{-\beta} \omega. \quad (6.3)$$

De (6.2) y (6.3) sigue que $\int_{\gamma} \omega = 0$.

c)⇒ b): Sean α y β curvas con mismos extremos. Luego la curva γ definida como la concatenación de α y $-\beta$ es una curva cerrada (previamente hay que reparametrizar para poder hacer la concatenación). Luego

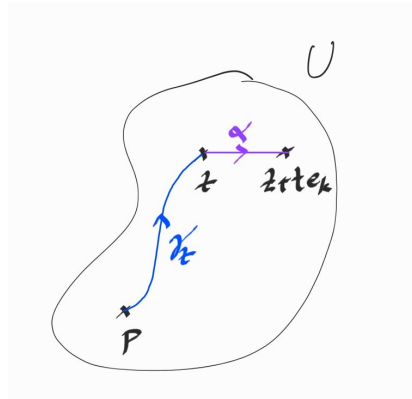
$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha \cdot (-\beta)} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega,$$

obteniendo el resultado.

b)⇒ a): Dado $p \in U$, definimos la función

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(z) = \int_{\gamma_z} \omega,$$

donde γ_z es una curva que conecta p con z .



Veamos que $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, coincide con df , i.e. $a_i(z) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)$, para todo $z \in U$.

Para tal fin calculemos el cociente incremental en las direcciones canónicas.

Sea t suficiente mente chico para que el segmento de recta

$$\alpha(s) = z + se_k, \quad s \in [0, t],$$

esté en U .

dibujo

Luego tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z+te_k) - f(z)}{t} &= \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_z} \omega + \int_{\alpha} \omega - \int_{\gamma_z} \omega \right) \\
 &= \frac{1}{t} \int_{\alpha} \omega \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i \circ \alpha(s) \cdot \alpha'_i(s) ds \\
 [\alpha'_i(s) = \delta_{ik}] &\rightarrow = \frac{1}{t} \int_0^t a_k \circ \alpha(s) ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t a_i(z+se_k) ds.
 \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+te_k) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t a_i(z+se_k) ds = a_i(z),$$

finalizando la prueba. □

Formas en Variedades

Definición 7.1. Una k -forma en una variedad (con o sin borde) es una función ω que a cada punto $p \in M$ le asigna una k -forma alternada en el tangente T_pM , i.e.,

$$\omega(p) \in \Lambda^k((T_pM)^*), \quad p \in M.$$

Con esta definición, punto a punto, podemos extender de manera puntual las propiedades algebraicas de las formas alternadas.

1. $(\omega_1 + \alpha\omega_2)(p) = \omega_1(p) + \alpha\omega_2(p)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$, y ω_i son k -formas en M .
2. $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$ siendo ω y η k y ℓ formas en M .
3. $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$ siendo ω una k forma.

Ejemplo 7.2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave es una 0-forma, (donde identificamos como anteriormente $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$).

Ejemplo 7.3. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, su diferencial $Df(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal, i.e., $Df(p) \in \Lambda^1((T_pM)^*)$. Luego Df es una 1-forma en M : a $p \in M$ lo manda en $Df(p) \in (T_pM)^*$.

A esta forma también la denotaremos df .

Ejemplo 7.4. En particular, $M = \mathbb{R}^n$ las formas diferenciales en \mathbb{R}^n (o en un abierto del mismo) son formas identificando $T_p\mathbb{R}^n$ con \mathbb{R}^n (ver Ejemplo 3.24):

$$\omega \in \Omega^k(U), \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto: } \omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*).$$

Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades. Via parametrizaciones es fácil ver que su diferencial es un mapa bien definido

$$Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N.$$

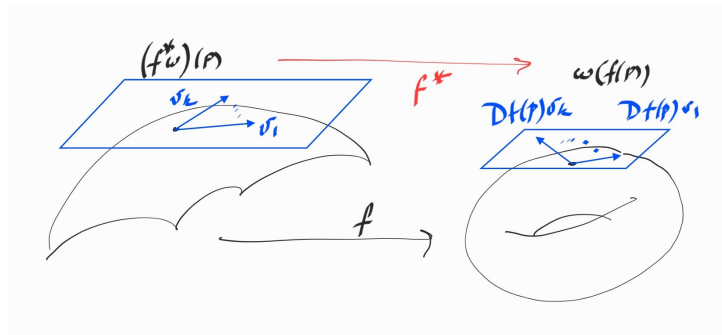
Con esta observación, podemos definir el *pull-back* de formas y transportarlas entre variedades utilizando el mapa adjunto definido en Definición 4.23.

Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades. Podemos extender de manera natural la noción de $f^* : \omega$ una k -forma en N , entonces $f^*\omega$ es una k forma en M dada por:

$$(f^*\omega)(p) := Df(p)^*\omega(f(p)), \quad \forall p \in M \quad (7.1)$$

Si $v_1, \dots, v_k \in T_pM$, entonces

$$f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(Df(p)v_1, \dots, Df(p)v_k).$$



De las propiedades del pull-back y el mapa adjunto ya vistas, podemos extenderlas al caso de k -formas en variedades.

Proposición 7.5. 1. f^* es lineal

$$2. f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

3. $(\text{Id}_M)^* = \text{Id}$ siendo Id la identidad en las k formas en M .
4. $f : M \rightarrow N$ difeomorfismo. Entonces f^* es un isomorfismo entre k -formas en N y k -formas en M .

□

Observación 7.6. De la segunda propiedad obtenemos que si g es una 0-forma en M , entonces $f^*(g\omega) = g \circ f \cdot f^*\omega$.

7.1. Formas diferenciales en Variedades

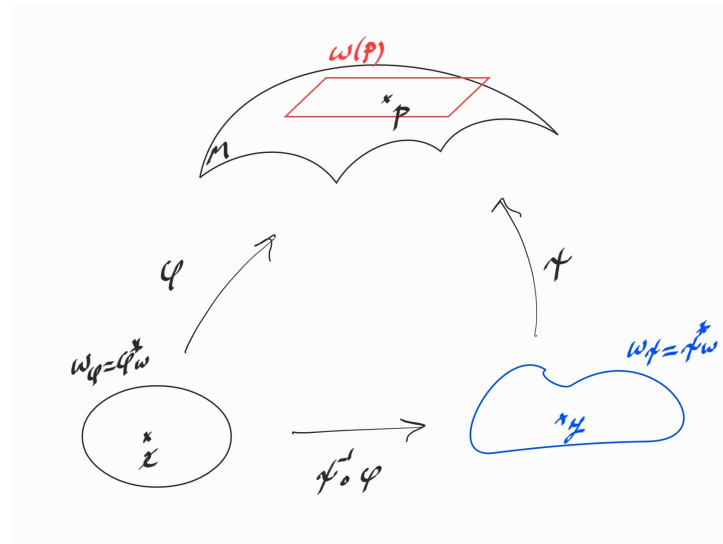
Hasta ahora no hemos estudiado el comportamiento de las formas cuando hacemos variar el punto $p \in M$. La idea es que las formas diferenciales en variedades son aquellas que localmente podemos “pegar” de manera C^∞ las formas en cada tangente. La manera simple de describir este comportamiento es via parametrizaciones.

Definición 7.7. Una forma k -forma ω en M se dice k -forma diferencial, y denotamos $\omega \in \Omega^k(M)$, si para toda parametrización local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ se tiene $\varphi^*(\omega|_{\varphi(U)}) \in \Omega^k(U)$, es decir, $\varphi^*(\omega|_{\varphi(U)})$ es una k -forma diferencial en $U \subset \mathbb{R}^m$.

Veamos que alcanza con probar la condición para una sola parametrización, obteniéndose de manera automática la condición para cualquier otra parametrización que intersecte la región parametrizada. Además será interesante estudiar la relación entre dos expresiones locales de la misma forma via dos parametrizaciones distintas. Veamos esto

Sean $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, y $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ parametrizaciones en un entorno de M .

Sean $x \in U$ e $y \in V$ tales que $\varphi(x) = p = \psi(y)$.



Denotemos por $\omega_\varphi = \varphi^* \omega$ y $\omega_\psi = \psi^* \omega$. Entonces para $v_1, \dots, v_k \in T_x U$ resulta

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(x)(v_1, \dots, v_k) &= \omega(p)(D\varphi(x)v_1, \dots, D\varphi(x)v_k) \\ &= \omega_\psi(y)(D\psi^{-1}(p)D\varphi(x)v_1, \dots, D\psi^{-1}(p)D\varphi(x)v_k) \\ &= \omega_\psi(y)(D(\psi^{-1} \circ \varphi)(x)v_1, \dots, D(\psi^{-1} \circ \varphi)(x)v_k) \\ &= (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\omega_\psi)(x)(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\omega_\varphi = (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\omega_\psi). \quad (7.2)$$

Y como la función $\psi^{-1} \circ \varphi$ es suave, concluimos que la definición es consistente. Esto es, si $\psi^* \omega \in \Omega^k(V)$, entonces $\varphi^* \omega \in \Omega^k(U)$.

Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ una parametrización. Entonces el mapa $\varphi^* : \Omega^k(\varphi(U)) \rightarrow \Omega^k(U)$ sirve para identificar los espacios de k -formas diferenciales en un abierto de la variedad con k -formas diferenciales en $U \subset \mathbb{R}^m$.

En particular nos permite definir la derivada exterior de una forma en variedades.

Definición 7.8. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$. La *derivada exterior* de ω , es la forma $d\omega \in \Omega^{k+1}$ que en representación local via una parametrización φ satisface

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^* \omega.$$

Utilizando la identidad (7.2) que da la relación entre el pull-back de una forma en dos parametrizaciones distintas, resulta

$$d\omega_\varphi = d(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\omega_\psi) = (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(d\omega_\psi).$$

En este sentido vemos que la relación del pull-back de la derivada exterior en dos parametrizaciones guarda la misma relación que en (7.2).

Observación 7.9. La proposición 7.5 es válida cambiando k -formas en variedades por $\Omega^k(M)$. La prueba queda de ejercicio.

7.2. Orientación en variedades

Nuestro objetivo es definir la integral de formas en variedades. La idea es generalizar la definición de *integral de líneas* dada en el Capítulo 6, donde básicamente lo que definimos es la integral de 1-forma definida en una curva (i.e. variedades de dimensión 1 en \mathbb{R}^n).

Como vimos en ese capítulo, la orientación de la curva juega un papel importante. En particular, si reparametrizamos nuestras curvas, necesitábamos que la misma preserve la “orientación” (i.e. que sea la misma que la dada previamente a reparametrizar) para que la integral esté bien definida.

A continuación discutiremos la noción de “orientación” en una variedad diferenciable.

La orientación en una variedad es un concepto que permite dar un orden en cada espacio tangente a una variedad de manera consistente. Por ejemplo, en la esfera unidad de \mathbb{R}^3 , es fácil decir qué está por dentro de la esfera, y qué está por arriba de la esfera. Similarmente dado un plano en el espacio podríamos determinar con la “regla de la mano derecha”, qué es estar por arriba del plano y qué es estar por abajo. Por ejemplo si una persona camina por un plano, y vuelve a su posición inicial, es claro que sigue estando del mismo lado del plano.

Sin embargo puede haber variedades en el cual este concepto no es tan claro, y de hecho no suceden las observaciones anteriores. Un ejemplo de esto es la conocida “banda de Möbius”.

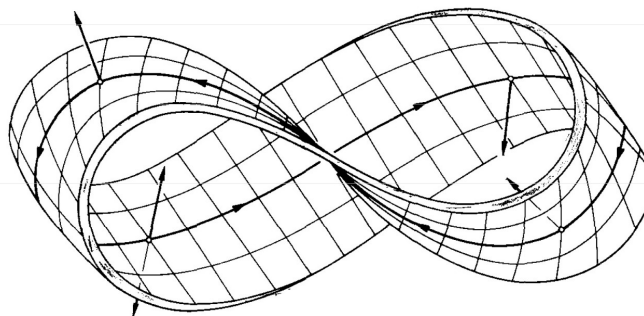


Figura 7.1: Banda de Möbius.

En este caso es fácil convencerse ver que una persona que camina por esta banda (i.e. el vector normal que está en el dibujo), puede dar una vuelta completa a la banda y volver al mismo punto pero estando del otro lado de la banda.

La manera de formalizar lo aquí comentado, motivado quizás por la regla de la mano derecha, es dar un orden específico de vectores en el espacio tangente, y ver que luego este orden es consistente al moverse a lo largo de la variedad. Comencemos con definir “orientar” los espacios vectoriales.

7.2.1. Orientación en espacios vectoriales

La formalización de *orientación en un espacio vectorial* se define a través de bases.

La recta real \mathbb{R} se podría decir que tiene dos sentidos posibles para moverse. Por ejemplo utilizando el orden de los reales, y ahí concluir que si tomamos como base un número real positivo, la base tiene la orientación canónica, y de lo contrario decimos que tiene la orientación opuesta.

De manera similar podríamos decir que el plano \mathbb{R}^2 , con base canónica e_1, e_2 , podemos decir que la orientación puede ser dada utilizando el sentido horario y antihorario para decir si dos bases están igualmente orientadas.

Pero más en general, cómo lo hacemos? Es decir si V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , ¿cómo podemos definir una orientación en sus bases?

Observar que a priori no hay una forma clara de hacerlo. Por ejemplo V podría ser el espacio de polinomios de grados 2, el cual tiene dimensión 3. En este caso la base $\{1, x - x^2, 2x + x^2\}$ tiene la orientación canónica? qué significa eso?

La respuesta es que no significa nada :)

Lo que veremos es que hay dos familias de bases (formalmente dos clases de equivalencias), y en este sentido podemos decir si dos bases están en la misma clase, o no. Veamos esto.

Definición 7.10. Sean (v_1, \dots, v_m) , y (w_1, \dots, w_m) dos bases ordenadas V . Decimos que son *equivalentes* si $\det A > 0$ siendo A la matriz de cambio de base:

$$A = ((a_{ij})), \quad w_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Observación 7.11. Una forma alternativa de definirlo, y que resulta en la misma definición, es la siguiente.

Sean (v_1, \dots, v_m) , y (w_1, \dots, w_m) dos bases ordenadas V . Decimos que son equivalentes si

$$v_1^* \wedge \dots \wedge v_m^*(w_1, \dots, w_m) > 0,$$

siendo $v_1^* \wedge \dots \wedge v_m^* \in \Lambda^m(V^*)$. Es un ejercicio verificar que esta definición coincide con la dada más arriba.

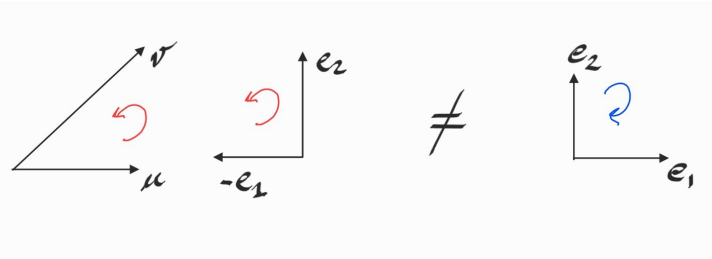
Esta definición determina dos clases de equivalencias posibles.

Ejemplo 7.12. Consideremos en \mathbb{R}^2 la base canónica (e_1, e_2) . Una base (u, v) , con $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 e_1 + u_2 e_2$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2$, tiene la misma orientación que la canónica si

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} > 0.$$

(De hecho sabemos que en este caso los vectores u y v están en sentido antihorario.)

Como ejemplos particulares podemos decir que la base $(e_2, -e_1)$ tienen la misma orientación que la canónica, pero (e_2, e_1) tiene orientación distinta.



7.2.2. Orientación en variedades

Como comentamos más arriba, una variedad es orientable si podemos dar un orden en cada espacio tangente de manera consistente. ¿Pero qué entendemos por consistente?

Si tenemos una parametrización de la variedad, es fácil orientar los espacios tangentes en cada punto de la imagen de la parametrización. Simplemente tomamos la imagen de la base canónica por el diferencial de la parametrización para dar una base ordenada. Más preciso, si φ es una parametrización, tomamos como orientación en $T_p M$ la dada por la base ordenada $(\partial_{x_1} \varphi(x), \dots, \partial_{x_m} \varphi(x))$. Luego, si nuestra variedad es parametrizada con una única parametrización, listo el pollo.

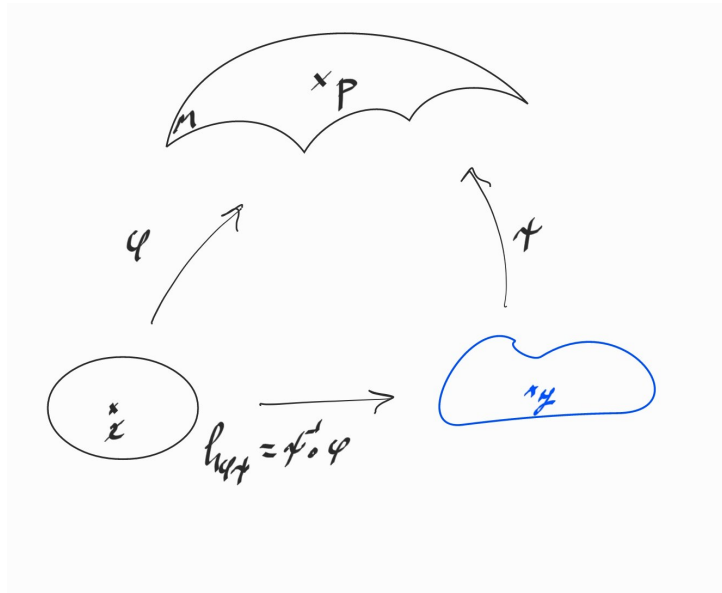
Los problemas vienen cuando nuestra variedad está definida por más de una parametrización, y en tal caso tenemos que ver en los puntos de intersección de las imágenes de las parametrizaciones, que las bases definidas sean equivalentes.

Definición 7.13. Decimos que una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$, es *orientable* si existe una familia de parametrizaciones cuyas imágenes cubran M y satisfacen la condición de compatibilidad de que el cambio de local de parametrizaciones tiene derivada positiva.

Más precisamente y (tedioso de escribir) M es orientable si existe una familia \mathcal{F} de parametrizaciones cuyas imágenes cubran M y satisfacen la siguiente compatibilidad: $\varphi: U \rightarrow M$, $\psi: V \rightarrow M$ parametrizaciones, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ con $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ entonces

$$\det(Dh_{\varphi, \psi}(x)) > 0, \quad \forall x \in \hat{U},$$

siendo $h_{\varphi, \psi} := \hat{\psi}^{-1} \circ \hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow \hat{V}$, $\hat{U} = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$, $\hat{V} = \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$, $\hat{\varphi} := \varphi|_{\hat{U}}$, y $\hat{\psi} := \psi|_{\hat{V}}$.



Diremos que una *orientación* en M es una familia \mathcal{F} definida como antes y “maximal”¹.

Tener una orientación en M permite orientar cada espacio tangente via parametrizaciones.

Sea $p \in M$, $\varphi: U \rightarrow M$, \mathcal{F} , con $\varphi(x) = p \in M$, elegimos la orientación del espacio tangente $T_p M$ dada por la clase de equivalencia de la base $\{D\varphi(x)e_1, \dots, D\varphi(x)e_m\}$.

Veamos que la orientación en $T_p M$ está bien definida.

Sea $\psi: V \rightarrow M$ otra parametrización en \mathcal{F} , con $\psi(y) = p$. Tenemos que verificar que $\{D\psi(y)e_1, \dots, D\psi(y)e_m\}$ tiene la misma orientación.

Para facilitar asumimos $\varphi(U) = \psi(V)$. Sea $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ (i.e. $\psi \circ h = \varphi$).

¹Esta formalidad surge de que si tenemos parametrizaciones que cubren M siempre podemos agregar otras que sean redundantes. En tal caso nos gustaría meter en la bolsa de \mathcal{F} a todas las compatibles y no dejar ninguna afuera.

Luego

$$D\varphi(x)e_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$D\psi(y)e_i = \frac{\partial\psi}{\partial y_i}(y) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Regla de la cadena mediante $D\psi(y)Dh(x) = D\varphi(x)$, entonces

$$D\psi(y)Dh(x)e_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

Luego escribiendo en coordenadas tenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial y_j}(y)}_{\in T_p M} \quad (7.3)$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base es $((\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x)))$ y

$$\det((\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x))) = \det Dh(x) > 0,$$

y por lo tanto las bases son equivalentes.

7.3. Forma de volumen

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión m , orientado, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortonormal (que diremos positiva).

La m -forma $v := v_1^* \wedge \dots \wedge v_m^*$ es base del espacio unidimensional $\Lambda^m(V^*)$, y satisface $v(v_1, \dots, v_m) = 1$. (ver Corolario 4.40.)

¿Cuánto vale v en una base ortonormal positiva $\{w_1, \dots, w_m\}$? (Acá por positiva referimos a que es equivalente a la otra base.)

Por definición sabemos que

$$v(w_1, \dots, w_m) = \det((v_i^*(w_j))_{i,j=1,\dots,m}) = \det A.$$

siendo $A = ((a_{ij}))_{i,j=1,\dots,m}$ la matriz de cambio de base: $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$, ($j = 1, \dots, m$). Como $\{w_1, \dots, w_m\}$ es b.o.n. resulta que A es ortogonal $A^T A = \text{Id}_m$ (probarlo, o mirar prueba de Lema 7.16). Entonces $\det A = \pm 1$. Pero como ambas bases tienen misma orientación resulta que $\det A = 1$ y por lo tanto $v(w_1, \dots, w_m) = 1$.

Podemos concluir de lo anterior, y del hecho que $\dim \Lambda^m(V^*) = 1$, la siguiente definición.

Definición 7.14. Sea V un \mathbb{R} espacio vectorial de dimensión m , orientado, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Existe una única forma alternada que toma el valor 1 en bases ortonormales positivas. Esta forma se llama *forma de volumen*, o *elemento de volumen*.

Ejemplo 7.15. En \mathbb{R}^n , con la orientación canónica y producto interno canónico tenemos que $v = \det \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$ es la forma de volumen

Sea $V \subset \mathbb{R}^\ell$ un subespacio de dimensión m . Por ser un subespacio de \mathbb{R}^ℓ hereda un producto interno del ambiente. Eligiendo una orientación en V , podemos definir su forma de volumen v_V . Sabemos que esta forma toma el valor 1 en cualquier base ortonormal positiva de V . Pero cuál es su valor en una base cualquier?

Lema 7.16. Sea $V \subset \mathbb{R}^\ell$ un subespacio de dimensión m , y sea v_V su forma de volumen en V , respecto al producto interno inducido por el ambiente y a una orientación prefijada. Sea $\{w_1, \dots, w_m\}$ conjunto linealmente independiente en V con orientación positiva. Entonces

$$v_V(w_1, \dots, w_m) = \sqrt{\det(\langle w_i, w_j \rangle)}.$$

Demostración. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortonormal positiva en V . Escribiendo $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$, ($j = 1, \dots, m$), tenemos $v_V(w_1, \dots, w_m) = \det A$, siendo $A = ((a_{ij}))_{i,j=1,\dots,m}$ la matriz de cambio de base. Lo que queremos escribir los coeficientes a_{ij} en función de los productos internos de $\langle w_i, w_j \rangle$.

Resulta

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_h \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_{ik}v_i, \sum_{j=1}^m a_{jh}v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ik}a_{ih} = (A^T A)_{kh} \quad (k, h = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

y por lo tanto $v_V(w_1, \dots, w_m) = \det A = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{\det(\langle w_i, w_j \rangle)}$. \square

Definición 7.17. Sea $M \subset \mathbb{R}^\ell$ una variedad diferenciable orientada de dimensión m , con producto interno inducido en cada tangente. Definimos por $dV \in \Omega^m(M)$, la *forma de volumen* en M , la m -forma diferencial tal que $dV(p) \in \Lambda^m(T_p M^*)$ es la forma de volumen en $T_p M$:

$$dV(p)(v_1, \dots, v_m) = 1,$$

para cualquier b.o.n. positiva en $T_p M$.

Lo único que deberíamos verificar es que la forma así definida es realmente una forma diferencial, i.e. un elemento en $\Omega^m(M)$. Para ver esto, basta hacer el pullback y verificar que sea una forma diferencial en un abierto de \mathbb{R}^m . Veamos esto.

Sea $\varphi : U \rightarrow M$ una parametrización compatible con la orientación, esto es, $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x)\}$ es una base positiva de $T_p M$, con $\varphi(x) = p$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^* dV(x)(e_1, \dots, e_m) &= dV(p)(D\varphi(x)e_1, \dots, D\varphi(x)e_m) \\ &= dV(p)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x)\right) \\ &= \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle\right)}. \end{aligned}$$

Luego concluimos que

$$\varphi^* dV(x) = \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle\right)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \in \Lambda^m((\mathbb{R}^m)^*),$$

y por lo tanto $\varphi^* dV \in \Omega^m(U)$, con U abierto de \mathbb{R}^m .

Es decir $dV|_{\varphi(U)} \in \Omega^k(\varphi(U))$, con $\varphi(U) \subset M$.

A la matriz

$$G(x) = ((g_{ij}(x))), \quad g_{ij}(x) := \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle, \quad (7.4)$$

se le llama *matriz de Gram*, y por lo tanto la expresión de la forma de volumen en coordenadas locales resulta

$$\varphi^*(dV)(x) = \sqrt{\det G(x)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m. \quad (7.5)$$

7.3.1. Formas y orientación

Proposición 7.18. *Una variedad M es orientable si y sólo si existe una forma $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ que no se anula (i.e. $\omega(p) \in \Lambda^{\dim M}(T_p M^*)$ no es nula.)*

Demostración. (\Rightarrow) Los espacios tangentes de M pueden ser dotados del producto interno del ambiente, y luego, por ser orientable, concluimos que M tiene una vorma de volumen, a saber, $dV \in \Omega^{\dim M}(M)$. Por ser de volumen, es claro que no sea nula (de hecho toma el valor 1 en cualquier b.o.n.)

(\Leftarrow) Queremos generar una familia \mathcal{F} de paramatrizaciones compatibles (i.e. equivalentes). Sea $m = \dim M$. Sean $\varphi : U \rightarrow M$ y $\psi : V \rightarrow M$ dos parametrizaciones tales que $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Realizando restricciones podemos asumir que $\varphi(U) = \psi(V)$. Como ω no se anula tenemos que las formas

$$\varphi^* \omega(u) = a(u) du_1 \wedge \cdots \wedge du_m, \quad \psi^* \omega(y) = b(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m,$$

satisfacen: $a(u) \neq 0$ en U , y $b(y) \neq 0$ en V .

Asumiendo U y V conexos se tiene que el signo de a y b se mantienen constantes respectivamente. Luego tomando el difeomorfismo $f = \psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ tenemos que

$$f^*(\psi^* \omega)(u) = \varphi^* \omega(u),$$

y por lo tanto

$$b \circ f(u) \det Df(u) = a(u), \quad \forall u \in U.$$

Luego si el signo de $a(u)$ coincide con el signo de $b(f(u))$ tenemos que φ y ψ están en la misma clase y por lo tanto las metemos dentro de la bolsa de \mathcal{F} . De lo contrario modificamos una de las parametrizaciones (por ejemplo, permutando dos coordenadas) para que resulta que $\det Df(u) > 0$ en U , y de esa manera ambas paramatrizaciones son equivalentes. Procediendo de esta manera tendresmo una colección \mathcal{F} de paramatrizaciones que cubren la variedad todas equivalentes. □

Corolario 7.19. *Sea M una variedad orientable, entonces un abierto relativo $\mathcal{U} \subset M$ es una variedad orientable.* \square

Corolario 7.20. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie (i.e. una variedad diferenciable de dimensión 2). Entonces se tiene lo siguiente:*

M es orientable si y sólo si existe un campo unitario normal (i.e. un campo $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave, tal que $X(p) \in T_p M^\perp$, $\|X(p)\| = 1$).

Demostración. (\Leftarrow) Sea $\omega = \omega_X^2 \in \Omega^2(M)$ la 2 forma asociada. Procediendo como en la Proposición 5.8, tenemos que

$$\omega(p)(v, w) = \langle X(p), v \times w \rangle, \quad v, w \in T_p M.$$

(De hecho, para p fijo la forma puede comer vectores v y w en \mathbb{R}^3 , pero no nos interesa.)

Observar que si v y w están en $T_p M$ y no son colineales entonces $v \times w \in T_p M^\perp$, y por lo tanto la única manera que $\omega(p)$ sea la forma nula, es que $X(p) = 0$ lo que es absurdo. Por lo tanto hemos construido una forma no nula y por tanto M es orientable. (\Rightarrow). Para la ida, sea \mathcal{F} una colección de parametrizaciones que definen la orientación. Dado $\varphi \in \mathcal{F}$, sea X_φ el campo de vectores definido en M por

$$X_\varphi(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|} (x, y), \quad \varphi(x, y) = p.$$

Es fácil ver que X_φ es un campo definido en $\text{Im} \varphi \subset M$ y además es normal y unitario.

Resta ver que está bien definido, esto es, si tomamos $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\text{Im}(\psi) \cap \text{Im}(\varphi) \neq \emptyset$, entonces $X_\varphi = X_\psi$.

En realidad lo único que podría pasar es que $X_\psi = -X_\varphi$, pero eso no va a ocurrir justamente porque $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$.

De (7.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \end{aligned}$$

donde $Dh = ((a_{ij}))$, siendo $h = \psi^{-1} \circ \varphi$. (Omitimos las evaluaciones para no hacer tan pesada la notación.) Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left(a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \times \left(a_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \\ &= \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det Dh} \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Luego, como $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, resulta $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$ y por lo tanto $X_\varphi = X_\psi$, y por lo tanto está bien definido el campo. □

Proposición 7.21. *Toda superficie en \mathbb{R}^3 preimagen de un valor regular es orientable.*

Demostración. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ , y supongamos que $M = f^{-1}(0)$, con 0 valor regular. Como $Df(p)$ es sobreyectiva para todo $p \in M$, luego $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Además $\nabla f(p) \in T_p M^\perp$ (recordar que $\ker Df(p) = T_p M$). Luego podemos definir

$$X(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}, \quad p \in M.$$

Observar que $X \in \mathcal{X}(M)$ es un campo unitario y normal M , y por lo tanto M es orientable. □

En este sentido, como sabemos que existen superficies no orientables, podemos concluir que no toda superficie es la preimagen de un valor regular.

◇ **7.22.** Extender el resultado anterior a hipersuperficies, es decir, variedades diferenciables en \mathbb{R}^n de codimensión 1.

7.3.2. Ejemplos de forma de volumen

Veamos algunos ejemplos de forma de volumen.

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el gráfico de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, $M = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ la parametrización dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Dado que tenemos una parametrización sola, podemos orientar M de manera tal que la orientación en $T_p M$ es la dada por la base ordenada $\left\{ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right\}$.

Observar que se tiene

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix},$$

luego, la matriz de Gram asociada (7.4), es

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) & 1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\det G(x, y) = 1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2,$$

y por lo tanto la forma de “área” dA en coordenadas locales

$$\varphi^* dA(x, y) = \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2}}_{(*)} dx \wedge dy. \quad (7.6)$$

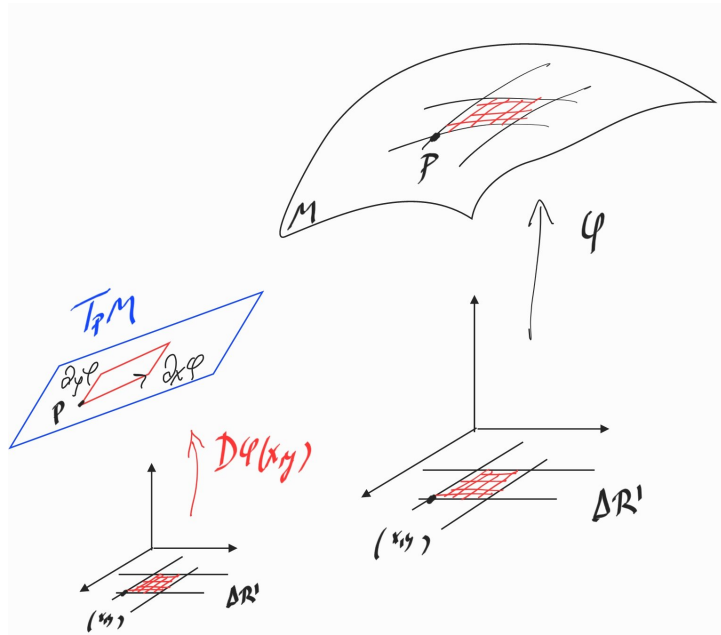
¿Pero, qué interpretación se le puede dar al factor $(*)$

El rectángulo infinitesimal $\Delta R'$ generado en las direcciones de e_1 y e_2 , con vértice (x, y) en \mathbb{R}^2 se mapea infinitesimalmente, en un rectángulo ΔR en el espacio tangente $T_p M$, siendo $p = \varphi(x, y)$.

El área de ese rectángulo en el tangente se puede calcular considerando el producto vectorial:

$$\text{área}(\Delta R') = \left\| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right\| = \left\| \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, 1 \right) \right\| = (*)$$

Esto significa que el término $\sqrt{\det G}$ representa la distorsión infinitesimal del área (o volumen en más dimensiones) de un rectángulo al mapearse por la



parametrización de un abierto de \mathbb{R}^2 a la variedad. Aproximando la variedad de esta manera, tomando pequeños cuadraditos en el dominio de la parametrización, nos daría un “discretización” de la variedad por rectangulitos, y si todo funciona bien se podría estimar el área sumando (integrando). De hecho, esto lo formalizaremos en el siguiente capítulo, y estas apreciaciones son correctas.

Ejemplo 7.23 (Área de S^2). Por ejemplo en el caso de la esfera S^2 , podemos estimar el área (o la mitad de esta) tomando la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, con $\mathbb{D} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1$.

Es un ejercicio ver que la distorsión, es decir, el factor $(*)$ es exactamente $1/f(x, y)$. Luego tendríamos

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(S^2) &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{\det G(x, y)} \, dx dy & (7.7) \\
 &= 2 \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho = 4\pi \sqrt{1 - \rho^2} \Big|_0^1 = 4\pi.
 \end{aligned}$$

Integración en Variedades

Vamos a definir la integral de una m -forma en una variedad orientable de dimensión m .

A lo largo de este capítulo asumiremos que el soporte de ω dado por $\text{sop}(\omega) := \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}} \subset M$, es un conjunto compacto.

8.1. Integración en \mathbb{R}^m

Veamos el caso $M = \mathbb{R}^m$.

Definición 8.1. Sea $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ la forma

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = a(x_1, \dots, x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, \quad (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

con $\text{sop}(\omega) = \overline{\{a(x) \neq 0 : x \in \mathbb{R}^m\}}$ compacto. Definimos la *integral de ω* en \mathbb{R}^m como

$$\int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}^m} a(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (8.1)$$

siendo la expresión derecha la integral de Riemann de la función $a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Recordar que en (7.7) realizamos la integral del pullback $\varphi^*(dA)$ que es

una forma en el plano (de hecho con soporte en $\overline{\mathbb{D}}$) de manera informal. Ahora formalmente tenemos

$$\text{Área}(S^2) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^*(dA)$$

(cf. (7.6).)

8.2. Integración en variedades

¿Cómo podemos definir la integral en una variedad M orientable?

Sea $\omega \in \Omega^m(M)$, y supongamos que $\text{sop}(\omega) \subset \mathcal{U} \subset M$, siendo $\mathcal{U} \subset M$ un abierto relativo parametrizable, i.e. $\varphi(U) = \mathcal{U}$, para cierta parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$.

Luego $\varphi^*\omega(u_1, \dots, u_m) = a(u_1, \dots, u_m) du_1 \wedge \dots \wedge du_m$, para $(u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Luego definimos

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^* \omega = \int_U a(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m.$$

Claramente, para que esta definición sea consistente, deberíamos ver que no depende de la parametrización del abierto parametrizable $\mathcal{U} \subset M$.

Sea $\psi : V \rightarrow M$ otra parametrización compatible con la orientación de φ (acá es fundamental que M sea orientable), tal que $\text{sop}(\omega) \subset \mathcal{V} = \varphi(V)$.

Sea $g = \varphi^{-1} \circ \psi : V \rightarrow U$ el difeomorfismo asociado (asumiendo las restricciones en dominio correspondientes.)

$$\text{Luego } \psi^*\omega(x) = g^*(\varphi^*\omega) = a \circ g(x) \det Dg(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_V \psi^*\omega &= \int_{x \in V} a \circ g(x) \det Dg(x) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_U a(u) du_1 \dots du_m = \int_U \varphi^*\omega \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue del teorema de cambio variable realizando el cambio $u = g(x)$, y observando que $|\det g(x)| = \det g(x) > 0$ por ser ψ compatible con φ .

Hemos probado que si el soporte de ω está en un abierto parametrizable, entonces podemos integrar sin problemas utilizando la definición dada en Definición 8.1, (donde es fundamental que la variedad sea orientable para que quede bien definido).

Además podemos concluir lo siguiente.

Lema 8.2. Sea $W \subset \mathbb{R}^m$ abierto, y $\eta \in \Omega^m(W)$. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, y $f : U \rightarrow W$ un difeomorfismo. Entonces

$$\int_U f^* \eta = \pm \int_W \eta,$$

donde el signo depende de si f preserva (+) o revierte (-) orientación.

Observación 8.3. Sean $\omega, \eta \in \Omega^m(M)$, formas en una variedad M de dimensión M , tal que los soportes de ω y η estén en un abierto parametrizable. Luego resulta, de la linealidad del pull-back y la integral de Riemann, lo siguiente.

$$\int_M (\alpha\omega + \beta\eta) = \alpha \int_M \omega + \beta \int_M \eta.$$

Ahora, ¿qué sucede si el soporte de ω no está en un abierto parametrizable?

Por ejemplo tenemos la forma de volumen $dV \in \Omega^2(S^2)$. Para poder definir la integral $\int_{S^2} dV$ tenemos que recurrir a una herramienta técnica denominada *partición de la unidad* que explicaremos a continuación, pero los detalles van para el apéndice.

Sea $K \subset M$ un compacto (que será el soporte de nuestra forma). Dado un cubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ por abiertos (parametrizables) de K en M se puede construir una familia finita de funciones suaves $\rho_1, \dots, \rho_\ell : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

1. $\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i = 1$ en K ;
2. $\text{sop}(\rho_i) \subset \mathcal{U}_i := \mathcal{U}_{\alpha_i}$.

El punto 1. significa que para cualquier punto $x \in K$, se tiene que la suma $\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i(x) = 1$. En particular, esto implica que $K \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_\ell$.

La familia $\{\rho_1, \dots, \rho_\ell\}$ se llama *partición diferenciable de la unidad subordinada al cubrimiento* $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de K

?Cuál es la idea con todo esto?

Como $\text{sop}(\rho_i) \subset \mathcal{U}_i$, entonces $\rho_i \omega \in \Omega^m(M)$ con soporte de $\rho_i \omega \subset \mathcal{U}_i$.

Luego tomando $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ cubrimiento por abiertos parametrizables (orientados) (i.e. $\mathcal{U}_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$, con $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ parametrizaciones compatibles), entonces podemos definir

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \rho_i \omega. \quad (8.2)$$

¿Y si tomamos otro cubrimiento, o otra partición de la unidad?

Tenemos que probar que la definición anterior no depende de las elecciones realizadas.

Sea $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ otra partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{\mathcal{V}_\beta\}$: con soporte de θ_j incluido en \mathcal{V}_j , y $\sum_{i=1}^k \theta_j = 1$ en K .

La función $\rho_i \theta_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\text{sop}(\rho_i \theta_j) \subset \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j$.

Resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \rho_i \omega &= \sum_{i=1}^{\ell} \int_M \left(\sum_{j=1}^k \theta_j \right) \rho_i \omega \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^k \int_M \rho_i \theta_j \omega, \end{aligned}$$

donde utilizamos las linealidades observadas anteriormente.

Por otro lado, partiendo del partición asociada a las θ_j obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \int_M \theta_j \omega &= \sum_{j=1}^k \int_M \left(\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i \right) \theta_j \omega \\ &= \sum_{i,j} \int_M \rho_i \theta_j \omega, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que hay independencia en las elecciones elegidas.

8.3. Integración de funciones en variedades

Definición 8.4. Sea M una variedad compacta, de dimensión m . Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Definimos

$$\int_M f := \int_M f dV,$$

siendo $dV \in \Omega^m(M)$ la forma de volumen.

8.3.1. Volúmenes de variedades

Una aplicación importante es el cálculo de volúmenes de variedades. El volumen de la variedad M se calcula integrando la función 1 a lo largo de la variedad, i.e.

$$\text{vol}(M) = \int_M 1 = \int_M dV.$$

8.3.2. Longitud de curvas

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^k$ una variedad de dimensión 1, compacta con borde y orientada. Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ una parametrización compatible con la orientación.

Sea ds la forma de longitud (i.e. la forma de volumen dV pero en dimensión 1).

Tenemos $ds(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, y además $T_p M$ es el espacio generado por $\varphi'(t)$ siendo $t \in [a, b]$ tal que $\varphi(t) = p$.

Luego

$$ds(p)(\varphi'(t)) = \|\varphi'(t)\|, \quad t \in [a, b].$$

(Recordar que $ds(p)v = 1$ si v tiene norma 1 en $T_p M \subset \mathbb{R}^k$, y está bien orientado.)

Luego tenemos que la forma $\varphi^* ds \in \Omega^1([a, b])$, y está dada por

$$\varphi^* ds(t)1 = ds(\varphi(t))(\varphi'(t)) = \|\varphi'(t)\|,$$

de donde concluimos que

$$\varphi^* ds(t) = \|\varphi'(t)\| dt, \tag{8.3}$$

y por lo tanto

$$\text{long}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \varphi^*(ds) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

En realidad el pull-back de la forma de longitud ya lo conocíamos del caso particular para curvas dado en la fórmula (7.5).

8.3.3. Áreas de superficies

Recordar del práctico que si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie, y $\varphi(u, v)$ es una parametrización, entonces la forma de área en coordenadas locales está dada por

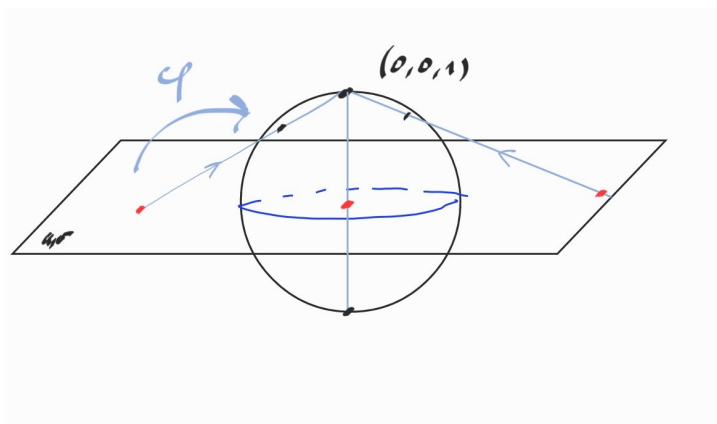
$$\varphi^*(dA) = \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| du \wedge dv.$$

Luego podemos integrar en coordenadas locales para hallar su área. Veamos en un ejemplo el área de la esfera S^2 , pero utilizando la proyección estereográfica.

Ejemplo 8.5 (Área de S^2 (revisitado)). En el Ejemplo 7.23 vimos cómo calcular el área de la esfera vista como gráfico de una función. Intentemos realizar el cálculo via proyección estereográfica.

Sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ dada por

$$\varphi(u, v) = \frac{(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)}{1 + u^2 + v^2}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$



(Observar que si $u^2 + v^2 = 1$ entonces $\varphi(u, v) = (u, v, 0)$.)

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_u \varphi &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1-u^2+v^2) \\ -4uv \\ 4u \end{pmatrix} \\ \partial_v \varphi &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} -4uv \\ 2(1+u^2-v^2) \\ 4v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Observar que $\varphi(u, v) \perp \{\partial_u \varphi, \partial_v \varphi\}$. Además $\partial_u \varphi \perp \partial_v \varphi$, es decir la derivada de φ transporta vectores ortogonales en vectores ortogonales. Esto significa que la proyección estereográfica es una mapa *conforme*.

Por lo tanto

$$\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| = \|\partial_u \varphi\| \cdot \|\partial_v \varphi\| = \left(\frac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2,$$

y concluimos

$$\varphi^*(dA) = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv.$$

Luego, podemos calcular el área de S^2 mediante la integral de $\varphi^*(dA)$ en \mathbb{R}^2 . (Observar que estamos asumiendo que el área de S^2 coincide con S^2 menos un punto.)

$$\begin{aligned}\text{área}(S^2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho d\theta \quad (t = 1 + \rho^2) \\ &= 4\pi \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 4\pi \frac{1}{t} \Big|_1^{\infty} = 4\pi.\end{aligned}$$

Más en general, si tenemos una función $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\int_{S^2} f = \int_{S^2} f dA = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^*(f dA) = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\varphi(u, v))}{(1+u^2+v^2)^2} du dv.$$

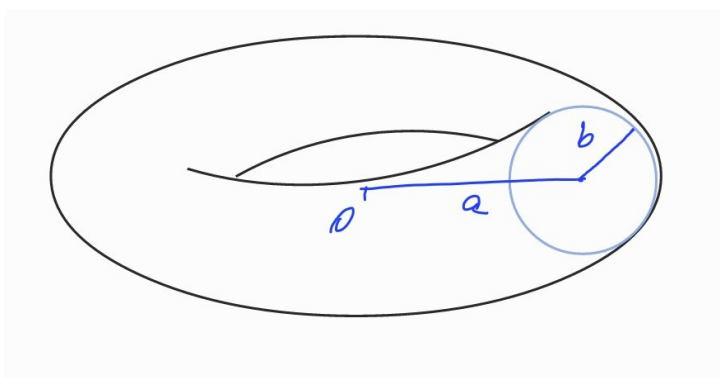
◇ **8.6** (...y otra la vez S^2). La esfera puede ser parametrizada via *coordenadas esféricas* via la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Calcular el área via esta parametrización.

Ejemplo 8.7 (Área del toro \mathbb{T}^2). El toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ puede ser representado en \mathbb{R}^3 mediante la superficie parametrizada dada por la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u). \end{aligned}$$



Es un ejercicio probar que

$$\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| = b(a + b \cos u),$$

y por lo tanto el área de esta superficie está dada por

$$A(\mathbb{T}^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) \, du \, dv = 4\pi^2 ab.$$

◇ **8.8** (Área del cono). Consideremos el cono en \mathbb{R}^3 dado por la parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r). \end{aligned}$$

Probar que el área del cono es $\sqrt{2}\pi$.

8.3.4. Ejemplo de integrales de funciones

Supongamos que queremos integrar la función $f(x, y, z) = z^2$ definida en la esfera. Del Ejercicio 8.6 sabemos que, en coordenadas esféricas $\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| = \sin v$, siendo φ las coordenadas esféricas dadas en (8.4) para $r = 1$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \int_{S^2} f &= \int_{S^2} z^2 dA = \int_{(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]} f(\varphi(u,v)) \sin v du dv \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi (\cos v)^2 \sin v dv = 2\pi \int_0^\pi (\cos v)^2 \sin v dv = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Es fácil ver que si la función que integramos es $(x, y, z) \mapsto z$, entonces la integral tiene que ser 0, dado que $\int_0^\pi \cos v \sin v dv = 0$. Una manera de convencerse es que la función z a lo largo de la esfera, toma valores opuestos en los puntos respectivos de los semiferios $z > 0$, y $z < 0$, por lo que al integrar esta función se cancelarían.

8.4. Integración de campos en curvas y superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable.

8.4.1. Flujo de un campo en \mathbb{R}^3

Sea $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, la forma dada por

$$\omega(x, y, z) = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Consideremos la restricción de ω a S . (Una manera formal realizar tal restricción es considerar el mapa inclusión $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es la identidad en S . Luego la forma $\tau^* \omega$ es la forma restringida a S .)

Sea el campo asociado, i.e. $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $F = (a, b, c)$, donde tenemos que $\omega = \omega_F^2$.

Supongamos que S está dado por una única parametrización, a saber, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$.

Luego,

$$\begin{aligned}\int_S \omega &= \int_U \varphi^* \omega \\ &= \int_S a \circ \varphi \cdot \varphi^* dy \wedge dz + b \circ \varphi \cdot \varphi^* dz \wedge dx + c \circ \varphi \cdot \varphi^* dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Recordar que

$$\begin{aligned}\varphi^*(dy \wedge dz) &= dy \wedge dz (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) du \wedge dv, \\ \varphi^*(dz \wedge dx) &= dz \wedge dx (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) du \wedge dv, \\ \varphi^*(dx \wedge dy) &= dx \wedge dy (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) du \wedge dv.\end{aligned}$$

Luego, recordando fórmula (4.5) del producto vectorial, resulta

$$\int_S \omega = \int_U \langle (a \circ \varphi, b \circ \varphi, c \circ \varphi), \partial_u \varphi \times \partial_v \varphi \rangle dudv,$$

es decir, en términos del campo resulta

$$\int_S \omega_F^2 = \int_U \langle F \circ \varphi, \partial_u \varphi \times \partial_v \varphi \rangle dudv \quad (8.5)$$

En otras palabras, $\int_S \omega_F^2$ da información sobre la componente normal del campo en la superficie. De hecho observar que si nuestro campo F es tangente a la superficie, entonces $\int_S \omega_F^2 = 0$.

Esta observación permite definir lo siguiente.

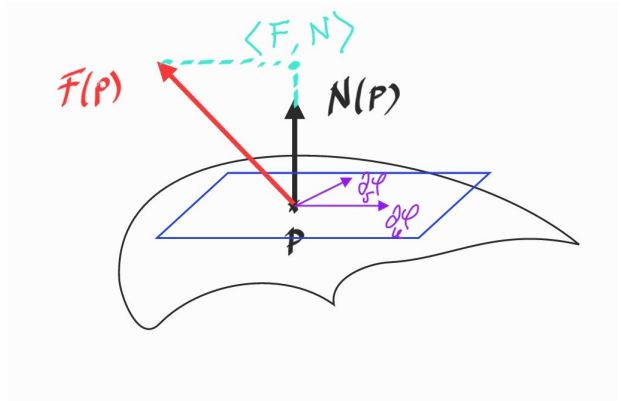
Definición 8.9. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo. Se define el *flujo de F a lo largo de la superficie S* a la integral

$$\int_S F \cdot dA := \int_S \langle F, N \rangle,$$

siendo $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo normal a la superficie.

El sentido del campo normal viene dado por la regla de la mano derecha. Esto es, si φ es una parametrización local en el entorno de $p \in S$, que define la orientación, entonces

$$N(p) = \frac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}, \quad \text{siendo } \varphi(u, v) = p.$$

Figura 8.1: Flujo: componente normal del campo F

Observar que si S está dada por la parametrización φ entonces el pull-back de la función $\langle F, N \rangle$ definida en S está dada por

$$\varphi^*(\langle F, N \rangle dA)(u, v) = \langle F \circ \varphi, N \circ \varphi \rangle \cdot \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| du \wedge dv \quad (8.6)$$

Luego de (8.6) y (8.5) resulta el siguiente lema.

Lema 8.10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, y $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo. Entonces el flujo del campo coincide con $\int_S \omega_F^2$ siendo ω_F^2 la dos formas asociada a F . Esto es,

$$\int_S \langle F, N \rangle = \int_S \omega_F^2.$$

8.4.2. Circulación de un campo

Nos podríamos preguntar de manera análoga, cómo se relaciona lo anterior integrando en curvas. Esto es, podemos definir un campo F , a lo largo de una curva, y también sabemos integrar a lo largo de una curva la forma asociada ω_F^1 . Veamos esto.

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva, y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ una parametrización. Escribimos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, con $t \in [a, b]$.

Sea $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\omega = adx + bdy + cdz,$$

y la restringimos a \mathcal{C} .

Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo asociado, i.e. $F = (a, b, c)$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{[a,b]} \alpha^* \omega \\ &= \int_a^b (a \circ \alpha(t) \cdot \alpha'_1(t) + b \circ \alpha(t) \cdot \alpha'_2(t) + c \circ \alpha(t) \cdot \alpha'_3(t)) dt \\ &= \int_a^b \langle F \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Luego la integral de la forma asociada al campo nos da información sobre la componente tangente del campo a lo largo de la curva. En particular, si el campo es normal a la curva, resulta $\int_{\mathcal{C}} \omega = 0$.

Esta observación permite definir lo siguiente.

Definición 8.11. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva orientada, y F un campo definido sobre la misma. Se define la *circulación del campo a lo largo de la curva* a

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds := \int_{\mathcal{C}} \langle F, T \rangle,$$

siendo $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo unitario tangente a \mathcal{C} con orientación de la curva.

Si α es una parametrización de \mathcal{C} con la orientación correcta, entonces $T(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ donde $t \in [a, b]$.

Análogo a lo anterior y utilizando (8.3) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds &= \int_{[a,b]} \alpha^* (\langle F, T \rangle ds) \\ &= \int_a^b \left\langle F \circ \alpha, \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle \|\alpha'(t)\| dt = \int_{\mathcal{C}} \omega_F^1. \end{aligned}$$

Luego podemos concluir en forma de lema lo siguiente.

Lema 8.12. Sea \mathcal{C} una curva, y F un campo a lo largo de la misma. Entonces la circulación del campo F a lo largo de \mathcal{C} coincide con $\int_{\mathcal{C}} \omega_F^1$, i.e.

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} \omega_F^1.$$

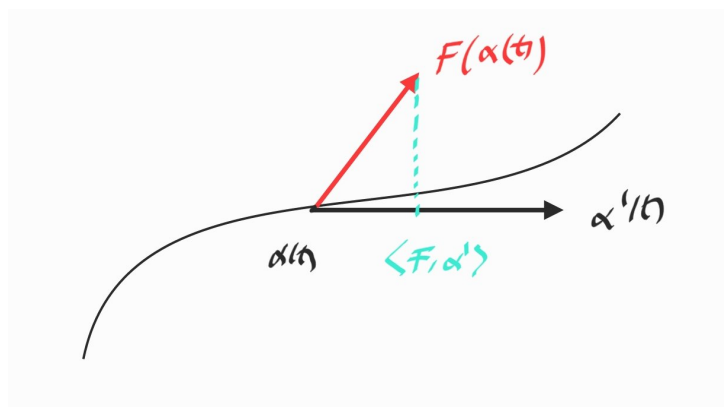


Figura 8.2: Circulación: componente tangencial del campo F

Este concepto ya lo habíamos visto en el capítulo de integrales de línea. Recordar Observación 6.3.

Teorema de Stokes

9.1. Introducción

Estamos en condiciones de finalmente enunciar el *Teorema de Stokes*. Este teorema es fácilmente identificable la expresión

Teorema 9.1 (Teorema de Stokes).

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Las hipótesis de este teorema vienen dadas por los siguientes items, con comentarios asociados.

- M es una **variedad compacta** de dimensión m , con borde¹, orientable.
- La orientación del borde es la inducida por la **normal saliente**. Más abajo describimos esto.
- $\omega \in \Omega^{m-1}$

¹El borde puede ser vacío, y se sobreentiende que en este caso que $\int_{\emptyset} = 0$

Antes de seguir realicemos una pausa para hablar de orientación en variedades con borde, y qué entendemos por la orientación del borde con la *normal saliente*.

9.2. Orientación del borde de una variedad

Sea M una variedad con borde $\partial M \neq \emptyset$. La noción de orientación vista anteriormente (ver Definición 7.13) se extiende sin problemas a ∂M . Esto resulta de la siguiente observación.

Observación 9.2. Sea $p \in \partial M$, y φ parametrización de M con $\varphi(x) = p$. (Observar que $x \in \partial \mathbb{H}^m$). La definición de tangente en el punto $p \in \partial M$ está definida por $T_p M = D\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$, (ver Sección 3.5.1), donde la derivada $D\varphi(x)$ está bien definida. Al ser M orientable, si tomamos dos parametrizaciones φ y ψ (como las definidas en Figura 3.9) que son compatibles, se tiene que $\det Dh(x) > 0$. Esto resulta de que al ser $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ un difeomorfismo, se tiene $\det Dh(x) \neq 0$, pero al ser aproximado por puntos interiores a M cerca del borde donde φ y ψ son compatibles, resulta el signo se constante, y positivo, en el borde.

Definición 9.3. Sea M una variedad orientable, de dimensión m , con borde ∂M no vacío. Sea $p \in \partial M$. Decimos que una base $\{v_2, \dots, v_m\} \subset T_p \partial M$ tiene la *orientación de la normal saliente* si $\{N, v_2, \dots, v_m\} \subset T_p M$, tiene la orientación de $T_p M$, siendo N un vector normal saliente (ver Definición 3.41).

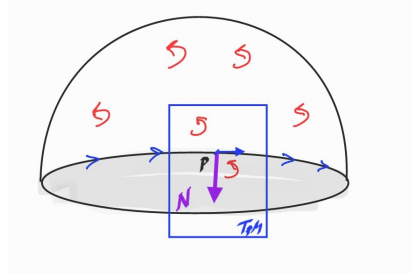


Figura 9.1: Orientación del borde por normal saliente.

Veamos un par de ejemplos

Ejemplo 9.4 (Orientación en $\overline{\mathbb{D}}$). Sea $\overline{\mathbb{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ con la orientación canónica. Observar que $S^1 = \partial\overline{\mathbb{D}}$, y sea $(1, 0) \in S^1$.

La orientación del borde S^1 en p es el dado por el vector e_2 , dado que $N = e_1 \in T_p\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}^2$ es un vector saliente, y por lo tanto $\{N, e_2\}$ tiene la orientación canónica de $T_{(1,0)}\overline{\mathbb{D}}$.

De manera análoga, el tangente $T_{(0,-1)}\partial\overline{\mathbb{D}}$ se orienta con el vector e_1 , dado que $N = -e_2$ es el vector saliente y $\{-e_2, e_1\}$ tiene la orientación canónica en $(0, -1) \in \overline{\mathbb{D}}$.

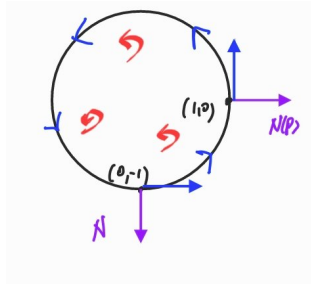


Figura 9.2: Orientación del borde del disco

Es decir, la orientación de la normal saliente del borde $S^1 = \partial\overline{\mathbb{D}}$ es la orientación anti-horaria de S^1 , i.e. la generada por la parametrización $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Ejemplo 9.5 (Orientación anillo). Consideremos el anillo $A = \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$, con borde $S_1 = S^1$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = \frac{1}{2}\}$.

Es fácil ver que la orientación saliente en puntos de S_1 apuntan hacia el exterior (de hecho un vector normal saliente en $p \in S_1$ es el mismo vector p), pero la normal saliente en un punto S^2 va hacia el interior (hacia el origen).

Por ejemplo, $T_{(1,0)}\partial A$ está orientado por el vector e_2 , y $T_{(1/2,0)}\partial A$ por $-e_2$.

Ejemplo 9.6 (Semiespacio $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$). Consideremos en \mathbb{H}^m la orientación inducida por la canónica de \mathbb{R}^m . Observar que $\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, por lo que es interesante saber si la orientación de la normal saliente en el borde coincide con la canónica en \mathbb{R}^{m-1} . Veamos esto.

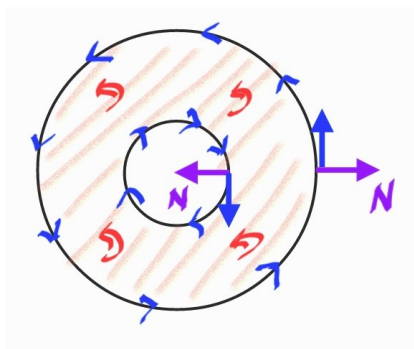


Figura 9.3: Orientación del borde del anillo.

Cuando $m = 2$, tenemos que $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Dado $(x, 0) \in \partial\mathbb{H}^2$ tenemos que el vector $-e_2$ es normal saliente, por lo que e_1 es la orientación en el borde y coincide con la orientación canónica en \mathbb{R} .

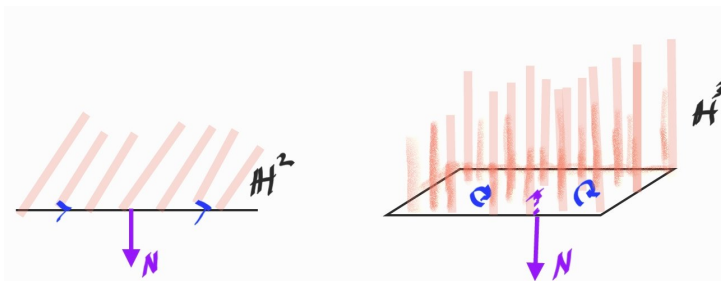


Figura 9.4: Orientación del borde de \mathbb{H}^m .

Sin embargo en \mathbb{H}^3 , podemos observar que $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ tiene como normal saliente en un punto genérico del borde $(x, y, 0)$ al vector $-e_3$ por lo que la orientación del borde es la generada por $\{(e_2, e_1)\}$ que es la contraria a la canónica.

De manera similar se puede ver que la orientación inducida en el borde de \mathbb{H}^m coincide con la canónica en \mathbb{R}^{m-1} si m es par, y es la contraria si m es impar.

◇ **9.7.** Considere la bola cerrada unitaria $\bar{B} = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^3$ con la orientación inducida por la canónica de \mathbb{R}^3 . ¿Cuál es la orientación por normal saliente de

$$S^2 = \partial \bar{B}?$$

9.3. Demostración Teorema de Stokes

Como veremos, la prueba del Teorema de Stokes es sencilla y se basa en el siguiente lema que es un corolario inmediato del Teorema Fundamental del Cálculo.

Lema 9.8. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua, tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\int_a^b f'(t) dt = 0$.*

dibujo

Demostración del Teorema de Stokes. Paso 1: Comencemos preparando el terreno para la prueba (como es usual en matemática). Observar que las funciones $\int_M \cdot$ y $\int_{\partial M} \cdot$ son funciones lineales, y por lo tanto utilizando el Teorema 10.7 (partición de la unidad) podemos probar el resultado para el caso en que el $\text{sop}(\omega) \subset \varphi(U)$ un abierto parametrizado, siendo $\varphi: U \subset \mathbb{H}^m \rightarrow M$ una parametrización (compatible con la orientación). (Esto resulta de que podemos escribir $\omega = \sum_{i=1}^{\ell} \rho_i \omega$, y $d\omega = \sum_{i=1}^{\ell} \rho_i d\omega$ donde ahora el soporte de $\rho_i \omega$ está en un abierto parametrizable, para luego utilizar linealidad a ambos lados de la igualdad a probar.)

Sea $K \subset U \subset \mathbb{H}^m$ compacto tal que $\varphi(K) = \text{sop}(\omega)$.

Sea $\eta := \varphi^*(\omega) \in \Omega^{m-1}(U)$, y escribimos

$$\eta := \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_m, \quad (9.1)$$

donde la notación \hat{dx}_i indica que ese diferencial no está, y donde las funciones $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ son C^∞ , tales que $\text{sop}(f_i) \subset K$. (El $(-1)^{i-1}$ es estético, como veremos.)

Dado que los soportes de las funciones f_i están incluidos en K , podemos extender el dominio a todo \mathbb{R}^m asumiendo que toma el valor cero fuera de U .

Luego tenemos

$$\varphi^*(d\omega) = d\eta = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m. \quad (9.2)$$

Paso 2: Supongamos que $K \cap \partial \mathbb{H}^m = \emptyset$. Dado que la forma ω es idénticamente nula en ∂M –y por lo tanto $\int_{\partial M} \omega = 0$ – basta probar $\int_M d\omega = 0$.

Sea $Q = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ un paralelepípedo que contenga a K ,

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_U d\eta & (9.3) \\ &= \int_Q \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \dots dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m \int_Q \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{(y_j) \in \prod_{j \neq i} [a_j, b_j]} dx_1 \dots \hat{d}x_i \dots dx_{m-1} \underbrace{\left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(y_1, \dots, x_i, \dots, y_m) dx_i \right)}_{(*)}. \end{aligned}$$

Pero observar que la función $f_i(y_1, \dots, a_i, \dots, y_m) = f_i(y_1, \dots, b_i, \dots, y_m) = 0$, para cualquier $(y_j) \in \prod_{j \neq i} [a_j, b_j]$ (por estar fuera de K , ver Figura), y por lo tanto, utilizando el Lema 9.8 resulta $\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{y}, x_m) dx_m = 0$, y concluimos $\int_M d\omega = 0$.

Paso 3: Supongamos para finalizar que $K \cap \partial \mathbb{H}^m \neq \emptyset$. Al igual que antes sea Q el paralelepípedo $\prod_{i=1}^{m-1} [a_i, b_i] \times [0, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ un paralelepípedo que contenga a K . (Observar que en este caso $a_m = 0$.)

dibujo

De (9.3) obtenemos

$$\int_M d\omega = \int_{\vec{y} \in \prod_{i=1}^{m-1} [a_i, b_i]} (-f_m(\vec{y}, 0)) dx_1 \dots dx_{m-1}. \quad (9.4)$$

Esto resulta de que $(*)$ en (9.3) vale cero para todo $i \neq m$ dado que para este caso los puntos a evaluar están fuera de K . Sin embargo en el caso $i = m$ resulta que el extremo a evaluar $(\vec{y}, 0) \in Q$ puede estar en K (no así el extremo (\vec{y}, b_m) .) Calculemos ahora $\int_{\partial M} \omega$.

De (9.1) tenemos $\int_{\partial M} \omega = \int_{U \cap \partial \mathbb{H}^m} \eta$. Para calcular esta integral, tomemos una parametrización del borde conveniente.

Sea $\psi: U \cap \partial\mathbb{H}^m \rightarrow \partial M$, dada por $\psi := \varphi|_{U \cap \partial\mathbb{H}^m}$.

Luego por ser ψ la restricción de φ , tenemos que

$$\psi^* \omega(\vec{y}, 0)(v_1, \dots, v_{m-1}) = \eta(\vec{y}, 0)(v_1, \dots, v_{m-1}),$$

para todo vector tangente $v_1, \dots, v_{m-1} \in T_{(\vec{y}, 0)}\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, y por (9.1) resulta

$$\psi^* \omega = (-1)^m f_m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}.$$

Antes de integrar debemos saber si ψ es compatible o no con la orientación de ∂M , que fue orientada por la normal saliente. Para eso basta saber si la base siguiente tiene o no la orientación de inducida por φ .

$$\left\{ N(\vec{y}, 0), \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\vec{y}, 0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{m-1}}(\vec{y}, 0) \right\} = \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(\vec{y}, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{y}, 0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m-1}}(\vec{y}, 0) \right\}$$

Luego tenemos que la orientación inducida por ψ es $(-1)^m$ de la inducida por φ .

Entonces concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= (-1)^m \int_{U \cap \partial\mathbb{H}^m} (-1)^{m-1} f_m dx_1 \dots dx_{m-1} \\ &= (-1) \int_{U \cap \partial\mathbb{H}^m} f_m dx_1 \dots dx_{m-1}, \end{aligned}$$

lo cual coincide con 9.4, finalizando la prueba. \square

9.4. Corolarios rápidos y ejemplos

Antes de dar la prueba del Teorema de Stokes, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 9.9. Sea $M = \mathbb{D}$ orientado con la orientación canónica, y su borde $\partial M = S^1$ orientado con la normal saliente. Sea $\omega = -ydx + xdy \in \Omega^1(\overline{\mathbb{D}})$. Observar que $d\omega = 2dx \wedge dy = 2dA$, sendo dA la forma de área. Luego utilizando el Teorema de Stokes tenemos

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\mathbb{D}} d\omega = 2 \int_{\mathbb{D}} dA = 2\pi.$$

Observar que la forma ω es exactamente la forma de longitud ds en el círculo unidad, y por tanto el resultado ya era conocido para nosotros.

Ejemplo 9.10. Sea $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ cerrada

Corolario 9.11. Supongamos que M es una variedad compacta, sin borde, y η es una forma exacta en M . Entonces $\int_M \eta = 0$.

En particular la forma de volumen dV , en una variedad compacta sin borde, no es una forma exacta.

Corolario 9.12. Sea M una variedad compacta, $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ una forma cerrada. Entonces $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Comentario 9.13. La compacidad es importante en las hipótesis, dado que sino podemos “falsear” jugando con agregar el borde o no en una variedad con borde. En este sentido uno puede extender el teorema de Stokes a lo que se denominan *dominios suaves*: un abierto relativo D de la variedad M es un dominio suave si su frontera es una variedad diferenciable de codimensión 1, y la frontera de D coincide con frontera de su clausura. (Ver Guillemin-Heine [?F] para más referencias.)

Comentario 9.14. El Teorema de Stokes puede ser fácilmente extendido a “variedades con aristas”. Para evitar dar una definición formal veamos ejemplos, donde es fácil convencerse que Stokes si valiendo.

Ejemplo 9.15. Consideremos la forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\omega(x, y, z) = xydx \wedge dy + y^2dy \wedge dz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Consideremos el paraboloido truncado $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 4\}$. Es decir S es la intersección del paraboloido $z = x^2 + y^2$ y el semiespacio $z \leq 4$. La idea es calcular $\int_S \omega$. Pero antes debemos especificar la orientación en S .

Una forma de orientar S es definir un campo normal a S , y definiendo la orientación del tangente como aquella que la regla de la mano derecha da el campo normal. En este sentido definimos el campo normal a S como el campo que apunta “hacia afuera”. Por ejemplo en el origen, el vector normal es $-e_3$.

Es fácil ver que esta orientación de S es la generada como borde (con orientación de normal saliente) por la variedad V de dimensión 3 (con aristas) que es el volumen encerrado por S .

Observar que V es la clausura de una variedad diferenciable de dimensión 3. El borde de V , ∂V , es la unión disjunta de S y $T = \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (la “tapa”).

Una vez definida la orientación, calculemos $\int_S \omega$. Una posibilidad es parametrizar S (con la orientación adecuada) para luego hacer el pullback de la forma e integrar. La dejamos de ejercicio. Otra posibilidad, análoga a la anterior, es calcular la integral via Lema 8.10. Pero tomemos el camino de utilizar el Teorema de Stokes.

Observar que $d\omega = 0$, por lo tanto ω es cerrada. Luego por el Teorema de Stokes tenemos:

$$0 = \int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega = \int_S \omega + \int_T \omega,$$

donde la orientación de S y T es la dada por la normal saliente, como borde de V .

Luego tenemos que $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

Observar que el campo asociado a ω es $F(x, y, z) = (y^2, 0, xy)$. Y el campo $N : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ normal a T es el $N(x, y, z) = e_3$.

Luego, utilizando el Lema 8.10 resulta

$$\int_T \omega = \int_T \langle F, N \rangle = \int_{B(0,2) \subset \mathbb{R}^2} xy \, dx \, dy = 0,$$

(el cual da 0 por simetría). Luego concluimos que $\int_S \omega = 0$.

9.5. Teoremas Clásicos

9.5.1. Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

La igualdad anterior se puede reescribir en la versión de Stokes como

$$\int_{[a,b]} df = \int_b^a f - \int_a^b f = f(b) - f(a),$$

donde $[a, b]$ es una variedad con borde con orientación canónica. Observar que la normal saliente en b , tiene dirección positiva, y en a tiene la dirección opuesta a la positiva. En este sentido el punto b como variedad de dimensión 0 tiene orientación positiva y la variedad 0-dimensional tiene la orientación negativa.

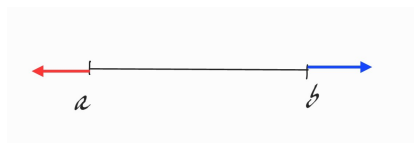


Figura 9.5: Teorema Fundamental del Cálculo orientación $[a, b]$.

En realidad no es necesario formalizar la noción de integrales sobre 0 formas en variedades de dimensión 0 para tener como aplicación del Teorema de Stokes el TFC, dado que en realidad el Teorema de Stokes se basa en TFC.

9.5.2. Teorema de Green

Teorema 9.16. Sea C una curva diferenciable a trozos simple, cerrada, orientada antihorario, y D la región interior delimitada por C . Sea $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de vectores. Entonces

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy. \quad (9.5)$$

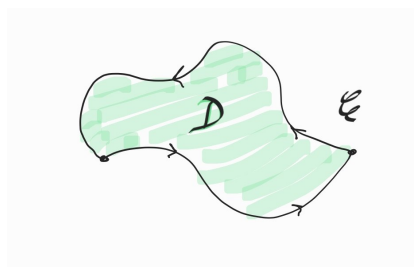


Figura 9.6: Teorema de Green.

Demostración. Sea $M = \overline{D}$ con la orientación canónica inducida por \mathbb{R}^2 , donde $\partial M = \mathcal{C}$, con la orientación de la normal saliente.

Sea $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.

Luego el Teorema de Green sigue del teorema de Stokes dado que $\int_M d\omega = \int_{\mathcal{C}} \omega$ es la igualdad dada en (9.5). \square

9.5.3. Teorema de Stokes clásico

Teorema 9.17. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta con borde, orientable. Sea $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, entonces

$$\int_S \text{rot}(F) \cdot dA = \int_{\partial S} F \cdot ds \quad (9.6)$$

En otras palabras, lo que dice el Teorema de Stokes Clásico es que el flujo del rotor en la superficie S coincide con la circulación de F a lo largo del borde, i.e. si $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo unitario normal inducido por la orientación en S .

$$\int_S \langle \text{rot}(F), N \rangle = \int_{\partial S} F \cdot ds$$

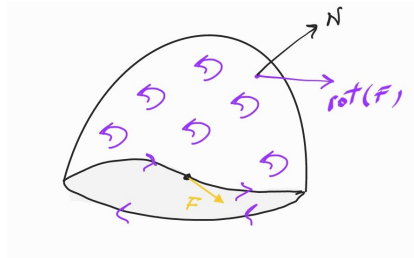


Figura 9.7: Teorema de Stokes Clásico.

Comentario 9.18. El $\text{rot}(F)(p)$, con $p \in S$, da una idea de cuánto está circulando (infinitesimalmente) alrededor del punto p , el campo F (una medida del “spin” de F sobre la superficie). (Ver Ejercicio 10-b) del Práctico 7). Más precisamente, si $N(p)$ es un vector unitario con origen en p , $\langle \text{rot}(F)(p), N(p) \rangle$ es la circulación

infinitesimal, por unidad de área, en un disco infinitesimal centrado en p y ortogonal a $N(p)$. (Ver Sección 9.6.)

En este sentido la suma infinitesimal a lo largo de la superficie se cancela y sólo sobrevive la circulación en el borde de la superficie. Eso se puede ver intuitivamente haciendo triangulación de la superficie, o un cuadrículado y observar que las circulaciones locales se van cancelando hasta sólo sobrevivir lo que está en el borde.

En este sentido, el Teorema de Green se puede ver como la versión planar del Teorema 9.17, donde la circulación local es exactamente

$$\langle \text{rot}(P, Q, 0), e_3 \rangle = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

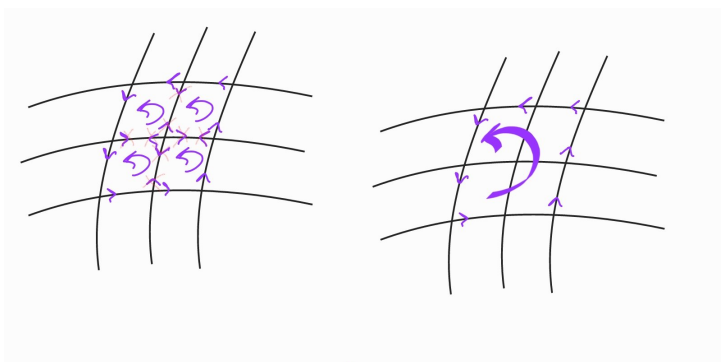


Figura 9.8: Circulación infinitesimal.

Demostración del Teorema 9.17. Del Lema 8.10, de la Observación 5.29-2, del Teorema de Stokes, y del Lema 8.12, concluimos

$$\int_S \langle \text{rot}(F), N \rangle = \int_S \omega_{\text{rot}(F)}^2 = \int_S d\omega_F^1 = \int_{\partial S} \omega_F^1 = \int_{\partial S} F \cdot ds.$$

□

9.5.4. Teorema de Gauss

Teorema 9.19. Sea $M^3 \subset \mathbb{R}^3$ una variedad compacta orientable de dimensión 3 con borde. Sea $S = \partial M$ su borde con la orientación dada por la normal saliente. Sea $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Luego se tiene

$$\int_S F \cdot dA = \int_M \operatorname{div}(F)$$

En otras palabras, el Teorema de Gauss dice que el flujo del campo F a lo largo de la superficie S , es la integral de la divergencia en el interior de la superficie. Esto es, si, $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el campo normal, entonces

$$\int_S \langle F, N \rangle = \int \int \int_{M \subset \mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz$$

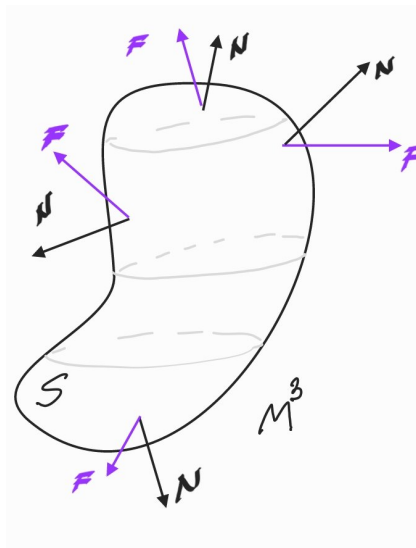


Figura 9.9: Teorema de Gauss.

Demostración del Teorema 9.19. Del Lema 8.10, Teorema de Stokes, y de la Observación 5.29-3 se tiene

$$\int_S \langle F, N \rangle = \int_S \omega_F^2 = \int_M d\omega_F^2 = \int_M \omega_{\operatorname{div}(F)}^3 = \int_M \operatorname{div}(F).$$

□

9.6. Interpretación geométrica de rotor y divergencia

El teorema de Stokes nos ayudará a formalizar el concepto de rotor y divergencia de un campo.

9.6.1. Rotor de un campo

indexrotor

Consideremos un campo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Tomemos un punto $p \in U$, y dado un vector de unitario \vec{n} , y consideramos el disco $D_p(\rho)$, centrado en p y de radio ρ , incluido en el plano ortogonal a \vec{n} (ver figura). Sea $\mathcal{C}_p(\rho)$ su frontera. Orientamos el disco con la inducida por la normal \vec{n} y $\mathcal{C}_p(\rho)$ con la orientación inducida como borde del disco.

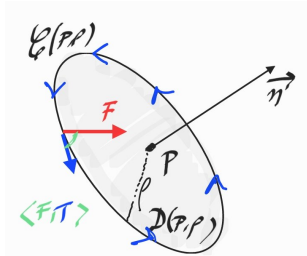


Figura 9.10: Interpretación geométrica del rotacional de un campo.

Luego el Teorema de Stokes Clásico 9.17 dice que

$$\int_{D_p(\rho)} \langle \text{rot}(X), \vec{n} \rangle = \int_{\mathcal{C}_p(\rho)} X \cdot ds.$$

Observar que normalizando por el área del disco $A(D_p(\rho))$, que denotamos $A(D_p(\rho))$, y tomando límite en $\rho \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\langle \text{rot}(X)(p), \vec{n} \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(D_p(\rho))} \int_{D_p(\rho)} \langle \text{rot}(X), \vec{n} \rangle$$

donde la igualdad sigue del teorema de valor medio para integrales.

Luego concluimos

$$\langle \text{rot}(X)(p), \vec{n} \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(D_p(\rho))} \int_{C_p(\rho)} X \cdot ds. \quad (9.7)$$

9.6.2. Divergencia de un campo

De manera análoga lo anterior, podemos dar una expresión de la divergencia de un campo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido en abierto $U \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $B(p, \rho)$ la bola centrada en $p \in U$, y de radio ρ . Sea $S(p, \rho) = \partial B(p, \rho)$ la esfera borde de la superficie. Recordar que si orientamos U con orientación canónica de \mathbb{R}^3 , entonces la bola hereda su orientación y la esfera $S(p, \rho)$ tiene el campo normal (definido por orientación) apuntando hacia el exterior. Luego por el Teorema de Gauss [9.19](#)

$$\int_{S(p, \rho)} F \cdot dA = \int_{B(p, \rho)} \text{div}(X)$$

Luego procediendo como en el caso anterior, si normalizamos por el volumen de la bola, y tomamos límite, obtenemos

$$\text{div}(X)(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B(p, \rho))} \int_{S(p, \rho)} F \cdot dA \quad (9.8)$$

9.7. Aplicaciones: Ecuaciones de Maxwell

La formalización del Teorema de Stokes, en su versión dada en Teorema [9.1](#), se debe a Élie Cartán en 1945. Esta versión generaliza (y unifica) las versiones clásicas del teorema, como las vistas en los teoremas [9.16](#), [9.17](#) y [9.19](#), un siglo después.

Las ecuaciones Maxwell son un conjunto de ecuaciones (en derivadas parciales) que forman parte de los fundamentos del electromagnetismo clásico, y sirven como modelo matemático de muchos fenómenos físicos.

A continuación enunciaremos los fenómenos físicos que decantan en la formulación de Maxwell via formas y Teorema de Stokes.

9.7.1. Ley de Gauss para un campo eléctrico

Consideremos una región en el espacio delimitada por una superficie S , con una densidad de carga $\rho(x, y, z)$. La *ley de Gauss* dice que el flujo del campo eléctrico es proporcional a la carga encerrada. Es decir, que si E es el campo eléctrico entonces

$$\int_S E \cdot dA = \frac{q}{\epsilon_0},$$

siendo q la carga encerrada por la superficie S , y ϵ_0 una constante.

La cantidad q se puede expresar como la integral de la densidad en M , a saber, la región delimitada por S . Luego tenemos que

$$q = \int_M \rho dV.$$

Por lo tanto, del Teorema de Gauss 9.19 resulta

$$\int_M \left(\operatorname{div} E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0. \quad (9.9)$$

Como la integral dada en 9.9 toma el valor cero para cualquier región, es fácil convencerse que resulta

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (9.10)$$

Esta es la primera *ecuación de Maxwell*.

9.7.2. Ley de Gauss para campos magnéticos

La ley de Gauss en este caso dice que el flujo del campo magnético en cualquier superficie cerrada es 0. Una justificación de esta ley es que físicamente no existe el *monopolo magnético*, como sí ocurre en el campo eléctrico. Por lo tanto, si B es el campo magnético entonces

$$\int_S B \cdot dA = 0.$$

Al igual que en ejemplo anterior podemos concluir la *segunda ecuación de Maxwell*

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (9.11)$$

9.7.3. Ley de Faraday

La *Ley de Faraday* es una ley básica de electromagnetismo que predice cómo el campo magnético interactúa con un circuito eléctrico produciendo el fenómeno denominado *inducción electromagnética*.

Consideremos una curva simple cerrada en el espacio, \mathcal{C}_t que puede moverse o deformarse con el tiempo.

Sea $B(t)$ un campo magnético, el cual también puede variar con el tiempo.

Sea $\Phi_B(t)$ el flujo del campo magnético a lo largo de cualquier superficie S_t que tenga a \mathcal{C}_t como borde (con la orientación correcta), i.e.

$$\Phi_B(t) = \int_{S_t} B(t) \cdot dA.$$

(Lo anterior es independiente de la elección de la superficie S_t por la segunda ecuación de Maxwell.)

La ley de Faraday dice, en alguna de su varias versiones equivalentes, que la variación del flujo es igual a la diferencia de potencial inducida en la curva, i.e.,

$$V_{\text{ind}} = \frac{d}{dt} \Phi(t).$$

(Gráficamente, si cortamos la curva y ponemos un voltímetro en cada extremo, diferencia de potencial inducida entre los extremos.)

En el otro sentido, la diferencia de potencial generada en la curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, es la circulación del campo eléctrico (inducido), i.e.

$$V_{\text{ind}} = - \int_{\mathcal{C}} E \cdot ds.$$

Luego de la *ley de Faraday* obtenemos que

$$- \int_{\mathcal{C}} E \cdot ds = \frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{d}{dt} \int_{S_t} B(t) \cdot dA = \int_{S_0} \frac{d}{dt} B(t) dA.$$

(Evitamos justificar la última integral, pero una forma de convencerse, es que S_t es S_0 más (o menos) una región infinitesimal de área.)

Luego por el Teorema de Stokes clásico 9.17 podemos concluir (procediendo de manera análoga a los casos anteriores) que la componente normal del vector $\text{rot}(E) + \frac{dB}{dt}$ es cero, y por ser independiente de la elección de la curva inicial, se concluye la *tercera ecuación de Maxwell*

$$\text{rot}(E) + \frac{dB}{dt} = 0. \quad (9.12)$$

9.7.4. Ley de Ampere

La *ley de Ampere*, en cierto sentido análogo a la ley de Gauss para campos eléctricos, pero para campos magnéticos. Esta ley dice que la circulación del campo magnético a lo largo de una curva simple y cerrada es proporcional a la corriente (o carga en movimiento) que atraviesa una superficie con borde la curva (con la orientación correcta).

Esto es

$$\int_C B \cdot ds = \mu_0 I = \int_S j \cdot dA,$$

siendo j el campo infinitesimal asociado a la corriente (observar que además de una magnitud tiene una dirección y sentido, y por eso es un campo). Luego utilizando Teorema 9.17, podemos concluir que la *Ley de Ampere* dice que

$$\text{rot}(B) = \mu_0 j. \quad (9.13)$$

Maxwell hace una corrección de esta ley, evidenciado además por la falta de simetría entre el campo eléctrico E y fórmula (9.12), y el campo magnético B y fórmula 9.13.

Luego Maxwell propone que al igual que la variación del campo magnético produce un campo eléctrico, la variación del campo eléctrico también debe producir un campo magnético. En este sentido la *cuarta ecuación de Maxwell* es

$$\text{rot}(B) = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right).$$

Apéndice

10.1. Descomposición en valores singulares

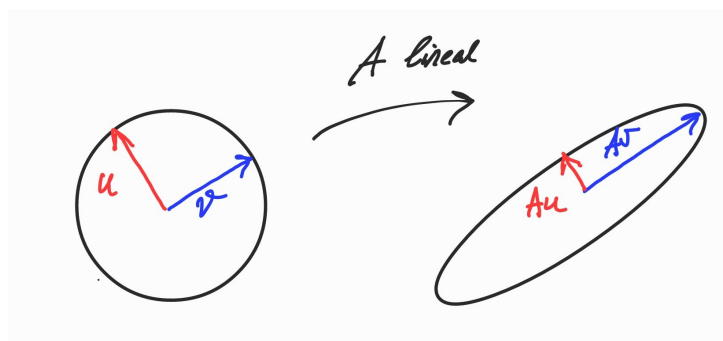


Figura 10.1: Descomposición en valores singulares.

Teorema 10.1. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$, existen $U \in \mathcal{O}(n)$, $V \in \mathcal{O}(m)$ tales que

$$A = V\Sigma U^T, \quad \text{con} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$$

siendo los $\sigma_i \geq 0$, los valores singulares de A . A esta descomposición se le llama descomposición en valores singulares.

Observación 10.2. Los σ_i son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^T A$. En efecto,

$$A^T A = U\Sigma^T \Sigma U^T,$$

donde $\Sigma^T \Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$.

Esta observación sugiere una idea de la prueba de la existencia de tal descomposición.

Al ser $A^T A$ simétrica, por el teorema espectral se tiene que $A^T A$ es diagonalizable. Además si v es vector propio asociado a λ se tiene

$$\lambda \|v\|^2 = \langle A^T A v, v \rangle = \|A v\|^2,$$

de donde resulta que $\lambda \geq 0$.

Luego podemos concluir que existe $U \in \mathcal{O}(n)$ tal que $U^T A^T A U = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ para ciertos $\sigma_i \geq 0$.

Por lo tanto si $U = (u_1, \dots, u_n)$, tenemos $A^T A u_i = \sigma_i^2 u_i$. Por lo tanto para los $\sigma_i \neq 0$ definimos $v_i := A u_i / \sigma_i$. Observar que el conjunto $\{v_i\}$ es ortonormal. En efecto,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \frac{A u_i}{\sigma_i}, \frac{A u_j}{\sigma_j} \right\rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A^T A u_i, u_j \rangle = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i \sigma_j} \langle u_i, u_j \rangle = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \delta_{ij}.$$

Luego, completando $\{v_i\}$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^m resulta $A u_i = \sigma_i v_i$, para concluir que $A U = V \Sigma$.

Observación 10.3. Si A es simétrica, se tiene $\sigma_i = |\lambda_i|$, con $\lambda_i \in Sp(A)$.

Corolario 10.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces

$$\|A\|_{op} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A),$$

donde $\lambda_{\max}(\cdot)$ y $\sigma_{\max}(\cdot)$ son el valor propio y el valor singular más grandes respectivamente.

10.2. Particiones de la unidad:

Lema 10.5. Sea $B(r, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ entonces $\exists \rho : B(3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\rho \in C^\infty$ y tal que:

1. $\rho(x) = 1$ para $x \in B(1, 0)$
2. $0 < \rho(x) \leq 1$ para $x \in B(2, 0) \setminus B(1, 0)$
3. $\rho(x) = 0$ para $x \in B(3, 0) \setminus B(2, 0)$

A ρ la denominamos como "función chichón".

Como queremos que se pegue bien con funciones constantes necesitamos una función que tenga todas sus derivadas 0, por ejemplo nos sirve la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ que es C^∞ y todas sus derivadas en 0 son 0 (osea no es analítica).

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in (-2, -1) \\ e^{-\frac{1}{(t+1)(t+2)}} & \text{si } t \notin (-2, -1) \end{cases}$

Observar que la función α es C^∞ .

Sea $\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(s) ds$, observar que γ también es C^∞ y sea $A = \int_{-2}^{-1} \alpha(s) ds$

Luego tomamos $\rho : B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x) = \frac{\gamma(-\|x\|)}{A}$.

Es sencillo verificar que ρ cumple todas las propiedades que queríamos. \square

Lema 10.6. Sea M una variedad diferenciable, con $\dim(M) = m$, sea $p \in M$ y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ parametrización con $\varphi(x) = p$. Entonces existe $f : B(3, 0) \rightarrow M$ parametrización tal que $f(B(3, 0)) \subset \varphi(U)$ y $f(0) = p$.

Demostración. Como $x \in U^\circ$ existe $r_x > 0$ tal que $B(r_x, x) \subset U$ luego utilizando una traslación y escalado (que es un difeomorfismo) $h(y) = \frac{3}{r_x}y - x$ que traslada la bola al origen y la escala para que tenga radio 3.

La parametrización buscada es entonces $\varphi \circ h^{-1}$. \square

Teorema 10.7 (Partición de la unidad). *M* variedad diferenciable compacta, $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ cubrimiento de *M* por abiertos parametrizables (existe $\varphi_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ parametrización tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$). Entonces existen $\rho_1, \dots, \rho_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

1. $0 \leq \rho_i(x) \leq 1$ para todo $x \in M$ e $i = 1, \dots, k$
2. $\sum_{i=1}^k \rho_i(x) = 1$ para todo $x \in M$
3. $\text{sop}(\rho_i) \subset \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\alpha_i}$ para algún α_i

Demostración. Dado $p \in M$.

Sea $\varphi_p: B(3,0) \rightarrow M$ parametrización con $\varphi_p(B(3,0)) \subset \mathcal{U}_\alpha$ para algún α .

Sea $W_p := \varphi_p(B(1,0)) \subset \mathcal{V}_p = \varphi_p(B(3,0)) \subset \mathcal{U}_\alpha$.

Luego $\{W_p\}$ cubre *M* por abiertos y como *M* es compacta $\exists W_1, \dots, W_k$ abiertos que cubren *M* (donde $W_i = \varphi_p(B(1,0))$ para algún p).

Obs: $W_i \subset \mathcal{V}_i$.

Definimos $\theta_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ con $(i = 1, \dots, k)$ dado por $\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin \mathcal{V}_i \\ \rho \circ \varphi_i^{-1} & \text{si } p \in \mathcal{V}_i \end{cases}$.

Donde ρ es la función dada por el **Lema 1**.

θ_i es el chichón en *M* con soporte contenido en \mathcal{V}_i .

¿Qué falta? Queremos que $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ lo cual no es cierto porque si $p \in W_i \cap W_j$ entonces $\theta_i(p) + \theta_j(p) = 2$

Sea

$$\rho_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^k \theta_j(p)}$$

donde el denominador se encarga de contar la cantidad de W_i 's a los que pertenece p .

ρ_i con $i = 1, \dots, k$ satisface todas las propiedades buscadas.

□

Bibliografía

Índice alfabético

- base dual, 85
- campo
 - circulación, 151
 - rotacional, 168
- campo de vectores, 100
- Cauchy uniforme, 18
- circulación, 151
- completitud, 34
- conjunto de nivel, 45
- contracción, 34
- Convergencia
 - puntual, 8
 - uniforme, 10
- curva, 67
- curva de nivel, 46
- Descomposición
 - en valores singulares, 174
- Difeomorfismo, 54
- distancia
 - métrica, 31
- distancia uniforme, 12
- ecuaciones de Maxwell, 169
- elemento de volumen, 133
- espacio métrico
 - completo, 34
- espacio dual, 85
 - base dual, 85
- espacio métrico, 31
- espacio tangente, 65
- espacio vectorial
 - normado, 32
- flujo de un campo, 150
- forma
 - de ángulo, 105
 - de volumen, 133
 - variedades, 134
- forma diferencial, 99
- Formas
 - multilineales, 84
- formas
 - bilineales, 86
- Función
 - abierta, 42
 - difeomorfismo, 54
 - implícita, 47
- función
 - suave, 63
- función chichón, 175

- grupo ortogonal
 - tangente, 68
 - definición, 57
- Integral
 - de línea, 116
 - formas en \mathbb{R}^m , 141
- métrica, 31
- Mapa
 - evaluación, 48
- mapa adjunto, 90
- Maxwell
 - ecuaciones, 169
- norma, 32
 - de operador, 33
 - de Frobenius, 33
- orientación
 - variedades, 130
 - espacios vectoriales, 129
- partición de la unidad, 176
- pull-back, 102
- punto fijo, 34
- sucesión de Cauchy, 34
- Teorema
 - de Stokes, 155
 - de Gauss, 167
 - de Green, 164
 - de Stokes Clásico, 165
 - función implícita, 50
 - Función inversa, 39
 - preimagen de valor regular, 56
 - Punto fijo, 35
- Valor regular, 56
- Variedad
 - borde, 73
 - espacio tangente, 65
- Variedad de Stiefel
 - tangente, 70
- Variedad diferenciable, 54
 - grupo ortogonal, 57
 - Stiefel, 57
- vector
 - entrante, 77
 - saliente, 77