PROBLEMA DE FEKETE

Seminario de PEDECIBA
Primer semestre de 2018

Reunión inicial
Jueves 11:30hs
Salón de Seminarios del piso 14 del CMAT

Responsables: Diego Armentano, Martín Reiris

Créditos: 4 créditos

Público objetivo: El curso está dirigido a estudiantes de posgrado, y avanzados de la Licenciatura en Matemática.

Conocimientos previos recomendados: Los siguientes cursos de la Licenciatura en Matemática: Análisis Real y Complejo, Geometría Diferencial, Probabilidad.

Método de aprobación del seminario: 2 exposiciones por estudiante

Referencias a seguir: En la primer parte se trabajará con el artículo [BG] dando una introducción al problema de Fekete, y motivandolo con otros problemas similares de optimización (sólo se trabajaran las primeras secciones de este artículo como motivación del seminario). Luego continuaremos con el artículo [BCC] donde se utiliza como herramienta –para atacar este problema– las funciones de Green para el Laplaciano en variedades. También estudiaremos el artículo [RSZ] donde se estima la energía de configuraciones mínimas. Si disponemos de tiempo, intentaremos estudiar algún artículo con un enfoque más probabilista-computacional al tema. Por el momento hemos elegido el artículo [BCMD].

Descripción: De forma general, el problema a estudiar es:

¿*Cómo distribuir n puntos en una esfera que minimicen un potencial dado*?

Usualmente '*Cómo*' significa 'encontrar un algoritmo óptimo (y su orden)' y '*qué minimicen*' usualmente significa 'cuyo potencial diste del mínimo en un error $\varepsilon(n)$ preestablecido'. Una problema posterior, o tal vez simultáneo, es describir el patrón geométrico de la distribución de los puntos como función de $\varepsilon(n)$ (cuánto más pequeño es ε, más preciso es el patrón). Ejemplos computacionales pueden verse en las figuras.

El problema general posee una gran variedad de aplicaciones, incluyendo, *posición satelital*, *mapeos terrestres, cristalografía, geometría computacional*, *teoría de la complejidad* y *interpolación*

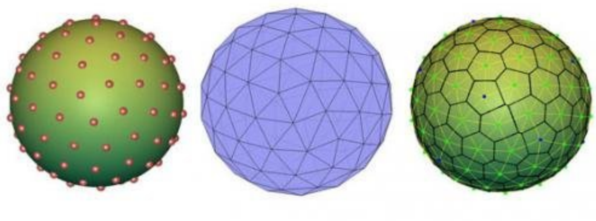

Figure 1: Distribución de puntos maximizando el volumen de su envolvente convexa.

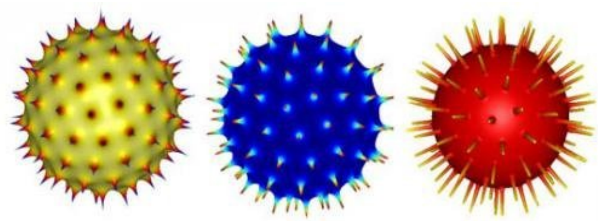

Figure 2: Distribución de puntos minimizantes de la energía de Riesz $V = \sum_{i \neq j} 1/|x_i - x_j|^s$ para $s = 0.1, 1, 4$.

de funciones. Requiere de una variedad de técnicas en *probabilidad*, *análisis armónico* o *análisis numérico*.

Proponemos prestarle especial atención al problema 7 de Smale, que corresponde al potencial logarítmico,

$$V = -\sum_{i \neq j} \ln |x_i - x_j|. \tag{0.0.1}$$

Este problema está motivado por los trabajos realizados por Shub-Smale sobre el estudio de la complejidad del teorema de Bézout.

[BG] Distributing many points on spheres: minimal energy and designs (J.S. Brauchart, P. J. Grabner)

[BCC] Discrete and continuous green energy on compact manifolds (C. Beltrán, N. Corral, J.G. Criado del Rey)

[RSZ] Minimal discrete energy on the sphere . (A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou)

[BCMT] Probabilistic interpretation and random walk on spheres algorithms for the Poisson-Boltzmann equation in molecular dynamics (M. Bossy, N. Champagnat, S. Maire, D. Talay)